אוניברסיטת חיפה

הפקולטה למדעי החברה
החוג למדעי המחשב

21.6.2004

<u>מתימטיקה דיסקרטית, סימסטר ב׳ תשס״ד - מועד א</u>

מספר הקורס: 203.1850.ב.1

מרצה: מר עודד לכיש

מתרגל: מר פלג יפתחאל

<u>הנחיות:</u>

1. **משך הבחינה שעתיים וחצי.**
2. **חומר עזר מותר: 5 דפי סיכום אישיים בלבד!**
3. **בבחינה 5 שאלות. יש להשיב על 4 מתוכן.**
4. **יש <u>לנמק</u> כל תשובה (תשובות לא מנומקות יפסלו).**
5. **כתבו בכתב יד קריא, מסודר ונקי.**

בהצלחה!!!

<u>**שאלה 1 (25 נקודות)**</u>

יהי G=(V,E) גרף פשוט מכוון, כך שדרגת הכניסה ודרגת היציאה של כל קודקוד בגרף היא 50.

<u>א.</u> **(13 נק')** הוכח שיש בגרף G מסלול <u>פשוט</u> באורך 50.

<u>ב.</u> **(12 נק')** הוכח שיש בגרף G מעגל <u>פשוט</u> באורך <u>לפחות</u> 50.

<u>**שאלה 2 (25 נקודות)**</u>

יהי G=(V,E) גרף לא מכוון פשוט . נגדיר גרף חדש $\overline{G}=(V,\overline{E})$ לא מכוון פשוט כך ש $\overline{E}=\{\ \{x,y\}\ |\ x\neq y\ ,\ x,y\in V\ ,\{x,y\}\notin E\ \}$

(כלומר, $\overline{G}$ הוא גרף בעל אותם קודקודים כמו G, שמכיל את כל הצלעות שלא נמצאות ב G).

<u>א.</u> **(13 נק')** הוכח כי אם G אינו קשיר אז $\overline{G}$ קשיר.

<u>רמז</u>: בדקו מה קורה בגרף אם G לא קשיר ויש בו בדיוק שני רכיבי קשירות.

<u>ב.</u> **(12 נק')** האם יתכן שגם G וגם $\overline{G}$ קשירים? (הראה דוגמא או הוכח שלא קיים כזה גרף).

<u>שאלה 3 (25 נקודות)</u>

<u>א.</u> **(12 נק')** יהי G_1 גרף מלא (פשוט) ולא מכוון עם n קודקודים. כמה מסלולים פשוטים, באורך 3, שאינם מעגל, יש בגרף.

<u>ב.</u> **(13 נק')** יהי G_2 גרף עם n קודקודים, שמתקבל מ G_1 על ידי מחיקת צלע אחת ספציפית. כמה מסלולים פשוטים, באורך 3, שאינם מעגל, יש בגרף.

<u>שאלה 4 (25 נקודות)</u>

<u>א.</u> **(13 נק')** ישנם 80 כיסאות בשורה. על הכיסאות מתיישבים 61 אנשים. הוכח שיש לפחות ארבע כסאות רצופים שעליהם יושבים אנשים.

<u>ב.</u> **(12 נק')** זורקים 10 קוביות שונות (לכל קוביה שש פאות הממוספרות 1 עד 6) כמה צרופים שונים מכילים לפחות פעם אחת כל אחד מהמספרים 1 עד 6.

<u>שאלה 5 (25 נקודות)</u>

תהא A קבוצה לא ריקה כלשהי ותהא X תת-קבוצה של A. נגדיר יחס T_X מעל קבוצת החזקה של A (המסומנת P(A)) באופן הבא:

$$T_X = \{ (B, C) \mid B \cap X = C \cap X \}.$$

א. **(10 נק')** הוכיחו כי T_X יחס שקילות.

ב. **(10 נק')** בהינתן $A = \{1,2,3\}$ ו- $X = \{1,2\}$, רשמו את כל מחלקות השקילות השונות של P(A) לפי היחס T_X.

