Department of Computer Science

אוניברסיטת חיפה

הפקולטה למדעי החברה
החוג למדעי המחשב

14.7.2004

מתימטיקה דיסקרטית, סימסטר ב׳ תשס״ד - מועד ב

מספר הקורס: 203.1850.ב.1

מרצה: מר עודד לכיש

מתרגל: מר פלג יפתחאל

הנחיות:

1. **משך הבחינה שעתיים וחצי.**
2. **חומר עזר מותר: 5 דפי סיכום אישיים בלבד!**
3. **בבחינה 5 שאלות. יש להשיב על 4 מתוכן.**
4. **יש לנמק כל תשובה (תשובות לא מנומקות יפסלו).**
5. **כתבו בכתב יד קריא, מסודר ונקי.**

בהצלחה!!!

<u>שאלה 1 (25 נקודות)</u>

<u>א</u>. (13 נק') מהו המספר הקטן ביותר של צלעות שצריך להוריד מגרף פשוט, לא מכוון, **<u>מלא</u>** עם **n** קודקודים, כדי שהגרף יהיה **2** צביע?

<u>ב</u>. (12 נק') יהי G גרף פשוט לא מכוון (סופי). הוכח או הפרך: אם יש בגרף לכל היותר קודקוד אחד שדרגתו קטנה מ **2** (דרגת כל שאר הקודקודים בגרף היא לפחות **2**) אז יש בגרף מעגל.

<u>פיתרון:</u>

א.

מספר הצלעות המקסימאלי בגרף 2 צביע בו n קודקודים	-	מספר הצלעות בגרף המלא על n קודקודים	=	המספר הקטן ביותר של צלעות שצריך להוריד מגרף מלא עם n קודקודים כדי שהגרף יהיה 2 צביע

מספר הצלעות המקסימאלי בגרף דוצ K_{V_1,V_2} מתקבל כאשר זהו גרף דוצ מלא בו מתקיים:

$V_1 = \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$, $V_2 = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ (ב.ה.כ) . מכאן מקבלים מיידית שבגרף זה $E = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \cdot \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$

מאחר שגרף הוא 2 צביע אמם הוא דוצ (נובע ישירות מההגדרות של דו-צדדיות ושל צביעה) נקבל שהתשובה הסופית הינה $\frac{n \cdot (n-1)}{2} - \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \cdot \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$.

ב. <u>הוכחה:</u>

אם דרגת כל הקודקודים גדולה או שווה ל- 2 אזי נבחר באופן שרירותי קודקוד כלשהו ונתחיל ממנו טיול בגרף באופן שאיננו חוזרים על הצלע ממנה באנו. מאחר שהגרף סופי , ואין בו קודקודים בעלי דרגה 1 נגיע בסופו של דבר לקודקוד בו ביקרנו כבר. ---> בגרף יש מעגל.

אם יש בדיוק קודקוד אחד שדרגתו קטנה מ 2 , ודרגתו היא אפס אזי קודקוד זה הוא ברכיב קשירות מנוון (רכיב בו יש קודקוד אחד בלבד). נבחר את אחד הקודקודים האחרים בגרף ונתחיל ממנו טיול כמתואר לעיל.

אם יש בדיוק קודקוד אחד שדרגתו קטנה מ 2 , ודרגתו היא 1 , אז נבחר אותו להיות הקודקוד שממנו מתחילים טיול כמתואר לעיל.

מ.ש.ל

הוכחה אלטרנטיבית: נניח בשלילה שאין מעגלים. אזי הגרף הינו יער. אם אין ביער צלעות בכלל אזי יש לפחות שני קודקודים שדרגתם אפס – סתירה לנתון. אחרת, יש ביער עץ. מאחר שבכל עץ יש לפחות שני עלים (הוכחנו התירגול) , יש בעץ שני קודקודים בעלי דרגה 1. סתירה לנתון.

מ.ש.ל

שאלה 2 (25 נקודות)

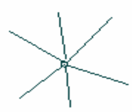
א. **(13 נק')** מה המספר המינימאלי של צלעות בגרף פשוט, לא מכוון, קשיר עם **n** קודקודים, שאורך המסלול הארוך ביותר בו הוא **2**.

ב. **(12 נק')** יהי $G=(V_1,V_2,E)$ גרף דו צדדי פשוט, לא מכוון, ו-d-רגולארי (d>0). הוכח או הפרך: יש ב G זיווג מושלם.

פיתרון:

א.

קיים גרף פשוט, לא מכוון, קשיר עם n קודקודים אשר אורך המסלול הארוך ביותר בו הוא 2 ובו n-1 צלעות:



לא קיים גרף כזה עם פחות מ n-1 צלעות מאחר שאז הגרף לא קשיר.

לכן, מספר הצלעות המינימאלי בגרף כנ"ל הינו n-1 .

ב.

<u>הוכחה[1]:</u>

סימון: אם S היא קבוצה של קודקודים אזי $\Gamma(S)$ היא קבוצת הקודקודים השכנים לקודקודי הקבוצה S .

