אוניברסיטת חיפה
מדעי המחשב

סמסטר ב'
להגשה עד 10/4/02

מתמטיקה דיסקרטית – תרגיל בית מס' 1

1.(20 נק') שאלו אדם בן 103 מה הדיאטה ששומרת על בריאותו והוא ענה: " אם אני לא שותה בירה אז אני אוכל דג. בכל פעם שאני שותה בירה וגם אוכל דג אני לא אוכל גלידה. אם אני לא אוכל גלידה או לא שותה בירה אז אני לא אוכל דג." מהו האופן הפשוט ביותר לתאר את הדיאטה הנ"ל?

2.(20 נק') הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות.

א. $(\varphi \wedge (\varphi \vee \psi)) \equiv \varphi$

ב. $(\varphi \vee (\varphi \wedge \psi)) \equiv \psi$

ג. אם ψ היא טאוטולוגיה אז $\varphi \equiv (\varphi \vee \psi)$

ד. אם ψ היא סתירה אז $\varphi \equiv (\varphi \vee \psi)$

3.(20 נק')רשמו את השלילה של הביטויים הבאים.

א. $\exists x \forall y,\ f(x) > g(y)$

ב. $\forall y \exists x,\ x^2 = y^3$

ג. $\forall x \forall y, [(y > 0) \Rightarrow (xy > 0)]$

ד. לכל איש יש ספר שכל עמודיו ריקים.

4.(20 נק') הוכיחו באינדוקציה.

$$\frac{3}{1^2 \cdot 2^2} + \frac{5}{2^2 \cdot 3^2} + \ldots.. + \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2} = \frac{n(n+2)}{(n+1)^2}$$

5.(20 נק') הוכיחו בעזרת עקרון האינדוקציה המתמטית המלאה שכל מספר טבעי $n \geq 12$ ניתן לכתוב בצורה $n = 3x + 7y$ כאשר x,y מספרים טבעיים כלשהם.

הדרכה: בדקו בבסיס האינדוקציה את נכונות הטענה ל- n=12,13,14.

מתמטיקה דיסקרטית – פתרון תרגיל בית מס' 1

1.נסמן בירה B, גלידה G, דג D .
ואז נתון: $\varphi := ((\neg B \to D) \wedge ((B \wedge D) \to \neg G) \wedge ((\neg G \vee \neg B) \to \neg D))$
כאשר מחשבים את טבלת האמת של φ מקבלים.

B	D	G	$\neg B \to D$	$(B \wedge D) \to \neg G$	$(\neg G \vee \neg B) \to \neg D)$	φ
1	1	1	1	0	1	0
1	1	0	1	1	0	0
1	***0***	***1***	***1***	***1***	***1***	***1***
1	***0***	***0***	***1***	***1***	***1***	***1***
0	1	1	1	1	0	0
0	1	0	1	1	0	0
0	0	1	0	1	1	0
0	0	0	0	1	1	0

רק בשורות 3,4 מתקיימת φ זה אומר $\varphi \equiv B \wedge \neg D$. כלומר הדיאטה בעצם אומרת ***צריך לשתות בירה וגם לא לאכול דג.***

.2

א. $\varphi \wedge (\varphi \vee \psi)) \equiv \varphi$. נכון

φ	ψ	$\varphi \wedge (\varphi \vee \psi)$
1	1	**1**
1	0	**1**
0	1	**0**
0	0	**0**

ב. לא נכון. ההשמה $I(\varphi)=1, I(\psi)=0$ נותנת $I(\varphi \wedge (\varphi \vee \psi)) = 1 \neq I(\psi)$

ג. ψ טאטולוגיה $\Leftarrow$ $(\varphi \vee \psi)$, ולא נכון ששקול ל φ

ד. ψ סתירה $\Leftarrow$ $(\varphi \vee \psi) \equiv \varphi$ נכון.

.3

א. $\forall x \exists y, f(x) \le g(y)$

ב. $\exists y \forall x, x^2 \neq y^3$

ג. $\exists x \exists y [(y > 0) \wedge (xy \le 0)$

ד. קיים איש שבכל ספריו יש לפחות עמוד אחד לא ריק.

4.בסיס האינדוקציה: עבור n=1 מתקיים $\frac{2+1}{4}=\frac{3}{4}$

שלב האינדוקציה: נניח כי עבור n-1 מתקיים

$$\frac{3}{1^2\cdot 2^2}+\frac{5}{2^2\cdot 3^2}+.....+\frac{2(n-1)+1}{(n-1)^2(n)^2}=\frac{(n-1)(n+1)}{(n)^2}$$

נוכיח כי הטענה נכונה גם ל n

$$\frac{3}{1^2\cdot 2^2}+\frac{5}{2^2\cdot 3^2}+.....+\frac{2(n-1)+1}{(n-1)^2(n)^2}+\frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}=$$

$$\frac{(n-1)(n+1)}{n^2}+\frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}=$$

$$\frac{(n^2-1)(n+1)^2}{n^2(n+1)^2}+\frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}=$$

$$\frac{(n^2-1)(n^2+2n+1)}{n^2(n+1)^2}+\frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}=$$

$$\frac{(n^4+2n^3+n^2-n^2-2n-1)}{n^2(n+1)^2}+\frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}=$$

$$\frac{n^4+2n^3-2n-1+2n+1}{n^2(n+1)^2}=$$

$$\frac{n^4+2n^3}{n^2(n+1)^2}=\frac{n^2(n^2+2n)}{n^2(n+1)^2}=\frac{n^2+2n}{(n+1)^2}=\frac{n(n+2)}{(n+1)^2}$$

5. בסיס האינדוקציה: עבור n=12 מתקיים 12=3*4 +7*0
n=13 מתקיים 13=3*2+7*1
n=14 מתקיים 14=3*0+7*2

שלב האינדוקציה: נניח עבור כל מספר טבעי $12\le k\le n-1$ הטענה מתקיימת.
נוכיח עבור n

$$n=n-3+3=3x+7y+3=3(x+1)+7y$$

אוניברסיטת חיפה
מדעי המחשב

סמסטר ב'
להגשה עד 6/5/02 שעה 13:00

מתמטיקה דיסקרטית –תרגיל בית מס' 2

1.הוכח או הפרך
א. $A \subseteq B \Leftarrow P(A) \subseteq P(B)$
ב. $A \in B \Leftarrow P(A) \in P(B)$
ג. $A \in B \Leftarrow P(A) \subseteq P(B)$
ד. $A \subseteq B \Leftarrow P(A) \in P(B)$

2. יהיו A,B,C הוכח או הפרך
א. $P(A) \cap P(B) = P(A \cap B)$
ב. $P(A) \times P(A) = P(A^2)$
ג. $A \cup (B \setminus C) = (A \cup B) \setminus (A \cup C)$
ד. $(A \times A) \setminus (B \times C) = (A \setminus B) \times (A \setminus C)$
ה. $(A \times A) \cup (B \cup C) = (A \cup B) \times (A \cup C)$

3. עבור כל אחת מהטענות הבאות קבע האם היא נכונה או לא.
א. $\{4\} \in \{2,3,4,5\}$
ב. $\phi \in \phi$
ג. $\phi \subseteq \phi$
ד. $\phi \subseteq \{\phi\}$
ה. $\{4\} \in \{\{4\}\}$
ו. $\{4\} \subseteq \{\{4\}\}$
ז. אם $B \supseteq A$ ו- $C \supseteq B$ אזי $C \supseteq A$
ח. אם $\overline{B} \supseteq \overline{A}$ אזי $A \supseteq B$

4. תהא A קבוצת המספרים הממשיים בלי אפס $A = R \setminus \{0\}$. נגדיר יחס P ב- A באופן הבא:
$xy > 0 \Leftrightarrow (x, y) \in P$
א. הוכח כי P יחס שקילות.
ב. מהן מחלקות השקילות שמגדיר היחס P?

