<u>בחינה בקורס מתמטיקה דיסקרטית - מועד ב'</u>

תאריך : 27.2.02

מס' קורס : 203.1850.א.01

מרצה : דר' חגית הל–אור

מתרגלת : גב' מריה פקין

<u>עליך לענות על 3 מתוך 4 השאלות הבאות</u>

לכל שאלה ניקוד זהה, אך חלוקת הניקוד לסעיפים השונים לא בהכרח זהה.

<u>שאלה 1:</u>

א. יוצרים את כל הפרמוטציות האפשריות של 26 האותיות הלועזיות.

1. כמה מהן מכילות לפחות אחד מ - DOG, BIG, OIL
2. כמה מהן מכילות לפחות אחד מ - CART, SHOW, LIKE

הוכח תשובתך.

ב. הוכח של**כל** קבוצה בת 10 מספרים שונים הקטנים או שווים ל-50, יש 2 תתי קבוצות שונות בנות 5 מספרים כל אחת, שסכום האיברים בהן זהה.

דוגמא : לקבוצה הבאה בת 10 מספרים שונים : $\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$

יש 2 תתי קבוצות המכילות 5 מספרים, כך שסכום האיברים זהה. תתי הקבוצות הן :

$\{2,3,6,9,10\}$ $\{4,5,6,7,8\}$ (הסכום = 30).

<u>שאלה 2:</u>

א. G גרף לא מכוון. נגדיר יחסים R_1, R_2 על קדקדי G באופן הבא :

$(u,v) \in R_1$ $\Leftrightarrow$ לא ניתן לנתק בין u ל- v ע"י הסרת <u>קשת</u> מ- G.

$(u,v) \in R_2$ $\Leftrightarrow$ לא ניתן לנתק בין u ל- v ע"י הסרת <u>קדקד</u> w מ- G. w שונה מ- u ומ- v.

(2 קדקדים u,v הם מנותקים אם אין מסלול ביניהם).

1. האם היחסים R_1, R_2 הם יחסי שקילות? הוכח או הפרך.
2. אם היחס הינו יחס שקילות, התבונן במחלקות השקילות וקבע כמה צלעות שונות יכולות להתחיל במחלקת שקילות אחת ולהסתיים באחרת. הסבר.

ב. הוכח או הפרך הטענה הבאה :

אם S_1, S_2 יחסים סימטרים על קבוצה A אזי היחס $S_1\text{-}S_2$ סימטרי.

<u>שאלה 3:</u>

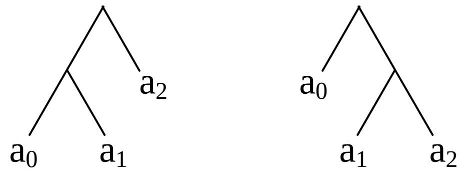
הוכח ב-2 אופנים **שונים** כי $a_n \le 3^{n+1}$ לכל $n \ge 3$ עבור a_n המוגדר :

$$a_n = 2a_{n-1} + 3a_{n-2}$$
$$a_1 = 2$$
$$a_2 = 10$$

<u>שאלה 4:</u>

א. יהיו $a_0 ... a_n$ סדרה של מספרים. נגדיר עץ "חוקי" כעץ בינארי אשר בעלים ישנם המספרים $a_0 ... a_n$ מסודרים משמאל לימין.

דוגמא : עבור n=2 (a_0,a_1,a_2) יש 2 עצים "חוקיים" :



נגדיר T_n = מספר העצים החוקיים עבור n. הוכח באינדוקציה שעבור $n \ge 0$ מספר העצים ה"חוקיים" שווה :

$$T_n = \sum_{k=0}^{n-1} T_k T_{n-k-1}$$

ב. יהיו $X_0 ... X_n$ מספרים שלמים. רוצים לחשב את סכום n+1 המספרים האלו. ניתן לעשות זאת במספר אופנים המוגדרים ע"י הכנסת (n זוגות) סוגריים לביטוי : $X_0 + ... + X_n$.

דוגמא : עבור n=3 ניתן לחשב את הביטוי $X_0 + X_1 + X_2 + X_3$ ב-5 אופנים ע"י הכנסת 3 זוגות סוגריים :

$$(X_0 + (X_1 + (X_2 + X_3))) \ , \ (X_0 + ((X_1 + X_2) + X_3)) \ , \ ((X_0 + (X_1 + X_2)) + X_3) \ ,$$
$$((X_0 + X_1) + (X_2 + X_3)) \ , \ (((X_0 + X_1) + X_2) + X_3)$$

(שים לב כי אין לשנות את סדר האיברים X_i בביטוי).

