בחינה בקורס מתמטיקה דיסקרטית - מועד א'

תאריך: 2000-2001

מס' קורס:

מרצה: דר' חגית הל – אור

מתרגלת: גב' אורה ארבל

עליך לענות על 3 מתוך 4 השאלות הבאות (כל שאלה 34 נק', סה"כ 102 נק')

שאלה 1:

בכל אחד מהסעיפים הבאים קבע האם קיים יחס על קבוצה A כלשהי, המקיים את התכונות הרשומות. אם קיים – תן דוגמא ליחס כזה. אם לא קיים – הוכח שאין כזה יחס:

א. סימטרי ולא טרנזיטיבי

ב. סימטרי, אנטי סימטרי, לא טרנזיטיבי

ג. טרנזיטיבי, סימטרי, לא רפלקסיבי

ד. טרנזיטיבי, לא סימטרי, לא אנטיסימטרי

שאלה 2:

תהי D מטריצה בינארית (שאיבריה 0 ו – 1 בלבד), בגודל $n \times m$.

א. כמה מטריצות כאלה ישנן?

ב. כמה מטריצות יש כך שמספר ה – 1 בהן הוא זוגי?

ג. כמה מטריצות יש כך שמספר ה - 1 בכל שורה שלהן הוא זוגי?

ד. יהי $k \le n$ קבוע כלשהו. כמה מטריצות יש עם k שורות של אפסים?

שאלה 3

א. תהי $f : A \to B$ פונקציה חד חד ערכית, ויהיו $g : B \to C,\ \ h : B \to C$ פונקציות כלשהן.
הוכח או הפרך: אם $g \circ f = h \circ f$ אז $g = h$

ב. הוכח או הפרך: הפונקציה $f : R \to P(R)$ (פונקציה מהממשיים לקב' החזקה של הממשיים) המוגדרת ע"י $f(x) = \{y \mid y \le x\}$ היא חד חד ערכית, ועל (ענה בנפרד האם היא חד חד ערכית והאם היא על)

שאלה 4:

א. רשום יחס רקורסיבי לבעיה הבאה:

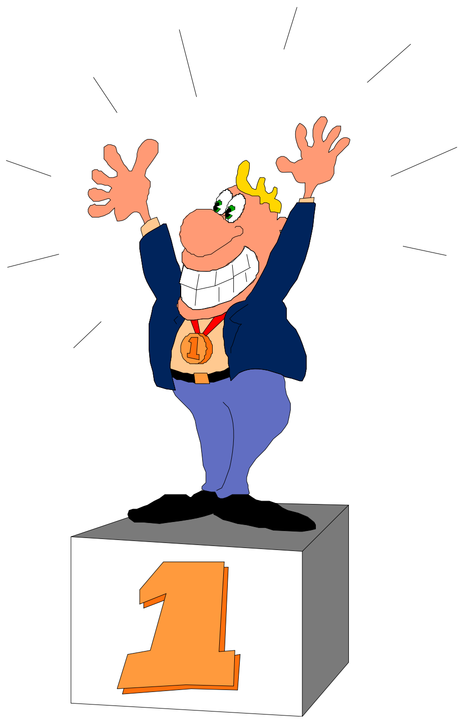
בכמה דרכים ניתן לסדר מחדש n אנשים היושבים על ספסל , כך שאף אדם לא יתרחק ביותר מכסא אחד ממקום ישיבתו המקורי (כלומר כל אדם יישאר במקומו, או שיעבור לכסא הסמוך מימינו או משמאלו)

ב. לכל סעיף בנפרד, קבע האם קיים גרף פשוט שזהו אוסף הדרגות שלו :

i) 1,2,3,4,5,5

ii) 1,2,3,4,4,5

iii) 1,2,3,3,4,5



בהצלחה לכולם !!!

פתרון הבחינה בקורס מתמטיקה דיסקרטית - מועד א'

שאלה 1:

בכל אחד מהסעיפים הבאים קבע האם קיים יחס על קבוצה A כלשהי , המקיים את התכונות הרשומות. אם קיים – תן דוגמא ליחס כזה. אם לא קיים – הוכח שאין כזה יחס :

ה. סימטרי ולא טרנזיטיבי

ו. סימטרי, אנטי סימטרי, לא טרנזיטיבי

ז. טרנזיטיבי, סימטרי, לא רפלקסיבי

ח. טרנזיטיבי, לא סימטרי, לא אנטיסימטרי

פתרון:

א. קיים יחס כזה, למשל $R=\{(1,2),(2,1)\}$, $A=\{1,2,3\}$, אזי R סימטרי כי $\forall a,b\in A(aRb\rightarrow bRa)$. R לא טרנזיטיבי כי $(2,1)\in R \wedge (1,2)\in R$ אבל $(1,1)\notin R$.