5. יהיו R,T יחסי שקילות ב-A. הוכח כי $R \cap T$ יחס שקילות ב-A.

6. יהי R יחס סימטרי וטרנזיטיבי בקבוצה A. הוכח כי אם לכל $a \in A$ קיים $b \in A$ כך שמתקיים aRb אזי R יחס שקילות.

מתמטיקה דיסקרטית - פתרון תרגיל בית מס' 2.

1) א. הוכחה:

$P(A)\subseteq P(B) \Leftarrow$ לכל $D\subseteq A$ מתקיים $D\subseteq B$, בפרט $A\subseteq A$

לכן $A\subseteq B$.

ב. $P(A)\in P(B) \Leftarrow P(A)\subseteq B \Leftrightarrow$ לכל $D\in P(A)$, $D\in B$

בפרט $A\in P(A)$, לכן $A\in B$.

ג. דוגמא נגדית:

$A=\{2\}$, $B=\{1,2\}$, $P(A)=\{\emptyset,\{2\}\}$, $P(B)=\{\emptyset,\{1\},\{2\},\{1,2\}\}$

אזי $P(A)\subseteq P(B)$ אבל $A\notin B$.

ד. דוגמא נגדית: $A=\{1\}$, $B=P(A)=\{\emptyset,\{1\}\}$,

$P(B)=\{\emptyset,\{\emptyset\},\{\{1\}\},\{\emptyset,\{1\}\}\}$

אזי $P(A)\in P(B)$, אבל $A\subseteq B$ כי $1\notin B$.

2) א. הוכחה: $D\in P(A\cap B) \Leftrightarrow D\subseteq A\cap B \Leftrightarrow D\subseteq A$ וגם

$D\subseteq B \Leftrightarrow D\in P(A)$ וגם $D\in P(B) \Leftrightarrow D\in P(A)\cap P(B)$

ב. הטענה אינה נכונה! נשים לב, שהמובן של 2 צדי השוויון הוא שונה. $P(A)\times P(A)$ אלה זוגות סדורים של תתי קבוצות של A. $P(A^2)$ אלה אוספים של זוגות סדורים של איברים מ- A.

דוגמא נגדית: $A=\{4\}$, $P(A)=\{\emptyset,\{4\}\}$

$P(A)\times P(A)=\{(\emptyset,\emptyset),(\emptyset,\{4\}),(\{4\},\emptyset),(\{4\},\{4\})\}$

$P(A^2)=P\{(4,4)\}=\{\emptyset,(4,4)\}$

ורואים ש $P(A)\times P(A)\neq P(A^2)$

ב. דוגמא נגדית: $A=\{1,2\}$, $B=\{3,4\}$, $C=\{3\}$

$A\cup(B\setminus C)=\{1,2,4\}$

$A\cup B=\{1,2,3,4\}$, $A\cup C=\{1,2,3\}$

$A\cup B\setminus A\cup C=\{4\}$

ג. דוגמא נגדית $A=\{1,2\}$, $B=\{2\}$, $C=\{1\}$

$A\times A=\{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2)\}$

$(A\times A)\setminus(B\times C)=\{(1,1),(1,2),(2,2)\}$

$A\setminus B=\{1\}$, $A\setminus C=\{2\}$

$(A\setminus B)\times(A\setminus C)=\{(1,2)\}$

ורואים ש- $(A\times A)\setminus(B\times C)\neq(A\setminus B)\times(A\setminus C)$

ד. דוגמא נגדית $A=\{1\}$, $B=\{2\}$, $C=\{3\}$

$(A\times A)\cup(B\cup C)=\{(1,1),2,3\}$

$(A\cup B)\times(A\cup C)=\{(1,1),(1,3),(2,1),(2,3)\}$

3

א. לא, כי $\{4\}$ אינה איבר ב- $\{2,3,4,5\}$

ב. לא, ב ϕ אין איברים בכלל.

ג. נכון, כי ϕ היא תת-קבוצה של כל קבוצה.

ד. נכון, -״-

ה. נכון, כי $\{4\}$ איבר ב- $\{\{4\}\}$

ו. לא נכון, כי 4 אינו איבר ב- $\{\{4\}\}$.

ז. נכון הוכחה: $A\subseteq B$ ⇐ לכל $a\in A$ מתקיים $a\in B$.

$B\subseteq C$ ⇐ לכל $a\in B$ מתקיים $a\in C$.

לכן לכל $a\in A$ ⇐ $a\in B$ ⇐ $a\in C$, לכן $A\subseteq C$.

ח. הוכחה: אם X קבוצה כך ש $A,B\subseteq X$ (וגם $\bar{A},\bar{B}\subseteq X$, כמובן)

נניח כי $\bar{A}\subseteq\bar{B}$ ונראה כי $B\subseteq A$

לכל $b\in B$ צריך להראות כי $b\in A$.

$b\in B \Rightarrow b\notin\bar{B} \underset{\bar{A}\subseteq\bar{B}}{\Rightarrow} b\notin\bar{A} \Rightarrow b\in A \Rightarrow$

$B\subseteq A$.

(4) א) הוכחה:

P רפלקסיבי: יהי $x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$, אז $x<0$ או $x>0$.

אם $x>0$ אזי $x\cdot x>0$

אם $x<0$ אזי $x\cdot x>0$

בכל מקרה לכל $x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$ xPx. לכן P רפלקסיבי.

P סימטרי: ~~צריך להראות~~

צריך להראות לכל $(x,y)\in P$ גם $(y,x)\in P$

$(x,y)\in P \Leftrightarrow xy>0 \underset{xy=yx}{\Leftrightarrow} yx>0$

$\Leftrightarrow (y,x)\in P$, לכן P סימטרי.

P טרנזיטיבי: צריך להראות אם xPy וגם yPz אז xPz.

$xPy \Leftrightarrow xy>0 \Leftrightarrow$ ל-x,y יש סימן זהה $(\pm)$

$yPz \Leftrightarrow yz>0 \Leftrightarrow$ ל-y,z יש סימן זהה

$\Leftarrow$ ל-x ו-z אותו סימן $\Leftarrow xz>0$

$\Leftarrow xPz$ לכן P טרנזיטיבי.

P רפלקסיבי, סימטרי וטרנזיטיבי לכן P יחס שקילות.

מחלקות השקילות ב-P: שים לב ש $xPy \Leftrightarrow xy>0$

$\Leftrightarrow$ ל-x ול-y יש אותו סימן $(\pm)$

לכן מחלקות השקילות הן $(0,+\infty)$, $(-\infty,0)$

ואז מתקיים $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)=\mathbb{R}\setminus\{0\}$ ו-$(-\infty,0)\cap(0,+\infty)=\phi$

(5) $R\cap T$ רפלקסיבי: צריך להראות לכל $a\in A$ $(a,a)\in R\cap T$

לכל $a\in A$ aRa וגם aTa (כי R ו-T רפלקסיביים).

לכן $(a,a)\in R\cap T$. לכן $R\cap T$ רפלקסיבי.

