אוניברסיטת חיפה
הפקולטה למדעי החברה
החוג למדעי המחשב

21.1.2005

מתימטיקה דיסקרטית, סימסטר א' תשס"ה - פתרון מועד א

מספר הקורס: 203.1850.ב.1

מרצה: מר עודד לכיש

מתרגל: מר פלג יפתחאל

הנחיות:

1. **משך הבחינה שעתיים וחצי.**
2. **חומר עזר מותר: 5 דפי סיכום אישיים בלבד!**
3. **בבחינה 5 שאלות. יש להשיב על 4 מתוכן (במקרה שיהיו 5 תשובות, הציון יינתן עלפי 4 התשובות הראשונות).**
4. **יש לנמק כל תשובה (תשובות לא מנומקות יפסלו).**
5. **כתבו בכתב יד קריא, מסודר ונקי.**

בהצלחה!!!

<u>שאלה 1 (25 נקודות)</u>

R היא רלציה מעל קבוצה A . A_1 היא תת קבוצה של A. הרלציה R_1 מוגדרת מעל A_1 ע"י: $R_1 = R \cap A_1 \times A_1$.
הוכח או הפרך:

א. **(10 נק')** אם R אנטי סימטרית אז R_1 אנטי סימטרית.

ב. **(15 נק')** אם R יחס שקילות אז R_1 יחס שקילות.

פיתרון:

א. נתון ש R אנטי סימטרית. נוכיח ש R_1 אנטי סימטרית.

יהיו $a,b \in A_1$ כך ש $(a,b)\in R_1 \wedge (b,a)\in R_1$.
$R \subseteq R_1$ לכן $(a,b)\in R \wedge (b,a)\in R$. האננטיסימטריות של R נובע ש $a=b$.
מ.ש.ל.

ב. נתון ש R יחס שקילות. נוכיח ש R_1 יחס שקילות.

<u>רפלקסיביות:</u>
יהי $a \in A_1$.
$A \subseteq A_1$ לכן $a \in A$
R רפלקסיבי לכן $(a,a)\in R$
כמו כן $(a,a)\in A_1 \times A_1$. לכן, לפי הגדרת R_1 נקבל ש $(a,a)\in R_1$

<u>טרנזיטיביות:</u>
יהיו $a,b,c \in A_1$ כך ש $(a,b)\in R_1 \wedge (b,c)\in R_1$
$R \subseteq R_1$ לכן $(a,b)\in R \wedge (b,c)\in R$.
R טרנזיטיבי לכן $(a,c)\in R$
כמו כן $(a,c)\in A_1 \times A_1$. לכן, לפי הגדרת R_1 נקבל ש $(a,c)\in R_1$

<u>סימטריות:</u>
יהיו $a,b \in A_1$ כך ש $(a,b)\in R_1$.
$R \subseteq R_1$ לכן $(a,b)\in R$.
R סימטרי לכן $(b,a)\in R$.
כמו כן $(a,b)\in A_1 \times A_1$. לכן, לפי הגדרת R_1 נקבל ש $(a,b)\in R_1$

מ.ש.ל.

שאלה 2 (25 נקודות)

יהי $G=(V,E)$ גרף פשוט לא מכוון בעל n קודקודים.

א. **(13 נק')** הוכח שעל ידי החלפת הצלעות של G בקשתות (מכוונות) ניתן לקבל גרף פשוט, מכוון, וחסר מעגלים מכוונים.

ב. **(12 נק')** גרף **מכוון** יקרא קשיר חזק אם ורק אם יש מסלול מכוון בין כל קודקוד בגרף לכל קודקוד אחר בגרף. הוכח שאם G קשיר ודרגת כל קודקודיו זוגית אז על ידי החלפת הצלעות של G בקשתות (מכוונות) ניתן לקבל גרף מכוון קשיר חזק.

פיתרון:

א.

נמספר באופן שרירותי את קודקודי הגרף. המספור של הקודקוד $a \in V$ יסומן ע"י $g(a)$.

צלע $\{a,b\}$ תכוון לכיוון a אם $g(a) > g(b)$ ולכיוון b אם $g(b) > g(a)$. נוכיח שהגרף המכוון המתקבל הינו חסר מעגלים מכוונים.

