General Info

יום ראשון 25 פברואר 2007
14:02

שירלי הלוי - גינסברג

shirli.h.g@gmail.com

חדר 409 , ראשון $13^{30}-14$
רביעי $09^{30}-10$

10% ש.ב תקף
25% בוחן אמצע מגן 11/13.4.07

בשביל לעבור את הקורס חייבים לעבור את המבחן

המטרה: לצדקות טיעונים תקפים.

• הפרדוקס של ראסל

כפר קטן בו:
• אף אחד לא מגדל זקן
• יש ספר שנקרא הספר.
• הספר כל בוקר מגלח את כל הגברים שלא מתגלחים בעצמם.
• אף אחד חוץ ממנו לא מגלח.

אז מי מגלח את הספר?

← הספר מגלח את עצמו X (ממשמע)

← הספר לא מגלח את עצמו X (ממשמע)

פרדוקס:

① הנחות קיימים.

② התלמידים קיימים.

③ אחת הטענות 1-3 לא נכונה.

← אם טענה 3 לא נכונה ⇐ כל 3 הטע' נכונות ⇓ סתירה

← אם טענה 3 נכונה ⇐ סתירה.

הפרדוקס של ברי:

$N = \{0, 1, 2, \ldots\}$ טבעיים.

נאמר שמשפט בעברית כן פחות מ־100 אותיות מגדיר מספר.
אם המספר מקיים את המשפט הוא היחיד שמקיים את המשפט.

$\underline{\ \ \ }_{40}\ \underline{\ \ \ }_{40}\ \ldots\ \underline{\ \ \ }_{40}$

⇓

40^{100} צירופים באורך של פחות מ־100 אותיות

כלומר יש ∞ טבעיים, 40^{100} צירופים,
כלומר לא ניתן להגדיר כל מספר ע"י משפט בין פחות מ- 100 אותיות.

כעת נראה את ההפך ונסתור:

נראה שכל מספר טבעי ניתן להגדרה ע"י משפט בעברית בן פחות מ- 100 אותיות.
נניח בשלילה שלא. יהיה n המספר הטבעי המינימלי שלא ניתן להגדרה ע"י משפט בעברית בן פחות מ-100 אותיות.
אבל זוהי בעצם הגדרה עבור n $\Leftarrow$ בסתירה לכך שאי אפשר להגדיר.

תורת הקבוצות: מונחי יסוד

קבוצה: אוסף אלמנטים שנקראים איברי הקבוצה.
בקבוצה: 1 אין חשיבות לסדר.
2 אין חזרות
קבוצות מסומנות/ בדרך באות גדולה.

איברי הקבוצה לא חייבים להיות מאותו סוג.
איבר בקבוצה יסומן בד"כ באות קטנה: a.

$$\underset{\text{שייך}}{a \in A}\ ,\quad \underset{\text{לא שייך}}{a \notin A}$$

איך מגדירים קבוצה?

קבוצה מוגדרת באופן יחיד ע"י האיברים שלה.
כלומר כדי להגדיר קבוצה יש לספק מספיק מידע ע"מ להחליט עבור כל איבר האם הוא שייך לקבוצה או לא.

אילו דרכים יש להגדיר קבוצה?
1 למנות פיזית את כל איברי הקבוצה.
חסרון- בעייתי כאשר הקבוצות גדולות/ אינסופיות.
2 $A=\{-1000, -998, \dots, 998, 1000\}$
3 ע"י הגדרת תכונה: כל המס' הטבעיים:
$A=\{X \mid$ x כנ"ל טבעי$\}$

יום ראשון 25 פברואר 2007
15:35

קבוצות עם סימונים מיוחדים:

$\mathbb{N}$ - מספרים טבעיים.

$\mathbb{N}+$ - הטבעיים בלי אפס.

$\mathbb{Z}$ - מספרים שלמים.

$\mathbb{R}$ - ממשיים.

$\mathbb{C}$ - קומפלקסים.

$\mathbb{Q}$ - רציונליים.

קבוצה ריקה - קבוצה שאינה מכילה איברים / = מס' איבריה הוא 0.

מסומנת: ϕ או $\{\}$

שוויון בין קבוצות

עבור שוויון קבוצות נסמן $A=B$

אם ל- A ול- B יש בדיוק את אותם איברים.

שיעור 2

יום שלישי 06 מרץ 2007
20:20

תת קבוצות

הגדרה: יהיו A, B קבוצות. נאמר ש- A מוכלת ב- B
או: A תת קבוצה של B
אם כל איבר של A הוא איבר של B.

בצורה מתמטית: $\forall x\in A,\ x\in B$

או: $x\in A \Rightarrow x\in B$

סימון: $A\subseteq B$.

דוגמא: $S=\{1,2,3\}$, $T=\{1,2\}$

$T\subseteq S$.

הרחבת הגדרת שוויון הקבוצות:

נאמר ש: $A=B$ אם מתקיים: (א) $A\subseteq B$.
(ב) $B\subseteq A$.

הכלה ממש

הגדרה: נאמר ש- A מוכלת ממש ב- B אם:

(א) $\forall x\in A,\ x\in B$

(ב) $\exists x\in B\ ,\ x\in A$

ונסמן: $A\subsetneq B$

משפט

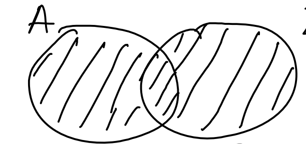
לכל קבוצה A מתקיים: $\emptyset\subseteq A$

הוכחה:

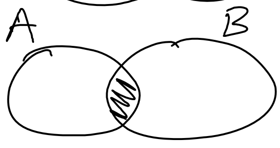
נניח בשלילה שיש איבר $x\in\emptyset$ אבל $x\notin A$
זה לא ייתכן כי ב- $\emptyset$ אין איברים
ולכן המשפט נכון: $\emptyset\subseteq A$

פעולות על קבוצות

"או" מתמטי הינו או כולל, כלומר הוא איחוד של 2 קבוצות



$\underbrace{A\cup B}_{\text{איחוד}}=\{x \mid x\in A \text{ או } x\in B\}$



$\underbrace{A\cap B}_{\text{חיתוך}}=\{x \mid x\in A \text{ וגם } x\in B\}$

עובדה: $|A\cup B| = |A|+|B|-|A\cap B|$

תכונות האיחוד והחיתוך:

א) $A\cup B = B\cup A$ -חילוף- ה) $A\cap B = B\cap A$

ב) $(A\cup B)\cup C = A\cup(B\cup C)$ -קיבוץ- ו) $(A\cap B)\cap C = A\cap(B\cap C)$

ג) $A\cup(B\cap C) = (A\cup B)\cap(A\cup C)$ -פילוג- ז) $A\cap(B\cup C) = (A\cap B)\cup(A\cap C)$

ד) $A\cup\phi = A$ $\longleftrightarrow$ ח) $A\cap\phi = \phi$

$A\cap A = A$

$A\cup A = A$

הוכחת קיבוץ: $(A\cup B)\cup C = A\cup(B\cup C)$

צ"ל: לכל איבר $x\in A\cup(B\cup C) \Longleftrightarrow x\in(A\cup B)\cup C$

הוכחה: נראה שאם $x\in A\cup(B\cup C)$ אזי $x\in(A\cup B)\cup C$

(בעצם להראות ש: $A\cup(B\cup C)\subseteq(A\cup B)\cup C$)

יהי $x\in A\cup(B\cup C)$.

נבחין בין 2 מקרים:

1) $x\in A$

אם $x\in A$ אזי $x\in A\cup B$

באופן דומה אם $x\in(A\cup B)$ אזי: $x\in(A\cup B)\cup C$

2) $A\in(B\cup C)$

נבחין בין 2 מקרים:

3) $x\in B$

אם $x\in B$ אזי $x\in A\cup B$

ומאחר ו- $(A\cup B)\subseteq(A\cup B)\cup C$

נקבל ש: $x\in(A\cup B)\cup C$

$x\in C$

אם $x\in C$ אזי, $x\in(A\cup B)\cup C$

הפרש בין קבוצות

ההפרש בין הקבוצות A ו B הוא הקבוצה $A-B$ (או $A\setminus B$)

ומוגדרת ע"י: $A\setminus B = \{x \mid x\in A \text{ וגם } x\notin B\}$

יום שלישי 06 מרץ 2007
15:12

מסקנות מהפרש קבוצות

(1) מקרה: A מוכלת ב-B

$$A \subseteq B \iff A - B = \phi$$

(2) מקרה קבוצות זרות

$$A - B = A \iff A \cap B = \phi$$

שיעור 3

יום רביעי 07 מרץ 2007
10:12

שיעור קודם

- ההבדל בין אמ"מ ל- אם ___ אז ___
- הגדרנו גודל של קבוצה $|A|$
- הגדרנו תת-קבוצות ויחס של הכלה.
- הבחנו בין שייכות להכלה.
- הקדנו תכונות של הכלה
- ראינו איך מייצגים קבוצה בדיאגרמת וון
- הוכחנו טרנזיטיביות ($A \subseteq B$, $B \subseteq C$ $\Leftarrow$ $A \subseteq C$)
- הגדרנו הכלה ממש.
- פעולות על קבוצות: איחוד, חיתוך וראינו תכונות של איחוד וחיתוך.
- הגדרנו הפרש בין קבוצות (והפרדנו ל- 4 מקרים)

תרגיל

הוכח/הפרך:

לכל 3 קב' A,B,C $\quad$ $A-(B-C)=(A-B)-C$

- אם מוכיחים: יש להוכיח שזה מתקיים לכל 3 קבוצות.
- אם סותרים: לתת דוגמא נגדית מפורשת ולהוכיח שהיא דוגמא נגדית.

פתרון:

נראה שהטענה לא נכונה ע"י דוגמא נגדית:

נגדיר: $A=\{1,2,3\}$

$B=C=\{1\}$

אגף ימין:

$$(A-B)-C=(\{1,2,3\}-\{1\})-\{1\}=$$

$$=\{2,3\}-\{1\}=\{2,3\}$$

אגף שמאל:

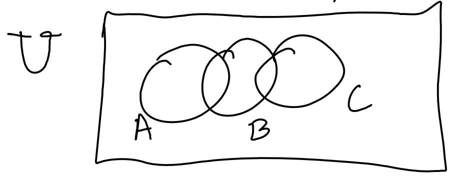
$$\{1,2,3\}-(\{1\}-\{1\})=\{1,2,3\}$$

ש

כל דוגמא נגדית $\Leftarrow$ הטענה לא מתקיימת.

משלים של קבוצה

מניחים שכל האיברים הם מתוך עולם מסויים U



המשלים של קבוצה: A ביחס לעולם U מסומן A^c ומוגדר ע"י:

$$A^c=\{x \mid x\in U\ ,\ x\notin A\}$$

תכונות פשוטות של המשלים:

לכל קבוצה A ולכל איבר $x\in U$ מתקיים:

1. $x\in A^c \iff x\notin A$
2. $x\notin A^c \iff x\in A$
3. $A\cap A^c=\phi$
4. $A\cup A^c=U$
5. $(A^c)^c=A$

הוכחת 5:

נראה ש: $A^{c^c}=A$ כלומר לכל איבר $x\in U$

$$x\in A \iff x\in(A^c)^c$$

$$x\in(A^c)^c \iff x\notin A^c \quad \text{(תכונה 1)}$$

$$\iff x\in A \quad \text{(תכונה 2)}$$

מש"ל.

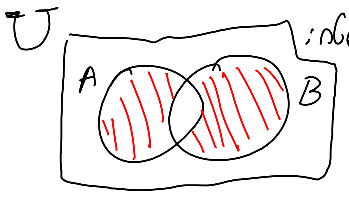
מה הקשר בין הפרש לשלמים:

מינוס

$$A \setminus B = (A \cap B^c)$$

הוכחה:

מה זה $A \setminus B$? זה השטח:



האם הביטוי שגוי?

קח: לכל איבר x

$$x \in A \setminus B \iff x \in (A \cap B^c)$$

נרשום:

(הגדרת ההפרש) $x \in A \setminus B \iff x \in A$ וגם $x \notin B$

(תכונה 1) $\iff x \in B^c$

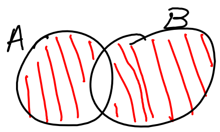
קיבלנו ש: $x \in A$ וגם $x \in B^c$

(הגדרת החיתוך) $\iff x \in A \cap B^c$

הפרש סימטרי

ההפרש הסימטרי של 2 קבוצות A,B מסומן, $A \oplus B$
והיא הקבוצה המוגדרת ע"י:

$A \oplus B = \{x \mid x \in A$ או $x \in B\}$
ולא שניהם



תכונות

1. $A \oplus B = (A \cup B) - (A \cap B)$
2. $A \oplus B = B \oplus A$
3. $A \oplus (B \oplus C) = (A \oplus B) \oplus C$
4. $A \oplus \phi = A$

$$A \oplus A = \phi$$ (5)

זהויות המשלבות מספר אופרטורים:

(1) חוקי דיסטריבוטיביות

$$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C) \qquad \mathrm{I}$$

$$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C) \qquad \mathrm{II}$$

(2) חוקי דה-מורגן

$$(A\cup B)^c = A^c\cap B^c \qquad \mathrm{I}$$

סימון שקול

$$\left(\overline{A\cap B}\right) = \bar{A}\cup\bar{B} \qquad \mathrm{II}$$

קבוצת החזקה

בהינתן קבוצה A, קבוצת החזקה של A מסומנת,

$$P(A)=\{S' \mid S'\subseteq A\}$$

כלומר $P(A)$ היא אוסף כל תתי הקבוצות של A.

דוגמא:

$$A=\{1,2\}$$

$$P(A)=\{\phi,\{1\},\{2\},\{1,2\}\}$$

עבור קבוצה סופית A, הגודל של קבוצת החזקה של A הוא: $2^{|A|}$

הסבר:

לכל תת קב' של A, למשל, $A=\{a_1,a_2,a_3\}$ יש וקטור בינארי שבו 3 מקומות: 0 אם האיבר לא מופיע. למשל: $001=\{a_3\}$

ולכן יש 2^3 אפשרויות.

קבוצת החזקה של A מסומנת גם ב- 2^A.

טענה

הוכיחו שלכל 2 קבוצות A,B: $P(A\cap B)=P(A)\cap P(B)$

הוכחה:

צ"ל: לכל איבר S: $S\in P(A\cap B) \iff S\in P(A)\cap P(B)$

נרשום:

הגדרת קבוצת חזקה

$S\in P(A\cap B) \iff S\subseteq (A\cap B)$

הגדרת הכלה

$\iff$ לכל איבר $x\in S$ מתקיים $x\in A\cap B$

הגדרת חיתוך

$\iff$ לכל איבר $x\in S$ מתקיים: $x\in B$ וגם $x\in A$

$\iff$ לפי הגדרת הכלה: $S\subseteq B$ וגם $S\subseteq A$

הגדרת קבוצת חזקה

$\iff$ $S\in P(B)$ וגם $S\in P(A)$

הגדרת חיתוך

$\iff$ $S\in P(A)\cap P(B)$

שאלה: האם לכל 2 קבוצות A,B:

$$P(A\cup B)=P(A)\cup P(B)$$

הטענה איננה נכונה!

$B=\{3,4\}$ $A=\{1,2\}$

אם A ו- B זרות, $|A|=2$, $|B|=2$,

$|A\cup B|=4$

$|P(A)|=2^2=4$

$|P(B)|=2^2=4$

$|P(A\cup B)|=2^4=16$.

$|P(B)\cup P(A)|=8$.

שיעור 4

יום ראשון 11 מרץ 2007
14:04

זוג סדור

זוג סדור (a,b) זה זוג איברים שנקבע סדר מסוים ביניהם.

מה ההבדל בין (a,b) ל- $\{a,b\}$

1. ב- (a,b) יש משמעות לסדר $(a\neq b)$, $(a,b)\neq(b,a)$
   ב- $\{a,b\}$ אין משמעות לסדר $\{a,b\}=\{b,a\}$
2. ב- (a,b) מותרות חזרות. (a,a) ✓
   ב- $\{a,b\}$ אסורות חזרות. $\{a,a\}$ ✗

$(a,b)=(c,d)$ כדי שיתקיים שוויון צריך להתקיים:

$$\begin{cases} a=c \\ b=d \end{cases}$$ וגם

• באותו אופן n-יה סדורה,

$$(a_1 \ldots\ldots a_n)$$

מכפלה קרטזית

בהינתן שתי קבוצות A,B המכפלה הקרטזית מסומנת ע"י $A\times B$ ומוגדרת:

$$A\times B=\{(a,b) \mid a\in A,\ b\in B\}$$

אוסף כל הזוגות הסדורים כך שהראשון מ- A והשני מ- B.

דוגמא:

$$A=\{1,2,3\} \quad B=\{\alpha,\beta\}$$

$$A\times B=\{(1,\alpha),(2,\alpha),(3,\alpha),(1,\beta),(2,\beta),(3,\beta)\}$$

$$\boxed{A\times B \neq B\times A}$$

העוצמה $|A\times B|$ הינה:

$$|A\times B|=|A|\cdot|B|$$

יום ראשון 11 מרץ 2007
14:36

$$\boxed{(A\times B)\times C \neq A\times(B\times C)}$$

האיברים ב- $(A\times B)\times C$ הם איברים: האיבר הראשון הוא זוג סדור והשני הוא איבר מ-C,
לעומת זאת ב- $A\times(B\times C)$ האיבר הראשון בזוג הסדור הוא מ-A והאיבר השני הוא זוג סדור.

מכפלה של קבוצה עם עצמה

עבור קבוצה A מגדירים:

$$A\times A = A^2 = \{(a,b) \mid a\in A,\ b\in A\}$$

הרחבת המכפלה:

עבור קבוצות A,B,C:

$$A\times B\times C = \{(a,b,c) \mid a\in A,\ b\in B,\ c\in C\}$$

$$\boxed{A\times B\times C \neq A\times(B\times C)}$$

שלשות סדורות — זוגות סדורים.

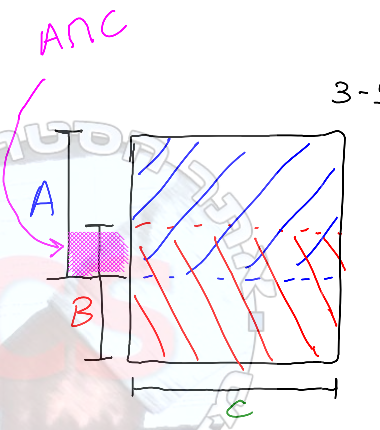
A^n קבוצת ה-n-יות הסדורות של איברים מ-A.

גודל: $\boxed{|A^n| = |A|^n}$

תכונות המכפלה הקרטזית

1. $A\times\emptyset = \emptyset\times A = \emptyset$
2. $A=\emptyset$ ו/או $B=\emptyset$ $\Longleftarrow$ $A\times B=\emptyset$
3. $(A\cup B)\times C = (A\times C)\cup(B\times C)$
4. $(A\cap B)\times C = (A\times C)\cap(B\times C)$

שרטוט 3-5



$(A\setminus B)\times C = (A\times C)\setminus(B\times C)$ (5)

$A\times(B\cup C) = (A\times B)\cup(A\times C)$ (6)

$A\times(B\cap C) = (A\times B)\cap(A\times C)$ (7)

הוכחת 3:

צ"ל: לכל זוג (x,y) נראה: $(x,y)\in(A\cup B)\times C$

אמ"מ

$(x,y)\in(A\times C)\cup(B\times C)$

יהי: $(x,y)\in(A\cup B)\times C$

נראה: $(x,y)\in(A\times C)\cup(B\times C)$

מהגדרת המכפלה: (1) $x\in(A\cup B)$ וגם

(2) $y\in C$

מהגדרת איחוד ומ-1:

(3) $x\in A$ או

(4) $x\in B$

אם $x\in A$ אזי $(x,y)\in A\times C$

מהגדרת האיחוד נקבל:

$(x,y)\in(A\times C)\cup(B\times C)$

ההוכחה במקרה $x\in B$ זהה.

כיוון שני: יהי: $(x,y)\in(A\times C)\cup(B\times C)$. מהגדרת האיחוד:

(1) $(x,y)\in A\times C$ או

(2) $(x,y)\in B\times C$

נניח בה"כ ש: $(x,y)\in(A\times C)$.

מהגדרת המכפלה:

(3) $x\in A$

(4) $y\in C$

יום ראשון 11 מרץ 2007
15:20

מהגדרת האיחוד ומ-3 : $x \in A \cup B$

לפי ההגדרה של מכפלה קרטזית:

$$(x,y) \in (A \cup B) \times C$$

מש"ל

רלציות

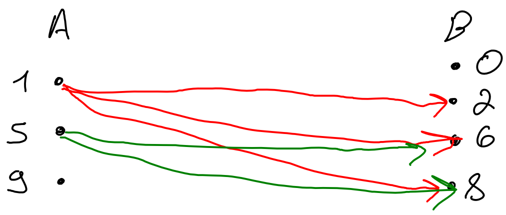
$B=\{0,2,6,8\}, \quad A=\{1,5,9\}$

ניתן להגדיר מס' רלציות בין A ל-B:

היחס "<" למשל:

$1<2,\ 1<6,\ 1<8,\ 5<6,\ 5<8$

נתאר את היחס בצורה גרפית:



נתאר את היחס בצורת מטריצה:

A \ B	0	2	6	8
1	0	1	1	1
5	0	0	1	1
9	0	0	0	0

הגדרה:

בהינתן קבוצות A,B , רלציה בינארית בין A ל-B היא כל תת קבוצה של $A \times B$

דוגמא:

$A=\{1,2,3,4\} \qquad B=\{a,b,c\}$

יחסים בין A ל-B

$R_1=\{(1,a),(1,b),(2,c)\}$

$R_2=\phi$

לא בהכרח חייבת להיות תכונה על כל הזוגות שניתן להגדיר במילים.

בדוגמא: $|R_1|=3$, $|R_2|=0$.

בהנתן A ו-B, מה מספר הרלציות מ-A ל-B?

שאלה זו שקולה ל: "מה מספר תתי הקבוצות של $A\times B$.

" " " : "מה העוצמה של $P(A\times B)$.

וזה שווה ל- $2^{|A\times B|}$

וזה שווה לו $2^{|A|\cdot|B|}$

סימון:

עבור רלציה R מסמנים $(a,b)\in R$ בתור aRb

הרחבת ההגדרה של רלציה

עבור קבוצה A,B,C מגדירים: רלציה טרינארית בין A,B,C היא תת קבוצה של A.

רלציה אונרית - מקום אחד.

רלציה n-ארית - n מקומות.

שיעור 5

יום רביעי 14 מרץ 2007
10:03

תזכורת: לרלציה יש כיוון כי היא תת קבוצה של $X \times Y$

מושגים הקשורים לרלציות:

① תחום וטווח של רלציה

התחום של רלציה aRb מוגדר ע"י:

$$Domain(R) = \{a \in A \mid \text{קיים } b \in B \text{ אשר מתקיים: } (a,b) \in R\}$$

בשרטוט: התחום (Domain) של R הם כל האברים של A מהם יוצא חץ.
במטריצה: כל האברים של A שבשורה שלהם לא כל המספרים הם אפסים.

הטווח של aRb מוגדר ע"י:

$$Range(R) = \{b \in B \mid \text{קיים } a \in A \text{ כך ש: } (a,b) \in R\}$$

בשרטוט: כל האיברים של B אליהם נכנס לפחות חץ אחד.
במטריצה: כל האיברים שבעמודות שלהם יש לפחות "1" אחד.

② רלציה הופכית

בהנתן aRb מגדירים את הרלציה ההפכית R^{-1} מ-B ל-A באופן הבא:

$$R^{-1} = \{(b,a) \mid (a,b) \in R\}$$

$\boxed{R^{-1} \subseteq B \times A}$ *

בשרטוט: ע"מ לקבל את השרטוט עבור R^{-1} מתוך השרטוט עבור R, הופכים את החיצים
במטריצה: עושים transpose. אם M המטריצה המייצגת את R, M^t היא המ' המייצגת את R^{-1}.

③ רלציה משלימה

בהנתן aRb, הרלציה המשלימה של R מוגדרת:

$$R^c = (A \times B) - R$$

שרטוט: כלומר חצים במקומות שלא היו חצים ואת הקיימים נמחק.
במטריצה: עושים "NOT" על המטריצה (כלומר 0 ל-1 ולהפך)

④ הרכבת רלציות

בהינתן aRb ו- bSc מגדירים את $R\circ S$ באופן הבא:

$$R\circ S=\{(a,c) \mid \text{קיים } b\in B \text{ כך שמתקיים } (a,b)\in R \text{ ו- } (b,c)\in S\}$$

$$R\circ S\subseteq A\times C$$

דוגמא:

$C=\{T,F\}$, $B=\{a,b,c\}$, $A=\{1,2,3\}$

$R\subseteq A\times B$

$R=\{(1,a),(2,a),(3,b),(3,c)\}$

$S\subseteq B\times C$

$S=\{(a,T),(b,F)\}$

$R\circ S\subseteq A\times C$

$R\circ S=\{(1,T),(2,T),(3,F)\}$

שרטוט: כדי לקבל את השרטוט של $R\circ S$ משרטטים את R ואת S והזוגות שיהיו סבוב $R\circ S$ הם הזוגות עבורם קיים מסלול מ- a ל- c של שני חצים בשרטוט של R ו- S.

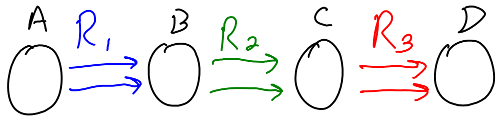
במטריצה: אם M מייצגת את R ו- N מייצגת את S אז MN מייצגת את $R\circ S$.

תכונות של הרכבת רלציות

I אסוציאטיביות

בהינתן רלציות: $R_1\subseteq A\times B$, $R_2\subseteq B\times C$, $R_3\subseteq C\times D$.

$$(R_1\circ R_2)\circ R_3 = R_1\circ R_2\circ R_3$$



להוכחת בבית!

הסבר:

$R_1\circ R_2 =$ כל הזוגות $(a,c)\in A\times C$ עבורם יש מסלול באורך 2

$(R_1\circ R_2)\circ R_3 =$ כל הזוגות $(a,d)\in A\times D$ עבורם יש מסלול באורך 3.

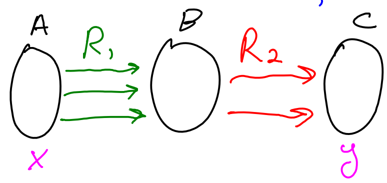
באותו אופן:

$R_2\circ R_3 =$ בנוסף = כל הזוגות $(b,d)\in B\times D$ עבורם יש מסלול באורך 2.

$R_1\circ(R_2\circ R_3) =$ כל הזוגות $(a,d)\in A\times D$ עבורם יש מסלול באורך 3.

II בהינתן רלציה $R_1\subseteq A\times B$ ורלציה $R_2\subseteq B\times C$ מתקיים:

$$(R_1\circ R_2)^{-1} = R_2^{-1}\circ R_1^{-1}$$



$(y,x)\subseteq C\times A$

כל הזוגות שבניהם יש חץ הפוך של R^2 וחץ מתאים הפוך של R_1.

הוכחה:

$$(R_1\circ R_2)^{-1} = \{(c,a)\in C\times A \mid (a,c)\in R_2\}$$

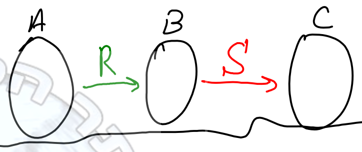
$\Leftrightarrow \{(c,a)\in C\times A \mid$ קיים $b\in B$ עבורו $(a,b)\in R_1$ וגם $(b,c)\in R_2\}$ ← הגדרת ההרכבה

$\Leftrightarrow \{(c,a)\in C\times A \mid$ קיים $b\in B$ שעבורו $(c,b)\in R_2^{-1}$ וגם $(b,a)\in R_1^{-1}\}$

ובפועל הגדרה של הרכבה:

$$= R_2^{-1}\circ R_1^{-1}$$

III האם בהכרח עבור רלציות R,S עבורן מוגדר $R\circ S$ מוגדר גם $S\circ R$?



לא!!!

רלציות מעל קבוצה A

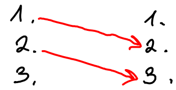
בהינתן קבוצה A, רלציה בינארית מעל A היא תת קבוצה כלשהי של $A\times A$.

לדוגמא:

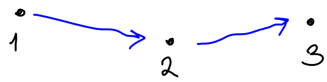
$A=\{1,2,3\}$

$I_A=\{(x,x)\mid x\in A\}$ נקראת רלצית הזהות
או: פונקצית הזהות.

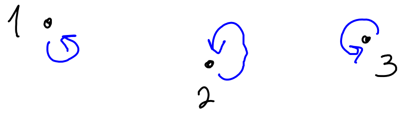
שרטוט:



אבל ברלציה מעל קבוצה:



מאחדים את עצמות השרטוט.



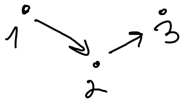
הרכבות של רלציה מעל קבוצה (=חזקות של רלציה)

בהינתן רלציה בינארית R מעל A, מסמנים ב-R^2 את: $R\circ R$.

שרטוט: איך נקבל את השרטוט של R^2 מתוך השרטוט של R?

ב-R^2 יהיו של הצלעות עבורן יש מסלול באורך 2 ב-R.

$R=\{(1,2),(2,3)\}$



$\Rightarrow R^2=\{(1,3)\}$

(לוקחים את כל המסלולים באורך 2 שנמצא למקוצר.)

- באופן דומה מסמנים R^n את $R^n=\underbrace{R\circ R\circ \dots\circ R}_{n\ \text{פעמים}}$

(מוגדר בגלל האסוציאטיביות)

$\boxed{R^{m+n}=R^m\circ R^n}$

שיעור 6

יום רביעי 21 מרץ 2007
10:04

רלציות בעלות תכונות מיוחדות

(1) רפלקסיביות

<u>הגדרה</u>: נאמר שרלציה R מעל A היא רלציה רפלקסיבית אם לכל $x\in A$ מתקיים: $(x,x)\in R$.

דוגמאות:

$A=\{1,2,3,4,5\}$

$R_1=\{(1,1),(1,2),(2,2),(3,3)\}$ ← אינה רפלקסיבית

$R_2=\{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5)\}$ ← רפלקסיבית

<u>בשרטוט</u>: לולאות עצמיות מסביב לכל נקודה.

1

<u>במטריצה</u>: יהיה אלכסון של 1-ים. R_2:

	1	2	3	4	5
1	1				
2		1			
3			1		
4				1	
5					1

R היא רלציה רפלקסיבית $\iff I_A\subseteq R$

<u>הגדרה</u>: רלציה לא רפלקסיבית

רלציה R תקרא לא רפלקסיבית אם קיים $x\in A$ שעבורו $(x,x)\notin R$.

נאמר שרלציה R מעל קבוצה A היא אנטי-רפלקסיבית אם <u>לכל</u> איבר $x\in A$ מתקיים $(x,x)\notin R$.

<u>בשרטוט</u>: לא תהיה אף לולאה עצמית.

<u>במטריצה</u>: האלכסון מורכב כולו מאפסים.

R היא רלציה אנטי-רפלקסיבית $\iff I_A\cap R=\emptyset$

מה קורה אם $A=\emptyset$? איזו רלציות יש ?

הרלציה היחידה היא $R=\emptyset$.

- ✓ R הנה היא רפלקסיבית.
- ✗ R היא אינה לא רפלקסיבית, כי לא ניתן למצוא $x\in A$ שעבורו $(x,x)\notin R$.
- ✓ R הנה אנטי רפלקסיבית.

(2) סימטריות

הגדרה: נאמר שרלציה R מעל A היא רלציה סימטרית אם לכל 2 אברים $x,y \in A$ מתקיים: אם $(x,y)\in R$ אז $(y,x)\in R$.

בשרטוט: לכל חץ יש חץ הפוך ומותרות לולאות עצמיות.

במטריצה: אם המטריצה היא M: $M=M^t$.

הגדרה: נאמר שרלציה R מעל A היא לא סימטרית אם קיים זוג $x,y\in A$ כך שהזוג $(x,y)\in R$ אבל הזוג $(y,x)\notin R$

הגדרה: רלציה R תקרא רלציה א-סימטרית אם לכל $x,y\in A$ אם $(x,y)\in R$ אז $(y,x)\notin R$.

בשרטוט: אין חצים הפוכים ואין לולאות עצמיות

הגדרה: רלציה R מעל A תקרא אנטי סימטרית אם לכל $x,y\in A$ אם $(x,y)\in R$ וגם $(y,x)\in R$ אז $x=y$.

בשרטוט: אסורים חצים מנוגדים בין נקודות שונות. מותרות לולאות עצמיות.

דוגמאות:

$A=\{1,2,3,4,5\}$

$R_1=\{(1,2),(2,3)\}$

R_1 היא לא סימטרית, אנטי סימטרית ואסימטרית

$R_2=\{(1,2),(2,1),(3,1)\}$

R_2 היא לא סימטרית

$R_3=\{(1,2),(2,3),(3,3)\}$

לא, אנטי

$R_4=\{(1,2),(2,1),(3,3)\}$

סימטרית

דוגמאות מעניינות

היחס $\leq$: אנטי סימטרי, רפלקסיבי

היחס $<$: אנטי רפלקסיבי, אסימטרי.

היחס $\subseteq$: רפלקסיבי (לכל קבוצה A, $A\subseteq A$)

אנטי סימטרי ($A=B \Leftarrow \begin{cases} A\subseteq B \\ B\subseteq A \end{cases}$)

היחס $=$: רפלקסיבי, סימטרי, אנטי סימטרי.

③ טרנזיטיביות

הגדרה: נאמר שרלציה R מעל A היא טרנזיטיבית אם לכל $x,y,z\in R$
אם $(x,y)\in R$ וגם $(y,z)\in R$ אזי $(x,z)\in R$

יחסים טרנזיטיביים: $\leq, <, \subseteq, =$.

אינטואיציה: אם יש חץ מ-x ל-y וחץ מ-y ל-z, אזי יש חץ מ-x ל-z.

- הגדרה שקולה:

אם יש מסלול באורך 2 מ-x ל-z במשמעות, יש חץ מ-x ל-z.

- הגדרה שקולה:

אם הזוג $(x,z)\in R\circ R$ (כלומר $(x,z)\in R^2$) אזי יש חץ מ-x ל-z.

- הגדרה שקולה:

אם הזוג $(x,z)\in R^2$ אז הזוג $(x,z)\in R$.

- הגדרה שקולה:

$$R^2\subseteq R$$

- הגדרה שקולה:

R טרנזיטיבית אמ"מ $R^2\subseteq R$

טענה:

תהי R רלציה טרנזיטיבית מעל A. לכל $n\geq 1$ מתקיים:
$$R^{n+1}\subseteq R^n\subseteq \dots \subseteq R^2\subseteq R$$

הוכחה:

נוכיח באינדוקציה על n כי $R^{n+1}\subseteq R^n$

הטענה: $R^{n+1}\subseteq R^n$

בסיס: $n=1$ $\Leftarrow$ $R^2\subseteq R$ ראינו ✓.

צעד: נניח נכונות הטענה עבור $n-1$

$R^n \subseteq R^{n-1}$

ונראה: $R^{n+1} \subseteq R^n$

לצורך זה נשתמש בטענת עזר:

- תהיינה R_1, R_2, S' רלציות מעל A. אם $R_1 \subseteq R_2$ אז $R_1 \circ S' \subseteq R_2 \circ S'$.

עפ"י טענת העזר, מאחר ולפי הנחת האינדוקציה $R^n \subseteq R^{n-1}$

נקבל: $R^n \circ R \subseteq R^{n-1} \circ R$

כלומר: $R^{n+1} \subseteq R$.

יחס סדר חלקי.

נאמר שרלציה R היא יחס סדר חלקי אם R רפלקסיבית, טרנזיטיבית ואנטי-סימטרית.

לדוגמא: $\preceq, =, \subseteq$.

יחס סדר מלא (/ליניארי)

נאמר שרלציה R היא יחס סדר מלא אם R היא יחס סדר חלקי ולכל $x,y \in A$ מתקיים $(x,y) \in R$ או $(y,x) \in R$.

לדוגמא: $\leq$.

יחסי שקילות

הגדרה: נאמר שרלציה E מעל A היא יחס שקילות אם E רפלקסיבית, טרנזיטיבית וסימטרית.

דוגמאות:

1. $A_1 =$ אוכלוסיית העולם

$E_1 = \{(x,y) \mid$ x ו-y חיים באותה מדינה$\}$

2. $A_2 =$ המשולשים

$E_2 = \{(x,y) \mid$ x ו-y משולשים דומים$\}$

יום רביעי 21 מרץ 2007
11:35

3

$A_3 = \mathbb{R}$

$E_3 = \{ (x,y) \mid x \equiv y \bmod 3 \}$

שיעור 7

יום ראשון 25 מרץ 2007
14:13

בוחן אמצע: ! 20/04 יום שישי. !

מחלקות שקילות של יחס שקילות

בהנתן יחס שקילות E מעל קבוצה A נגדיר לכל $x\in A$ את מחלקת השקילות של x ונסמן אותה ב: $[x]$:

$$[x]=\{y \mid (x,y)\in E\}$$

בדוגמאות מהשיעור הקודם:

(1) כל אזרחי ישראל = [שירלי]

(4) כל המילים שמתחילות ב-ש = [שעון]

(3) תזכורת לעולם:

$$A_3=\mathbb{R}$$

$$E_3=\{(x,y) \mid x\equiv y \bmod 3\}$$

$$[0]=\{0,3,6,9,\ldots\}$$

$$=\{y \mid y=3K,\ \text{שלם } K\}$$

$$[1]=\{1,4,7\ldots\}$$

$$=\{y \mid y=3K+1,\ \text{שלם } K\}$$

מה ניתן לומר על המחלקות? - תכונות של מחלקות שקילות

- לא משנה איזה נציג של מחלקת שקילות ניקח נקבל את אותה המחלקה.

$$[0]=[3]=[6]=\ldots$$

$$[1]=[4]=[7]=\ldots$$

$$[2]=[5]=[8]=\ldots$$

- המחלקות זרות אחת לשניה.

$$[0]\cap[1]=\phi,\quad [1]\cap[2]=\phi,\quad [2]\cap[0]=\phi$$

- המחלקות משלימות אחת את השניה.

$$[0]\cup[1]\cup[2]=\mathbb{Z}$$

הגדרה

בהנתן קבוצה A, חלוקה של A היא קבוצה של תתי קבוצות לא ריקות של A אשר:

(1) זרות בזוגות

(2) איחודן הוא כל A.

דוגמאות:

$A=\{1,2,3,4,5\}$

תלוקה אפשרית: $\pi_1=\{\{1,2\},\{3,4,5\}\}$

המחלקות $[2],[1],[0]$ מהוות חלוקה של $\mathbb{Z}$.

הגדרה

בהנתן יחס שקילות E מעל A. נגדיר את קבוצת המנה של A לפי E ונסמן אותה $A\backslash E$:
$A\backslash E=\{[x]\mid x\in A\}$

$A\backslash E$ היא אוסף מחלקות השקילות של איברים ב- A.

דוגמא: $A_3\backslash E_3=\{[0],[1],[2]\}$

לשים לב: כל איבר נספר פעם אחת בקבוצת המנה.

משפט

יהי E יחס שקילות מעל A, קבוצת המנה של A לפי E $A\backslash E$ מהווה תלוקה של A.

משמעות: כל יחס שקילות E מעל A מחלק את A למחלקות שקילות זרות שאיחודן הוא כל A.

כדי להוכיח את המשפט, נוכיח למות לעזר:

למה 1

יהי E יחס שקילות מעל A, לכל $x\in A$ מתקיים $[x]\neq\phi$.

הוכחה: מאחר ויחס E הוא יחס שקילות, E יחס רפלקסיבי

ולכן לכל $x\in A$ $(x,x)\in E$.

ולכן $x\in[x]$ ומכאן: $[x]\neq\phi$.

(מש"ל למה 1)

למה 2

נתון E יחס שקילות מעל A, $x,y\in A$ מתקיים: $[x]=[y] \iff (x,y)\in E$

הוכחה - כיוון 1

נניח $[x]=[y]$ ונראה $(x,y)\in E$

מאחר והיחס E הוא יחס רפלקסיבי, מתקיים: $(y,y)\in E$ ולכן $y\in[y]$

מאחר ו- $[x]=[y]$ מתקיים גם $y\in[x]$. ולכן עפ"י ההגדרה $(x,y)\in E$.

כיוון 2

נניח $(x,y)\in E$ ונראה $[x]=[y]$:

צ"ל: לכל $a\in A$ מתקיים: $a\in[x] \iff a\in[y]$

$(x,a)\in E \overset{\text{עפ"י ההגדרה}}{\iff} a\in[x]$

$\Updownarrow$

$(a,x)\in E$ (סימטריות)

① $(a,x)\in E$

② $(x,y)\in E$

$\Downarrow$

$(a,y)\in E$ (טרנזיטיביות)

$\Updownarrow$ סימטריות

$(y,a)\in E$

$\Updownarrow$ עפ"י הגדרה.

$a\in[y]$

כעת נראה ש: $a\in[x]$:

$\Updownarrow$

$(y,a)\in E$ עפ"י הגדרה

① $(x,y)\in E$

② $(y,A)\in E$

$\Downarrow$

$(x,a)\in E$ (טרנזיטיביות)

$\Downarrow$ עפ"י הגדרה.

$a\in[x]$.

(מש"ל למה 2)

יום ראשון 25 מרץ 2007
15:31

למה 3

יהי E יחס שקילות מעל A. לכל $x,y\in A$ מתקיים: $[x]\neq[y]$ אמ"מ $[x]\cap[y]=\phi$

הוכחה - כיוון 1

נניח: $[x]\neq[y]$ ונראה $[x]\cap[y]=\phi$

נניח בשלילה שקיים $a\in A$ כך שמתקיים $a\in[x]\cap[y]$ כלומר $a\in[x]$ וגם $a\in[y]$.

$$a\in[x] \Rightarrow (x,a)\in E$$
$$a\in[y] \Rightarrow (y,a)\in E$$

לפי הסימטריות של E $(a,y)\in E$.

מהטרנזיטיביות של E נקבל שאם $(a,y)\in E$ וגם: $(x,a)\in E$

אזי: $(x,y)\in E$

לכן לפי למה 2, $[y]=[x]$, בסתירה לכך ש: $[x]\neq[y]$.

כיוון 2

נניח ש: $[x]\cap[y]=\phi$ ונראה $[x]\neq[y]$

עפ"י למה 1 $[x]\neq\phi$ וגם $[y]\neq\phi$

לכן אם $[x]\cap[y]=\phi$ אזי $[x]\neq[y]$.

מסקנה

לכל 2 איברים $x,y\in A$ מתקיימת אחת משתי האפשרויות:

1. $(x,y)\in E$
   ואז $[x]=[y]$
2. $(x,y)\notin E$
   ואז $[x]\cap[y]=\phi$

למה 4

יהי E יחס שקילות מעל A, אזי $\bigcup_{x\in A}[x]=A$

כלומר, איחוד מחלקות השקילות של A הוא כל A.

(המשך בשיעור הבא)

שיעור 8

יום רביעי 28 מרץ 2007
10:09

הערה: איחוד גדול $\bigcup_{i=0}^{n} X$

במקרה הזה X של קבוצות: $X=\{A_0,A_1,\ldots,A_n\}$

כלומר X היא קבוצה עם n+1 איברים שהם קבוצות.

$$A_0\cup A_1\cup\ldots\cup A_n = \bigcup_{i=0}^{n} A_i = \bigcup X.$$

לא לבלבל את הקבוצה X !

כנ"ל לגבי חיתוך.

<u>המשך למה 4</u>

הוכחה: נראה: $\bigcup_{x\in A}[x]=A$. נוכיח ע"י הכלה דו כיוונית.