$R\cap T$ סימטרי: צריך להראות כי אם $(a,b)\in R\cap T$ אזי $(b,a)\in R\cap T$

יהי $a,b\in A$ כך ש $(a,b)\in R\cap T$ אזי aRb וגם aTb. R ו-T סימטריים לכן bRa וגם bTa

לכן $(b,a)\in R\cap T$.

$R\cap T$ טרנזיטיבי: צריך להראות כי אם $(a,b)\in R\cap T$ וגם $(b,c)\in R\cap T$ אזי $aR\cap Tc$.

אם $aR\cap Tb$ וגם $bR\cap Tc$, אזי

aRb וגם bRc ולכן aRc (כי R טרנזיטיבי)

אבל גם aTb וגם bTc ולכן aTc (כי T טרנזיטיבי)

⇐ $aR\cap Tc$ ⇐ $R\cap T$ טרנזיטיבי.

(6). R סימטרי וטרנזיטיבי. נותר להוכיח שאם לכל $a\in A$ קיים $b\in A$ כך שמתקיים aRb אזי R רפלקסיבי.

הוכחה: יהי $a\in A$ כלשהו. עפ"י הנתון, קיים $b\in A$ כך ש aRb. R סימטרי לכן bRa.

קיבלנו bRa ו aRb. R טרנזיטיבי, לכן aRa.

⇐ R רפלקסיבי.

לכן R יחס שקילות.

אוניברסיטת חיפה
מדעי המחשב

סמסטר ב'
להגשה עד 12/5/02 שעה 16:00

מתמטיקה דיסקרטית –תרגיל בית מס' 3

1. הוכח כי $f : N \times N \to N$ המוגדרת ע"י $f(m,n) = 2^m(2n+1)$, $m,n \in N$ היא חח"ע.
2. תהי $f : X \to Y$ ו $g : Y \to Z$ הוכח כי אם f על Y ו $h = g \circ f$ חח"ע אזי g היא חח"ע.
3. נתונות שתי קבוצות A ו B , שתי פונקציות $f : A \to B$, $g : B \to A$. כמו כן נתון $g \circ f : I_A$. הוכח או הבא גוגמא נגדית לכל אחת מהטענות הבאות:
   א. $g = f^{-1}$.
   ב. f היא חח"ע.
   ג. g היא חח"ע.
   ד. f היא על.
   ה. g היא על.
4. יהיו f,g,h הפונקציות הבאות מ Z ל Z.

$$f(x) = 3x+1$$
$$g(x) = |x|$$
$$h(x) = \begin{cases} -x^2, 0 \le x \\ x^2, 0 > x \end{cases}$$

   א. קבע עבור כל אחת מהפונקציות הנ"ל האם היא חח"ע.
   ב. קבע עבור כל אחת מהפונקציות הנ"ל האם היא על.
   ג. חשב את הפונקציות הבאות: h(f(x)), f(h(x)) ,f(g(h(x))), h(g(x))

5. הוכח כי קבוצות עיגולים במישור שפנימיהם זרים זה לזה (כלומר זרים חוץ מהיקפם) היא בת מניה.
6. הוכח כי עוצמת הריבוע $\{(x,y) \mid 2 < x < 4, 8 < y < 10\}$, שווה לעוצמת המעגל $\{(x,y) \mid (x+1)^2 + (y+5)^2 < 4\}$
7. כידוע קבוצת המספרים הרציונאליים היא בת מנייה. הוכח כי קבוצת המספרים הממשיים שאינם רציונאליים אינה בת מניה.

דיסקרטית - פתרון תרגיל מס' 3

1. נוכיח כי $f: \mathbb{N}\times\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ המוגדרת ע"י $f(m,n)=2^m(2n+1)$

היא חח"ע:

נניח כי $f(m_1,n_1)=f(m_2,n_2)$ ונראה כי $(m_1,n_1)=(m_2,n_2)$

כאשר $(m_1,n_1),(m_2,n_2)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}$

$$f(m_1,n_1)=f(m_2,n_2) \Rightarrow 2^{m_1}(2n_1+1)=2^{m_2}(2n_2+1)$$

נניח בלי הגבלת הכלליות ש $m_1>m_2$, ונחלק את השוויון ב 2^{m_2} ונקבל

$$\underbrace{2^{m_1-m_2}(2n_1+1)}_{\text{זוגי}} = \underbrace{(2n_2+1)}_{\text{אי זוגי}}$$

כי לא יתכן, ולכן $m_1=m_2$

לכן $2n_1+1=2n_2+1$

ולכן $n_1=n_2$

כלומר $(m_1,n_1)=(m_2,n_2)$ ולכן f חח"ע.

$\blacksquare$

2. יהיו $f: X\to Y$, $g: Y\to Z$

נוכיח כי אם f על Y, ו- $h=g\circ f$ חח"ע אז g חח"ע.

הוכחה: נתון כי $h=g\circ f$ חח"ע, ולכן עפ"י טענה (מהשיעור) f חח"ע. נתון ש f היא על Y, כלומר f חח"ע ועל Y ולכן f הפיכה, כלומר, קיימת f^{-1}.

$h=g\circ f$ חח"ע וגם f^{-1} עפ"י הגדרתה חח"ע ולכן הרכבה $h\circ f^{-1}$ היא חח"ע ונקבל:

$$h\circ f^{-1}=(g\circ f)\circ f^{-1} \underset{\text{אסוציאטיביות}}{=} g\circ(f\circ f^{-1})=g\circ I_Y=g$$

כלומר $h\circ f^{-1}=g$, ו- $h\circ f^{-1}$ חח"ע ולכן גם g חח"ע.

3. ב. דוגמא נגדית: $A=\{1,2,3\}$, $B=\{a,b,c,d\}$

$f=\{(1,a),(2,b),(3,c)\}$

$g=\{(a,1),(b,2),(c,3),(d,2)\}$

$f\circ g=\{(1,1),(2,2),(3,3)\}$

ה. הוכחה: נניח כי f איננה חח"ע, אזי קיימים $x_1\neq x_2\in A$ כך ש $f(x_1)=f(x_2)$ ולמשל

נפעיל את g ונקבל $gf(x_1)=gf(x_2)$

לפי הנתון $gf=I_A$ ולכן $x_1=x_2$.

סתירה! לכן f חח"ע.

ג. דוגמא נגדית: אותה דוגמא כמו ב א' $g(b)=g(d)$

אבל $d\neq b$

3. דוגמא נגדית: אותה דוגמא כמו ב א'. ל b אין מקור תחת f.

ה. הוכחה: צריך להראות כי לכל $a\in A$ קיים $b\in B$ כך ש $g(b)=a$.

~~יהי $a\in A$ כלשהו~~

4. א. f חח"ע. הוכחה: צריך להראות שאם $f(x_1)=f(x_2)$ אז $x_1=x_2$.

$$f(x_1)=f(x_2) \underset{\text{לפי הגדרת } f}{\Rightarrow} 3x_1+1=3x_2+1$$

$$\Rightarrow x_1=x_2$$

g לא חח"ע. דוגמא נגדית עבור $x_1=1$, $x_2=-1$ נקבל

$g(x_1)=g(x_2)=1$

h חח"ע. הוכחה: אם $h(x_1)=h(x_2)$, קיימות שתי אפשרויות:

I אם $h(x_1)$ חיובי לפי ההגדרה של $h(x)$ [illegible] x

לכן המקור של x_1^2, x_2^2 חיובי [illegible] ולכן $x_1=x_2$

II אם $h(x_1)$ ~~שמאלי~~ שלילי אז לפי הגדרת $h(x)$ $x\geq 0$
ולכן הערך של x_1^2, x_2^2 הוא השורש החיובי,
ובכלל $x_1 = x_2$.

