Diagrammatisches Denken bei Euklid

Jasmin Özel

Abstract

Sollen wir Euklids Vorgehen in den *Elementen*[1] als ein axiomatisches System verstehen—oder als ein System des natürlichen Schließens, in dem die Regeln und Prinzipien, denen wir in unserem Schließen folgen, dargelegt werden? Im Folgenden werde ich darstellen, wie Kenneth Manders, Danielle Macbeth, Marco Panza und andere in jüngster Zeit diese letztere Sicht als eine alternative Lesart von Euklids Elementen dargestellt haben. Insbesondere werde ich versuchen zu zeigen, dass wir in dieser Lesart Euklids eine Art der Argumentation vorfinden, die nicht bloß auf Diagrammen basiert (wie dies auch in anderen diagrammatischen Darstellungen der Fall ist), sondern dass die Euklidische Geometrie hier als wesentlich diagrammatisch aufgefasst wird: Wir argumentieren und denken hier *in dem Diagramm*, und nicht bloß auf seiner Grundlage.

1 Einleitung

> Ganz recht, nur darf man nicht vergessen, daß auch diese Figuren als Charaktere anzusehen sind. Denn der Kreis auf dem Papier ist nicht der wirkliche Kreis, auch ist das gar nicht vonnöten, sondern es genügt, daß er für uns die Stelle des Kreises vertritt.“ (Leibniz, „Dialog über die Verknüpfung zwischen den Dingen und Worten“ 1677)

1. Auch wenn die Autoren, die in diesem Aufsatz besprochen werden, ihre Aussagen auf Demonstrationen in den *Elemente* schlechthin beziehen (siehe z.B. Manders 2008, S. 65), stammen die meisten Beispiele in dieser Debatte aus Buch I – Buch III.

Diagramme sind spätestens mit den Entwicklungen des 19. Jahrhunderts in der Mathematik in Verruf geraten.[2] Oft wird seitdem eine Spannung zwischen Anschauung (in Kants Sinne) und Genauigkeit gesehen. Ich werde hier eine alternative Sicht auf die Diagramme beschreiben, wie wir sie vor allem in den Arbeiten der letzten zwei Jahrzehnte von Kenneth Manders, Danielle Macbeth, Marco Panza und anderen vorfinden. Zunächst werde ich mich mit der Natur der Diagramme in Euklids Elementen beschäftigen: Laut Manders, Macbeth *et al.* wird Euklids Vorgehen hier für gewöhnlich als ein Axiomatisches System beschrieben. Die Prämissen wären demnach in der Form einer Liste von Definitionen, Grundbegriffen und Postulaten gegeben, von denen dann bestimmte Theoreme als Schlüsse folgen. Manders, Macbeth *et al.* behaupten hingegen, dass wir Grund haben, das Procedere in Euklids Diagrammen nicht als Axiomatisches System, sondern stattdessen als ein System des natürlichen Schließens zu begreifen, in dem die Regeln und Prinzipien, denen wir in unserem Schließen folgen, dargelegt werden. Mein Fokus wird vor allem darauf liegen zu zeigen, worin laut dieser Lesart die Vorteile der Euklidischen Geometrie bestehen, und was ihre Besonderheiten sind. Manders et al. plädieren dafür, dass wir hier eine Art der Argumentation vorfinden, die nicht bloß auf Diagrammen basiert (wie dies etwa in Euler-Diagrammen der Fall ist), sondern dass die Euklidische Geometrie wesentlich diagrammatisch ist: Wir argumentieren und denken hier *in dem Diagramm*, und nicht bloß auf seiner Grundlage.

Wie wir sehen werden, haben die Diagramme in dieser alternativen Sicht, um es mit Grice auszudrücken, keine *natürliche* sondern eine *nicht-natürliche Bedeutung*. Während natürliche Bedeutung bildzeichenhaft ist, ist nicht-natürliche Bedeutung konventionell („conventional“ in Grice 1957, S. 379) oder symbolisch, wie im Folgenden erläutert wird.[3] Diagramme werden hier somit als wesentlich allgemein verstanden. Ich werde mit Manders et al. und anhand von Beispielen aus Buch I der *Elemente* dafür plädieren, dass Euklids Diagramme sich damit grundlegend von anderen diagrammatischen Darstellungsweisen, wie wir sie etwa in Euler Diagrammen vorfinden, unterscheiden—die zwar explizit machen können, was in den Prämissen bloß implizit gegeben ist. Euklids Diagramme hingegen erweitern unser Wissen, und sind damit in Kants Worten *synthetisch apriorisch*. Zudem—ebenfalls im Gegensatz zu anderen diagrammatischen Darstellungsweisen—ist es hier das Diagramm selbst, und nicht etwa der begleitende Text, der der Ort der Argumentation ist.

2. Seitdem werden Diagramme gar als Hindernisse für den Fortschritt von Beweisen verstanden.

3. „This question about the distinction between natural and nonnatural meaning is, I think, what people are getting at when they display an interest in a distinction between ‚natural‘ and ‚conventional‘ signs“ (Grice 1957, S. 379).