<u>כיוון: $\subseteq$</u>

נראה: $\bigcup_{x\in A}[x]\subseteq A$.

לכל $x\in A$ מתקיים $[x]=\{y\in A \mid (x,y)\in E\}\subseteq A$

לכן $\bigcup_{x\in A}[x]\subseteq A$

במילים:

האיחוד של מחלקות השקילות יתן רק איברים שהיו לפחות במחלקת שקילות אחת. מאחר וכל האיברים במחלקות השקילות הם איברים של A, נקבל באיחוד רק איברים של A.

<u>כיוון $\supseteq$</u>

נראה: $A\subseteq\bigcup_{x\in A}[x]$.

צ"ל: לכל $x\in A$ קיים $y\in A$ כך ש: $x\in[y]$

ראינו שלכל $x\in A$ מתקיים $x\in[x]$ (בגלל הרפלקסיביות), ולכן $x\in\bigcup_{y\in A}[y]$

נחזור למשפט ונוכיח:

משפט

יהי E יחס שקילות מעל A, קבוצת המנה של A לפי E A/E מהווה חלוקה של A.

<u>משמעות:</u> כל יחס שקילות E מעל A מחלק את A למחלקות שקילות זרות שאיחודן הוא כל A.

הוכחה:

צ"ל: מחלקות השקילות לא ריקות, זרות אחת לשניה ואיחודן הוא כל A.

לפי למה 1 - מחלקות השקילות לא ריקות.

לפי למה 3, עבור כל $x,y\in A$ אם $[x]\neq[y]$ אז $[x]\cap[y]=\phi$

לפי למה 4, איחוד מחלקות השקילות הוא A.

ולכן $A\backslash E$ מהווה חלוקה של A.

המשפט ההפוך:

בהינתן חלוקה π של קבוצה A, קיים יחס שקילות אחד ויחיד E_π מעל A שעבורו $A\backslash E_\pi=\pi$.

כלומר: π היא קבוצת המנה של $A\backslash E_\pi$.

דוגמא:

$A=\{1,2,3,4,5\}$

$\pi=\{\{1\},\{2,3,4,5\}\}$

קיים יחס שקילות ש:

$\{\{1\},\{2,3,4,5\}\}$

היא קבוצת השקילות שלו.

כלומר, מחלקות השקילות $\{1\},\{2,3,4,5\}$

$(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5)\ \ldots$

הערה

צריך לדעת להוכיח

יחסי שקילות שונים מגדירים חלוקות שונות

כלומר: לכל קבוצה A ויחסי שקילות E_1,E_2 מעל A,

$$A\backslash E_1\neq A\backslash E_2 \iff E_1\neq E_2$$

ייצוג יחס השקילות במטריצה ובשרטוט:

$A=\{1,2,3,4,5\}$

$E=\{(1,1),(2,2),(2,1),(1,2),(3,3),(4,4),(3,4),(4,3)\}$

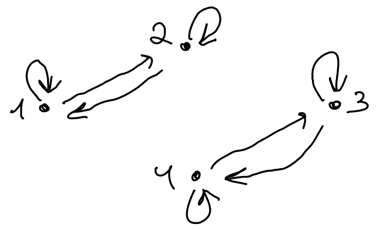
$A\backslash E=\{\{1,2\},\{3,4\}\}$

$[1]=[2]=\{1,2\}$

$[3]=[4]=\{3,4\}$

לשני איברים הנמצאים באותה מחלקת שקילות יש אותה מחלקת שקילות

בשרטוט:



ראשית משרטטים יחסי שקילות - הקבוצה A נחלקת לקבוצות זרות שהן מחלקות השקילות וביניהן אין חיתוך.
בנוסף בתוך מחלקות שקילות יש את כל החיצים האפשריים.

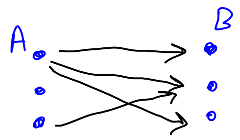
	1	2	3	4
1	1	1		
2	1	1		
3			1	1
4			1	1

במטריצה:
בהינתן יחס שקילות E מעל A,
ניתן לספר את האיברים ב-A כך
שהמטריצה שמתארת את E תהיה
מטריצת "בלוקים" - ריבועים של "1" על האלכסון הראשי והשאר אפסים.

פונקציות

הגדרה: פונקי הוא רלציה R מ-A ל-B עבורו לכל $x\in A$ קיים $y\in B$ יחיד עבורו $(x,y)\in R$.

בשרטוט:



לכל איבר ב-A יוצא חץ יחיד בשרטוט לאיבר ב-B. מסמנים $f\subseteq A\times B$ ב: $\boxed{F: A\to B}$

$(x,y)\in F$ מסמנים: $F(x)=y$

f מעל הממשיים $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$

$$f=\{(x,y)\mid y=x^2\} \iff F(x)=x^2$$

תחום וטווח של פונקציה

מגדירים כאן תחום וטווח של רלציה.

$$Domain(F)=\{x\in A \mid \text{קיים } y \text{ כך ש: } f(x)=y\}=A$$

$$Range(F)=\{y \mid \text{קיים } x\in A \text{ כך ש: } F(x)=y\}\subseteq B$$

סוגים של פונקציות

I חח"ע

נאמר שפונקציה $F:A\to B$ היא חח"ע אם לכל $x,y\in A$ מתקיים:

$$x\neq y \Rightarrow F(x)\neq F(y)$$

<u>בשרטוט</u>: לכל איבר ב-B נכנס <u>לכל היותר</u> חץ אחד בלבד.

II על

נאמר שפונקציה $F:A\to B$ היא על אם לכל $y\in B$ קיים $x\in A$ כך ש:
$F(x)=y$

<u>בשרטוט</u>: לכל נקודה ב-B נכנס <u>לפחות</u> חץ 1.

סימון: $F: A \xrightarrow{על} B$

III התאמה חח"ע

נאמר שפונקציה F היא התאמה חח"ע אם F היא חח"ע וגם על.

<u>בשרטוט</u>: לכל איבר ב-B נכנס חץ <u>אחד ויחיד</u>.

וכמובן שמכל איבר ב-A יוצא חץ אחד ויחיד (הגדרת פונקציה)

IV פונקציה הופכית

בהינתן רלציה F שהיא פונקציה, האם F^{-1} היא בהכרח פונקציה?
<u>לא</u>.

אם F^{-1} היא פונקציה אזי היא נקראת הפונקציה ההפכית.

<u>משפט</u>

א. הרלציה ההפכית F^{-1} היא פונקציה $\iff$ F התאמה חח"ע

ב. אם F^{-1} אכן פונקציה אזי גם F^{-1} התאמה חח"ע.

<u>הוכחה</u>

F^{-1} פונקציה.

$$F^{-1}=\left\{(y,x) \;\middle|\; \begin{matrix}(x,y)\in F\\ F(x)=y\end{matrix}\right\}$$

יום רביעי 28 מרץ 2007
11:39

F^{-1} פונק' אמ"מ: לכל $y \in B$ קיים $x \in A$ אחד ויחיד
$(y,x) \in \{(y,x) \mid F(x)=y\}$ לפי הגדרת פונק'.

$\Updownarrow$

לכל $y \in B$ קיים $x \in A$ אחד ויחיד כך ש: $F(x)=y$.

$\Updownarrow$

(1) לכל $y \in B$ קיים לפחות $x \in A$ אחד כך ש: $F(x)=y$
(2) לכל $y \in B$ קיים לכל היותר $x \in A$ יחיד כך ש: $F(x)=y$

$\Updownarrow$

$1 \Longleftrightarrow$ F על - "
$2 \Longleftrightarrow$ F חח"ע.
} התאמה חח"ע.

ב. $(F^{-1})^{-1}=F$

F היא פונק' ולכן לפי א', F^{-1} גם היא חח"ע ועל.

שיעור 9

יום ראשון 27 מאי 2007
14:14

יום רביעי 13.06 אין הרצאה.

פונקציה - תזכורת

פונק' היא רלציה, כלומר $f \subseteq A\times B$ עבורה לכל $a\in A$ קיים $b\in B$ יחיד.

פונק' f היא על אם לכל $b\in B$ קיים $a\in A$ כך ש: $f(a)=b$

חח"ע: אם לכל $a_1\neq a_2\in A$ מתקיים $f(a_1)\neq f(a_2)$

פונק' f היא הפיכה חח"ע אם f היא חח"ע וגם על.

סימון B^A קבוצת כל הפונק' מ-A ל-B.

אם A,B סופיות, מהו $|B^A|$?

בסה"כ יש $|B|^{|A|}$ אפשרויות לבחור פונק' מ-A ל-B.