(ב) f לא על עבור $3\in\mathbb{Z}$ לא קיים $x\in\mathbb{Z}$ כך ש
$3x+1=3$.

g לא על עבור $-1\in\mathbb{Z}$ לא קיים $x\in\mathbb{Z}$ כך ש
$|x|=-1$.

h לא על עבור $2\in\mathbb{Z}$ לא קיים $x\in\mathbb{Z}$ כך ש
$x^2=2$ או $-x^2=2$.

(ג)
$$h(f(x)) = \begin{cases} -(3x+1)^2 & \text{אם } 0\leq 3x+1 \\ (3x+1)^2 & \text{אם } 0>3x+1 \end{cases}$$

$$f(h(x)) = \begin{cases} -3x^2+1 & \text{אם } x\geq 0 \\ 3x^2+1 & \text{אם } x<0 \end{cases}$$

$$f(g(h(x))) = \begin{cases} 3x^2+1 & \text{אם } 0\leq x \\ 3x^2+1 & \text{אם } x<0 \end{cases}$$

סה"כ בכלל $f(g(h(x)))=3x^2+1$

$h(g(x)) = -x^2$

(5) בכל ריבוע תחום בקודקודים מהצורה $(a,b)\times(c,d)$. בחירת מספר רציונלי בין a ל-b, ומספר רציונלי נוסף בין c ל-d מניבה נקודה בפנים הריבוע ששתי שיעוריה רציונליים. ע"י בחירת נקודה כזאת בכל אחד מהריבועים בקבוצה נקבל העתקה חח"ע מקבוצת הריבועים ל-$\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}$ ומכאן נובע שוה כי עוצמת קבוצת הריבועים היא לכל היותר $|\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}| = \aleph_0\cdot\aleph_0 = \aleph_0$

6

$f(x,y)=(x-3,y-9)$ - זוהי העתקה מהריבוע -

$A=\{(x,y) \mid 2\le x\le 4,\ 8\le y\le 10\}$ לריבוע

$B=\{(x,y) \mid -1\le x\le 1,\ -1\le y\le 1\}$.

$g(x,y)=(x, y\sqrt{1-x^2})$ - זוהי העתקה מהריבוע B,

$C=\{(x,y) \mid x^2+y^2\le 1\}$ למעגל

$h(x,y)=(2x,2y)$ - זוהי העתקה מהמעגל C

$D=\{(x,y) \mid x^2+y^2\le 4\}$. למעגל

$i(x,y)=(x-1,y-5)$ - זוהי העתקה מהמעגל D

$E=\{(x,y) \mid (x+1)^2+(y+5)^2\le 4\}$. למעגל

סה"כ העתקה מהריבוע A למעגל E.

~~$E=\{(x,y) \mid$~~

$e(x,y)=\left(2x-7,\ 2((y-9)\sqrt{1-(x-3)^2})-5\right)$

זוהי הרכבה של פונ' חח"ע ועל. ולכן הפונקציה היא חח"ע ועל.

<u>פתרון נוסף</u>: עוצמת הקטע $|(2,4)| = \aleph$

עוצמת הקטע $|(8,10)| = \aleph$

לכן עוצמת הריבוע $|A| = |(2,4)\times(8,10)| = \aleph\cdot\aleph = \aleph$

בתוך המעגל B חסום ריבוע, עוצמת כל ריבוע היא $\aleph$ לכן $|B|\ge\aleph$, מצד שני המעגל B חסום בתוך ריבוע לכן $\aleph\ge|B|$ לכן עוצמת המעגל $|B|=\aleph$

נקבל $|A|=|B|=\aleph$

ד

כידוע $R = I \cup Q$. נניח בשלילה כי קבוצת האי-רציונליים I היא בת מניה. לכן הקבוצה $I \cup Q$ היא בת מניה, מכיוון ש-Q היא קבוצה בת מניה. ואיחוד של קבוצות בנות מניה הוא קבוצה בת מניה. קיבלנו ש-R היא קבוצה בת מניה. סתירה! לכן I איננה בת מניה

מתמטיקה דיסקרטית –תרגיל בית מס' 4

1. כמה פתרונות שלמים יש למערכת $x_1+x_2+x_3+x_4=70$ אם
   א. כל $0 \le x_i$.
   ב. $15 \le x_1$, $-5 \le x_2$, $10 \le x_3$, $0 \le x_4$.
   ג. $0 \le x_1 \le 20$, $0 \le x_2,x_3,x_4$.
2. יהיו $A=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$ $B=\{a,b,c,d,e\}$
   א. כמה פונקציות שונות ישנן מ A ל B? ומ B ל A ?
   ב. כמה פונק' חח"ע ישנן מ B ל A , ומ-A ל B?
   ג. כמה פונק' על ישנן מ B ל A ? ומ A ל B ?
3. נתונה הקבוצה $M = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$. כמה תתי-קבוצות X יש כך שכמות המספרים האי-זוגיים ב X גדול ב 1 מכמות המספרים הזוגיים ב X ?
4. יהי A קבוצה בעלת n אברים
   א. כמה יחסים רפלקסיביים קיימים?
   ב. כמה יחסים סימטריים קיימים?
5. בבנין גרים 4 דיירים. יש לחלק ביניהם 7 בקבוקי חלב זהים. מהו מספר האפשרויות אם
   א. אין הגבלה.
   ב. כל דייר חייב לקבל לפחות בקבוק אחד.
6. ליוסי 8 סוגי מדבקות, 3 מדבקות זהות מכל סוג. אבא של יוסי מבקש שיתן 5 מדבקות מתוכן לאחותו הקטנה. בכמה אופנים יכול יוסי לעשות את המבוקש?

מתמטיקה דיסקרטית פתרון תרגיל מס' 4

1. א. נחלק 70 עצמים זהים ל-4 תאים שונים ללא הגבלה:

$$\binom{73}{3}$$

ב.

$x_1 \ge 15 \rightarrow x_1 = 15 + y_1 , \quad y_1 \ge 0$

$x_2 \ge -5 \rightarrow x_2 = -5 + y_2 , \quad y_2 \ge 0$

$x_3 \ge 10 \rightarrow x_3 = 10 + y_3 , \quad y_3 \ge 0$

$x_4 \ge 0 \rightarrow x_4 = y_4 , \quad y_4 \ge 0$

נציב במשוואה המקורית ונקבל

$15 + y_1 - 5 + y_2 + 10 + y_3 + y_4 = 70$

$y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 50$

ונפתור כמו בסעיף א. ונקבל

$$\binom{53}{3}$$

ג. נחשב את מספר הפתרונות כאשר $x_1 \ge 21$, $x_i \ge 0$, $2 \le i \le 4$.

"נקלף" 21 יחידות עבור x_1, ואת יתר 49 היחידות נחלק ללא הגבלה. מס' האפשרויות הוא, $\binom{52}{3}$.

לכן מספר האפשרויות רק ש $0 \le x_1 \le 20$ ו- $0 \le x_i$ הוא המשלים לומר

$$\binom{73}{3} - \binom{52}{3}$$

2. א. B^A — $f: A \to B$. כל איבר ב-A יכול לבחור כל איבר ב-B.

לכן יש אפשרויות 5^{10}.

$f: B \to A$. כל איבר ב-B יכול לבחור כל איבר ב-A.

לכן יש אפשרויות 10^5.