2 Die Euklidische Demonstration

Die Euklidische Demonstration war laut Danielle Macbeht das Paradigma antiker mathematischer Praxis: „The paradigm of ancient mathematical practice is the Euclidean demonstration, a practice characterized by the involvement of both text and diagram“ (Macbeth, S. 236).[4] Charakteristisch für diese Praxis ist die Verwendung von sowohl Text als auch Diagramm. Im Gegensatz dazu ist die frühe moderne Mathematik seit dem 17. Jahrhundert rechnend und symbolisch; sie enthält wesentlich die Formelsprache der Arithmetik und der elementaren Algebra.[5] Die Wissenschaft der Mathematik mag seit Euklid zwar nicht die radikalen Veränderungen erfahren haben, die wir im Laufe der Geschichte der Naturwissenschaften vorfinden. Dennoch hat sich die Praxis der Mathematik im Laufe ihrer zweieinhalbtausendjährigen Geschichte erheblich verändert. Insbesondere im 19. Jahrhundert erfuhr die diagrammatische Form der Argumentation kritische Aufmerksamkeit seitens der Mathematik. So wurden hier verschiedene alternative Formen der Geometrie und ihrer Beziehung zueinander eingeführt, die z. B. ohne das Parallelenaxiom auskommen und somit nicht-euklidisch sind. Diese waren dann natürlich in ihrer Anwendung, z.B. in der Relativitätstheorie, von Bedeutung. Zudem finden wir im Laufe des 19. Jahrhunderts einen Übergang zu einem mehr konzeptuellen oder begrifflichen Ansatz: Ein Denken basierend auf dem Begriff der Stetigkeit in der Analysis, oder von dem der Gruppe in der abstrakten Algebra.[6]

Diese neueren Entwicklungen der mathematischen Praxis brachten neue Anforderungen mit sich, wie der nach exakten und lückenfreien Beweisen auf der Basis zuvor spezifizierter Axiome und Definitionen. Sie bedeuteten für viele zudem, dass die Euklidische mathematische Praxis hoffnungslos fehlerhaft sei.

Im 20. Jahrhundert finden wir dann sogar eine Tendenz in der Philosophie der Mathematik vor, die Geometrie ganz als Mittel der Rechtfertigung in Beweisen zu verwerfen. Die moderne Logik wurde nun zum einzig akzeptablen Standard mathematischer Rechtfertigung.[7]

Diese Entwicklungen der Mathematik insbesondere im 19. Jahrhundert haben in den Augen vieler die Grenzen der euklidischen Geometrie aufgezeigt. Dennoch

4. Im Gegensatz zu Macbeths Behauptung hier verfährt Archimedes hingegen sehr anders (ich danke einem Gutachter für diesen Hinweis).

5. Cf. Macbeth 2010 und Lachtermann 1989.

6. Stein 1988.

7. Manders 2008, S. 65.

verteidigen Macbeth und Manders ihren Stellenwert als eine “extremely successful, robust, and sound mathematical practice”[8]. Doch auch wenn die Euklidische Geometrie sich im Laufe ihrer Geschichte als erfolgreiche, robuste und korrekte Praxis erwiesen hat, so hat sie mit der gegenwärtigen mathematischen Praxis wenig gemein. Es stellt sich uns somit die Frage, worin dann ihr Wert bestehen kann. Manders *et al.* argumentieren erstens, dass ein Nachdenken über die mathematische Praxis, die wir bei Euklid vorfinden—als frühe systematische und fruchtbare mathematische Praxis—uns dabei helfen kann, das Wesen mathematischer Praxis im allgemeinen zu erhellen.[9] Zweitens könne ein solches Verständnis uns in eine bessere Lage versetzen, spätere Entwicklungen besser in ihrem Kontext zu verstehen. Mit Manders, Macbeth *et al.* werde ich nun daher dafür plädieren, dass die Euklidische Praxis in der Tat nicht fehlerhaft ist. Sie mag ihre Grenzen haben: nicht alles kann in der Mathematik auf Euklids Art und Weise umgesetzt werden. Dennoch hat sich diese Geometrie über zweieinhalbtausend Jahre als extrem erfolgreiche, robuste, und korrekte Praxis erwiesen—wenn auch eine, die sich von der gegenwärtigen mathematischen Praxis stark unterscheidet.

