אוניברסיטת חיפה

הפקולטה למדעי החברה
החוג למדעי המחשב

29.1.2004

מתימטיקה דיסקרטית, סימסטר א' תשס"ד - מועד א

מספר הקורס: 203.1850.ב.1

מרצה: מר עודד לכיש

מתרגל: מר פלג יפתחאל

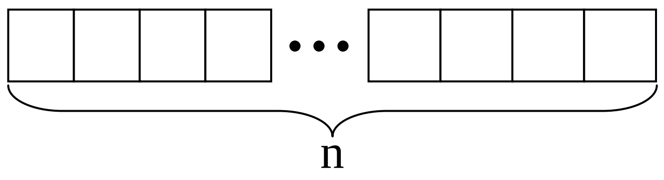
הנחיות:

1. **משך הבחינה שעתיים וחצי.**
2. **חומר עזר מותר: 5 דפי סיכום אישיים בלבד!**
3. **בבחינה 5 שאלות. יש להשיב על 4 מתוכן.**
4. **יש לנמק כל תשובה.**
5. **כתבו בכתב יד קריא, מסודר ונקי.**

בהצלחה!!!

<u>שאלה 1 (25 נקודות)</u>

<u>א</u>. (12 נק') לרשותך 4 צבעים שונים. בכמה דרכים ניתן לצבוע את האיור כך שכל ריבוע צבוע בצבע אחר משכניו ?

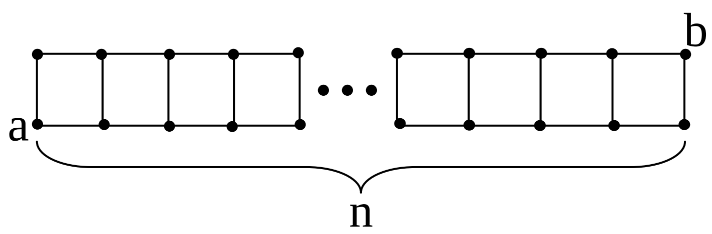


כאשר n הוא מספר הריבועים.

<u>פיתרון:</u>

נבחר את הצבעים של הריבועים משמאל לימין:
לבחירת הצבע של הריבוע השמאלי ביותר יש 4 אפשרויות, לבחירת הצבע של הריבוע מימינו יש 3 אפשרויות מכיוון שהוא לא יכול להיות צבוע בצע של הריבוע משמאלו וכך הלאה עד הריבוע האחרון. באופן זה נקבל לפי עקרון הכפל שיש $4 \cdot 3^{n-1}$ אפשרויות.

יהי G הגרף הבא (סעיפים ב ו-ג מתייחסים לגרף זה):



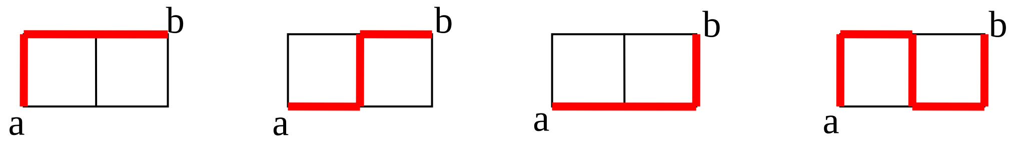
<u>ב</u>. (5 נק') הוכח שבכל מסלול פשוט (שלא מכיל את אותו קודקוד פעמיים) מ- a ל- b יש מספר אי זוגי של צלעות מאונכות (צלעות מהסוג |).

<u>פיתרון:</u>

כל מסלול חייב להכיל מספר אי זוגי של צלעות מאונכות אחרת הוא יסתיים בחלק התחתון של הגרף (ולא יגיע לקודקוד b אשר נמצא בחלק העליון של הגרף) .

ג. (8 נק') כמה מסלולים פשוטים שונים (לא בהכרח קצרים ביותר) יש בין קודקוד a לקודקוד b בגרף הבא (כאשר כל קודקוד מסומן בעגול שחור קטן והגרף לא מכוון):

לדוגמה כאשר n=2 יש 4 פתרונות:



<u>פיתרון:</u>

כל מסלול חייב להכיל מספר אי זוגי של צלעות מאונכות – ראה סעיף ב.

- מספר האפשרויות לבחירת מסלול עם צלע מאונכת אחת הוא $\binom{n}{1}$ מכיוון שיש רק n צלעות אפשריות.

- מספר האפשרויות לבחירת מסלול עם 3 צלעות מאונכת הוא $\binom{n}{3}$ מכיוון שבוחרים 3 צלעות מתוך n צלעות ללא חשיבות לסדר (מכיוון שהמסלול הוא פשוט).

- מספר האפשרויות לבחירת מסלול עם a (a≤n אי זוגי) צלעות מאונכת הוא $\binom{n}{a}$ מכיוון שבוחרים a צלעות מתוך n צלעות ללא חשיבות לסדר (מכיוון שהמסלול הוא פשוט).

לפי עקרון החיבור מספר האפשרויות הוא: $\binom{n+1}{1}+\binom{n+1}{3}+\ldots+\binom{n+1}{b}$ כאשר b הוא האי זוגי הגדול ביותר שקטן או שווה לn.

לפי זהות קומבינטורית שנלמדה בכיתה סכום זה הוא 2^n

<u>פיתרון נוסף:</u> ישנן 2 דרכים להתקדם מהקודקוד a לצלע המאונכת השנייה (או ע"י הליכה למעלה וימינה או ע"י הליכה ימינה) . עבור כל אחת משתי אפשרויות אלה ישנן שתי אפשרויות להגיע לצלע המאונכת השלישית, כלומר ישנן 2^2 אפשרויות להגיע לצלע המאונכת השלישית. באותו אופן ישנן 2^{k-1} אפשרויות להגיע לצלע המאונכת ה *k*ית. משמעות הדבר שיש 2^{n-1} אפשרויות להגיע לצלע המאונכת ה *n*ית , שהיא למעשה הצלע האחת ליפני האחרונה.

ישנן שתי דרכים להגיע מהצלע המאונכת ה- *n*ית (לא חשוב אם נמצאים בקודקוד העליון או התחתון שלה !) לקודקוד b אשר נימצא בחלק העליון של הצלע המאונכת ה- n+1 .

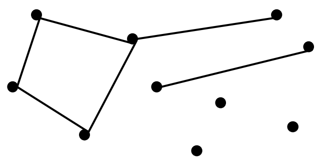
לכן התשובה היא: $2^{n-1}\cdot 2=2^n$

<u>שאלה 2 (25 נקודות)</u>

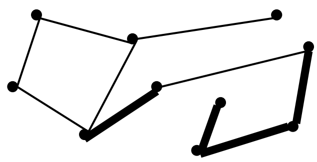
תהי f פונקציה מאוסף הגרפים הלא מכוונים בעלי 10 קודקודים ו- 6 צלעות לטבעיים שמוגדרת באופן הבא:

f(G)=מספר הצלעות המינימאלי שצריך להוסיף לG כדי לקבל גרף קשיר

<u>דוגמא</u>: יהי 'G הגרף הבא:



f(G')=4 אזי על ידי הוספת 4 צלעות (כמו באיור הבא) נקבל גרף קשיר (שימו לב שעל ידי הוספת פחות מ- 4 צלעות ל- 'G לא נקבל גרף קשיר).



תהי M קבוצת כל התמונות של הפונקציה f.

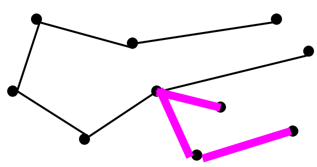
M={x | f(G)=x קיים גרף לא מכוון G בעל 10 קודקודים ו- 6 צלעות כך ש}

<u>א</u>. (13 נק') מהו המספר הכי **<u>קטן</u>** בM? נמק והבא דוגמא.

<u>פיתרון:</u>

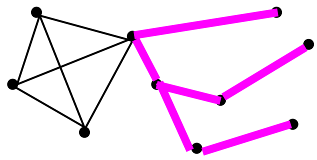
הגרף הקשיר המינימאלי על n קודקודים הוא עץ, ובו n-1 צלעות. לכן במקרה זה יש בגרף הקשיר המינימאלי 9 צלעות. לפיכך יש להוסיף לגרף 9-6 צלעות לכל הפחות כדי שיהיה קשיר.

לדוגמה :



<u>ב</u>. (12 נק') מהו המספר הכי **<u>גדול</u>** בM? נמק והבא דוגמא.

<u>פיתרון:</u>
הגרף שמכיל תת גרף מלא בעל 4 קודקודים ו-6 קודקודים בעלי דרגה ,0 כפי שמצויר בדוגמה, הוא הגרף עם 7 רכיבי קשירות. כדי להפוך אותו לגרף קשיר צריך להוסיף 6 צלעות כמו בדוגמה.



לא קיים גרף עם 10 קודקודים 6 צלעות ויותר מ7 רכיבי קשירות, מכיוון שגרף עם 10 קודקודים ו-8 רכיבי קשירות יכול להיות רק באחת מהצורות הבאות:
1. תת גרף מלא בעל 3 קודקודים ו 7 קודקודים בעלי דרגה 0 (3 צלעות).
2. 2 תתי גרף מלאים בעלי 2 קודקודים ו6 קודקודים בעלי דרגה 0 (2 צלעות).

שאלה 3 (25 נקודות)

יהי $G=(V,E)$ גרף מלא לא מכוון בעל n קודקודים.

א. (10 נק') כמה מעגלים שונים באורך 3 יש בגרף G?

פיתרון:

מאחר שמדובר בגרף המלא, כל שלשת קודקודים מגדירה מעגל באורך 3. ישנן $\binom{n}{3}$ שלשות קודקודים בגרף G, לכן ישנם $\binom{n}{3}$ מעגלים באורך 3.

ב. (7 נק') כמה מעגלים שונים באורך 3 יש בגרף G_1 שמתקבל על ידי מחיקת צלע מהגרף G.

פיתרון:

כל אחת מהצלעות ב G שייכת ל- n-2 משולשים. לכן מספר המשולשים בגרף G_1 הוא:

$$\binom{n}{3}-(n-2)$$

ג. (8 נק')

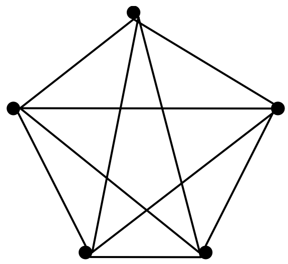
תהי $M\subseteq E$ קבוצה של צלעות שמהוות מסלול המילטון בגרף G.

$G_2=(V,E\backslash M)$ (הכוונה לגרף המלא הלא מכוון בעל n קודקודים שמחקנו ממנו את הצלעות שב M).

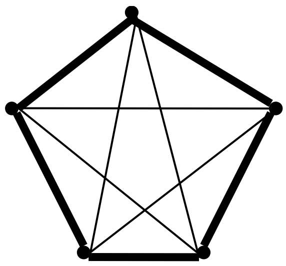
כמה מעגלים שונים באורך 3 יש בגרף G_2 ?

לדוגמה:

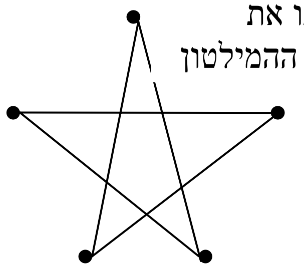
הגרף המלא עם 5 קודקודים



הגרף המלא עם 5 קודקודים
ומסלול המילטון מודגש



הגרף המלא עם 5 קודקודים
אחרי שהוצאנו ממנו את
הצלעות של מסלול ההמילטון



רמז: השתמש בעקרון ההכלה וההדחה.

<u>פתרון:</u> נשתמש בעקרון ההכלה וההדחה:
כל אחת מהצלעות ב M שייכת ל- n-2 משולשים. לכן נפחית ממספר המשולשים הכולל $n\cdot(n-2)$ משולשים. יש להוסיף למספר זה n משולשים שהופחתו פעמיים.

לכן התשובה היא: $\binom{n}{3}-n\cdot(n-2)+n$

שאלה 4 (25 נקודות)

תהי A קבוצת כל המחרוזות הבינאריות באורך 3

(A={000,001,010,011,100,101,110,111}) .

א. (14 נק') $(x,y)\in R_1$ אם ורק אם x שווה ל- y **או** x ו- y נבדלים זה מזה בדיוק ב-2 מקומות. לדוגמה: $(0\underline{00},0\underline{11})\in R_1$. הוכח ש R_1 הינו יחס שקילות מעל A. רשום את מחלקות השקילות של היחס.

פתרון: כן.

רפלקסיביות: לכל $a\in A$ מתקיים $a=a$ לכן $(a,a)\in R_1$

סימטריות: אם $(a,b)\in R_1$ אז קיימות שתי אפשרויות: (1) $a=b$ ואז מתקיים גם $b=a$ כלומר $(b,a)\in R_1$ (2) *a* ו- *b* נבדלים זה מזה בדיוק בשני מקומות לכן ניתן לומר ש- *b* ו-*a* נבדלים זה מזה בדיוק בשני מקומות כלומר $(b,a)\in R_1$

טרנזיטיביות: אם $(a,b)\in R_1$ וגם $(b,c)\in R_1$ אז קיימות 4 אפשרויות:

- $a=b$ וגם $b=c$. באפשרות זאת מתקיים $a=c$ לכן $(a,c)\in R_1$
- $a=b$ וגם *b* ו- *c* נבדלים זה מזה בדיוק בשני מקומות. לכן *a* ו- *c* נבדלים זה מזה בדיוק בשני מקומות , כלומר מתקיים $(a,c)\in R_1$
- *a* ו- *b* נבדלים זה מזה בדיוק בשני מקומות וגם $b=c$. לכן *a* ו- *c* נבדלים זה מזה בדיוק בשני מקומות , כלומר מתקיים $(a,c)\in R_1$
- *a* ו- *b* נבדלים זה מזה בדיוק בשני מקומות וגם *b* ו- *c* נבדלים זה מזה בדיוק בשני מקומות. לאפשרות זאת יש שתי תתי אפשרויות:
  - המקומות ש *a* ו- *b* נבדלים זה מזה, הם בדיוק אותם מקומות ש *b* ו-*c* נבדלים זה מזה. מאחר שמדובר במחרוזות בינאריות מתקיים $a=c$ לכן $(a,c)\in R_1$
  - המקומות ש *a* ו- *b* נבדלים זה מזה , <u>אינם</u> בדיוק אותם המקומות ש *b* ו-*c* נבדלים זה מזה. משמעות הדבר היא שיש בדיוק מקום (אינקס) אחד בשלשה בו a שונה מ- *b* וגם b שונה מ- *c* . לכן במקום זה *a* ו- *c* יהיו שווים. בשני המקומות האחרים בשלשה זה *a* ו- *c* יהיו שונים. לכן מתקיים $(a,c)\in R_1$.

ב. (11 נק') $(x,y)\in R_2$ אם ורק אם ל x ול- y קיים לפחות מקום אחד שבו הביטים של x ושל y זהים. לדוגמה: $(\underline{1}00,\underline{1}01)\in R_2$. קבע האם R_2 הינו יחס שקילות מעל A.

פתרון: לא. אין טרנזיטיביות : $(000,001)\in R2$ וגם $(001,111)\in R2$ אבל : $(000,111)\notin R2$

דוגמה נגדית נוספת:

$(100,101)\in R_2$

$(101,011)\in R_2$ אבל $(100,011)\notin R_2$

<u>**שאלה 5 (25 נקודות)**</u>

יהי G פשוט על n קודקודים.

<u>א</u>. (10 נק') הוכח שאם ב- G יש יותר מ $n-1$ צלעות אזי יש בו מעגל.
<u>ב</u>. (10 נק') הוכח שאם ב- G יש פחות מ $n-1$ צלעות אזי הוא אינו קשיר.
<u>ג</u>. (5 נק') הוכח שאם G קשיר ויש בו בדיוק $n-1$ צלעות אזי הוא עץ.