ב. פונק' חח"ע מ-A ל-B אין. כי: $|B| < |A|$

פונק' חח"ע מ-B ל-A $P(10,5) = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6$

ג. פונק' של מ- B ל- A 1-1 כי $|A|<|B|$, פונק'
של מ A ל B:

* סה"כ הפונק' השונות מ A ל- B: 5^{10}.

1 * מס' האפשרויות לפונק' מ A לתת הקבוצה של B עם 4 איברים הוא 4^{10}, ויש 5 תתי הקבוצות כאלה לכן $5\cdot4^{10}$.

2 * מס' האפשרויות לפונק' מ A לתת הקבוצה של B עם 3 איברים הוא 3^{10}, ומספר הקבוצות האלה הוא $\binom{5}{3}$
לכן נקבל $\binom{5}{3}3^{10}=10\cdot3^{10}$

3 * מס' האפשרויות לפונק' מ A לתת הקבוצה של B עם 2 איברים הוא 2^{10}, ומספר תתי הקבוצות האלה הוא $\binom{5}{2}$
ונקבל $\binom{5}{2}\cdot2^{10}=10\cdot2^{10}$.

4 * מס' האפשרויות לפונק' מ A לתת קבוצה של B עם איבר אחד הוא 1, ויש 5 תתי הקבוצות כאלה.

כיוון ש f תהיה על 1,2,3,4 לא יכולות להתקיים, ולכן מתמקדים במשלים שלהם, ונקבל לפי כלל ההכלה וההפרדה.

$$5^{10}-5\cdot4^{10}+10\cdot3^{10}-10\cdot2^{10}+5$$

הסבר: הכל כל הפונק' מ A לקבוצה בעלת 4 איברים מכילה בתוכה את כל הפונק' לתוך 3 איברים ואת כל הפונק' לתוך 2 איברים ואת כל הפונק' לתוך איבר אחד.

(3)

$$\binom{5}{0}\binom{5}{1}+\binom{5}{1}\binom{5}{2}+\binom{5}{2}\binom{5}{3}+\binom{5}{3}\binom{5}{4}+\binom{5}{4}\binom{5}{5}$$

0 זוגי	1 זוגי	2 זוגי	3 זוגי	4 זוגי
1 אי זוגי	2 אי זוגי	3 אי זוגי	1 אי זוגי	5 אי זוגי

4. א. מספר האיברים ב $A\times A$ עבור $|A|=n$
הוא n^2. כל יחס על A הוא תת קבוצה של $A\times A$.
כל יחס רפלקסיבי מכיל את כל הזוגות מהסוג (a,a)
ל- $a\in A$, ועבור כל איבר אחר של $A\times A$ יש
שתי אפשרויות: נמצא ביחס או לא נמצא ביחס. מספר האיברים
הזה הוא n^2-n לכן מספר היחסים הרפלקסיביים הוא
2^{n^2-n}

ב. לכל זוג איברים (a,b) ו (b,a) מופיעים או לא
מופיעים - באותו יחס, ועבור כל איבר (a,a) הוא
יכול להופיע או לא להופיע בכל יחס. מספר הזוגות
(b,a) (a,b) הוא $\frac{n^2-n}{2}$ $(a\neq b)$, ומספר
האיברים (a,a) הוא n. לכן מספר היחסים הסימטריים הוא

$$2^{\frac{n^2-n}{2}}\cdot 2^n = 2^{\frac{n^2-n+2n}{2}} = 2^{\frac{n^2+n}{2}}$$

5. א. חלוקת 7 הכפולות בין ל 4 תאים זרים $\binom{10}{7}$
ב. ניתן לכל תא כפולה ואת ה 3 הנותרות נחלק
ללא הגבלה. $\binom{6}{3}$.

6. פירוקים שונים של 5 לפי הסוגים:
* 3+2 יש האפשרויות: $8\cdot 7$ (יש 8 סוגים ...)
* 1+1+3 יש האפשרויות $8\cdot\binom{7}{2}$
* 1+2+2 יש האפשרויות $8\cdot\binom{7}{2}$
* 2+1+1+1 יש האפשרויות $8\cdot\binom{7}{3}$
* 1+1+1+1+1 יש האפשרויות $\binom{8}{5}$

האפשרויות זרות לכן מספר האופנים יהיה החיבור
ביניהם. לכן
$8\cdot 7+8\binom{7}{2}+8\binom{7}{2}+8\binom{7}{3}+\binom{8}{5}$

אוניברסיטת חיפה
מדעי המחשב

סמסטר ב'
להגשה עד 4/6/02 שעה 16:00

מתמטיקה דיסקרטית –תרגיל בית מס' 5

1. חשב את הסכומים הבאים
   א. $\sum_{k=0}^{n} 3^k k \binom{n}{k}$
   ב. $\left(\sum_{i=0}^{n} (-2)^i \binom{n}{i}\right)\left(\sum_{i=0}^{k} (-5)^i \binom{k}{i}\right)$
2. הוכח כי $\sum_{\substack{k=0 \\ k\text{זוגי}}}^{n} \binom{n}{k} = 2^{n-1}$
   א. הוכחה אלגברית
   ב. הוכחה קומבינטורית
3. הוכח כי $\sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k} = n\, 2^{n-1}$ ע"י שיקולים קומבינטורים.
4. מהו המקדם של x^2 בפיתוח של $(1+\frac{\sqrt{x}}{2})^8$?
5. הוכח ש $\frac{(2n)!}{2^n n!}$ מספר שלם חיובי לכל $n \ge 0$.
   א. בדרך אלגברית
   ב. בדרך קומבינטורית
6. כמה פונקציות על קימות מקבוצה $|B|=n$ על קבוצה בת $|A|=r$ איברים.(הפונקציות לאו דווקא של).
7. כמה מספרים מתוך $\{1...1000\}$ אינם מתחלקים ב 2,3,5,7.
8. כמה סידורים שונים יש לאותיות a,b,c,d,e,f,g,h,i,j,k,l,m,n,o,p כך שכל אות מופיעה לכל היותר פעם אחת.
   א. כאשר אף סידור אינו מכיל את המילים bad,deaf,ape?
   ב. כאשר בנוסף ל –א ,הסידור אינו מכיל את המילה leading?
9. בכמה דרכים שונות אפשר לסדר 4 ישראלים, 3 רוסים ו-5 סינים כך שאף לאום לא יעמוד כבלוק רציף?

מתמטיקה בדידות - פתרון תרגיל מס 5

1 א.

$$(x+a)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} x^i a^{n-i}$$

נגזור את המשוואה פעם אחת לפי x ונקבל

$$n(x+a)^n = \sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} \cdot i\, x^{i-1} a^{n-i}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} \cdot i\, x^{i-1} a^{n-i} + \underbrace{\binom{n}{0} \cdot 0 \cdot x^{-1} a^{n}}_{0}$$

$$= \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} i\, x^{i-1} a^{n-i}$$

נציב $a=1$, $x=3$ ונקבל

$$n(3+1)^{n-1} = n\, 4^{n-1} = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \cdot i\, 3^{i-1}$$

נכפול את שני צדי המשוואה ב-3 ונקבל

$$3n \cdot 4^{n-1} = 3 \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \cdot i\, 3^{i-1} = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} i\, 3^{i}$$

לכן הסכום הוא $3n \cdot 4^{n-1}$

ב.