3 Euklids Elemente: Axiomatisches System oder ein System des Natürlichen Schließens?

Euklids *Elemente* werden für gewöhnlich als axiomatisches System beschrieben, in dem Theoreme bewiesen und Lösungen zu Problemen konstruiert werden, nämlich durch eine auf Diagrammen basierte Beweisführung, die sich auf den Fall der in Frage stehenden geometrischen Figur bezieht. Wir werden gleich am Beispiel des ersten Satzes des ersten Buches das bekannteste Beispiel einführen, das in der Literatur zur Untermauerung der These genutzt wird, dass die geometrischen Argumente, die wir bei Euklid vorfinden, als Diagramm-basiert zu verstehen sind[10]. Nach Danielle Macbeth sollten Euklid’s Element jedoch als ein System des Natürlichen Schließens und nicht als Axiomatisches System verstanden werden—und als eines das nicht bloß auf Diagrammen basiert, sondern im Diagramm argumentiert. Sie widerspricht der herkömmlichen Sicht wie folgt:

> In Euclid’s demonstrations, the definitions, common notions, and postulates are not treated as premises; instead they function, albeit only implicitly, as rules constraining what may be drawn in a diagram and

8. Macbeth 2010, S. 236
9. Ibid.
10. Vgl. Marco Panzas (2012) Diskussion in „The twofold role of diagrams in Euclid’s plane geometry“

> what may be inferred given that something is true. They provide the rules of the game, not its opening positions.[11]

Die Definitionen, Axiome und Postulate sollen demnach nicht als Prämissen verstanden werden, sondern als Regeln, die *die Regeln des Spiels* festlegen—die uns also implizit sagen, was in einem Diagramms gezeichnet werden kann, und welche Schlüsse wir ziehen dürfen. Die Unterscheidung zwischen einem Axiomatischen System und einem System des Natürlichen Schließens besteht damit in folgendem Kontrast, den Manders, Macbeth *et al.* in Bezug auf die Funktion der Definitionen, Postulaten und Grundbegriffen konstatieren: 1. In der axiomatischen Lesart fungieren sie als *Prämissen*; 2. in der Lesart als System des Natürlichen Schließens stellen sie die *Regeln und Prinzipien* des Schließens selbst dar—die Inferenzregeln, die aussagen, welche inferentiellen Schritte von Prämissen zu Konklusion legitim sind und welche nicht. Macbeth drückt den Gegensatz wie folgt aus:

> Do they function to provide starting points for reasoning, as has been traditionally assumed? Or do they instead govern one's passage in the construction, from one diagram to another, and one's reasoning, from one judgment to another?[12]

Im ersten Falle besteht die Rolle der Definitionen, Postulate und Grundbegriffe darin, die *Startpunkte des Denkens* zu sein; im zweiten regeln sie den *Übergang* in der Konstruktion von einem Diagramm zum nächsten sowie von einem Urteil zum nächsten. Macbeths Verdacht hier ist, dass die Annahme, dass Euklid in den *Elementen* in der Tat ein Axiomatisches System vorlegt, der Tatsache geschuldet ist, dass Platon und Aristoteles annahmen, dass jede Wissenschaft — inklusive der Mathematik — danach streben sollte, axiomatisch zu sein. Insofern Euklids System ein „Paradigma der Wissenschaft" darstellt, sollte es daher auch axiomatisch sein. In einem axiomatischen System ist eine Liste von Axiomen gegeben (vielleicht zusammen mit explizit genannten Inferenz-Regeln), auf deren Grundlage man Theoreme deduzieren kann. Die Axiome sind somit Urteile, die die Prämissen von Inferenzen bereitstellen. In einem System des natürlichen Schließens sind dagegen nicht die Axiome gegeben, sondern stattdessen verschiedene Inferenz-Regeln, die darlegen, welche inferentiellen Schritte von Prämissen zur Konklusion legitim sind. Die Prämissen sind somit nicht gegeben, sondern müssen bereits gegeben sein. Die Regeln besagen dann, wie das weitere Vorgehen auszusehen hat.

Die Frage danach, ob Euklids System ein axiomatisches ist oder nicht können wir somit wie folgt übersetzen: Besteht die Funktion der Definitionen, Postulate

11. Macbeth 2010, S. 237.
12. Ibid.

und Axiome, die zu Beginn von Euklids Demonstrationen gegeben sind, darin Prämissen zu liefern, oder aber die Regeln, nämlich die Regeln der Konstruktion und von Inferenzen?

Betrachten wir z.B. die drei ersten Postulate des ersten Buchs:

1. Von einem beliebigen Punkt zu einem anderen ist eine gerade Strecke zu ziehen,
2. und eine gerade Strecke ist beliebig verlängerbar,
3. und um einen beliebigen Punkt ist mit beliebigem Radius ein Kreis beschreibbar...