הרכבת פונקציות

נזכיר הרכבת רלציות:

$R\circ S\subseteq A\times C$ מוגדרת: $\left\{ \begin{array}{l} R\subseteq A\times B \\ S\subseteq B\times C \end{array} \right.$

$$R\circ S=\left\{(a,c) \;\middle|\; \begin{array}{ll} \text{קיים} & b\in B \text{ כך ש:} \\ & (a,b)\in R \\ \text{וגם} & (b,c)\in S \end{array}\right\}$$

אם $f:A\to B$, כלומר $f\subseteq A\times B$
$g:B\to C$, כלומר $g\subseteq B\times C$
מסמנים $f\circ g$ כ- $g(f(x))$

בתרגול נראה:

1. $F\circ g$ פונק' אם g,F פונק'.
2. מה קורה כאשר F,g חח"ע/על.

משפט

תהיינה A,B קבוצות סופיות אזי:

$|A|=|B| \iff$ קיימת $f:A\to B$ התאמה חח"ע.

הוכחה $\Leftarrow$

נניח $|A|=|B|$ כלומר $n=k$ $\left(\begin{array}{l} A=\{a_1,\dots,a_n\} \\ B=\{b_1,\dots,b_k\} \end{array} \right)$

צ"ל: קיימת $F:A\to B$ התאמה חח"ע.

נגדיר לכל $1\le i\le n$

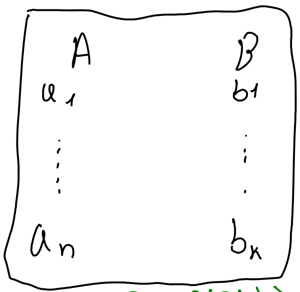
$F(a_i)=b_i$.

להראות בבית שהיא חח"ע ועל. משל $\Leftarrow$

כיוון $\Rightarrow$

ידוע שקיימת $F:A\to B$ התאמה חח"ע

צ"ל: $|A|=|B|$.



הסבר

(F היא חח"ע ולכן לכל איבר ב-B נכנס לכל היותר
חץ אחד ולכל איבר ב-A יוצא חץ אחד)
$\iff n\le k$

ניסוח הוכחה.

F היא חח"ע ולכן לכל איבר $b\in B$ קיים $a\in A$ יחיד לכל היותר
כך ש: $F(a)=b$

מאחר ש-F פונק', לכל $a\in A$ קיים $b\in B$ כך ש: $F(a)=b$
ולכן $k\ge n$

הסבר

(F היא על ולכן לכל איבר ב-B נכנס לפחות חץ אחד, ולכל איבר
ב-A יוצא חץ אחד בדיוק ולכן מס' האיברים ב-A גדול שווה למס'
האיברים ב-B ($n\ge k$))

הוכחה

f היא על ולכן לכל איבר $b\in B$ קיים $a\in A$ כך ש: $F(a)=b$. מכיוון
ש-F פונק', לכל $a\in A$ קיים $b\in B$ יחיד כך ש: $F(a)=b$

כלומר בהכרח $n \geq \aleph$.

$n=\aleph \iff$

$|A|=|B| \iff$ שם $\Rightarrow$

בבית:

עבור A,B סופיות, אם $|A|=|B|$ אזי כל פונק' $f:A\to B$ חח"ע היא גם על, וכל פונק' על היא גם חח"ע.

הגדרת קבוצות מורכבות
(= רקורסיה/באינדוקציה)

הגדרת קבוצות באינדוקציה:

1. מגדירים קבוצת בסיס ("קבוצת גרעין") המסומנת ב- B.
2. מגדירים פעולות (קשרים) המסומנות ב- F.

אוסף האיברים בקבוצה הן כל האיברים שניתן להגיע אליהם מהבסיס B באמצעות הפעולות F.

הגדרה פורמאלית

בהנתן קבוצת גרעין B וקבוצת פעולות F הקבוצה $X(B,F)$ היא קבוצה המקיימת את הדרישות הבאות:

1. $B \subseteq X(B,F)$
2. אם $a_1,\dots,a_k \in X(B,F)$, ו- z התקבל מהם ע"י אחת מפעולות F, אזי $z \in X(B,F)$.

דרישה זו נקראת סגירות תחת F.

3. ב- $X(B,F)$ ישנם רק איברים הכרחיים להגדרות 1,2.

אומרים ש- $X(B,F)$ היא הקבוצה שהוגדרה באינדוקציה ע"י B,F.

הנחה: עבור כל אחת מפעולות הקבוצה מס' הפרמ' הוא סופי ולא אפס.

רוצים להראות שההגדרה היא טובה, כלומר להראות שבהנתן קבוצת גרעין B וקבוצת פעולות F, בהכרח קיימת קבוצה העונה על הגדרות 1-3 ושהיא יחידה.

יום ראשון 27 מאי 2007
15:20

הוכחת קיום

בהינתן הבוליות B,F נראה כיצד לבנות את $X(B,F)$.

נבנה סדרת קבוצות

$$X_0 \subseteq X_1 \subseteq \dots \subseteq X_n$$

כאשר X_n תתאר איברים שבנויים ב- $X(B,F)$ אחרי n צעדים.

$X_0 = B$ מתחילים מקבוצת הבסיס

$X_1 = X_0 \cup \{$ כל האיברים שמתקבלים מ-B ע"י הפעלה יחידה של פעולה מ-F $\}$

$$X_1 = \underbrace{B \cup}_{\text{איחוד}} F(B)$$

$$F(X) = \{ f(x_1 \dots x_k) \mid f \in F,\ x_1 \dots x_k \in X \}$$

$$X_2 = X_1 \cup F(X_1)$$

$\vdots$

$$X_n = X_{n-1} \cup F(X_{n-1})$$

שיעור 10

יום רביעי 30 מאי 2007
10:05

(המשך ההוכחה)

דוגמא לסדרת הקבוצות:

$B=\{a,b,c\}$

$F=\{\circ$ שרשור$\}$, $F(w_1,w_2)=w_1w_2$

$X_0=B=\{a,b,c\}$

$X_1=X_0\cup F(X_0)=\{A,B,C, AB, AC, BA, BC, CA, CB, AA, BB, CC\}$

$=\{A,B,C\}\cup\{$כל המילים באורך 2$\}$

$\Downarrow$

$X_1=\{$כל המילים עד אורך 2$\}$

$X_2=\{$כל המילים עד אורך 4$\}$

$\vdots$

$X_n=\{$כל המילים באורך עד $2^n\}$

תזכורת להוכחה:

נגדיר את $\bar{X}$ כך: $\bar{X}=\bigcup_{i=0}^{\infty}X_i$

כלומר $\bar{X}$ מכילה את כל האיברים שהופיעו באחד ה-X_i לפחות.

נראה ש-$\bar{X}$ מקיים את דרישות 1-3.

דרישה 1 - נראה כי $\bar{X}\subseteq B$.

ראינו ש: $X_0=B$, ועל פי ההגדרה:

$\bar{X}=\bigcup_{i=0}^{\infty}X_i$

ולכן, $B=X_0\subseteq\bar{X}$

דרישה 2 - סגירות תחת F

יהיו $a_1,\dots,a_k\in\bar{X}$. מהגדרת $\bar{X}$ האיברים $a_1,\dots,a_k$ הופיעו בקבוצות X_n. כלומר לכל a_i כזה ($1\le i\le k$) קיימת קבוצה בסדרה (נקרא לה X_{n_i}), כך ש: a_i הופיע בקבוצה X_{n_i}.

נרצה להראות ש-z המתקבלת מהם ע"י אחת הפעולות ב-F מקיימת $z\in\bar{X}$.

מאחר ו- $a_1 \ldots a_k$ מופיעים כולם בקבוצות בספרה $X_0 \ldots$
והספרה היא ספרה שבה $X_n \subseteq X_{n+1}$, אז בהכרח קיים אינדקס
m כך ש: X_m מכילה את כל האיברים $a_1 \ldots a_k$
(m האינדקס המקסימלי בין $n_1, \ldots, n_k$).
מהגדרת X_{m+1}, $z \in X_{m+1}$ (כי $z \in F(X_m)$)

מאחר ו- $\bar{X}$ הוא איחוד כל האיברים שהופיעו בקבוצות בספרה, מתקיים:
$X_{m+1} \subseteq \bar{X}$

ולכן $z \in \bar{X}$.

<u>דרישה 3</u>

נראה שכל האיברים ב- $\bar{X}$ הכרחיים לקיום דרישות 1,2.
לשם כך נראה שכל קבוצה Y המקיימת את דרישות 1,2 <u>מכילה</u> את $\bar{X}$.

כדי להראות שכל קבוצה Y שמקיימת את תכונות 1-2 מכילה את $\bar{X}$.
נראה שכל קבוצה Y שמקיימת את דרישות 1,2: $X_n \subseteq Y$ לכל n

זה שקול כי $\bar{X} = \bigcup_{n=0}^{\infty} X_n \iff$

נשתמש בבית באינדוקציה רגילה על הטבעיים:
תהי Y קבוצה המקיימת דרישות 1,2, וכן $X_n \subseteq Y$ לכל n.
התכונה $X_n \subseteq Y$.

