בחינה בקורס מתמטיקה דיסקרטית - מועד ב׳

תאריך: 2000-2001

מס׳ קורס :

מרצה : דר׳ חגית הל – אור

מתרגלת : גב׳ אורה ארבל

עליך לענות על 3 מתוך 4 השאלות הבאות (כל שאלה 34 נק׳, סה״כ 102 נק׳)

שאלה 1

יהי G גרף . נגדיר $\overline{G}=\{(x,y)\,|\,(x,y)\notin G,\quad x\neq y\in V\}$ (כלומר, $\overline{G}$ הוא גרף בעל אותם קודקודים של G, ומכיל את כל הצלעות שלא נמצאות על G.)

א. הוכח כי אם G אינו קשיר אז $\overline{G}$ קשיר

ב. האם יתכן גרף כך ש G וגם $\overline{G}$ קשירים? (הראה דוגמא או הוכח שלא קיים כזה גרף)

שאלה 2:

יהיו A,B קבוצות כלשהן.

הוכח או הפרך את כל אחד מהסעיפים הבאים :

א. $A\subseteq B \Leftrightarrow P(A)\subseteq P(B)$

ב. $A\in B \Leftrightarrow P(A)\subseteq P(B)$

ג. $P(A\cap B)=P(A)\cap P(B)$

ד. $P(A\cup B)=P(A)\cup P(B)$

שאלה 3:

בכמה דרכים ניתן לחלק $2n$ כדורים לבנים ו - n כדורים צבעוניים (כל אחד בצבע אחר, שונה מלבן) כדלקמן (כל סעיף בנפרד) :

א. ל - $3n$ תאים, כדור אחד בדיוק בכל תא

ב. ל - $3n$ תאים, כדור אחד לבן לכל היותר בכל תא

ג. ל - n תאים, כדור אחד לבן לפחות בכל תא

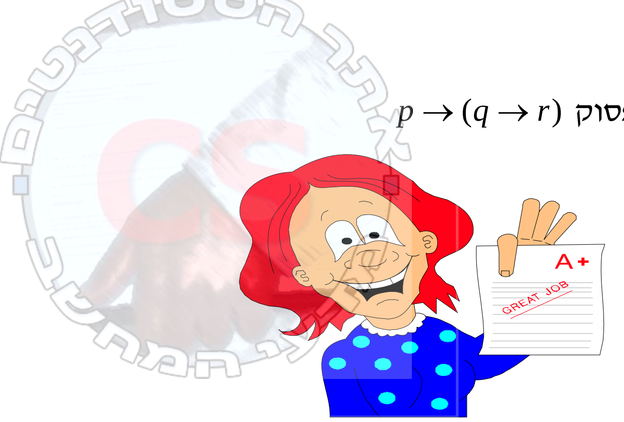
שאלה 4:

א. פתור את יחס הרקורסיה הבא :

$$a_n=6a_{n-1}-7a_{n-2}$$
$$a_0=2,\quad a_1=10$$

ב. הוכח או הפרך : הפסוק $(p\rightarrow q)\rightarrow r$ שקול לפסוק $p\rightarrow(q\rightarrow r)$

ג. כמה יחסי שקילות יש על קבוצה בת 4 איברים?



בהצלחה לכולם !!!

פתרון הבחינה בקורס מתמטיקה דיסקרטית - מועד ב'

שאלה 1

יהי G=(V,E) גרף לא מכוון פשוט . נגדיר $\overline{G}=(V,\overline{E})$ כך ש

$\overline{G}=\{(x,y)\,|\,(x,y)\notin G,\ \ x\neq y\in V\}$ (כלומר, $\overline{G}$ הוא גרף בעל אותם קודקודים של G,

ומכיל את כל הצלעות שלא נמצאות על G.)

ג. הוכח כי אם G אינו קשיר אז $\overline{G}$ קשיר

ד. האם יתכן גרף כך ש G וגם $\overline{G}$ קשירים? (הראה דוגמא או הוכח שלא קיים כזה גרף)

פתרון

א. הוכחה: נתון ש G אינו קשיר, לכן ב – G לפחות שני מרכיבי קשירות. יהיו $x,y\in V$.

נראה שקיים מסלול מ x ל y בתוך $\overline{G}$. נתבונן בשני מקרים:

- x ו – y במרכיבי קשירות שונים ב G: אזי אין מסלול בין x ל- y ב G, לכן ברור שאין קשת בין x ל – y בתוך G, לכן קיימת בניהם קשת ב $\overline{G}$, וזהו מסלול מ – x ל – y ב - $\overline{G}$.
- אם x ו – y באותו מרכיב קשירות של G, אז נבחר z ממרכיב קשירות אחר של G (כאמור קיים כזה, כי G אינו קשיר). אזי אין מסלול בין x ל- z ב G, לכן ברור שאין קשת בין x ל – z בתוך G, לכן קיימת בניהם קשת ב $\overline{G}$, ובאופן דומה קיימת קשת בין y ל – z ב $\overline{G}$. מכאן ש $x\to z\to y$ הוא מסלול מ x ל – y ב $\overline{G}$.