Die ersten drei Postulate in den *Elementen* bestimmen, was im Verlaufe der Konstruktion von Diagrammen gezeichnet werden kann: Sind zwei Punkte gegeben, so kann eine gerade Strecke mit den zwei Punkten als Endpunkten gezeichnet werden. Eine begrenzte Strecke kann fortgesetzt werden. Hat man einen Punkt und das Segment einer Geraden (oder eine Distanz), so kann ein Kreis mit dem Punkt als Mittelpunkt und dieser Distanz als Radius gezeichnet werden.[13] In jedem der genannten Fälle muss der Ausgangspunkt (Punkte bzw. Strecken) bereits gegeben sein, damit das Postulat überhaupt Anwendung finden kann. Zudem kann anfangs nichts, was diese drei Postulate nicht erlauben, getan werden. Sobald sie jedoch bewiesen sind, können eine Vielzahl anderer Konstruktionsregeln ebenfalls genutzt werden. Mit Hilfe von Kreisen, Linien und Punkten kann nun etwa gezeigt werden, dass ein gleichseitiges Dreieck auf einer gegebene begrenzten graden Linie konstruiert werden kann (erstes Buch, erster Satz). In nachfolgenden Konstruktionen kann im Anschluss dann immer bereits ein gleichseitiges Dreieck gezeichnet werden, ohne weitere Zwischenschritte in der Konstruktion—angenommen natürlich, man hat das entsprechende Linien-Segment.

Sätze, so wie der erste Satz des ersten Buches, die Konstruktionsprobleme lösen, fungieren bei Euklid somit als abgeleitete Regeln ("derived rules"[14]) der Konstruktion. Sobald sie bewiesen sind, können sie bei der Konstruktion von Diagrammen genauso benutzt werden wie die Sätze selbst. Definitionen können ebenfalls Inferenzen erlauben: Wenn z.B. in einem Satz ein Diagramm einen Kreis enthält, dann erlaubt die Definition des Kreises den Übergang zu der Annahme, dass alle Ihre Radien gleich sein. Wenn es eine dreiseitige Figur enthält, also eine Figur, die von drei geraden Linien begrenzt ist, deren Seiten alle gleicher Länge sind, dann erlaubt die Definition eines gleichseitigen Dreiecks, den Schluss, dass es sich um ein gleichseitiges Dreieck handelt.

13. Vgl. Macbeth 2010, S. 237.
14. Macbeth 2010, S. 238.

Doch nicht alles, was im Laufe einer Demonstration geschieht, wird durch explizit angegebene Regeln, ob nun basal oder abgeleitet, geregelt. So zieht Euklid erstens explizit und implizit mehrere offensichtlich gültige Schlüsse (z.B. dass zwei Dinge nicht gleich sind, wenn eines größer ist als das andere). Die Regeln für solche Schlüsse werden für gewöhnlich nicht explizit genannt.[15] Zweitens, und für unsere Zwecke wichtiger, muss man in Euklids Demonstrationen vieles direkt aus dem Diagramm ablesen, wieder ohne Regeln, die explizit angegeben werden.

Betrachten wir hier als Beispiel den ersten Satz des ersten Buches, in dem auf einer gegebenen geraden Strecke ein gleichseitiges Dreieck zu errichten ist:

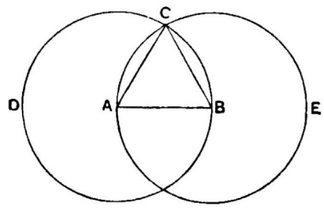


Figure 1 [16]

- Es sei die gerade Strecke AB gegeben.
- Es soll auf AB ein gleichseitiges Dreieck errichtet werden. Es ist um A mit Radius AB der Kreis BCD zu zeichnen und um B mit Radius BA der Kreis ACE.
- Vom Punkt C, in dem die Kreise sich schneiden, sind zu den Punkten A und B die Strecken CA und CB zu ziehen.[17]

Wenn zwei Kreise sich schneiden, dann ergeben sie einen Schnittpunkt. Dieser Schnittpunkt scheint einfach plötzlich aufzutauchen in dem Diagramm („it pops up“ in Macbeths Worten), wenn es gezeichnet wird, und steht einem von da an in der nachfolgenden Beweisführung einfach zur Verfügung. Im ersten Satz des ersten Buchs geschieht genau dies gleich zweimal, wenn aus einer gegebenen Strecke ein gleichseitiges Dreieck konstruiert wird. Hier ist die Apodeixis, die Euklid im Anschluss an das Diagramm anführt (mit meinen Zusätzen in eckigen Klammern):

1. Da der Punkt A Mittelpunkt des Kreises CDB ist, ist AC gleich AB. [Aufgrund der nicht erwähnten Definition eines Kreises.]

15. Ich danke einem Gutachter für den Hinweis, dass zumindest als Axiom festgelegt wrid, dass Gleichheit Deckungsgleichheit ist.
16. Macbeth 2010, S. 240.
17. Euklid, *Elemente*, 1. Satz, 1. Buch

2. Da wiederum B Mittelpunkt des Kreises CAE ist, ist BC gleich BA. [Wieder implizit erlaubt durch die Definition eines Kreises.]