<u>בסיס</u>: $X_0 \subseteq Y$
לפי דרישה 1: $B \subseteq Y$ ומאחר ש: $X_0 = B$, $X_0 \subseteq Y$
<u>צעד</u>: הנחה $X_n \subseteq Y$
לכן נראה $X_{n+1} \subseteq Y$

(להמשך בבית)

בזה סיימנו את הוכחת הקיום.

הוכחת יחידות

נראה שהקבוצה $\bar{X}$ היא הקבוצה היחידה שעונה על דרישות 1-3.

נניח בשלילה שקיימת קבוצה y, $y \neq \bar{X}$, כך ש: y עונה על דרישות 1-3.

$\bar{X} \subseteq y \iff$ מאחר ו-y מקיימת את דרישות 1,2

$\exists a \in y,\ a \notin \bar{X} \iff$ מאחר ו: $y \neq \bar{X}$

$\iff$ y לא עונה על דרישה 3

סתירה.

לסיכום, $\bar{X}$ היא הקבוצה היחידה העונה על דרישות 1-3
מש"ל.

מסקנות:

ראינו ש: $\bar{X} = X(B,F)$

משפט ההצבה באינדוקציה:

על מנת להוכיח שקבוצה y מכילה את $X(B,F)$, מספיק להראות ש-y עונה על דרישות 1,2 ביחס ל- B,F:

1) $B \subseteq y$

2) y סגורה תחת F.

איך מוכיחים שייכות?

דוגמא: $B=\{0\}$, $F=\{+2\}$

האם $6 \in X(B,F)$? כן.

מראים איך אפשר מאברי הבסיס לקבל את 6 בעזרת הפעולות F.

הדרך הכללית לעשות זאת נקראת סדרת גזירה.

הגדרה:

סדרת גזירה עבור a מתוך $X(B,F)$ היא סדרה סופית $a_1, \dots, a_n$ המקיימת:

① נדרוש: $a_n = a$ (האיבר האחרון של סדרת הגזירה יהיה זה שמחפשים)

② לכל $1 \le i \le n$ מתקיים $(a_i \in B)$ או (a_i התקבל ע"י אחת הפעולות מ-F על איברים אחרים מהסדרה)

דוגמא:

$F = \{\circ \text{ שרשור}\}$, $B = \{a,b,c\}$

נראה סדרת גזירה עבור aba

1. a 2. b 3. ab 4. aba

חשוב:

① סדרת גזירה היא לא בהכרח יחידה.

② סדרת גזירה לא חייבת להיות מינימלית.

③ סדרת גזירה היא תמיד סופית.

שיעור 11

יום ראשון 03 יוני 2007
14:20

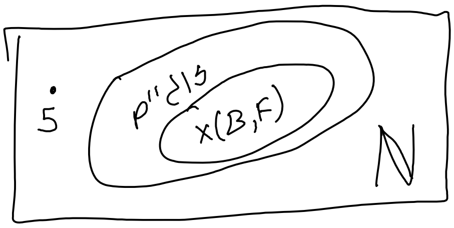
סוף סמסטר: 6/7. מועד א': 10.7. מועד ב': 7.8.

<u>טענה</u> (יונה בתרגיל/בתרגולים)
תהי B קבוצת גרעין, ו- F קבוצת פעולות.
אזי:
לכל איבר a, $a \in X(B,F) \iff$ ל- a סדרת יצירה מתוך $X(B,F)$

<u>הערה</u>: האם אפשר שלאורך סדרת יצירה לוקטור אינסופי?
תשובה: לא. אין סדרת יצירה סופית לוקטור.
והרי אחד התנאים של סדרת יצירה הוא שהיא
סדרה סופית.

איך מראים $a \notin X(B,F)$?

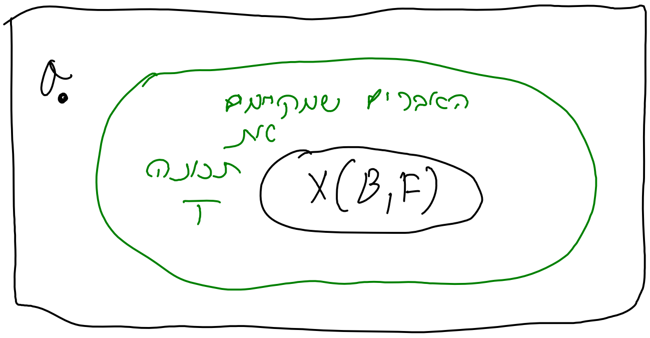
למשל: $B=\{0\}$, $F=\{+2\}$. $5 \in X(B,F)$?
5 לא מספר זוגי וכל האיברים ב $X(B,F)$ זוגיים.



<u>אינטואיציה</u>: הראינו שקבוצת הזוגיים מקיימת דרישות 1,2
(מכילה B וסגורה תחת F) ולכן עפ"י משפט ההוכחה באינדוקציה
$X(B,F) \subseteq$ זוגיים.

<u>באופן כללי</u>: כדי להראות ש: $a \notin X(B,F)$ מוצאים תכונה T
שמקיימת:
1. A לא מקיימת את T.
2. כל איברי $X(B,F)$ מקיימים את T.

ויזואליות:



דוגמה:

$B=\{0\}$, $F=\{+4\}$. ברור שההגדרה
$T=$ mod $2=0$ (זוגיות)
תבטיח שנוכל להוכיח כי $5\notin X(B,F)$.

ההוכחה עצמה

להוכיח 1 - בדרך כלל מיידי.

הוכחת 2 -

צ"ל: כל איברי $X(B,F)$ מקיימים את T

נסמן ב-Y את קבוצת האברים המקיימים את T

ונרצה להראות $X(B,F)\subseteq Y$.

מעשית ההוכחה באינדוקציה מספיק שנראה ש-Y
מקיימת את דרישות 1,2 עבור B,F
כלומר: ① $B\subseteq Y$
② Y סגורה תחת F.

דוגמה: נגדיר באינדוקציה: שפת ה- sts
בסיס $B=\{st\}$
פעולות $F=\{p_1,p_2,p_3\}$

כאשר:

$P_1=$ הוספת sts בסוף המילה
$P_2=$ החלפת ss ב- t
$P_3=$ מחיקת הרצף האחרון של ttt

למשל:

$$\begin{tikzcd}
st \arrow[d, Rightarrow] \\
ststs \arrow[d, Rightarrow] \\
ststssts \arrow[d, Rightarrow] \arrow[dr, Rightarrow] & \\
ststsstssts & ststtts \arrow[d, Rightarrow] \\
& stss \arrow[d, Rightarrow] \\
& stt
\end{tikzcd}$$

(זו לא סדרת גזירה אלא דוגמא לאילו מילים ניתן לקבל בשפה).

האם המילה sts היא מילה בשפה?

נראה שלא: נמצא תכונה T שתפריד בין השפה למילה sts.

נרשום $T=$ מספר ה-s במילה הוא אי זוגי.

נסמן עבור מילה w, מס' ה-s ב-w $\#_s(w)$

① המילה sts לא מקיימת את T

$\#_s(sts)=2$ (זוגי)

② נראה שכל איברי $X(B,F)$ מקיימים את T

צ"ל: קבוצת האיברים שמקיימים את T מקיימים:

① B מקיים את T

② הפעולות משמרות את T.

<u>בסיס</u>:

צ"ל: $B=\{st\}$, st מקיים את התכונה

$\#_s(st)=1$ (אי זוגי) ✓

<u>צעד</u>: נראה עבור כל פעולה ב-F כי היא משמרת את התכונה T.

P_1

הוספת sts בסיום המילה:

הנחת האינדוקציה: מס' ה- s ב- w הוא אי זוגי

נראה $\#s(P_1(w))$ אי זוגי.

$$\#s(P_1(w)) = \#s(wsts) = \#s(w)+2$$

מכיוון שעפ"י ההנחה $\#s(w)$ אי זוגי,

נקבל שגם $\#s(P_1(w))$ אי זוגי □

P_2

הנחת האינדוקציה: מס' ה- s ב- w הוא אי זוגי.

נראה שמספר: $\#s(P_2(w))$ אי זוגי.

$$\#s(P_2(w)) = \#s(w)-2$$

מכיוון ש- P_2 מחליפה 'ss' ב- t.

מכיוון שעפ"י הנחה $\#s(w)$ אי זוגי,

נקבל שגם $\#s(P_2(w))$ אי זוגי. □

P_3

הנחת האינדוקציה: מספר ה- s ב- w הוא אי זוגי.

נראה: $\#s(P_3(w))$ אי זוגי.

$$\#s(P3(w)) = \#s(w)$$

לכן ברור כי $\#s(P3(w))$ אי זוגי.

מש"ל.

הוכחה כזו נקראת הוכחה באינדוקציית מבנה

הערה:

כשעושים הוכחת מבנה, מס' החלקים בהוכחה זהה למספר התבניות ב- F.

יום ראשון 03 יוני 2007
15:23

אינדוקציה על הטבעיים

בסיס/בדיקה ← בודקים עבור 0.

צעד/סגור ⇐ מניחים ש־ n מתקיים ומראים ש: $n+1$ מקיים.