נניח בשלילה שקיים מעגל מכוון $a,b,c,\cdots,k,a$. אזי מתקיים:

$g(a) < g(b) < g(c) < \cdots < g(k) < g(a)$. כלומר קיבלנו ש $g(a) < g(a)$. סתירה.

מ.ש.ל.

ב. מאחר ש G קשיר ודרגת כל קודקודיו זוגית יש בו מעגל אוילר. נכוון את צלעותיו של G עם כיוון המעגל. אנו מקבלים מעגל מכוון שעובר דרך כל קדקודי הגרף. מעגל מכוון זה יוצר מסלול מכוון בין כל שני קודקודים בגרף.
מ.ש.ל.

שאלה 3 (25 נקודות)

א. **(13 נק')** יהי $G=(V_1,V_2,E)$ גרף דו צדדי, פשוט, לא מכוון, בעל $2n$ קודקודים ו 3-רגולרי (דרגת כל קודקוד בגרף היא בדיוק 3). הוכח שיש בגרף קבוצה של מעגלים פשוטים זרים, כך שכל קודקוד בגרף נמצא באחד מהמעגלים הנ"ל.

ב. **(12 נק')** יהי $G=(V_1,V_2,E)$ גרף דו צדדי, פשוט, לא מכוון, בעל $2n$ קודקודים, כך שדרגת כל קודקוד היא לכל היותר 3. הראה שעל ידי הוספת צלעות וקודקודים לגרף ניתן לקבל גרף דו- צדדי 3-רגולרי.

פיתרון:
א.
מאחר שהגרף 3 רגולרי יש בו 3 שידוכים מושלמים שונים. נבחר אחד מהם ונוריד את צלעותיו מהגרף. מתקבל גרף 2 רגולרי. בגרף זה דרגות כל הקודקודים זוגיות לכן בכל אחד מרכיבי הקשירות שלו יש מעגל אוילר. מאחר שכל רכיב קשירות הוא גרף 2 רגולרי נקבל שהמעגל מבקר כל קודקוד בדיוק פעם אחת (מעגל פשוט). כל אחד מקודקודי הגרף נמצא בדיוק באחד מהמעגלים הפשוטים הנ"ל.
מ.ש.ל.

ב.
נניח ב.ה.כ ש: $|V_2| \le |V_1|$. נוסיף לקבוצה V_2 בדיוק $|V_2|-|V_1|$ קודקודים מבודדים כך שלאחר ההוספה יהיה בשתי הקבוצות אותו מספר קודקודים.

יהי m מספר הצלעות שיש להוסיף לקודקודי V_1 על מנת שדרגת כ"א מהם תהייה 3.
$m = 3\cdot|V_1| - |E|$. אם $m=1$ נוסיף עוד קודקוד לכל אחת משתי הקבוצות כך שיתקיים: $m>1$.

נבנה כעת גרף דו"צ 2 רגולרי $G' = (U_1, U_2, E')$ על $2\cdot m$ קודקודים (כלומר $|U_1| = |U_2| = m$).

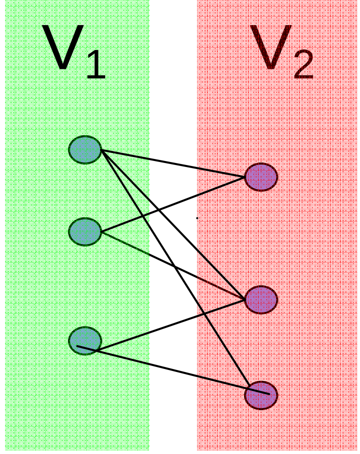
נעבור על כ"א מהקודקודים ב U_1 ונוסיף לו צלע אחת כך שדרגתו תהייה 3. צלע זו תחובר לאחד הקודקודים ב V_2 שדרגתם קטנה מ- 3. m הצלעות שכתוצאה מכך תתווספנה לקודקודי V_2 יהפכו כל אחד מהם להיות בעל דרגה 3. באופן דומה נעבור על כ"א מקודקודי U_2 ונחברם לקודקודי V_1 .
נסמן ב M את קבוצת הצלעות החדשה שהוספנו.