3. Es wurde gezeigt, dass CA gleich AB ist, somit sind CA und CB gleich AB. [Aufgrund des ersten Grundsatzes]

4. Da dasjenige, das demselben gleich ist, auch unter sich gleich ist, ist CA gleich CB. Also sind CA, AB, BC gleich. [Gerechtfertigt durch das Axiom der Gleichheit]

5. Deshalb ist das Dreieck ABC gleichseitig und auf AB errichtet, was auszuführen war.[18]

4 Die Euklidische Demonstration als wesentlich allgemein

Bevor ich nun zu der zentralen Frage komme, nämlich der danach, was genau diagrammatisches Denken bei Euklid (im Unterschied zu bloß auf Diagrammen basiertem Denken) ausmacht, müssen wir zunächst eine weitere Frage beantworten, nämlich die danach, ob Euklids Diagramme eine *Instanz* darstellen, über die hier nachgedacht wird, oder ob sie stattdessen etwas *Allgemeineres* darstellen. Eine ähnliche Form der Argumentation kann laut Macbeth in der Quantorenlogik gefunden werden: wenn wir z.B. beweisen wollen, dass alles was A ist auch C ist, von den zwei Annahmen, dass alles was A ist auch B ist, und alles was B ist C ist, so müssen wir zunächst eine Instanz der Prämissen bilden, damit dann die Regeln des propositionellen Kalküls Anwendung finden können.[19]

Man denkt hier somit über einen besonderen Fall nach, und am Ende des Beweises nimmt man das, was für dieses eine Einsetzungsbeispiel bewiesen wurde als allgemeingültig an. Denn jeder Schluss, der aufgrund dieses einen Beispiels im Laufe des Beweises gezogen wurde, könnte genauso gut aufgrund jedes anderen Beispiels gezogen werden. Laut Russell kommt Euklids Demonstrationen eine analoge Funktion zu.[20]

Dies erlaubt uns nun, etwas mehr zu dem Verhältnis von Diagramm und Text in den Elementen zu sagen. Leibniz folgend sagt Manders:

18. Euklid, *Elemente*, 1. Satz, 1. Buch. Der erst Grundsatz ist für unsere Zwecke hier besonders relevant: „Das was demselben gleich ist, ist unter sich gleich“

19. “What is to be demonstrated is general but the demonstration itself (that is, the setting out, construction, and *apodeixis*) is particular; its generalizability is ‘a derivative of its repeatability’ ”

20. Cf. Macbeth 2010.

> [D]iagrams [are] textual components of a traditional geometrical text or argument, rather than semantic counterparts.[21]

Bei Leibniz finden wir die folgende Aussage, die ich am Anfang der Einleitung bereits erwähnte:

> Ganz recht, nur darf man nicht vergessen, daß auch diese Figuren als Charaktere anzusehen sind. Denn der Kreis auf dem Papier ist nicht der wirkliche Kreis, auch ist das gar nicht vonnöten, sondern es genügt, daß er für uns die Stelle des Kreises vertritt.[22]

Grice, wie Macbeth betont, erklärt die Unterscheidung hier als eine zwischen *natürlicher* und *nicht-natürlicher Bedeutung*, zwischen bildhafter und symbolischer oder auf Konventionen basierender Bedeutung: (1) ein bestimmter Hautfleck kann Masern bedeuten vs. (2) der Bus klingelt dreimal, um zum Ausdruck zu bringen, dass er voll ist. Hätte der Kreis eine natürliche Bedeutung, dann entspräche er dem ersten Fall und hätte seine Bedeutung aufgrund des Beispiels der geometrischen Figur; bei einer nicht-natürlichen Bedeutung dem zweiten Fall—der Kreis im Diagramm wäre dann an sich bereits allgemein

Mit Peirce könnten wir also auch sagen, dass die Diagramme als „icons“ („Bildzeichen“) und nicht als „symbols“ („Symbole“) oder „indices“ fungieren. Die Ähnlichkeit, die wir hier vorfinden, ist jedoch nicht unbedingt eine der Erscheinung. Peirce: „Many diagrams resemble their object not at all in looks; it is only in respect to the relations of their parts that the likeness consists“[23].

Laut Manders und Macbeth ist dies der Grund, warum die Euklidische Demonstration als wesentlich allgemein angesehen werden kann:

> A drawn circle [...] can look like a circle for either of two reasons. It can look like a circle for the same reasons that a dog looks like a dog, namely because it is a circle, a particular instance of circle nature. Or it can look like a circle because it is an icon with non-natural meaning that is intended to resemble a circle first and foremost in the relation of its parts.[24]

> ... [A] Euclidean diagram does not instantiate content but instead formulates it.[25]

21. Manders 1996, S. 391.
22. Leibniz: Dialog über die Verknüpfung zwischen den Dingen und Worten (1677)
23. Peirce 1931, S. 282.
24. Macbeth 2010, S. 246
25. Macbeth 2010, S. 250.

