teorema
Vol. XLII/1, 2023, pp. 149-169
ISNN 0210-1602
[BIBLID 0210-1602 (2022) 42:1; pp. 149-169

Lógica cuántica, Nmatrices y adecuación, II

Juan Pablo Jorge y Federico Holik

ABSTRACT
By elaborating on the results presented in *Lógica cuántica, Nmatrices y adecuación I*, here we discuss the notions of adequacy and truth functionality in quantum logic from the point of view of a non-deterministic semantics based on Nmatrices. We present a proof of the impossibility of providing a functional semantics for the quantum lattice. An advantage of our proof is that it is independent of the number of truth values involved, generalizing previous works. Due to the impossibility of defining adequate interpreting sets for the conjunction and disjunction (as was shown in our previous work), it follows that a homomorphism between the lattice of quantum projections and a Boolean algebra of n-elements cannot exist.

KEYWORDS: *Nmatrices, Quantum Logic, Suitable, Truth-functionality, Kochen-Specker Theorem.*

RESUMEN
Continuando lo probado en *Lógica cuántica, Nmatrices y adecuación, I,* en este trabajo discutimos las nociones de adecuación y veritativo-funcionalidad en la lógica cuántica desde el punto de vista de una semántica no determinista de Nmatrices. Presentamos una prueba de la imposibilidad de brindar una semántica funcional para el retículo cuántico. Un punto ventajoso de nuestra prueba es que se independiza de la cantidad de valores de verdad involucrados, generalizando trabajos previos. Debido a la imposibilidad de contar simultáneamente con conjuntos de interpretación *adecuados* para la disyunción y conjunción (como se mostró en el trabajo anterior), no puede existir un homomorfismo entre el retículo de proyectores cuánticos y un álgebra de Boole de *n* elementos.

PALABRAS CLAVE: *Nmatrices, lógica cuántica, adecuación, veritativo funcionalidad, teorema de Kochen-Specker.*

V. ADECUACIÓN Y DESIGUALDAD DISTRIBUTIVA

Esta sección se puede analizar de forma independiente a la anterior. Queremos mostrar que ninguna semántica con conjuntos de interpretación $\widetilde{\wedge}$, $\widetilde{\vee}$ adecuados va a respetar la falla en la distributividad característica del retículo cuántico. Vamos a seguir un razonamiento semejante al que utiliza Malament para llegar a la conclusión de que no puede haber más de un conectivo veritativo-funcional en el retículo cuántico. Primero, probaremos que la definición 2.5 implica:

- $\forall t \quad (t(p \wedge q) \in D \quad \Leftrightarrow \quad t(p) \in D$ y $t(q) \in D)$
- $\forall t \quad (t(p \vee q) \in D \quad \Leftrightarrow \quad t(p) \in D$ o $t(q) \in D)$

Luego, mostraremos que las condiciones anteriores hacen que se valide distributividad. Por lo tanto, si no deseamos que se cumpla la condición de distributividad, no pueden mantenerse estas condiciones. Esto significa que nuestra Nmatriz (la parte relativa a $\widetilde{\wedge}$, $\widetilde{\vee}$) no debe cumplir la definición 2.5. Comencemos mostrando que, si las valuaciones son tales que se cumple la parte de la definición 2.5 relativa a la conjunción, entonces, ocurre que

$$\forall t \quad (t(p \wedge q) \in D \quad \Leftrightarrow \quad t(p) \in D \text{ y } t(q) \in D)$$

Si $t(p \wedge q) \in D$, usando la definición de valuación Nmatricial, tenemos que $t(p \wedge q) \in \widetilde{\wedge}_{(a,b)}$. Entonces, existe en el conjunto de interpretación de la conjunción, al menos un valor designado. Por lo tanto, $\widetilde{\wedge}_{(a,b)} \not\subset V \setminus D$. Usando esta información en la definición 2.5 (por contraposición), obtenemos que $t(p) = a \in D$ y $t(q) = b \in D$.

Veamos ahora la implicación inversa. Si $t(p) \in D$ y $t(q) \in D$, entonces, usando la definición en cuestión, tenemos que $\widetilde{\wedge}_{(a,b)} \subset D$. Por lo tanto, $(p \wedge q) \in D$. Esto finaliza la parte de la prueba relativa a la conjunción.