נסמן S_n = מספר האופנים שניתן לחשב ביטוי המורכב מ- n+1 מספרים (X_i).

תן הגדרה רקורסיבית ל- S_n. הסבר תשובתך.

בהצלחה !!!

<u>פתרון בחינה בקורס מתמטיקה דיסקרטית - מועד ב'</u>

תאריך : 27.2.02

מס' קורס : 203.1850.א.01

מרצה : דר' חגית הל–אור

מתרגלת : גב' מריה פקין

<u>שאלה 1:</u>

א.

1. במקרה של- DOG, BIG, OIL, לא יתכן יותר ממילה אחת בו זמנית כיוון שישנן אותיות משותפות, והפרמוטציה המותרת היא ללא חזרות. עבור מילה אחת : מספר האפשרויות למקם אותה בתוך סדרה של 26 מקומות שווה $26-3+1 = 24$. לכל מיקום אפשרי יש לספור את כל הפרמוטציות האפשריות ליתר 23 האותיות – !23. לכן סה"כ עבור מילה אחת $24 = 24*23!$! ועבור שלשת המילים : **$3*24!$**

(הסבר שונה : נתיחס למילה כאות אחת ואז יש סה"כ 24 אותיות שונות ולהן !24 פרמוטציות.)

2. במקרה של - CART, SHOW, LIKE יתכן יותר ממילה אחת בפרמוטציה כיון שאין אותיות משותפות בין המילים. על כן יש להשתמש בחוק ההכלה וההדכה :

נסמן Ai = קבוצת הפרמוטציות המכילות את המילה ה-i. (i=1..3).

נרצה לחשב

$$|A1\cup A2\cup A3| = |A1|+|A2|+|A3| - |A1\cap A2|+|A2\cap A3|+|A3\cap A1| + | A1\cap A2\cap A3|$$

$|Ai| = 23!$ (הסבר דומה לסעיף הקודם)

$|Ai\cap Aj|$ = נתיחס למילה כאות אחת ואז יש סה"כ 20 אותיות שונות ולהן !20 פרמוטציות.

(הסבר שונה : אם 2 המילים מופיעות בסדרה אז יש לפזר את שאר 18 האותיות לפניהן/ביניהן/אחריהן. זה שקול לבחור 18 עצמים מ-3 סוגים = $\binom{20}{18} = \binom{18+3-1}{18}$. לכל בחירה כזאת יש לספור את כלהפרמוטציות של 18 האותיות. כמו כן יש לספור את פרמוטציות 2 המילים. נקבל : $\binom{20}{18}*18!*2! = \frac{20!}{18!*2!}*18!*2! = 20!$

$|A1\cap A2\cap A3|$ = נתיחס למילה כאות אחת ואז יש סה"כ 17 אותיות שונות ולהן !17 פרמוטציות.

ולכן סה"כ פרמוטציות חוקיות : **$\binom{3}{1}23!+\binom{3}{2}20!+\binom{3}{3}17! = 3*23!+3*20!+17!$**

ב. נשתמש בעקרון שובך היונים. סכום של 5 מספרים בתחום $1..50$ חייב להיות בין הסכום הנמוך ביותר האפשרי: $1+2+3+4+5 = 15$ לבין הסכום הגבוה ביותר: $46+47+48+49+50 = 240$. על כן יש 226 סכומים אפשריים. מספר תתי הקבוצות בנות 5 איברים של קבוצה בת 10 איברים שווה $\binom{10}{5} = \frac{10!}{5!5!} = 252$. עלפי עקרון שובך היונים (סכומים=שובך, תתי קבוצות=יונים) חייבים להיות לפחות 2 תתי קבוצות עם סכום זהה.

שאלה 2:

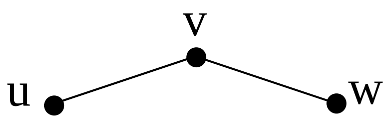
ג. 1. היחס R_1 הוא יחס שקילות כי מקיים:

רפלקסיבי: לכל קדקד u מתקיים $(u,u) \in R_1$ כיון שלא ניתן לנתק בין קדקד לעצמו (תמיד יש מסלול באורך 0)

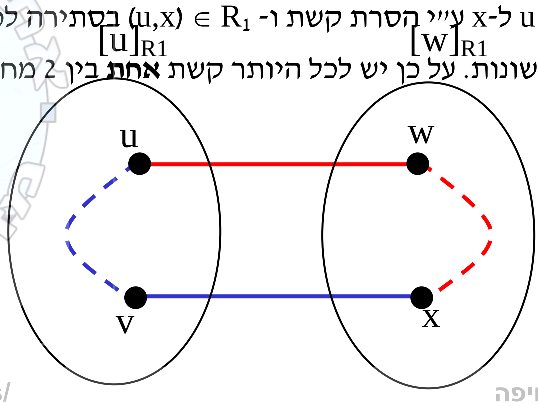
סימטרי: $(u,v) \in R_1 \leftarrow (v,u) \in R_1$ לכל קדקד u,v כי אם קיים מסלול בין u ל-v לאחר ניתוק קשת, אז כיון שהגרף איננו מכוון, יש מסלול בין v ל-u (אותו מסלול עם סדר קשתות הפוך).

טרנזיטיבי: $(u,w) \in R_1 \leftarrow (u,v) \in R_1 \wedge (v,w) \in R_1$ לכל קדקד u,v,w כי אם תמיד קיים מסלול בין u ל-v (גם לאחר ניתוק קשת), ותמיד קיים מסלול בין v ל-w (גם לאחר ניתוק קשת), אז תמיד קיים מסלול בין u ל-v העובר דרך v.

היחס R_2 איננו יחס שקילת כי אינו מקיים טרנזיטיביות. הפרכת טרנזיביות ע"י דוגמא נגדית: בגרף הבא מתקיים $(u,v) \in R_1 \wedge (v,w) \in R_1$ אך **לא** מתקיים $(u,w) \in R_1$.



2. לגבי היחס R_1: בכל מחלקת שקילות ישנם קדקדים שלא ניתן לנתק כל זוג מתוכם ע"י הסרת קשת (ז"א יש יותר ממסלול אחד ביניהם). נניח בשלילה שבין 2 מחלקות שקילות $[u]_{R1}$ ו- $[w]_{R1}$ יש יותר מקשת אחת. בה"כ נניח קשת ביו u ל-w וקשת בין v ל-x כאשר $v\in[u]_{R1}$ ו- $x\in[w]_{R1}$. אז יש יותר ממסלול אחד בין u ל-x: מסלול אחד מ-u ל-w (על הקשת הבין מחלקתית) ומ-w ל- x (על אחד המסלולים שבתוך $[w]_{R1}$). מסלול שני מ-u ל- v (על אחד המסלולים שבתוך $[u]_{R1}$) ומ-v ל-w (על הקשת הבין מחלקתית). על כן לא ניתן לנתק בין u ל-x ע"י הסרת קשת ו- $(u,x) \in R_1$ בסתירה לכך שu ו-x בשתי מחלקות שקילות שונות. על כן יש לכל היותר קשת **אחת** בין 2 מחלקות שקילות.



ד. אם S_1, S_2 יחסים סימטרים על קבוצה A אזי היחס $S_1\text{-}S_2$ סימטרי. הוכחה:

$$(a,b) \in (S_1 - S_2) \Leftrightarrow$$
$$(a,b) \in S_1 \wedge (a,b) \notin S_1$$

מסימטרית S_1, S_2 נובע:

$$\Leftrightarrow (b,a) \in S_1 \wedge (b,a) \notin S_1$$
$$\Leftrightarrow (b,a) \in (S_1 - S_2)$$

(ניתן להוכיח גם ע"י שמוש במטריצות).

שאלה 3:

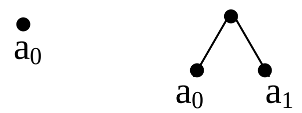
הוכח ב-2 אופנים **שונים** כי $a_n \le 3^{n+1}$ לכל $n \ge 3$ עבור a_n המוגדר:

$$a_n = 2a_{n-1} + 3a_{n-2}$$
$$a_1 = 2$$
$$a_2 = 10$$

שאלה 4:

ג. הוכחה באידוקציה **שלמה**:

בסיס האינדוקציה: $T_0 = 1$, $T_1=1$ כי אלו העצים החוקיים היחידים האפשריים:

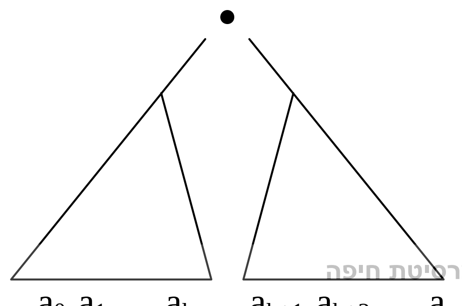


עבור n=2 יש 2 עצים חוקיים ואכן: $T_2 = \sum_{k=0}^{1} T_k T_{1-k} = T_0T_1 + T_1T_0 = 1*1 + 1*1 = 2$

הנחת האינדוקציה: לכל m כך ש- n>m $T_m = \sum_{k=0}^{m-1} T_k T_{m-k-1}$

צעד האידוקציה: נוכיח עבור n כי $T_n = \sum_{k=0}^{n-1} T_k T_{n-k-1}$.

כל עץ "חוקי" בעל n+1 קדקדים, ניתן לפרק ל-2 תתי-עצים ע"י ניתוק שרש העץ.

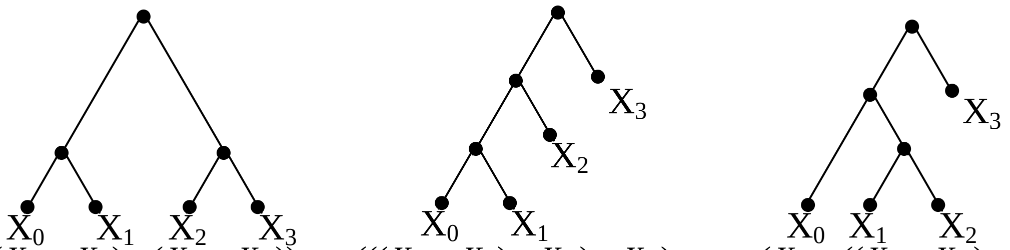


ז"א כל עץ "חוקי" ניתן לבנות מ-2 תתי-עצים: 1) עץ "חוקי" עם k+1 עלים 2) עץ "חוקי" עם n-k עלים. עפ"י הנחת האינדוקציה, מספר תתי העצים השונים עבור k מסוים הוא T_k ו-T_{n-k-1} בהתאמה. עפ"י חוק הכפל מספר העצים ה"חוקיים" בעלי n+1 עלים עבור k מסוים הוא $T_k T_{n-k-1}$.

כיון ש- $0 \le k \le n-1$ נקבל (עפ"י חוק הסכום) שסה"כ העצים החוקיים בעלי n+1 עלים הוא $T_n = \sum_{k=0}^{n-1} T_k T_{n-k-1}$ מ.ש.ל.

(הערה: הוכחה מאד דומה נעשתה בכתה באחד ההרצאות האחרונות).

ד. הגדרה רקורסיבית ל- S_n. נראה כי יש התאמה חד-חד ערכית ועל בין האופנים לחישוב ביטוי המורכב מ-n+1 איברים לבין העצים הבינרים החוקיים מסעיף א. עץ הבינרי המתאים לחישוב ביטוי, מכיל את המשתנים Xi בעלים ואת הסימן + בקדקדים הפנימיים. לכל ביטוי עם סוגריים נבנה עץ ע"י שאת שרש העץ נשייך ל- + האחרון המתבצע בחישוב (זה הנמצא בסוגריים החיצוניים ביותר). באופן רקורסיבי נבנה את 2 תתי-העצים מהשרש כעצים המייצגים את 2 הביטויים המחוברים ב- + האחרון. דוגמאות:



$((X_0 + X_1) + (X_2 + X_3))$ $(((X_0 + X_1) + X_2) + X_3)$ $(X_0 + ((X_1 + X_2) + X_3))$

על כן מספר האופנים S_n לחישוב ביטוי עם n+1 איברים שווה למספר העצים ה"חוקיים" מסעיף א.: $S_n = \sum_{k=0}^{n-1} S_k S_{n-k-1}$ אם תנאי התחלה כנ"ל: $S_1 = 1$, $S_0 = 1$