Was man in Euklidischen Demonstrationen zeichnet sind nicht Bilder geometrischer Objekte, sondern die *Relationen*, die die geometrischen Objekte konstituieren. Tennant (1986) plädiert ebenfalls dafür, dass das Dreieck ABC is „no more than a placeholder in schematic reasoning", und das entsprechende Diagramm „stands for no particular triangle".[26] Und auch Marco Panza spricht sich für diese Lesart aus:

> ... EPG (Euclid's plane geometry) arguments are not about singular objects, but rather about something like general schemas, or better, only about concepts.[27]
>
> Diagrammatic singular terms never enter into the statement of a geometrical proposition (whether might it be a theorem or a problem) of the Elements and the Data. They enter rather into their proofs or solutions. It is just because these are proofs or solutions of propositions that are rightly taken to be general, that it is often denied that the diagrammatic singular terms that enter into them refer to particular objects.[28]

Laut Panza erscheinen diagrammatische singuläre Terme nie im Ausdruck des geometrischen Satzes, sondern nur in den Beweisen oder Lösungen. Da Beweise und Lösungen der Sätze richtig verstanden allgemein sind, wird hier somit verneint dass die diagrammatischen singulären Terme auf besondere Objekte verweisen. Panza macht auf dieser Grundlage folgenden Vorschlag:

> ... in EPG, general propositions are proved or solved by working on particular individuals.[29]
>
> ... they are general insofar as they assert some admitted rules to be followed in constructing geometric objects are such that these objects cannot but be constructed so as to have certain properties or relations, to the effect that any time one of them is constructed what is obtained is an object having these properties or relations. (Panza 2012, 62)

Panza erinnert uns hier auch an Platons Auffassung im Staat (Buch VII, 527a-b): Wenn Mathematiker Geometrie betreiben, Kreise beschreiben, Dreiecke konstruieren, Geraden erstellen, bringen sie diese Gegenstände nicht wirklich hervor, sondern zeichnen nur Bilder von ihnen. Die Verwendung praktischer Sprache ist hier

26. Tennant 1986, S. 303f.
27. Panza 2012, S. 60.
28. Panza 2012, S. 61
29. Panza 2012, S. 62.

jedoch unabdingbar, da wir Menschen von den ewigen, unveränderlichen, und rein intelligible Objekten der Geometrie nur zu sprechen vermögen, indem wir (zumindest dem Anschein nach) auf andere Objekte, nämlich zeitliche, veränderliche, und sinnlich wahrnehmbare verweisen (Panza 67). Es ist somit den Grenzen unseres Verstandes geschuldet, dass wir eine „menschliche" Geometrie benötigen, um auf ewige Wahrheiten zu verweisen:

> Even if it were admitted that the objects EPG is about exist (eternally) as such, and are distinguished from each other by their intrinsic nature, and/or that the constructions fulfilled by the geometers merely echo some other transcendent constructions, these objects would enter into EPG, understood as a human geometry, only insofar as the geometer is able to identify them and to distinguish them from each other through some appropriate, human way. (Panza 2012, 67)

5 Diagrammatische Argumentation vs. Diagramm-basierte Argumentation

Ich werde nun abschließend darlegen, warum Euklids System als diagrammatisch—anstatt nur auf Diagrammen basiert—zu verstehen ist. Ich habe bisher gezeigt, warum die Argumentation bei Euklid laut Macbeth, Manders und anderen in Analogie zu einem System des natürlichen Schließens im Unterschied zu einem axiomatischen System aufzufassen ist. Wir haben dann gesehen, inwiefern die Euklidischen Diagramme keine Instanzen darstellen, sondern stattdessen nichtnatürliche Bedeutung haben, und als „icons" („Bildzeichen") fungieren. Diagramme sind damit in der hier referierten Lesart als wesentlich allgemein zu verstehen.

Betrachten wir folgendes Diagramm, das wir im fünften Satz des ersten Buchs vorfinden:

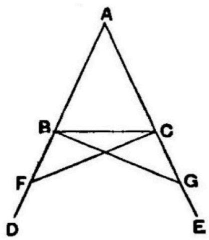


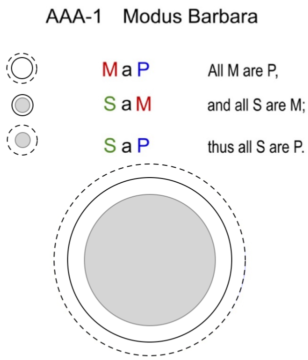
Figure 2 30

Satz 5 sagt uns über dieses Diagramm:

- In einem gleichschenkligen Dreieck sind die Winkel auf der Grundseite, auf der die Schenkel errichtet sind, gleich und, bei Verlängerung der beiden Schenkel, auch die Winkel darunter.
- Wenn das Dreieck ABC die beiden gleichen Seiten AB und AC hat, dann, nach Verlängerung der Seiten AB und AC um BD und CE, sage ich, ist der Winkel ABC gleich dem Winkel ACB und der Winkel CBD gleich dem Winkel BCE.

In dem Diagramm, das wir gerade gesehen haben, ist es genauso wenig möglich,[31] die Identität der Winkel nicht zu realisieren, wie es möglich wäre, einen Kreis in einen zweiten zu einzuschließen, und diesen in einen dritten, ohne somit den ersten auch in den dritten einzuschließen.

Laut Macbeth (2010, S. 251) finden wie dieses Prinzip auch in Euler-Diagrammen vor, die dazu genutzt werden können, gültige Syllogismen aufzuweisen, hier Barbara:



32

Genauso wie man auf der Grundlage eines Euler-Diagrammes schließen kann, dass ein bestimmter Schluss folgt, kann man auf der Basis des Euklidischen Diagramms ebenfalls schließen, dass die aufgestellten Behauptungen wahr sind. Nun stellt sich die Frage: Ist die Funktion der Euler-Diagramme dieselbe, die wir auch in Euklids Diagrammen vorfinden? Wenn wir nun noch einmal das erste Beispiel, den ersten Satz des ersten Buches bei Euklid, betrachten, so zeigt sich folgender Unterschied:[33]

30. Macbeth 2010, S. 250.
31. Zumindest nachdem wir die Hilfslinien der Pons Asinorum eingezeichnet haben.
32. https://en.m.wikipedia.org/wiki/File:Modus_Barbara_%28Euler%29.svg
33. Ich danke einem Gutachter für den Hiweis, dass die Euklidische Demonstration für Q^2 nicht funktionieren würde, da hier der Schnittpunkt der beiden Kreise nicht existiert.

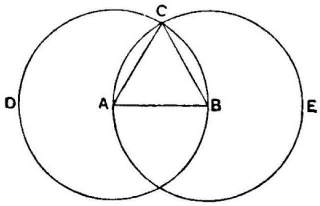


Figure 1 34

Euler-Diagramme können etwas bloß implizit in den Prämissen gegebenes explizit machen. Im Gegensatz zu Euklids Diagrammen können sie unser Wissen jedoch nicht erweitern. Euklids Diagramme sind im Gegensatz dazu fruchtbare Erweiterungen unseres Wissens. Der Grund dafür liegt in der bereits genannten Eigenschaft Euklidischer Diagramme, Objekte auftauchen zu lassen („pop up"). Wir sehen, dass ein gleichseitiges Dreieck auf einer geraden Linie konstruiert werden kann, weil dieses Dreieck in unserer Konstruktion plötzlich erscheint. Vor diesem Zeitpunkt enthält die Demonstration nichts, was auf ein Dreieck schließen lässt. Wir können somit nicht sagen, dass das gleichseitige Dreieck in irgendeinem Sinne *implizit* bereits gegeben war. Dennoch zeigt der erste Satz des ersten Buchs, dass ein solches Dreieck *potentiell* hier gegeben ist. Wenn, was Euklid uns hier vorgibt, gegeben ist, dann können wir auf einer geraden Linie ein gleichseitiges Dreieck konstruieren. Das Dreieck erscheint einfach („pops up"), wenn wir bestimmte Linien zeichnen. Etwas Neues entsteht hier somit aufgrund dieser „pop up" Eigenschaften des Diagramms. So kann z.B. ein Radius eines Kreises sich in eine Seite eines Dreiecks verwandeln. Dies ist in Euler-Diagrammen nicht möglich. Die Bedeutung eines Bildzeichens („icon") eines gezeichneten Kreises ist hier unveränderlich für den Verlauf der Argumentation. Nichts könnte hier sowohl Bildzeichen eines Radius und Bildzeichen der Seite eines Dreiecks sein.

Macbeth vergleicht die Euklidischen Diagramme mit dem bekannten Hase-Enten-Bild. In beiden Fällen kommt es darauf an, die Figur auf eine bestimme Art und Weise zu betrachten. Die gezeichneten Linien unterdeterminierten, was bildlich repräsentiert wird. Sie können potentiell auf radikal verschiedene Arten und Weisen gelesen werden. Dieses Potential wird dann im Verlauf der Argumentation realisiert. Die Euklidischen Diagramme fungieren somit genauso wie das Hasen-Enten-Bild als Bildzeichen für verschieden Arten geometrischer Objekte, nämlich relativ dazu, welche Perspektive man zu ihnen einnimmt. Der Text, den Euklid zusätzlich zum Diagramm zur Verfügung stellt, dient nicht der Demonstration, sondern hilft lediglich dabei, im Diagramm zu sehen. Die Ergiebigkeit der Eu-

34. Macbeth 2010, S. 240.

klidischen Demonstration liegt somit in Kants Terminlogie in der Tatsache, dass der Schluss synthetisch apriorisch ist: er ist notwendig, allgemein, und erweitert dennoch unser Wissen, insofern das Prädikat noch nicht im Begriff des Subjekts enthalten ist. Das Potential des Diagramms wird allein im Diagramm realisiert.

Macbeth unterscheidet in diesem Zusammenhang drei Ebenen der Argumentation:

1. *Grundbestandteile*: Punkte, Linien, Winkel und Flächen
2. *Geometrische Objekte*: die sich aus den Grundbestandteilen zusammensetzen, z.B. Punkte als Endpunkte von Strecken, Punkte als Schnittpunkte von Linien, Winkel, etc.
3. *Das Diagramm*: das selbst keine geometrische Figur ist, aber in ihm können verschiedene Objekte der zweiten Ebene je nach Perspektive wahrgenommen werden

Wir haben gesehen, dass die Euklidischen Diagramme die Funktion von anderen Bildzeichen teilen, wie dem Hasen-Enten-Bild, nämlich relativ zu der Perspektive, die wir zu ihnen einnehmen. Doch Euklidische Diagramme besitzen auch eine Eigenschaft, die wir weder in den Hasen-Enten-Bildern noch in Euler-Diagrammen vorfinden. Euklidische Diagramme zeichnen sich dadurch aus, dass sie drei Ebenen der Artikulation besitzen: Auf der basalsten Ebene finden wir Punkte, Linien, Winkel und Flächen vor. Auf der zweiten Ebene finden wir die geometrischen Objekte vor, die der Gegenstand der Geometrie sind, und die sich aus den Grundbestandteilen zusammensetzen. Auf der dritten Ebene sind nun je nach Konfiguration der verschiedenen gezeichneten Linien Objekte der zweiten Ebene abzulesen

Laut Macbeth erklären diese drei Ebenen der Artikulation zusammen mit den verschiedenen Möglichkeiten, die Teile des Diagramms zu zerteilen, wie man die Einzelteile des Diagramms auf der zweiten Ebene in neue, radikal andere Teile rekonfigurieren kann—und damit signifikante und oft überraschende geometrische Wahrheiten beweisen kann. Die Demonstration besteht dabei wieder aus zwei Teilen: der Kataskeue (Konstruktion) und der Apodeixis. Die Kataskeue gibt uns Informationen über die Konstruktion des Diagramms, nämlich nach dem, was im Diagramm formuliert werden kann, gemäß den Postulaten und bereits demonstrierten Problemen. Die Apodeixis wird davon bestimmt, was man aus dem Diagramm ablesen kann, nämlich gemäß den Grundbegriffen, Definitionen und bereits bewiesenen Sätzen. Sie ist damit nicht ein Mittel des Beweises, sondern stattdessen gibt sie uns eine Anleitung dazu, wie Teile des konstruierten Diagramms zu lesen oder zu analysieren sind—also wie die einzelnen Teile des Diagramms für den Zweck der Demonstration zu zerteilen sind.

Es ist somit das Diagramm selbst, und nicht der Text, das der eigentlich Ort der Argumentation ist. Der Text leitet laut Macbeth hingegen nur die Gedanken während der Demonstration: „[t]he text [...] is merely a script to guide one's words, and thereby one's thoughts, as one walks oneself through the demonstration“ (Macbeth 2010, S. 260). Wir denken hier in dem Diagramm, und nicht nur auf der Grundlage des Diagramms.

Literatur

Euklid: Elemente (2017). Übersetzung der 15 Bücher der Stoicheia mit Verknüpfung der griechischen Textfassung. Neufassung mit Hypertextverweisen. : Die Stoicheia. / Übersetzer: Rudolf Haller. Markgröningen : Edition Opera-Platonis.

Euclid, Elements (1959). Published as Euclid's Elements: all Thirteen Books Complete in One Volume. T Heath (trans.), D. Densmore (ed.). New York: Dover Books.

Grice, H. Paul (1957), „Meaning“. *Philosophical Review* 66, S. 377-388.

Lachtermann, David Rapport (1989). *The Ethics of Geometry: A Genealogy of Modernity.* New York and London: Routledge.

Macbeth, Danielle (2010). "Diagrammatic Reasoning in Euclid's Elements". In: Bart van Kerkhove, Jean Paul van Bendegem & Jonas de Vuyst (eds.), Philosophical Perspectives on Mathematical Practice 12. College Publications. pp. 235-267.

Manders, Kenneth (1995). „The Euclidean Diagram“. In: Mancosu, P. (Ed.) (2004). *The Philosophy of mathematics practice.* Oxford University Press.

Peirce, Charles Sanders (1931). *Collected Papers of Charles Sanders Peirce.* Ed. by C. Hartsthorne and P. Weiss. Vol. 2. Harvard University Press.

Russel, Bertrand (1956). „Mathematical Logic Based on the Theory of Types“. *Logic and Knowledge: Essays 1901-50.* Ed. by R.C. Marsh. Routledge.

Stein, H. [1988]. "*Logos*, Logic, and *Logistiké*: Some Philosophical Remarks on the Nineteenth Century Transformation of Mathematics." *History and Philosophy of Modern Mathematics.* Ed. by W. Aspray and P. Kitcher. Vol. XI. Minnesota Studies in the Philosophy of Science. Minneapolis, MN: University of Minnesota Press.

Tennant, Neil (1986). „The withering away of formal semantics?“ *Mind and Language*, 1, 302-318.