$$(-1)^n = (1+(-2))^n = \sum_{i=0}^{n} (-2)^i \binom{n}{i}$$

$$(-4)^k = (1+(-5))^k = \sum_{i=0}^{k} (-5)^i \binom{k}{i}$$

ונקבל $(-1)^n (-4)^k$

2. א. נציב בבינום $a=-1$, $x=1$. נקבל

$$0=0^n=(1-1)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}1^{n-k}(-1)^k=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k$$

קיבלנו כי:

$$0=\sum_{\substack{k=0\\ k\text{ זוגי}}}^{n}\binom{n}{k}-\sum_{\substack{k=0\\ k\text{ אי-זוגי}}}^{n}\binom{n}{k}$$

לכן

$$\sum_{\substack{k=0\\ k\text{ זוגי}}}^{n}\binom{n}{k}=\sum_{\substack{k=0\\ k\text{ אי-זוגי}}}^{n}\binom{n}{k}=\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}=2^{n-1}$$

ב. אגף שמאל סופר כמה תתי-קבוצות בגודל זוגי יש לקבוצה בגודל n. מצד שני ניתן לספור כמות זאת בעזרת עקרון הכפל. לכל אחד מ-n איברי הקבוצה, פרט לאחרון, שתי אפשרויות: להשתייך לקבוצה או לא, ואילו לאיבר האחרון אפשרות אחת בלבד: אם עד לאיבר זה נבחרו כבר מספר זוגי של איברים אסור לו להשתייך לקבוצה ואם נבחרו מספר אי-זוגי של איברים הוא חייב להשתייך לקבוצה וקיבלנו כי התשובה היא 2^{n-1} שהוא אגף ימין של הזהות.

3. בכמה דרכים ניתן לבחור מתוך n אנשים ועדה עם יו"ר?
מצד אחד, לכל $k\le n$ יש $\binom{n}{k}$ ועדות בגודל k ומכל אחת מהן ניתן לבחור יו"ר ב-k אופנים ומכאן $\sum_{k=0}^{n}k\binom{n}{k}$.

מצד שני, ניתן לבחור ראשית את היו"ר מבין n האנשים ואז להשלים את הועדה ע"י תת קבוצה של $n-1$ הנותרים וקיבלנו $n\cdot 2^{n-1}$.

4. $\left(1+\frac{\sqrt{x}}{2}\right)^8=\sum_{i=0}^{8}\binom{8}{i}1^i\,\frac{\sqrt{x}}{2}^{8-i}=\sum_{i=0}^{8}\binom{8}{i}\left(\frac{\sqrt{x}}{2}\right)^{8-i}$

אנו מעוניינים כאן באבר x^2 המופיע בסכום זה כי $\left(\frac{\sqrt{x}}{2}\right)^4$ שמקדמו הוא $\binom{8}{4}$. נקבל

$$\binom{8}{4}\left(\frac{\sqrt{x}}{2}\right)^4=\binom{8}{4}\frac{x^2}{16}=\frac{70x^2}{16}=\frac{35}{8}x^2$$

לכן מקדמו של x^2 הוא $\frac{35}{8}$.

5. א. $\frac{(2n)!}{2^n\cdot n!}=\frac{2n(2n-1)(2n-2)\cdots(n+1)\cancel{n!}}{2^n\cdot\cancel{n!}}$

לכן נשאר להראות כי $\frac{2n(2n-1)(2n-2)\cdots(n+1)}{2^n}$ מספר שלם חיובי לכל $n\geq 0$.

באינדוקציה: בסיס האינדוקציה עבור $n=1$ נקבל $\frac{2}{2}=1$ מספר שלם חיובי.

(עבור המקרה ש $n=0$ נקבל כי $\frac{(2\cdot 0)!}{2^0\cdot 0!}=1$ מספר שלם חיובי).

שלב האינדוקציה: נניח כי עבור n מתקיים $\frac{2n(2n-1)\cdots(n+1)}{2^n}$ מספר שלם חיובי.

נראה עבור $n+1$

$$\frac{(2n+2)(2n+1)2n(2n-1)\cdots(n+2)}{2^{n+1}}=\frac{2(n+1)(2n+1)2n(2n-1)\cdots(n+2)}{2^{n+1}}=\underbrace{\frac{2(2n+1)}{2}}\cdot\underbrace{\frac{2n(2n-1)\cdots(n+2)(n+1)}{2^n}}$$

מספר שלם חיובי כפול מספר שלם חיובי כי $2n+1$ הוא שלם חיובי.

כי הנחת האינדוקציה

לכן לכל n ... מספר שלם חיובי - הוכחנו

המשך של פתרון לתרגיל 5

(א) בדרך אלגברית

$$\frac{(2n)!}{2^n n!} = \frac{2n(2n-1)(2n-2)(2n-3)(2n-4)(2n-5)\cdots 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{2^n n!}$$

$$= \frac{2n(2n-1)2(n-1)(2n-3)2(n-2)(2n-5)\cdots 2\cdot 2\cdot 3\cdot 2\cdot 1\cdot 1}{2^n n!}$$

$$= \frac{\cancel{2^n}\,\cancel{n!}\,(2n-1)(2n-3)(2n-5)\cdots 3\cdot 1}{\cancel{2^n n!}}$$

$$= (2n-1)(2n-3)(2n-5)\cdots 3\cdot 1$$

וזהו מספר שלם חיובי לכל $n\geq 1$, עבור $n=0$

נקבל $\frac{(2\cdot 0)!}{2^0\cdot 0!} = 1$.

(ב) בדרך קומבינטורית:

נראה שמספר הדרכים לחלק קבוצה בת $2n$ איברים

ל- n זוגות הוא $1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)$.

נבחר את הזוג הראשון ב- $\frac{2n(2n-1)}{2} = n(2n-1)$ אפשרויות.

השני ב- $\frac{(2n-2)(2n-3)}{2} = (n-1)(2n-3)$ -״-

השלישי ב- $\frac{(2n-4)(2n-5)}{2} = (n-2)(2n-5)$ -״-

וכו'

לפי עקרון הכפל לקבלת n זוגות

$$n(2n-1)(n-1)(2n-3)(n-2)(2n-5)\cdots 2\cdot 3\cdot 1\cdot 1$$

נחלק במספר התמורות של n איברים - $n!$ נקבל

$$\frac{n(2n-1)(n-1)(2n-3)(n-2)(2n-5)\cdots 2\cdot 3\cdot 1\cdot 1}{n!}$$

$$= 1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)$$

6) סה"כ הפונק' השונות מ- B ל A r^n.

לכל $1\le i\le r$ תהי A_i קבוצת הפונקציות

ש a_i אינו בתמונה שלהן. אז:

$$\left|\bigcap_{i=1}^{r} A_i'\right| = |U| - \sum_{i=1}^{r}|A_i| + \sum_{1\le i<j\le r}|A_i\cap A_j| - \cdots =$$

$$= r^n - r(r-1)^n + \binom{r}{2}(r-2)^n - \cdots = \sum_{k=0}^{r}(-1)^k\binom{r}{k}(r-k)^n$$

7) A_1 - קבוצת המספרים בין 1 ל- 1000 שמתחלקים ב-2.