ג. **(5 נק')** כעת נניח ש-A ו- X הן קבוצות <u>סופיות</u> כלשהן כך ש- $|A| = m$, $X \subseteq A$, $|X| = n$. מהו מספר מחלקות השקילות השונות של P(A) לפי היחס T?

שאלה 1 (25 נקודות)

פיתרון:

א.

נוכיח שקיים מסלול פשוט באורך 50 ע"י בנייתו. המסלול יתחיל מקדקוד כלשהו . מאחר שדרגת היציאה של קודקוד זה היא 50 , יש לנו 50 אפשרויות לבחירת הקודקוד השני במסלול. מהקודקוד השני יוצאות 50 קשתות אשר לכל היותר אחת מהן מתחברת לקודקוד הראשון. יש לפיכך לפחות 49 אפשריות לבחירת הקודקוד השלישי במסלול. במקרה הכללי, כשמגיעים לקודקוד ה- i בבניה, יש לפחות $50-(i-1)$ אפשרויות לבחירת הקודקוד ה- $i+1$. לכן כשמגיעים לקודקוד ה- 50 נותר עדיין לפחות קודקוד אחד אשר יכול להיות הקודקוד ה-51 במסלול. משמעות הדבר היא שניתן לבנות מסלול פשוט שבו 50 קשתות.

מ.ש.ל.

ב.

נתבונן בקודקוד ה-50 של המסלול שבנינו בסעיף א. אם מקודקוד זה יש קשת לקודקוד הראשון במסלול – סיימנו. אחרת נבחר את אחד הקודקודים הסמוכים אליו בהם טרם ביקרנו. אם כל 50 הקשתות היוצאות מהקודקוד אותו בחרנו מתחברות לקודקודים שכבר ביקרנו בהם במסלול אזי לפחות אחד מהם הוא במרחק גדול או שווה ל 50 – ולכן יש מעגל כנדרש. אם לא, נבחר מבין השכנים של הקודקוד אותו בחרנו קודם, קודקוד חדש אשר טרם ביקרנו בו, וכך נמשיך באותו האופן. מאחר שהגרף סופי , נגיע בסופו של דבר לקודקוד ממנו איננו יכולים להמשיך יותר, כלומר לקודקוד אשר כל 50 הקשתות היוצאות ממנו מתחברות לקודקודים שכבר ביקרנו בהם בעת בניית המסלול. מאחר שלפחות אחד מהם הוא במרחק גדול או שווה ל 50 יש מעגל כנדרש.

מ.ש.ל.

שאלה 2 (25 נקודות)

פיתרון:

א. הוכחה: נתון ש G אינו קשיר, לכן ב – G לפחות שני מרכיבי קשירות. יהיו $x, y \in V$. נראה שקיים מסלול מ x ל y בתוך $\overline{G}$. נתבונן בשני מקרים:

- x ו – y במרכיבי קשירות שונים ב G: אזי אין מסלול בין x ל- y ב G , לכן ברור שאין קשת בין x ל – y בתוך G, לכן קיימת בניהם קשת ב $\overline{G}$, וזהו מסלול מ – x ל – y ב - $\overline{G}$.
- אם x ו – y באותו מרכיב קשירות של G, אז נבחר z ממרכיב קשירות אחר של G (כאמור קיים כזה, כי G אינו קשיר). אין מסלול בין x ל- z ב G , לכן ברור שאין קשת בין x ל – z בתוך G, לכן קיימת בניהם קשת ב $\overline{G}$, ובאופן דומה קיימת קשת בין y ל – z ב $\overline{G}$. מכאן ש $x \to z \to y$ הוא מסלול מ x ל – y ב $\overline{G}$.

$\Leftarrow$ $\overline{G}$ קשיר

ב. דוגמא לכך ש G וגם $\overline{G}$ קשירים:

שאלה 3 (25 נקודות)

פיתרון:

א. כל רביעיה סדורה של קודקודים שונים זה מזה הינה מסלול פשוט באורך 3. לפיכך מספר המסלולים הנ"ל שקול למספר האפשרויות לבחור 4 קודקודים מתוך קבוצה של n קודקודים כאשר אין חזרות ויש חשיבות לסדר : $\frac{n!}{(n-4)!}$

ב.