תהי $S \subseteq V_1$ ותהי F קבוצת כל הצלעות החלות ב- S . הגרף d – רגולרי ולכן $|F| = d \cdot |S|$. תהי H קבוצת כל הקשתות החלות ב- $\Gamma(S)$. שוב מכיוון שהגרף d – רגולרי אז $|H| = d \cdot |\Gamma(S)|$. אולם $F \subseteq H$, כי כל צלע שחלה בקודקוד של S , חלה גם ב- $\Gamma(S)$. ולכן $|F| \le |H|$. לכן, $d \cdot |S| \le d \cdot |\Gamma(S)|$ ומכאן $|S| \le |\Gamma(S)|$ לכל קבוצה $S \subseteq V_1$. ע"פ משפט החתונה של Hall יש בגרף זיווג מושלם.

<u>שאלה 3 (25 נקודות)</u>

<u>א.</u> (10 נק') בכיתה **m** בנות ו**n** בנים. כמה אפשרויות יש להושיב את התלמידים בשורה כך שכל הבנות יושבות ברציפות?

<u>ב.</u> (15 נק') בכיתה **24** תלמידים. כל תלמיד שולח מכתב ל**12** תלמידים אחרים (בכיתה) הוכח שיש שני תלמידים בכיתה ששלחו זה לזה מכתב.

<u>פיתרון:</u>

א.

יהיה לנו n בנים וגוש של בנות כלומר n+1 עצמים בדידים . ישנן $(n+1)!$ אפשרויות לסדרם בשורה.
עבור כל אחת מאפשרויות אלה יש $m!$ אפשרויות לסידורים הפנימיים של הבנות. לפיכך התשובה היא:
$(n+1)! \cdot m!$

ב.

-- בכיתה ישנם $\binom{24}{2} = 12 \times 23$ צמדים של תלמידים (קבוצות בנות שני תלמידים).

-- בסה"כ נשלחו 12×24 מכתבים.

לפי עקרון שובך היונים, אם מחלקים 12×24 מכתבים ל 12×23 צמדי תלמידים אזי לפחות צמד תלמידים אחד יקבל שני מכתבים. משמעות הדבר היא שיש בכיתה לפחות שני תלמידים ששלחו מכתב זה לזה.

[1] ראה פיתרון בלינאל פרנס, פרק 5.4 .

שאלה 4 (25 נקודות)

א. (13 נק') לרשותך מספר בלתי מוגבל של כדורים אדומים זהים וכדורים כחולים זהים. בכמה אופנים שונים ניתן לסדר בשורה, n מתוך הכדורים, כאשר מספר הכדורים הכחולים זוגי?

ב. (12 נק') לרשותך מספר בלתי מוגבל של כדורים אדומים זהים, כדורים כחולים זהים, כדורים שחורים זהים, כדורים לבנים זהים. כמה אפשרויות שונות יש לסדר 4 כדורים מתוכם על קודקודים של ריבוע,שממוספרים 1 עד 4, כך שאין צלע בין שני כדורים מאותו הצבע?

פיתרון:

א.

מסדרים n-1 כדורים בשורה ב- 2^{n-1} אפשרויות. ישנה אפשרות אחת בלבד לסידור הכדור האחרון:

-- כדור זה חייב להיות כחול אם מבין n-1 הכדורים הראשונים היה מספר אי-*זוגי* של כדורים כחולים.

-- כדור זה חייב להיות אדום אם מבין n-1 הכדורים הראשונים היה מספר *זוגי* של כדורים כחולים.

לכן מספר האופנים הינו: $2^{n-1}\cdot 1 = 2^{n-1}$

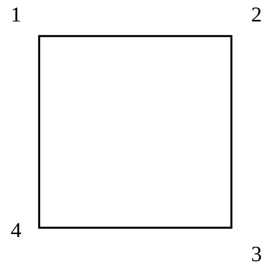
ב.

ניתן לצבוע את קודקודי הריבוע עם שניים, שלושה או ארבעה צבעים. לפיכך, נחלק למקרים את אפשרויות הצביעה באופן הבא:

- <u>כל ארבעת הצבעים משתתפים בצביעה:</u> סידור 4 צבעים על 4 קודקודים מתויגים שקול לסידור 4 עצמים בדידים בשורה. לכן ישנן $4!=24$ אפשרויות בהן יש שימוש בכל ארבעת הצבעים.
- <u>שלושה צבעים משתתפים בצביעה:</u> בריבוע ישנם שני זוגות של קודקודים אשר אינם סמוכים זה לזה. כאשר צובעים את הריבוע בשלושה צבעים יהיה אחד מהזוגות האלה צבוע באותו צבע, כאשר הזוג האחר צבוע בשני צבעים שונים .ישנן 2 אפשרויות לבחירת הזוג שיצבע באותו צבע. ישנן $\binom{4}{3}$ אפשרויות לבחירת שלושת הצבעים שישתתפו בצביעה. עבור כ"א מהן ישנן $\binom{3}{1}$ אפשרויות לבחירת הצבע בו יצבע הזוג עם הצבע הזהה. עבור כ"א מהן יש 2 אפשרויות לצביעת הזוג אשר אינו צבוע באותו צבע. לפיכך יש $2\cdot\binom{4}{3}\cdot\binom{3}{1}\cdot 2 = 48$ אפשרויות במקרה זה.
- <u>שני צבעים משתתפים בצביעה:</u> כאמור, בריבוע ישנן שני זוגות של קודקודים אשר אינם סמוכים זה לזה. כאשר צובעים את הריבוע בשני צבעים ישנן $\binom{4}{2}$ אפשרויות לבחירת שני הצבעים שישתתפו בצביעה ועבור כ"א מהן יש שתי אפשרויות לצביעת שני זוגות הקודקודים. לכן ישנן $\binom{4}{2}\cdot 2 = 12$ אפשרויות במקרה זה.

האפשרויות לעייל זרות זו לזו לכן מספר האפשרויות הוא הסכום: $24+48+12=84$

הוכחה אלטרנטיבת :



נחלק את אפשרויות הצביעה לשתי מיקרים זרים:

1) קודקודים 2 ו-4 צבועים באותו צבע. במקרה זה יהיו לנו $\binom{4}{1}$ אפשרויות לבחירת הצבע של קודקוד 1 . עבור כ"א מהן יהיו לנו $\binom{3}{1}$ אפשרויות לבחירת הצבע בו יצבעו קודקודים 2 ו- 4 . עבור כל אחת מהן יהיו לנו $\binom{3}{1}$ לצבעית קודקוד מס 3 (ניתן להשתמש בכ"א מארבעת הצבעים פרט לצבע בו צבענו את קודקודים 2 ו-4).

לכן במקרה זה יהיו לנו $36=\binom{3}{1}\cdot\binom{3}{1}\cdot\binom{4}{1}$ אפשרויות.

2) קודקודים 2 ו-4 אינם צבועים באותו הצבע. במקרה זה צריך לבחור (עם חשיבות לסדר) שני צבעים שישמשו לצביעת קודקודים 2 ו-4 . לכן במקרה זה יהיו לנו $4\cdot\binom{3}{2}\cdot 2\cdot 2=48$ אפשרויות.

מאחר ששני מיקרים אלה זרים נקבל שמספר אפשרויות הצביעה בסה"כ הינו: $36+48=84$.

שאלה 5 (25 נקודות)

תהי A קבוצה כך ש $|A|\geq 2$.

תהי f פונקציה: $f:A\times P(A)\rightarrow P(P(A))$

שמוגדרת באופן הבא $f(x,Y)=\{ B\subseteq Y \mid x\in B\}$
(x איבר ב A , Y תת קבוצה של A).
הוכח או הבא דוגמה נגדית:

א. (7 נק') f חח"ע.

ב. (6 נק') f על.

ג. (6 נק') $f(x,B\cup C)= f(x,B)\cup f(x,C)$ (B,C הן תת קבוצות של A).

ד. (6 נק') $f(x,B\cap C)= f(x,B)\cap f(x,C)$ (B,C הן תת קבוצות של A).

פיתרון:

א.
f אינה חח"ע. דוגמה:

נגדיר : $A=\{1,2\}$. לכן: $P(A)=\{\phi,\{1\},\{2\},\{1,2\}\}$
$(1,\phi)\neq(2,\phi)$ אבל $f((1,\phi))=f((2,\phi))=\phi$

ב.

f אינה על.
בדוגמה של הסעיף הקודם, ישנם איברים בטווח אשר אין אף איבר בתחום שמועבר אליהם ע"י הפונקציה. לדוגמה : אף איבר בתחום לא מועבר ל: $\{\phi,\{1\},\{2\},\{1,2\}\}$

ג.
הפרכה ע"י דוגמה נגדית:
נשתמש באותה דוגמה של הסעיפים הקודמים: $A=\{1,2\}$
עבור $C=\{2\}$; $B=\{1\}$; $x=1$ נקבל ש:
-- $f(1,\{1\}\cup\{2\})=\{\{1\},\{1,2\}\}$
-- $f(1,\{1\})\cup f(1,\{2\})=\{\{1\}\}\cup\phi=\{\{1\}\}$
לכן:
$f(1,\{1\}\cup\{2\})\neq f(1,\{1\})\cup f(1,\{2\})$

ד. הטענה נכונה. הוכחה:
$$f(x,B\cap C)=\{Q\subseteq B\cap C \mid x\in Q\}=\{Q\subseteq B\wedge Q\subseteq C \mid x\in Q\}$$
$$=\{Q\subseteq B \mid x\in Q\}\cap\{Q\subseteq C \mid x\in Q\}=f(x,B)\cap f(x,C)$$