A_2 - -//- 3

A_3 - -//- 5

A_4 -//- 7

$|A_1| = \left\lfloor\frac{1000}{2}\right\rfloor = 500$ $\quad |A_2| = \left\lfloor\frac{1000}{3}\right\rfloor = 333$ $\quad |A_3| = \left\lfloor\frac{1000}{5}\right\rfloor = 200$

$|A_4| = \left\lfloor\frac{1000}{7}\right\rfloor = 142$ $\quad |A_1\cap A_2| = \left\lfloor\frac{1000}{2\cdot 3}\right\rfloor = 166$ $\quad |A_1\cap A_3| = \left\lfloor\frac{1000}{2\cdot 5}\right\rfloor = 100$

$|A_1\cap A_4| = \left\lfloor\frac{1000}{2\cdot 7}\right\rfloor = 71$ $\quad |A_2\cap A_3| = \left\lfloor\frac{1000}{3\cdot 5}\right\rfloor = 66$ $\quad |A_2\cap A_4| = \left\lfloor\frac{1000}{3\cdot 7}\right\rfloor = 47$

$|A_3\cap A_4| = \left\lfloor\frac{1000}{5\cdot 7}\right\rfloor = 28$ $\quad |A_1\cap A_2\cap A_3| = \left\lfloor\frac{1000}{2\cdot 3\cdot 5}\right\rfloor = 33$

$|A_1\cap A_2\cap A_4| = \left\lfloor\frac{1000}{2\cdot 3\cdot 7}\right\rfloor = 23$

$$|A_1\cap A_3\cap A_4| = \left\lfloor \frac{1000}{2\cdot 5\cdot 7}\right\rfloor = 14 \qquad |A_2\cap A_3\cap A_4| = \left\lfloor \frac{1000}{3\cdot 5\cdot 7}\right\rfloor = 9$$

$$|A_1\cap A_2\cap A_3\cap A_4| = \left\lfloor \frac{1000}{2\cdot 3\cdot 5\cdot 7}\right\rfloor = 4$$

$$|A_1'\cap A_2'\cap A_3'\cap A_4'| = 1000-500-333-200-142+166+100+71$$
$$+66+47+28-33-23-14-9+4$$

$$= \underline{\underline{228}}$$

(8) תיקון לשאלה: כמה תמורות שונות יש לאותיות
$a,b,c,d,e,f,g,h,i,j,k,l,m,n,o,p$.

סה"כ תמורות - $16!$

A_1 - מספר התמורות המכילות את המילה bad - $14!$.

A_2 - ״ - def - $13!$.

A_3 - ״ - ape - $14!$.

A_4 - ״ - leading - $10!$

א. $|A_1\cap A_2|=0 \quad |A_1\cap A_3|=0 \quad |A_2\cap A_3|=0$

$|A_1\cap A_2\cap A_3|=0$

$|A_1'\cap A_2'\cap A_3'| = \underline{\underline{16!-14!-13!-14!}}$

ב. $|A_1\cap A_2\cap A_4|=0 \quad |A_2\cap A_3\cap A_4|=0 \quad |A_1\cap A_3\cap A_4|=0$

$|A_1\cap A_2\cap A_3\cap A_4|=0 \quad |A_1\cap A_4|=0 \quad |A_2\cap A_4|=0 \quad |A_3\cap A_4|=0$

$|A_1'\cap A_2'\cap A_3'\cap A_4'| = 16!-14!-13!-14!-10!$

9. סה"כ האפשרויות לסדור $12!$

A_1 - מספר האפשרויות ש-4 הישראלים ישבו בבלוק רצוף $9!\cdot 4!$

A_2 - // ש-3 רוסים -//- $10!\cdot 3!$

A_3 -//- ש 5 סינים -//- $8!\cdot 5!$

$|A_1 \cap A_2| = 7!\cdot 4!\cdot 3!$ $\quad |A_1 \cap A_3| = 5!\cdot 4!\cdot 5!$

$|A_2 \cap A_3| = 6!\cdot 3!\cdot 5!$ $\quad |A_1 \cap A_2 \cap A_3| = 3!\cdot 4!\cdot 5!\cdot 3!$

לכן

$$|A_1' \cap A_2' \cap A_3'| = 12! - 9!\cdot 4! - 10!\cdot 3! - 8!\cdot 5! + 7!\cdot 4!\cdot 3!$$
$$+ 5!\cdot 4!\cdot 5! + 6!\cdot 3!\cdot 5! - 3!\cdot 4!\cdot 5!\cdot 3!$$

אוניברסיטת חיפה
מדעי המחשב

סמסטר ב'
להגשה עד 13/6/02 שעה 16:00

מתמטיקה דיסקרטית –תרגיל בית מס' 6

1. קודקודיו של המחומש ABCDE הן נקודות סריג במישור (כלומר נקודות בעלות שיעורים שלמים. הוכח כי קיימים לפחות שני קודקודים שנקודות האמצע שלהם היא נקודת סריג.
2. הוכח כי לכל n טבעי אפשר למצוא תת-קבוצה בת n איברים של {1,2,3…,2n} שאינם מתחלקים זה בזה. רמז:כל מספר טבעי חיובי t אפשר להציג באופן יחיד כמכפלה של מספר אי-זוגי במספר שהוא חזקה של 2, כלומר קיימים $k,r\in N$ כך ש $t=2^k(2r+1)$.
3. מצא ביטוי מפורש עבור האיבר ה- n-י של סדרת פיבונצ'י.
4. נסמן ב- a_n את מספר הסדרות באורך n של הסימנים a,b,1,2,3,4 שאין בהן שתי ספרות (1/2/3/4) רצופות (אבל ייתכנו שתי אותיות רצופות). מצא יחס רקורסיה עבור a_n.
5. מצא יחס רקורסיה לחישוב מספר האפשרויות לפזר n עצמים שונים ל- k ארגזים שווים, כאשר בכל ארגז יש לפחות עצם אחד.

מתמטיקה דיסקרטית פתרון תרגיל מס' 6.

1. נסווג את חמש הנקודות A,B,C,D,E לפי הזוגיות של הרכיבים: (זוגי, זוגי), (זוגי, אי-זוגי), (אי-זוגי, זוגי), (אי-זוגי, אי-זוגי).
לפי עקרון שובך היונים קיימות שתי נקודות השייכות לאותו הסיווג. נניח A,B. שני סכומי הרכיבים של נקודות אלה הם זוגיים ולכן נקודת האמצע היא נקודת סריג.

2. נתבונן בקבוצה $A=\{n+1,\dots,2n\}$
בקבוצה זו יש n איברים.
טענה: איברי A אינם מחלקים זה את זה.
הוכחה: אם מחלקים את $2n$ ב-n נקבל 2,
לכן אם נחלק את $2n$ בשאר איברי A נקבל תוצאה בין 1 ל-2. לכן כל איברי A אינם מחלקים את $2n$. באותו אופן אם נחלק את $2n-1$ ב-n נקבל $2-\frac{1}{n}<2$, ולכן כל שאר איברי A שקטנים מ-$2n-1$ אינם מחלקים את $2n-1$, וכו'
לכן איברי A אינם מתחלקים זה בזה.

3. $a_0 = a_1 = 1$ $\qquad a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$

נציב $a_n = x^n$ $\qquad x^n = x^{n-1} + x^{n-2}$

$x^2 - x - 1 = 0$

$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$

$$a_n = A_1\left[\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right]^n + A_2\left[\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right]^n$$

$n=0$, $A_1 + A_2 = 1$

$n=1$, $A_1 \frac{1+\sqrt{5}}{2} + A_2 \frac{1-\sqrt{5}}{2} = 1$

נקבל $A_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $B = -\frac{1}{\sqrt{5}} \frac{1-\sqrt{5}}{2}$

לכן: $a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right)$

4. $a_0 = 1$, $a_1 = 6$

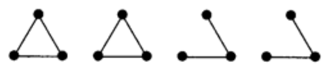
$a_n = 2a_{n-1} + 8a_{n-2}$

5. נסמן ב $P(n,k)$ את מספר האפשרויות לפזר n עצמים
שונים ל- k ארגזים שונים כאשר בכל ארגז לפחות עצם
אחד. נוסחת הרקורסיה היא $P(n,k) = kP(n-1,k) + P(n-1,k-1)$
כאשר עבור $n<k$ $P(n,k) = 0$, $P(n,1) = 1, P(k,k) = 1$
הסבר: נסתכל על העצם ה n-י. ישנן 2 אפשרויות. או שהוא
בארגז לבד, או שלא. אם הוא בארגז נפרד אז נשים אותו
בארגז נפרד (בדרך יחידה) ואת שאר n-1 העצמים ב k-1
ארגזים ב $P(n-1,k-1)$ אופנים. אם הוא לא בארגז

נפרד ,אז נשים את שאר $n-1$ העצמים ב-k ארגזים
ב- $P(n-1,k)$ אופנים .ונוסיף אותו לאחד הארגזים
ב- k אופנים שונים.

סמסטר ב'
להגשה עד 19/6/02 שעה 16:00

מתמטיקה דיסקרטית –תרגיל בית מס' 7

1. הראו כי אם גרף מכיל שביל בין שני צמתים u,v אז הוא מכיל מסלול בין u ל v.
2. הוכח כי כל גרף עם n צמתים ו- k קשתות מכיל לפחות $n-k$ רכיבי קשירות.
3. הוכח כי אם כל שני צמתים בגרף חסר לולאות G מחוברים ע"י מסלול יחיד, אז G הוא עץ.
4. הוכח כי כל עץ עם בדיוק שני צמתים מדרגה אחת הוא מסלול.
5. יהי G גרף עם צמתים $v1,..,v4$ כך שהגרפים $G\text{-}v1,\ldots G\text{-}v4$ הם הגרפים הבאים: ציין מהו G.
6. נניח כי דרגת כל צומת של גרף הי  באורך זוגי (רמז הסתכל על מסלול מקסימלי).
7. נניח כי $n>=3$ $V(G) = \{v1,v2,..,vn\}$ אם לפחות שניים מהתת-גרפים $G\text{-}v1\ldots G\text{-}vn$ קשרים אז G קשיר.

פתרון תרגיל מס' 7

1. בשלילה נניח כי גרף G מכיל שביל בין שני קודקודים u,v אך הוא לא מכיל מסלול בין u ו-v.
אז u ו-v נמצאים בשני רכיבי קשירות שונים ב-G. ~~[illegible]~~ מכיון שאין קשת בין רכיב הקשירות של u ורכיב הקשירות של v אין גם שביל בין u ל-v בסתירה להנחה. לכן יש מסלול בין u ו-v.

ג. באינדוקציה על מספר הקשתות.
בסיס האינדוקציה: $k=0$. ברור שבגרף עם n קדקודים וללא קשתות יש n רכיבי קשירות.
שלב האינדוקציה: נניח נכונות לגרפים עם $k \geq 1$ קשתות, ונוכיח לגרף עם $k+1$ קשתות.
יהי G גרף כזה ותהי e קשת כלשהי ב-G.
לפי הנחת האינדוקציה בגרף $G \setminus \{e\}$ יש לפחות $n-k$ רכיבי קשירות. נוסיף כעת חזרה את הקשת e. ייתכנו שני מקרים:
א. אם הקשת e מחברת שני קודקודים השייכים לאותו רכיב הקשירות בגרף $G \setminus \{e\}$ אז גם ב-G יש $n-k$ רכיבי קשירות.
ב. אם e מחברת שני הקודקודים השייכים לשני רכיבי הקשירות שונים בגרף $G \setminus \{e\}$, אז ב-G יש רכיב קשירות אחד ~~[illegible]~~ פחות מאשר ב-$G \setminus \{e\}$, כלומר יש ב-G $n-k-1$ רכיבי קשירות.
בכל מקרה הראינו שב-G יש לפחות $n-k-1$ רכיבי הקשירות.

3. נניח כי G אינו עץ. אזי ב- G יש מעגל.
יהיו u,v שני קודקודים במעגל זה. אזי בין
u ו- v ישנם שני מסלולים לאורך המעגל
בסתירה להיותו של שני קודקודים מחוברים ע"י מסלול
יחיד. לכן G היא עץ.

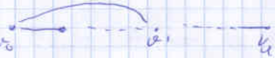
4. באינדוקציה על מספר הקשתות:
בסיס האינדוקציה עבור $n=2$  ברור.
~~שלב~~ שלב האינדוקציה: נניח עבור $n \geq 2$ מתקיים, ונוכיח
עבור $n+1 \geq 2$.
אזי ב- T ישנם שני קודקודים מדרגה אחת.
נוציא את אחד הקודקודים האלו v, ויהי u השכן
של v ב- T. הגרף $T \setminus \{v\}$ הוא עץ עם
שני קודקודים מדרגה אחת - ש- הוא עלה לכן
T נשאר קשיר. ודרגתו של u עכשיו היא 1 -
אחרת דרגתו של u ב- T היא לפחות 3 -
ואז נקבל כי ב- T יש לפחות 3 קודקודים
מדרגה 1. כל שאר הקודקודים ב- $T \setminus \{v\}$
נשארו באותה דרגה. לכן לפי הנחת האינדוקציה
נקבל כי $T \setminus \{v\}$ הינו מסלול (כי ב- $T \setminus \{v\}$
יש שני קודקודים בדיוק מדרגה אחת) ש- u
הוא אחד מהקצוות של המסלול.
נחבר את v ונקבל מסלול 

5. K_4 פחות קשת

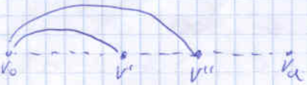
6. נתבונן על מסלול מקסימלי ב-G.
(מסלול מקסימלי - אי אפשר להגדיל אותו ע"י הוספת קשת).

מכיוון שדרגת כל קודקוד היא לפחות 3 אז מ-v_0 יוצאות לפחות עוד שני קשתות, אך מכיוון ש-$v_0, ..., v_k$ זה מסלול מקסימלי הקשתות פוגעות בקודקודים בתוך המסלול (אחרת היה אפשר להגדיל את המסלול בסתירה למקסימליות).

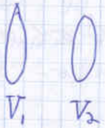
שתי אפשרויות: א. אחת הקשתות פוגעת בקודקוד במרחק אי-זוגי v' ואז נקבל $v_0, v', ..., v_0$ מעגל באורך זוגי.



ב. שתי הקשתות פוגעות בקודקודים v', v'' במרחק זוגי מ-v_0. אז $v_0, v'', ..., v', v_0$ מעגל באורך זוגי כי המרחק בין v' ל-v'' הוא זוגי.



7. בשלילה נניח כי G אינו קשיר. אזי ל-G יש לפחות 2 מרכיבי קשירות



יהיו i ו-j כך ש $G-v_i$, $G-v_j$ קשירים
מכיוון ש $G-v_i$ קשיר ויש לנו 2 מרכיבי קשירות
לפחות v_i נמצא ברכיב קשירות אחד, וכל היתר
נמצאים ברכיב הקשירות השני.
באותו אופן $G-v_j$ קשיר אזי v_j נמצא ברכיב
הקשירות אחד, וכל היתר נמצאים ברכיב קשירות השני
קיבלנו כי ב-G יש שני מרכיבי הקשירות שבכל
אחד מהם יש קודקוד אחד בלבד. בסתירה לנתון
ש $n \geq 3$.