ב. לא קיים יחס כזה. אם R אינו טרנזיטיבי אז קיימים $a,b,c\in A$ כך ש $(a,b)\in R\wedge(b,c)\in R\wedge(a,c)\notin R$. שימו לב שהתנאי הזה דורש ש $a\neq b\wedge b\neq c$ אחרת הוא פשוט לא יתכן! בהמשך – מסימטריות R נקבל למשל ש $(b,a)\in R$, ואנטיסימטריות של R דורש אז ש a=b . סתירה, לכן לא קיים יחס המקיים את שלושת התכונות הנ"ל.

ג. קיים כזה יחס, למשל: $R=\{(1,2),(2,1),(1,1),(2,2)\}$, $A=\{1,2,3\}$. R סימטרי כי $\forall a,b\in A(aRb\rightarrow bRa)$. R טרנזיטיבי כי $(1,2),(2,1)\in R\rightarrow(1,1),(2,2)\in R$ (בהחלפת סדר האיברים צריכים להתקבל שני הזוגות שרשמתי). R לא רפלקסיבי כי $(3,3)\notin R$.

ד. קיים כזה יחס, למשל $R=\{(1,2),(2,1),(1,1),(2,2),(2,3),(1,3)\}$ $A=\{1,2,3\}$, אזי R לא סימטרי כי $(2,3)\in R$ אבל $(3,2)\notin R$. R לא אנטיסימטרי כי $(1,2)\in R\wedge(2,1)\in R$ וברור ש $2\neq 1$. R טרנזיטיבי כי

$$\begin{aligned}
(1,2)\in R\wedge(2,1)\in R&\rightarrow(1,1)\in R\\
(2,1)\in R\wedge(1,2)\in R&\rightarrow(2,2)\in R\\
(1,2)\in R\wedge(2,3)\in R&\rightarrow(1,3)\in R\\
(2,1)\in R\wedge(1,3)\in R&\rightarrow(2,3)\in R
\end{aligned}$$

שאלה 2:

תהי D מטריצה בינארית (שאיבריה 0 ו 1 – 1 בלבד), בגודל $n \times m$.

ה. כמה מטריצות כאלה ישנן?

ו. כמה מטריצות יש כך שמספר ה – 1 בהן הוא זוגי?

ז. כמה מטריצות יש כך שמספר ה - 1 בכל שורה שלהן הוא זוגי?

ח. יהי $n \geq k$ קבוע כלשהו. כמה מטריצות יש עם בדיוק k שורות של אפסים?

פתרון:

א. כל איבר במטריצה יכול להיות 0 או 1 לכן מספר המטריצות הוא $2^{m \cdot n}$.

ב. את $m \cdot n - 1$ המקומות הראשונים במטריצה נמלא כרצוננו, ונשאיר את הפינה הימנית העליונה ריקה. אחרי מילוי יתר המקומות, נעבור על המטריצה ונספור את מספר האחדים. אם יש מספר זוגי, אז נמלא את הפינה ב 0. אם יש מספר אי זוגי של אחדים אז נשים בה 1 ונקבל מספר זוגי של אחדים במטריצה. לכן נקבל שיש $2^{m \cdot n - 1}$ מטריצות שמספר האחדים בהם זוגי.

ג. באותו עקרון של סעיף ב – בכל שורה יש m איברים. את m-1 הראשונים נמלא כרצוננו ואת האחרון נמלא לפי המצב. לכן לכל שורה יש 2^{m-1} הצגות אפשריות. במטריצה יש n שורות לכן יש $2^{n(m-1)}$ מטריצות העונות על הדרישה.

ד. נבחר תחילה את k שורות האפסים ב $\binom{n}{k}$ אפשרויות. כעת צריך לוודא שבכל אחת מהשורות שנותרו יש לפחות 1 אחד. מספר ה"דגמים" של שורה באורך m שבה יש לפחות 1 אחד הוא $2^m - 1$ (כל האפשרויות פחות האפשרות של שורת אפסים) . כעת כל שורה שאיננה שורת אפסים "בוחרת" לעצמה את אחת מהאפשרויות שספרנו . יש $n-k$ שורות כאלה, לכן בסכ"ה מספר המטריצות המקיימות את הדרישה הוא $(2^m - 1)^{n-k} . \binom{n}{k}$

שאלה 3

ג. תהי $f : A \to B$ פונקציה חד חד ערכית, ויהיו $g : B \to C, \;\; h : B \to C$ פונקציות כלשהן.