כל קשת בגרף המלא שייכת ל $6\cdot(n-2)\cdot(n-3)$ מסלולים פשוטים באורך 3 . לפיכך מספר המסלולים הפשוטים באורך 3 בגרף G_2 הינו $\frac{n!}{(n-4)!}-6\cdot(n-2)\cdot(n-3)$

שאלה 4 (25 נקודות)

פיתרון:

א. נחלק את 80 הכיסאות ל-20 קבוצות שבכל אחת מהן יש 4 כיסאות. ברביעייה הראשונה יהיו ארבעת הכיסאות הראשונים, ברביעייה השנייה ארבעת הכיסאות הבאים אחריהם , וכו. הכנסת 61 אנשים לתוך 20 קבוצות הכיסאות שקולה להכנסת 61 יונים לתוך 20 שובכים. לפי עקרון שובך היונים המורחב (ראה עמוד 144 בליניאל פרנס) תהייה במקרה זה לפחות רביעיית כיסאות אחת אשר יוכנסו אליה ערך עליון של $\frac{61}{20}$, כלומר 4 אנשים. משמעות הדבר היא שיהיו לפחות 4 כסאות רצופים שעליהם יושבים אנשים.

מ.ש.ל

ב. נשתמש בעקרון ההכלה וההדחה:

מספר הצירופים ללא הגבלה: 6^{10}

נגדיר: A_i - קבוצת הצירופים שהספרה i לא מופיעה בהם.

לכן מספר הצירופים המבוקש הינו: $6^{10} - \bigcup_{i=1}^{6} A_i$

נחשב:

$$\left|A_i\right| = 5^{10}$$
$$\left|A_i \cap A_j\right| = 4^{10}$$
$$\left|A_i \cap A_j \cap A_k\right| = 3^{10}$$
$$\left|A_i \cap A_j \cap A_k \cap A_l\right| = 2^{10}$$
$$\left|A_i \cap A_j \cap A_k \cap A_l \cap A_m\right| = 1^{10}$$

לפיכך מספר הצירופים הינו:

$$6^{10} - \bigcup_{i=1}^{6} A_i =$$
$$\binom{6}{0}\cdot 6^{10} - \binom{6}{1}\cdot 5^{10} - \binom{6}{2}\cdot 4^{10} + \binom{6}{3}\cdot 3^{10} - \binom{6}{4}\cdot 2^{10} + \binom{6}{5}\cdot 1^{10} =$$
$$\sum_{i=0}^{5}\binom{6}{i}\cdot(6-i)^{10}$$

שאלה 5 (25 נקודות)

פיתרון:

א. השקילות נובעת ישירות מהרפלקסיביות הסימטריות והטרנזיטיביות של יחס השוויון בין קבוצות:

רפלקסיביות: לכל $A \subseteq Y$ מתקיים: $Y \cap X = Y \cap X$

סימטריות : לכל $A \subseteq Y,Z$ מתקיים: $(Y \cap X = Z \cap X) -> (Z \cap X = Y \cap X)$

טרנזיטיביות: לכל $A \subseteq Y,Z,W$ מתקיים:

$$((Y \cap X) = (Z \cap X) \wedge (Z \cap X) = (W \cap X)) \rightarrow (Y \cap X) = (W \cap X)$$

ב.

להלן מחלקות השקילות של $P(\{1,2,3\})$ לפי היחס $T_{\{1,2\}}$:

$$[\phi] = \{\phi, \{3\}\}$$
$$[\{1\}] = \{\{1\}, \{1,3\}\}$$
$$[\{2\}] = \{\{2\}, \{2,3\}\}$$
$$[\{1,2\}] = \{\{1,2\}, \{1,2,3\}\}$$

ג. כל תת קבוצה של X הינה מחלקת שקילות של היחס. לפיכך מספר מחלקות השקילות של $P(A)$ הינו 2^n . (שימו לב שגודל הקבוצה A אינו משפיע על מספר מחלקות השקילות ביחס אלא רק על הגודל של מחלקות השקילות).