הגרף $G \cup G' = (V_1 \cup U_1 \,, V_2 \cup U_2 \,, E \cup E' \cup M)$, הוא גרף דו"צ 3 רגולרי כנדרש.

מ.ש.ל.

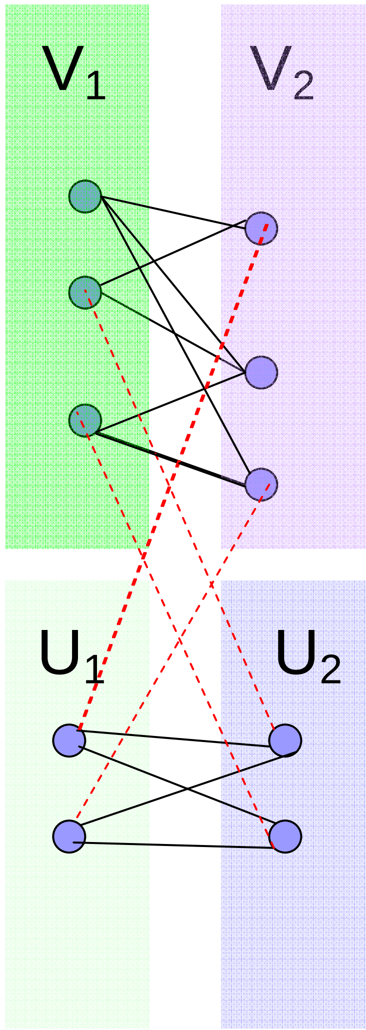
<u>דוגמה:</u>

אם G הוא הגרף הבא:



אזי $m = 3\cdot|V_1| - |E| = 3\cdot 3 - 7 = 2$

להלן הגרף הדו"צ שניתן לבנות ע"י הוספת צלעות וקודקודים ל G :



שאלה 4 (25 נקודות)

(הסעיפים בשאלה זו אינם קשורים זה לזה)

א. **(15 נק')** יהי $G=(V,E)$ גרף פשוט מלא (בין כל זוג קודקודים יש צלע) בעל n קודקודים $V=\{v_1,v_2,\ldots,v_n\}$. כל צלע בגרף צבועה באדום או בכחול. לכל קודקוד $v_i \in V$ יהי d_i מספר הצלעות שמחוברות אליו וצבועות בכחול. מעגל באורך שלוש הוא בעל צבע אחיד אם כל הצלעות שמוכלות בו צבועות באותו הצבע. כמה מעגלים באורך 3 בעלי צבע אחיד יש ב G (כתלות ב n ובערכים $d_1,d_2,\ldots,d_n$).

ב. **(10 נק')** הוכח בשיטה קומבינטורית את הזהות הבאה:

$$\binom{n}{k} = \sum_{i=1}^{n-k+1}\binom{n-i}{k-1}$$ (כאשר ידוע $n \geq k > 0$)

פיתרון:
א.

נגדיר:
-- "משולש טוב" - מעגל באורך 3 אשר כל צלעותיו צבועות באותו הצבע.
-- "משולש רע" - מעגל באורך 3 אשר יש בו צלעות בצבעים שונים.

נספור כמה משולשים רעים ישנם, ונפחית מספר זה ממספר המשולשים סה"כ.

בכל משולש רע יש בדיוק שני קודקודים המחברים צלעות בצבעים שונים (צלע אדומה עם צלע כחולה).
לכן עם נעבור על כל אחד מהקודקודים בגרף ונספור לכמה משולשים רעים הוא שייך נקבל 2 כפול מספר המשולשים הרעים (*).

מספר המשולשים הרעים אליהם שייך הקודקוד ה i שווה למספר הצלעות הכחולות החלות הקודקוד כפול מספר הצלעות האדומות החלות בו: $d_i \cdot (n-1-d_i)$ (**)

לפי (*) ו- (**) נקבל שמספר המשולשים הרעים הינו: $\dfrac{\sum_{i=1}^{n}(d_i \cdot (n-1-d_i))}{2}$

מספר המשולשים סה"כ בגרף המלא על n קודקודים הינו : $\binom{n}{3}$.

לפיכך מספר המשולשים הטובים הינו: $\binom{n}{3} - \dfrac{\sum_{i=1}^{n}(d_i \cdot (n-1-d_i))}{2}$

מ.ש.ל.

ב.

צד שמאל מונה את מספר תתי הקבוצות בגודל k של הקבוצה $\{1,2,\cdots n\}$. נראה שצד ימין מונה זאת גם כן.
נגדיר את x_i להיות מספר תתי הקבוצות בגודל k של הקבוצה $\{1,2,\cdots n\}$ אשר האיבר i שייך אליהן וכל איבר j הקטן ממש מ- i לא שייך אליהן.

לכן מספר תתי הקבוצות בגודל k של הקבוצה $\{1,2,\cdots n\}$ יהיה $\sum_{i=1}^{n-k+1} x_i$.

כמו כן: $x_i = \binom{n-i}{k-1}$.

לפיכך: $\binom{n}{k} = \sum_{i=1}^{n-k+1} x_i = \sum_{i=1}^{n-k+1} \binom{n-i}{k-1}$

מ.ש.ל.

<u>שאלה 5 (25 נקודות)</u>

<u>א.</u> **(15 נק')** n אנשים **שונים זה מזה** יושבים בשורה[1]. ברצוננו להלביש כל איש בכובע שצבעו לבן, אדום או כחול. בכמה אופנים אפשר לעשות זאת אם אסור ששני אנשים שיושבים זה ליד זה ילבשו כובע עם אותו צבע?

<u>ב.</u> **(10 נק').** ***10*** אנשים **שונים זה מזה** יושבים בשורה. ברצוננו להלביש כל איש בכובע שצבעו לבן או שחור. בכמה אופנים אפשר לעשות זאת אם אסור ששני אנשים שלובשים **כובע שחור** ישבו זה ליד זה.

פיתרון:

א.

ישנן 3 אפשרויות לבחור כובע לאדם הראשון בשורה. עבור כ"א מהן יש 2 אפשרויות לבחור כובע לאדם שיושב לימינו. עבור כ"א מהן יש 2 אפשרויות לבחור כובע לאדם הבא בתור, וכך הלאה...
סה"כ: $3\cdot 2^{n-1}$ אפשרויות .

ב.

נפתור זאת באמצאות נוסחת נסיגה:
נגדיר את $f(n)$ להיות מספר האפשרויות להלביש n אנשים.
אדם אחד יכול להיות מולבש ב כ"א משני סוגי הכובעים לכן: $f(1)=2$.
ישנם 3 אפשרויות להלביש שני אנשים: $f(2)=3$

במקרה הכללי, נשים לב לאבחנה הבאה:

[1] בתופס המקורי של המבחן השאלה הייתה לגבי אנשים היושבים במעגל.

מספר האפשרויות להלביש n אנשים באופן שהימני שבהם מולבש בכובע לבן + מספר האפשרויות להלביש n אנשים באופן שהימני שבהם מולבש כובע שחור = מספר האפשרויות להלביש n אנשים

ישנם $f(n-1)$ אפשרויות בהן האדם הימני ביותר (האדם ה *n*) מולבש כובע לבן. זאת מאחר שהוא יכול להיות מצורף לכל אחד מ $f(n-1)$ הלבשות הכובעים האפשריות ל *n-1* אנשים.

ישנם $f(n-2)$ אפשרויות בהן האדם הימני ביותר (האדם ה n) מולבש בכובע שחור. זאת מאחר שבמקרה זה שכנו משמאל (האדם ה n-1) חייב להיות מולבש בכובע לבן ואז שניהם יכולים להיות מצורפים לכל אחד.מ $f(n-2)$ הלבשות הכובעים האפשריות ל n-2 של אנשים.

לפיכך אנו מקבלים את נוסחת פיבונאצי: $f(n) = f(n-1) + f(n-2)$.

נחשב את $f(10)$:

$f(1) = 2$

$f(2) = 3$

$f(3) = f(2) + f(1) = 5$

$f(4) = f(3) + f(2) = 8$

$f(5) = f(4) + f(3) = 13$

$f(6) = f(5) + f(4) = 21$

$f(7) = f(6) + f(5) = 34$

$f(8) = f(7) + f(6) = 55$

$f(9) = f(8) + f(7) = 89$

$f(10) = f(9) + f(8) = 144$