<u>בחינה בקורס מתמטיקה דיסקרטית - מועד א'</u>

תאריך: 1.2.02

מס' קורס: 203.1850.א.01

מרצה: דר' חגית הל–אור

מתרגלת: גב' מריה פקין

עליך לענות על 3 מתוך 4 השאלות הבאות (כל שאלה 34 נק', סה"כ 102 נק')

שאלה 1:

נגדיר A קבוצת כל הפונקציות מ- $\Re$ ל- $\Re$ ז"א $A=\{f \mid f:\Re \to \Re\}$.

אלו מבין היחסים הבאים המוגדרים על A הם יחסי שקילות? הוכח.

1. $fRg \Leftrightarrow \forall x \in (0,\infty): f(x)=g(x)$
2. $fSg \Leftrightarrow \exists y \in \Re: f(y)=g(y)$
3. $fTg \Leftrightarrow \exists y \in \Re, \forall x \in (y,\infty): f(x)=g(x)$
4. $fUg \Leftrightarrow f \circ g = g \circ f$

שאלה 2:

הודעה משודרת מורכבת מאותות. ישנם 3 סוגים של אותות: סוג א' שאורכו 2 שניות, סוג ב' שאורכו 2 שניות וסוג ג' שאורכו 1 שניה. כמה הודעות שונות ניתן להרכיב באורך דקה?

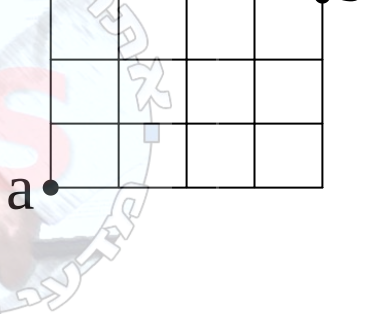
שאלה 3

א. כמה מונומים מסוגים שונים יש בפיתוח של $(x_1+x_2+....+x_m)^n$?

(דוגמא: $(x_1+x_2)^3 = ax_1^3+bx_1^2x_2+cx_1x_2^2+dx_2^3$ יש 4 מונומים).

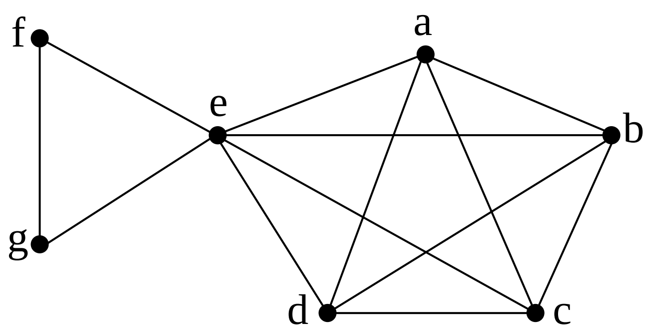
ב. רשת כבישים סריגית מחברת נקודה a עם נקודה b. הנקודה b נמצאת במרחק n צמתים מזרחה ו- m צמתים צפונה ל-a (בדוגמא המצוירת n=4, m=3).

בכמה אופנים ניתן להגיע מ-a ל-b בצעדים של צומת אחת צפונה או צומת אחת מזרחה.



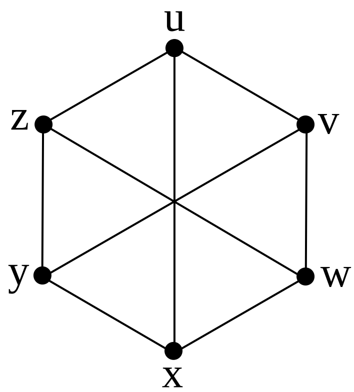
<u>שאלה 4:</u>

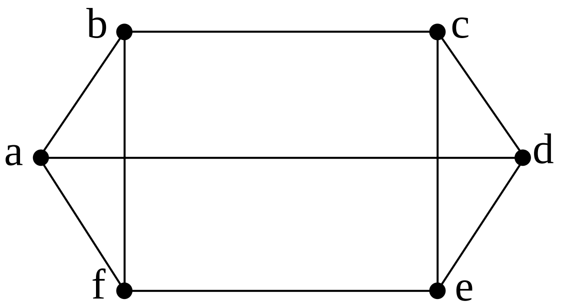
א. נתון הגרף הבא:



1. האם יש מעגל אוילר בגרף? אם כן רשום. אם לא הסבר מדוע.
2. האם יש מעגל המילטון בגרף? אם כן רשום. אם לא הסבר מדוע.

ב. האם שני הגרפים הבאים איזומורפים? הוכח תשובתך.





ג. הגדר את מספר הקשתות בגרף מלא k_n

1. באופן רקורסיבי.
2. באופן מפורש.

בהצלחה !!!

פתרון בחינה בקורס מתמטיקה דיסקרטית - מועד א'

תאריך: 1.2.02

מס' קורס: 203.1850.א.01

מרצה: דר' חגית הל–אור

מתרגלת: גב' מריה פקין

שאלה 1:

1. $fRg \Leftrightarrow \forall x \in (0,\infty): f(x) = g(x)$

רפלקסיבי: $f(x) = f(x)$ לכל x ובפרט לאי שליליים.

סימטרי: נניח fRg אז לכל x ב- $(0..\infty)$, $f(x) = g(x)$

עבור x אלו $g(x) = f(x)$ מהגדרת שוויון

ולכן $\forall x \in (0,\infty): g(x) = f(x)$ ו- gRf

טרנזיטיבי: נניח $fRg \wedge gRf$

ז"א $\forall x \in (0,\infty): f(x) = g(x) \wedge \forall x \in (0,\infty): g(x) = h(x)$

לכן לכל x ב- $(0..\infty)$, $f(x) = g(x) \wedge g(x) = h(x)$

עבור x אלו $f(x) = h(x)$ מטרנזיטיביות השוויון

ולכן $\forall x \in (0,\infty): f(x) = h(x)$ ו- fRh

R רפלקסיבי, סימטרי וטרנזיטיבי ולכן R יחס שקילות.

2. $fSg \Leftrightarrow \exists y \in \Re: f(y) = g(y)$

S איננו יחס שקילות כי איננו טרנזיטיבי ז"א

$\exists y \in \Re: f(y) = g(y) \wedge \exists y \in \Re: g(y) = h(y) \to \exists y \in \Re: f(y) \neq h(y)$

דוגמא נגדית: נגדיר לכל x: $f(x) = 3$

$g(x) = x$

$h(x) = 4$

אז $\exists y \in \Re: f(y) = g(y)$ כי $f(3) = g(3) = 3$

$\exists y \in \Re: g(y) = h(y)$ כי $g(4) = h(4) = 4$

אך $f(x) \neq h(x)$ לכל x ולכן $\neg\exists y \in \Re: f(y) = g(y)$ ו- $(f,h) \notin S$

3. $fTg \Leftrightarrow \exists y \in \Re, \forall x \in (y,\infty): f(x) = g(x)$

רפלקסיבי: $f(x) = f(x)$ לכל x ולכן קיים y למשל y=100 שעבורו $\forall x \in (100,\infty): f(x) = f(x)$

סימטרי: נניח fTg אז קיים y_0 כך ש- $\forall x \in (y_0,\infty): f(x) = g(x)$

עבור x ב- $(y_0..\infty)$, גם $g(x) = f(x)$ מהגדרת שוויון

ולכן $\forall x \in (y_0,\infty): g(x) = f(x)$ ו- $\exists y \in \Re, \forall x \in (y,\infty): g(x) = f(x)$ ו- gTf

טרנזיטיבי: נניח $fTg \wedge gTf$

ז"א $\exists y \in \Re, \forall x \in (y,\infty): f(x) = g(x) \wedge \exists y \in \Re, \forall x \in (y,\infty): g(x) = h(x)$

לכן קיימים y_1, y_2 כך ש- $\forall x \in (y_1,\infty): f(x) = g(x)$

ו- $\forall x \in (y2,\infty): g(x) = h(x)$

כיון שלא בהכרח $y_1=y_2$ נבחר $y_3 = \max(y_1,y_2)$

ואז לכל x ב- $(y_3..\infty)$, $f(x) = g(x) \wedge g(x) = h(x)$ ולכן גם $f(x) = h(x)$

ומכאן $\exists y \in \Re, \forall x \in (y,\infty): f(x) = h(x)$ ו- fTh

T רפלקסיבי, סימטרי וטרנזיטיבי ולכן T יחס שקילות.

.4 $fUg \iff f \circ g = g \circ f$

S איננו יחס שקילות כי איננו טרנזיטיבי ז"א

$$f \circ g = g \circ f \wedge g \circ h = h \circ g \to f \circ h \neq h \circ f$$

דוגמא נגדית: נגדיר לכל x: $f(x) = 3$

$g(x) = x$

$h(x) = 4$

אז $(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x) = 3$

ו- $(g \circ h)(x) = (h \circ g)(x) = 4$

אך $(f \circ h)(x) = 3 \neq (h \circ f)(x) = 4$

שאלה 2:

פתרון ע"י רקורסיה: נגדיר a_n = מספר ההודעות באורך n.

הודעה באורך n ניתנת להרכבה מהודעה באורך n-1 ואח"כ אות מסוג ג' **או** ע"י הודעה באורך n-2 ואח"כ אות מסוג א' או ב'. לכן עפ"י חוק הסכום: $a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2}$

תנאי התחלה: $a_1 = 1$

$a_2 = 3$

עבור n=60 נפתור את הרקורסיה:

המשוואה האופינית: $r^2 - r - 2 = 0$

לה יש 2 פתרונות: $r_1 = -1,\ r_2 = 2$

לכן הפתרון מהצורה: $a_n = \alpha_1(-1)^n + \alpha_2 2^n$

נפתור עבור $\alpha1, \alpha2$: $a_1 = -\alpha_1 + 2\alpha_2 = 1$

$a_2 = \alpha_1 + 4\alpha_2 = 3$

נקבל $\alpha_1 = \frac{1}{3}, \alpha_2 = \frac{2}{3}$

לכו הפתרון: $a_n = \frac{1}{3}(-1)^n + \frac{2}{3}2^n$

עבור n=60 נקבל $a_{60} = \frac{1}{3}(-1)^{60} + \frac{2}{3}2^{60} = \frac{1+2^{60}}{3}$

פתרון ע"י ספירה: עבור הודעה באורך 60 נסמן ב- k את מספר האותות באורך 2 (ז"א מסוג א' או ב').

לכן 60-2k שווה למספר האותות באורך 1. k בין 0 ל-30.

רעיון הפתרון: נסדר תחילה את k האותות באורך 2 ואח"כ "נפזר" ביניהם את 60-2k האותות באורך 1.

מספר הסדרות באורך k המורכבות מ-2 סוגי אותות שווה 2^k (2 אפשרויות בכל אחד מ-k המקומות).

לכל סדרה של k אותות באורך 2, יש k+1 מקומות בהם ניתן "לפזר" את 60-2k האותות באורך 1 (לפני ואחרי כל אות באורך 2). זה שקול לבחור 60-2k עצמים מתוך k+1 סוגים:

$$\binom{(60-2k)+(k+1)-1}{60-2k} = \binom{60-k}{60-2k} = \binom{60-k}{k}$$

ולכן לכל k, מספר ההודעות באורך 60 שניתן לבנות שווה

$$2^k\binom{60-k}{k}$$

אך $k \in (0...30)$ לכן

$$a_{60} = \sum_{k=0}^{30} 2^k \binom{60-k}{k}$$

שאלה 3

ג. בפיתוח של $(x_1 + x_2 + ... + x_m)^n$ כל מונום הוא מהצורה

$$x_1^{n1} x_2^{n2} x_3^{n3} \cdots x_m^{n_m}$$

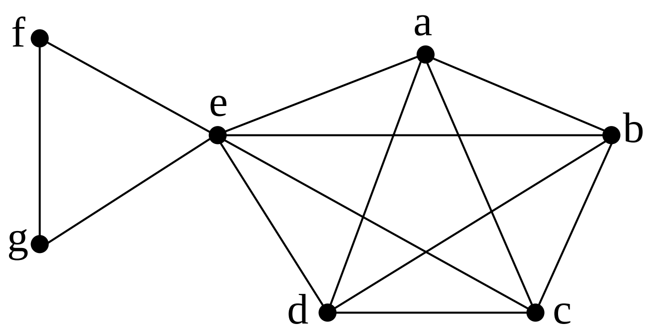
כאשר $n_1 + n_2 + n_3 + ... + n_m = n$.
לכן מספר המונומים שווה למספר האפשריות לבחור ni כאלה.
ז״א מספר הפתרונות ל - $n_1 + n_2 + n_3 + ... + n_m = n$. וזה שקול לבחירת n
עצמים מ- m סוגים ושווה ל- $\binom{n+m+1}{n}$.

ד. להגיע מנקודה a לנקודה b בסריג בכל מסלול חוקי מחייב לבצע n צעדים
מזרחה ו – m צעדים צפונה. מספר אופנים לסדר n+m עצמים שמתוכם n
מסוג אחד ו– m מסוג שני שקול למספר האופנים לבחור n מקומות מתוך n+m
המקומות האפשריים. וזה שווה :

$$\binom{n+m}{n}$$

שאלה 4:

ד.



3. יש מעגל אוילר בגרף : efgeabcdebdace.
4. אין מעגל המילטון בגרף שכן כדי לעבור על הקדקדים f,g חייבים לעבור דרך קדקד e פעמיים.

ה. שני הגרפים <u>אינם</u> איזומורפים כי אין העתקה חח״ע ועל השומרת קשתות. הסיבה לכך :

1. בגרף אחד יש מעגל באורך 3 ובגרף השני המעגל הקצר ביותר הוא באורך 4.

או

2. נסתכל על קדקד a : ל- a יש 2 שכנים המחוברים ביניהם אך בגרף השני אין אף קדקד אשר 2 שכניו מחוברים. לכן אין קדקד בגרף השני היכול להיות תמונתו של a תחת ההעתקה שומרת קשתות.

1. מספר הקשתות בגרף מלא $\mathbf{k_n}$:

3. <u>באופן רקורסיבי</u>: נגדיר a_n = מספר הקשתות ב- $\mathbf{k_n}$.
גרף $\mathbf{k_n}$ מתקבל מחיבור קדקד 1 לכל n-1 הקדקדים של $\mathbf{k_{n-1}}$ ולכן

$$a_n = a_{n-1} + n-1$$

תנאי התחלה: $a_1 = 0$

4. <u>באופן מפורש</u>:

פתרון 1: כל קדקד מחובר ל- n-1 קדקדים אחרים. סה"כ n(n-1), אך ספרנו כל קשת פעמיים ולכן $a_n = \frac{n(n-1)}{2}$

פתרון 2: מספר הקשתות שווה למספר זוגות קדקדים שניתן לבחור מתוך n הקדקדים:

$$a_n = \binom{n}{2} = \frac{n!}{2!(n-2)!} = \frac{n(n-1)}{2}$$

פתרון 3: מההגדרה הרקורסיבית בסעיף 1, נקבל:

$$an = an-1 + (n-1) = an-2 + (n-2) + (n-1) = ...$$

$$= 0 + 1 + 2 + ... + (n-2) + (n-1) = \frac{n(n-1)}{2}$$