הוכח או הפרך: אם $g \circ f = h \circ f$ אז $g = h$

ד. הוכח או הפרך: הפונקציה $f : R \to P(R)$ (פונקציה מהממשיים לקבי החזקה של הממשיים) המוגדרת ע"י $f(x) = \{y \mid y \leq x\}$ היא חד חד ערכית, ועל (ענה בנפרד האם היא חד חד ערכית והאם היא על)

פתרון

א. הפרכה! דוגמא נגדית :

$$
\begin{aligned}
&A=\{1,2,3\}\\
&B=\{a,b,c,d\}\\
&C=\{s,w,t\}\\
&f:A\to B, \qquad f=\{(1,a),(2,b),(3,c)\}\\
&g:B\to C, \qquad g=\{(a,s),(b,w),(c,t),(d,w)\}\\
&h:B\to C, \qquad h=\{(a,s),(b,w),(c,t),(d,t)\}\\
&\Downarrow\\
&g\circ f=\{(1,s),(2,w),(3,t)\}=h\circ f\\
&g\neq f
\end{aligned}
$$

שימו לב שגם מתקיים ש f חח״ע (זה תנאי בשאלה).

ב. <u>f חח״ע</u> כי לכל $x,y\in R$ אם $x\neq y$ אז $(x<y)\vee(y<x)$. בלי הגבלת הכלליות נניח ש $x<y$ ואז נקבל ש $f(x)\neq f(y) \Leftarrow y\in f(y)\wedge y\notin f(x)$.

f איננה על כי למשל עבור הקבוצה $\{1\}$ לא קיים $x\in R$ כך ש

f(x)= $\{1\}=\{y\in R\mid y\leq x\}$, כי אם $1\leq x$ אז גם $0\leq x$ לכן $0\in f(x)$, אבל $0\notin\{1\}$.

<u>שאלה 4:</u>

ג. רשום יחס רקורסיבי לבעיה הבאה:

בכמה דרכים ניתן לסדר מחדש n אנשים היושבים על ספסל, כך שאף אדם לא יתרחק ביותר מכסא אחד ממקום ישיבתו המקורי (כלומר כל אדם יישאר במקומו, או שיעבור לכסא הסמוך מימינו או משמאלו)

ד. לכל סעיף בנפרד, קבע האם קיים גרף פשוט שזהו אוסף הדרגות שלו:

(iv 1,2,3,4,5,5

(v 1,2,3,4,4,5

(vi 1,2,3,3,5,6

(vii 1,2,3,3,4,5

<u>פתרון:</u>

א. נסמן ב a_n את מספר הדרכים לסדר מחדש n אנשים היושבים על ספסל, כך שאף אדם לא יתרחק ביותר מכסא אחד ממקום ישיבתו המקורי.

נשים לב שהאדם בקצה (נניח הימני) יכול להישאר במקום או לזוז כיסא אחד שמאלה. אם הוא נשאר במקומו אז יתר האנשים יכולים להסתדר ב a_{n-1} אפשרויות, ואם הוא זז שמאלה אז בהכרח היושב משמאלו עובר לקצה הימני של הספסל (זאת אומרת שהם מחליפים מקומות ביניהם). יתר האנשים יכולים להסתדר ב a_{n-2} אפשרויות.

מכאן ש

$$
\begin{aligned}
&a_n=a_{n-1}+a_{n-2}\\
&a_0=a_1=1
\end{aligned}
$$

ב. נענה על כלל סעיף בנפרד:

i) 1,2,3,4,5,5 – לא קיים גרף כזה כי אם בגרף בעל 6 קודקודים יש שניים בעלי הדרגה 5, אז כל אחד מהם מחובר לכל היתר. לכן לא יתכן קודקוד מדרגה 1

ii) 1,2,3,4,4,5 – לא קיים גרף כזה כי סכום הדרגות צריך להיות זוגי

iii) 1,2,3,3,5,6 - בגרף פשוט בעל 6 קודקודים לא יתכן קודקוד שדרגתו 6.

iv) 1,2,3,3,4,5 גרף לדוגמא: