שם הקורס: מ ת מ ט י ק ה ד י ס ק ר ט י ת

מספר הקורס: 203.1850.

שם המורה: ד"ר אירית הרטמן

תאריך הבחינה: 11.12.02 (יום ד')

משך הבחינה: 14:00-16:00

כיתת הבחינה: אולם ספדיה.

מספר עמודים: 5 (כולל עמוד זה)

חומר עזר: **אסור** (מלבד דף סיכום אישי)

הערות: **יש לענות על כל השאלות, ולכתוב את התשובות על גבי טופס הבחינה.**

ת.ז. הסטודנט:

שאלה 1: (35%)

(10 נק) א. **מצא את השגיאה ב-"הוכחה" באינדוקציה הבאה:**

טענה: אם נתונים N ישרים במישור, אף שניים מהם לא מקבילים, אז הם יעברו דרך אותה נקודה.

הוכחה: הטענה נכונה עבור ישר אחד, וכן עבור שני ישרים, כי הנחנו כי אף שניים לא מקבילים.

נניח כי הטענה נכונה ל $N-1$ ישרים, נוכיח באינדוקציה כי הטענה נכונה ל N ישרים. יהי $S=\{a,b,c,\dots\}$ אוסף של N ישרים במישור, שאף שניים לא מקבילים. נבטל את הישר c, נקבל קבוצה S' של $N-1$ ישרים, שאף שניים לא מקבילים. לפי הנחת האינדוקציה, קיימת נקודה P כך שכל הישרים ב- S' עוברים דרך P. בפרט, a,b עוברים דרך P.

עתה, נחזיר את c, ונבטל את d, ונקבל קבוצה S'' של $N-1$ ישרים. כמו מקודם, נשתמש בהנחת האינדוקציה כדי להסיק כי כל הישרים עוברים דרך אותה נקודה P'. כמו מקודם, P' היא נקודת החיתוך של a,b, לכן $P'=P$. לכן גם c עובר דרך P. הישרים האחרים גם עוברים דרך P, לכן כל הישרים עוברים דרך P.

(10 נק) ב. **הוכח או הפרך**:

$P(A\cup B)=P(A)\cup P(B)$ לכל הקבוצות A, B.

ג.נתונה הפונקציה : $f: Q \times Q \to R$

המוגדרת : $f(a,b) = (\sqrt{2}\,a + b)$

(5 נק׳) האם f חח״ע? נמק!

(5 נק׳) האם f על? נמק!

(5 נק׳) האם קיימת f^{-1} ? נמק! האם קיימת הרלציה ההפוכה?

שאלה 2 :(35%)

(5 נק׳) א תן דוגמא לקבוצה לא-ריקה A, כך שכל איבר של A הוא גם קבוצה-חלקית של A.

(10 נק׳) ב. הראה כי לא קיימת קבוצה A כך שכל קבוצה-חלקית של A היא איבר של A.

(10 נקי') ג. הראה כי לא קיימות קבוצות A,B כך שכל קבוצה-חלקית של A היא איבר של B ויחד עם זה כל קבוצה-חלקית של B היא איבר של A.

(10 נקי') ד. נתון הפסוק: $\forall x, y \exists z[(x > y) \to (y < z) \wedge (z < x)]$
כתוב את שלילתו. עבור איזה קבוצות של מספרים הפסוק נכון?

שאלה 3: (30%)

תהיינה R_1 ו- R_2 רלציות מעל A כך ש- $R_1 \subseteq R_2$ **. הוכח או הפרך: (כדי להפריך, יש לצייר דיגרף של R_1 ו- R_2 המהווים דוגמא נגדית.)**

א. אם R_2 טרנזיטיבית אז R_1 טרנזיטיבית.

ב. אם R_2 סימטרית אז R_1 סימטרית.

ג. אם R_1 טרנזיטיבית אז R_2 טרנזיטיבית.

ד. אם R_1 אנטיסימטרית אז R_2 אנטיסימטרית.

ה. אם R_2 רלציית שקילות אז $R_1 \cdot R_2$ טרנזיטיבית.

ו. אם R_1 רפלקסיבית אז R_2 רפלקסיבית.

שאלה 1: (35%)

(10 נק) א. **מצא את השגיאה ב-"הוכחה" באינדוקציה הבאה:**

טענה: אם נתונים N ישרים במישור, אף שניים מהם לא מקבילים, אז הם יעברו דרך אותה נקודה.

הוכחה: הטענה נכונה עבור ישר אחד, וכן עבור שני ישרים, כי הנחנו כי אף שניים לא מקבילים.

נניח כי הטענה נכונה ל $N-1$ ישרים, נוכיח באינדוקציה כי הטענה נכונה ל N – ישרים. יהי $S=\{a,b,c,\ldots\}$ אוסף של N ישרים במישור, שאף שניים לא מקבילים. נבטל את הישר c, נקבל קבוצה S' של N-1 ישרים, שאף שניים לא מקבילים. לפי הנחת האינדוקציה, קיימת נקודה P כך שכל הישרים ב- S' עוברים דרך P. בפרט, a,b עוברים דרך P.

עתה, נחזיר את c, ונבטל את d, ונקבל קבוצה S'' של N-1 ישרים. כמו מקודם, נשתמש בהנחת האינדוקציה כדי להסיק כי כל הישרים עוברים דרך אותה נקודה P'. כמו מקודם, P' היא נקודת החיתוך של a,b, לכן $P'=P$. לכן גם c עובר דרך P. הישרים האחרים גם עוברים דרך P, לכן כל הישרים עוברים דרך P.

בהוכחה מבטלים ישר C ואח"כ ישר d ומניחים בשני המקרים כי נשארו לפחות שני ישרים a,b. כלומר בשלב האינדוקציה עוברים מ-N-1 ל – N לכל $N\geq 4$. אך מכיוון שבבסיס האינדוקציה בדקנו רק עבור $N=1,2$, חסרה הבדיקה עבור N=3. או לחלופין, בשלב האינדוקציה יש להוכיח מעבר מ N-1 ל- N לכל $N\geq 3$.

(10 נק) ב. **הוכח או הפרך**:

$P(A\cup B)=P(A)\cup P(B)$ לכל הקבוצות A, B.

דוגמא נגדית:

$A=\{1\},\ B=\{2\},\ \{1,2\}\in P(A\cup B),\ \{1,2\}\notin P(A)\cup P(B)$

ג.נתונה הפונקציה : $f : Q \times Q \to R$

המוגדרת : $f(a,b) = (\sqrt{2}\,a + b)$

(5 נק') האם f חח"ע? נמק!

כן. הוכחה: נניח $f(a,b) = f(x,y)$ כלומר $\sqrt{2}\,a + b = \sqrt{2}\,x + y$ או

$$\sqrt{2}(a-x) = y-b$$

אם $a \neq x$ אז נקבל $\sqrt{2} = \dfrac{y-b}{a-x}$. אבל אגף ימין הוא רציונלי (כי a,b,x,y הם רציונליים) ואגף שמאל אי-רציונלי – סתירה. לכן a=x, וגם y=b.. כלומר (a,b)=(x,y)

(5 נק') האם f על? נמק!

f אינה על. אם f היתה על, אז מכיון שהוכחנו כבר ש- f חח"ע, היינו מקבלים ש $Q \times Q$ שקולה ל- R. אך הוכחנו בהרצאה שקבוצות אלה לא שקולות והן בעלות עוצמות שונות.

(5 נק') האם קיימת f^{-1} ? נמק! האם קיימת הרלציה ההפוכה?

הפונקציה ההפוכה לא קיימת כי f אינה על. הרלציה ההפוכה תמיד קיימת לכל רלציה.

שאלה 2 :(35%)

(5 נק') א תן דוגמא לקבוצה לא-ריקה A, כך שכל איבר של A הוא גם קבוצה-חלקית של A.

$$A = \{\phi\}$$

(10 נק׳) ב. הראה כי לא קיימת קבוצה A כך שכל קבוצה-חלקית של A היא איבר של A.

אם היתה קיימת קבוצה כזאת אז היה מתקיים $P(A)\subseteq A$.. ואז היה מתקיים $|P(A)|\le|A|$. עובדה זו נוגדת את משפט קנטור – סתירה. לכן לא קיימת קבוצה כזאת.

(10 נק׳) ג. הראה כי לא קיימות קבוצות A,B כך שכל קבוצה-חלקית של A היא איבר של B ויחד עם זה כל קבוצה-חלקית של B היא איבר של A.

אם היו קיימות קבוצות כאלה אז היה מתקיים $P(A)\subseteq B$ וגם $P(B)\subseteq A$. ההכלה הראשונה גוררת ש- $|P(A)|\le|B|$ ...ממשפט קנטור ידוע כי $|B|<|P(B)|$. ההכלה השניה גוררת $|P(B)|\le|A|$. ביחד נקבל $|P(A)|\le|B|<|P(B)|\le|A|$, וזו סתירה לעובדה ש- $|A|<|P(A)|$ ...לכן לא קיימות קבוצות כאלה..

(10 נק׳) ד. נתון הפסוק: $\forall x,y\exists z[(x>y)\to(y<z)\wedge(z<x)]$

כתוב את שלילתו. עבור איזה קבוצות של מספרים הפסוק נכון?

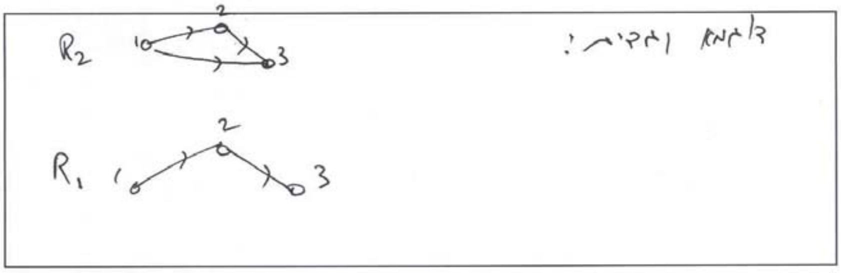
$$\exists x,\exists y,\forall z\big((x>y)\wedge\big((y\ge z)\vee(z\ge x)\big)\big)$$

הפסוק נכון עבור קבוצות המספרים הממשיים, והרציונליים, לדוגמא.

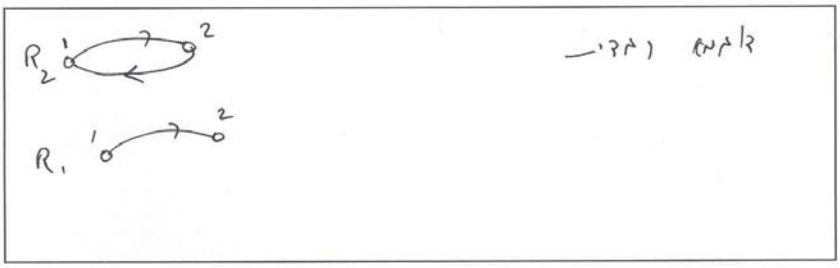
שאלה 3: (30%)

תהיינה R_1 ו-R_2 רלציות מעל A כך ש- $R_1 \subseteq R_2$. **הוכח או הפרך: (כדי להפריך, יש לצייר דיגרף של R_1 ו- R_2 המהווים דוגמא נגדית.)**

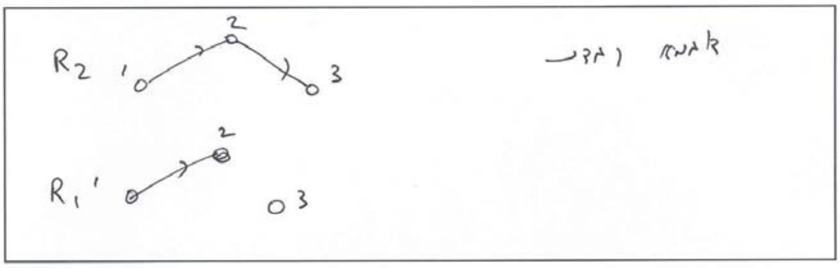
א. אם R_2 טרנזיטיבית אז R_1 טרנזיטיבית.



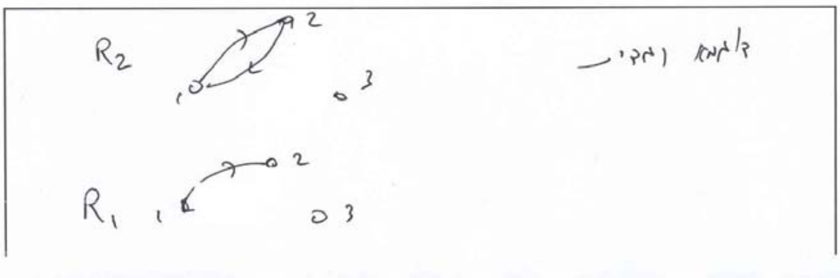
ב. אם R_2 סימטרית אז R_1 סימטרית.



ג. אם R_1 טרנזיטיבית אז R_2 טרנזיטיבית.



ד. אם R_1 אנטיסימטרית אז R_2 אנטיסימטרית.



ה. אם R_2 רלציית שקילות אז $R_1 \cdot R_2$ טרנזיטיבית.

הטענה נכונה. נראה כי: $xR_1R_2y \wedge yR_1R_2z \to xR_1R_2z$ לכל x,y,z.

טענה: $R_1 \cdot R_2 \subseteq R_2$

הוכחה: (טרנזיטיביות) $xR_1R_2y \to \exists t\ xR_1t \wedge tR_2y \to \exists t\ xR_2t \wedge tR_2y \to$

$\to xR_2y$

מכיוון ש $R_1 \subseteq R_2$ אז $xR_1t \to xR_2t$ ו- t שייכת לאותה מחלקת שקילות ב-R_2

כמו x,y,z. לכן מתקיים tR_2z וגם $xR_1t \wedge tR_2z \to xR_1R_2z$. כלומר xR_1R_2z

כנדרש..

ו. אם R_1 רפלקסיבית אז R_2 רפלקסיבית.

<u>הוכחה</u>: מהנתון $I_n \subseteq R_1$ וגם $R_1 \subseteq R_2$ לכן $I_n \subseteq R_2$ וR_2 רפלקסיבית.