$\Leftarrow$ $\overline{G}$ קשיר

ב. דוגמא לכך ש G וגם $\overline{G}$ קשירים:

שאלה 2:

יהיו A,B קבוצות כלשהן.

הוכח או הפרך את כל אחד מהסעיפים הבאים:

ה. $A\subseteq B\Leftrightarrow P(A)\subseteq P(B)$

ו. $A\in B\Leftrightarrow P(A)\subseteq P(B)$

ז. $P(A\cap B)=P(A)\cap P(B)$

ח. $P(A\cup B)=P(A)\cup P(B)$

פתרון

א. הוכחה:

$\Rightarrow$:

$$X \in P(A) \overset{1}{\Rightarrow} X \subseteq A \overset{2}{\Rightarrow} X \subseteq B \overset{3}{\Rightarrow} X \in P(B)$$

$\Leftarrow$:

$$A \in P(A) \overset{4}{\Rightarrow} A \in P(B) \overset{5}{\Rightarrow} A \subseteq B$$

הסברים: 1) ע"פ הגדרה 2) ע"פ הנחה ש A מוכל ב B 3) ע"פ הגדרה

4) ע"פ הנחה ש P(A) מוכל ב P(B) 5) ע"פ הגדרה

ב. דוגמא נגדית:

$$A = \{1\}$$
$$B = \{1,2\}$$
$$\Downarrow$$
$$P(A) = \{\{1\}, \phi\}$$
$$P(B) = \{\phi, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}\}$$
$$\Downarrow$$
$$P(A) \subseteq P(B) \quad \wedge \quad A \not\subseteq B$$

ג. דוגמא נגדית:

$$A = \{1\}$$
$$B = \{2\}$$
$$\Downarrow$$
$$P(A) = \{\phi, \{1\}\}$$
$$P(B) = \{\phi, \{2\}\}$$
$$\Downarrow$$
$$P(A \cup B) = \{\phi, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}\} \neq \{\phi, \{1\}, \{2\}\} = P(A) \cup P(B)$$

ד. הוכחה

$$X \in P(A \cap B) \Leftrightarrow X \subseteq (A \cap B) \Leftrightarrow X \subseteq A \wedge X \subseteq B \Leftrightarrow X \in P(A) \wedge X \in P(B) \Leftrightarrow X \in P(A) \wedge P(B)$$

שאלה 3:

בכמה דרכים ניתן לחלק $2n$ כדורים לבנים ו - n כדורים צבעוניים (כל אחד בצבע אחר, שונה מלבן) כדלקמן (כל סעיף בנפרד):

ד. ל - $3n$ תאים, כדור אחד בדיוק בכל תא

ה. ל - $3n$ תאים, כדור אחד לבן לכל היותר בכל תא

ו. ל - n תאים, כדור אחד לבן לפחות בכל תא

פתרון

א. נסדר את כל הכדורים בשורה, ונחלק בסידורים הפנימיים של הכדורים הלבנים. נקבל

$$\frac{(3n)!}{(2n)!}$$

ב. נבחר תחילה 2n תאים בהם נשים כדור לבן, ואחר כך נחלק את הכדורים הצבעוניים ללא הגבלה. נקבל: $\binom{3n}{2n}\cdot(3n)^n$

ג. נשים n כדורים לבנים – אחד בכל תא (יש רק אפשרות אחת לעשות זאת). כעת נחלק את יתר הכדורים הלבנים ללא הגבלה, ואחר כך נחלק את הכדורים הצבעוניים ללא הגבלה.
נקבל $\binom{2n-1}{n-1}\cdot n^n$

שאלה 4:

ד. פתור את יחס הרקורסיה הבא:

$$a_n = 6a_{n-1} - 7a_{n-2}$$
$$a_0 = 2, \quad a_1 = 10$$

ה. נתון גרף פשוט לא מכוון G=(V,E).

נגדיר יחס R על הקודקודים V: $(u,v)\in R$ אם יש מסלול מקדקד u לקדקד v.

(ייתכן גם מסלול באורך 0)

I. האם R יחס שקילות? אם כן – מהן מחלקות השקילות ש – R משרה? הסבר.

II. האם R יחס סדר? אם כן – האם סדר מלא (לינארי) או חלקי? הסבר.

ו. האם יחס R על קבוצה A יכול להיות גם יחס שקילות וגם יחס סדר?

אם לא – הוכח. אם כן – תן דוגמא ותאר מה הן מחלקות השקילות והאם הסדר חלקי או מלא (לינארי).

פתרון

א.

1) $\alpha^n - 6\alpha^{n-1} + 7\alpha^{n-2} = 0$

2) $\alpha^2 - 6\alpha + 7 = 0$

$$\alpha_{1,2} = \frac{6 \pm \sqrt{36-28}}{2} = 3 \pm \sqrt{2}$$

3) $a_n = A \cdot (3+\sqrt{2})^n + \mathbf{B} \cdot (3-\sqrt{2})^n$

4) $2 = A + B$

$$10 = A \cdot (3+\sqrt{2}) + \mathbf{B} \cdot (3-\sqrt{2})$$

$$A = 2 - B$$

$$10 = (2-B)(3+\sqrt{2}) + B \cdot (3-\sqrt{2})$$

$$10 - 2(3+\sqrt{2}) = B(3-\sqrt{2}-3-\sqrt{2})$$

$$B = \frac{10-2(3+\sqrt{2})}{-2\sqrt{2}} = -\frac{2}{\sqrt{2}} + 1 = 1 - \sqrt{2}$$

$$A = 1 + \sqrt{2}$$

5) $a_n = (1+\sqrt{2})(3+\sqrt{2})^n + (1-\sqrt{2})(3-\sqrt{2})^n$

ב. **<u>R יחס שקילות</u>**. הוכחה:

<u>רפלקסיביות</u>: לכל קדקוד u יש מסלול באורך 0 ממנו אל עצמו. לכן R רפלקסיבי.

<u>סימטריות</u>: לכל $u,v \in V$ אם קיים מסלול מ u ל v אזי אותו מסלול הוא גם מ v ל u כי הגרף לא מכוון. לכן אם $(u,v) \in R$ אז גם $(v,u) \in R$. לכן R סימטרי.

<u>טרנזיטיביות</u>: אם $(u,v) \in R$ וגם $(v,z) \in R$ אז קיים מסלול ב G מ u ל v, וקיים מסלול ב G מ v ל z. לכן המסלול המתחיל ב - u, והעובר דרך v לכיוון z הוא מסלול מ u ל z בתוך G, ולכן $(u,z) \in R$, ולכן R טרנזיטיבי.

<u>החלוקה למחלקות שקילות</u>: כל רכיב קשירות ב G מהווה מחלקת שקילות של R. זה נכון, כי שני קודקודים נמצאים באותו רכיב קשירות של G רק אם קיים בניהם מסלול ב - G, וע"פ הגדרת היחס R זה שקול לכך שהם עומדים ביחס ונמצאים באותה מחלקת שקילות.

זאת אומרת שהיחס R מחלק את G לרכיבי הקשירות של הגרף.

<u>R אינו בהכרח יחס סדר</u>

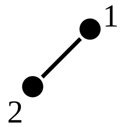
הראינו כבר ש R הא רפלקסיבי וטרנזיטיבי. נותר לדון בתכונת האנטיסימטריות של R. נשים לב שאם קיימת איזשהי קשת ב G, נניח (u,v) הנה קשת בגרף, אז מכך נובע ש $(u,v) \in R$ אבל גם $(v,u) \in R$. ברור ש $u \neq v$ (כי G פשוט ולכן אין בו לולאות), לכן R אינו יחס אנטיסימטרי, ולכן אינו יחס סדר.

זאת אומרת ש R יהיה יחס סדר על גרף בלתי מכוון פשוט, רק אם הגרף ריק מקשתות.

<u>דוגמא נגדית מפורשת (לכך ש R אינו יחס סדר חלקי):</u>

אתר הסטודנטים – החוג למדעי המחשב, אוניברסיטת חיפה http://cs.haifa.ac.il/students/

R={(1,1),(2,2),(1,2),(2,1)}



הסבר : במקרה זה הגרף כולו הוא רק קשת אחת, והראינו שקשת בגרף מביאה את היחס להיות לא אנטיסימטרי

ג. דוגמא ליחס שהנו יחס סדר חלקי וגם יחס שקילות :

$A = \{1,2,3\}$

$R = \{(1,1),(2,2),(3,3)\}$

<u>R הוא יחס שקילות</u> :

<u>רפלקסיבי</u> : $\forall a \in A, \quad (a,a) \in R$

<u>סימטרי</u> : כי לא קיימים ב – A $a \neq b$ כך ש $(a,b) \in R$ לכן התכונה מתקיימת בצורה ריקה

<u>טרנזיטיבי</u> : כי לא קיימים $a \neq b, b \neq c$ כך ש $(a,b) \in R \wedge (b,c) \in R$ ולכן התכונה מתקיימת בצורה ריקה.

$\Leftarrow$ לכן R יחס שקילות.

<u>מחלקות השקילות</u> הן $\{3\}, \{2\}, \{1\}$ כלומר כל איבר ב – A מהווה מחלקת שקילות נפרדת.

<u>R הוא יחס סדר:</u>

ראינו את הרפלקסיביות והטרנזיטיביות. נותר להוכיח את האנטיסימטריות :

<u>אנטיסימטריות</u> : לא קיימים $a \neq b$ ב A כך ש $(a,b) \in R \wedge (b,a) \in R$ לכן אם מתקיים ש $(a,b) \in R \wedge (b,a) \in R$ אזי ברור ש a=b.

R אינו יחס לינארי כי למשל $(1,2) \notin R \wedge (2,1) \notin R$ כלומר 1 ו – 2 אינם ניתנים להשוואה ב R.