Aplicaremos ahora el mismo razonamiento con la disyunción para obtener la segunda doble implicación deseada. Queremos ver que$\forall t(t(p \vee q) \in D \Leftrightarrow t(p) \in D$ o $t(q) \in D)$ Comencemos por la implicación a derecha. Si para toda valuación tenemos que $t(p \vee q) \in D$, entonces, $\widetilde{\vee}_{(a,b)} \subset D$, dado que, por definición, se tiene que $t(p \vee q) \in \widetilde{\vee}_{(v(p),v(q))}$. Por lo tanto, obtenemos que $\widetilde{\vee}_{(a,b)} \not\subset V \setminus D$, con lo cual, yendo a la parte correspondiente a este conectivo de la definición 2.5, concluimos que $\neg(a \notin D$ y $b \notin D)$. Es decir, $t(p) = a \in D$ o $t(q) = \ b \in D$, que es lo que queríamos mostrar en esta implicación.

Para la implicación a izquierda, vemos que si $a \in D$ o $b \in D$ para una t cualquiera, la definición 2.5 nos dice que, $\widetilde{\vee}_{(a,b)} \subset D$. Por lo tanto, esta valuación debe cumplir que $t(p \vee q) \in D$, ya que, para este caso, $t(p \vee q) \in \widetilde{\vee}_{(a,b)} \subset D$, con lo cual probamos lo deseado. Hemos mostrado que las condiciones de la definición 2.5 son suficientes para asegurar que

$$\forall t \quad (t(p \wedge q) \in D \quad \Leftrightarrow \quad t(p) \in D \ \text{ y } \ t(q) \in D) \tag{14}$$
$$\forall t \quad (t(p \vee q) \in D \quad \Leftrightarrow \quad t(p) \in D \ \text{ o } \ t(q) \in D) \tag{15}$$

El siguiente paso consiste en probar que las condiciones anteriores nos comprometen con la distributividad del retículo. Con lo cual, si no queremos validar distributividad, no deben cumplirse. Llamaremos a las condiciones (14) y (15) *composicionalidad*. Veamos que la *composicionalidad* implica la desigualdad no deseada en el retículo. Si se cumple *composicionalidad* de la conjunción, entonces $\forall t \in T, \forall \phi, \psi, \rho \in Sent(L)$

$$t(\phi \wedge (\psi \vee \rho)) \in D \Leftrightarrow t(\phi) \in D \text{ y } t(\psi \vee \rho) \in D$$

Usando ahora la *composicionalidad* de la disyunción, lo anterior significa que:

$$t(\phi \wedge (\psi \vee \rho)) \in D \Leftrightarrow (t(\phi) \in D \text{ y } t(\psi) \in D) \text{ o } (t(\phi) \in D \text{ y } t(\rho) \in D)$$

Por lo tanto, volviendo a utilizar esta propiedad de la conjunción:

$$t(\phi \wedge (\psi \vee \rho)) \in D \Leftrightarrow t\,(\phi \wedge \psi) \in D \text{ o } t(\phi \wedge \rho) \in D$$

Equivalentemente, por *composicionalidad* de la disyunción:

$$t(\phi \wedge (\psi \vee \rho)) \in D \Leftrightarrow t((\phi \wedge \psi) \vee (\phi \wedge \rho)) \in D.$$

De esta forma, se estaría cumpliendo un resultado que no se corresponde con la propiedad de no distributividad cuántica:

$$\phi \wedge (\psi \vee \rho) \vDash (\phi \wedge \psi) \vee (\phi \wedge \rho).$$

Entonces, si no queremos validar distributividad, no podemos tener ambos conectivos cumpliendo *composicionalidad*, es decir, con conjuntos de interpretación adecuados (ya que probamos que *adecuación*, la definición 2.5, implica composicionalidad). Recordemos que la adecuación de los conectivos es un concepto pensado originalmente para el segmento positivo de la lógica clásica, que valida distributividad. Por lo tanto, aunque la prueba de Malament utiliza la veritativo-funcionalidad de los conectivos [Malament (2000)] para llegar a la contradicción, con la cual concluye que el retículo cuántico no admite más de un conectivo veritativo-funcional, alcanza con usar la adecuación si lo que se desea es entrar en conflicto con la mecánica cuántica. La estructura de fondo que está en conflicto con la del retículo de proposiciones cuánticas es la adecuación, no particularmente la funcionalidad de la verdad bivalente. El resultado general sería: sin importar la cantidad de valores de verdad, si una semántica quiere representar las propiedades de no distributividad de las proposiciones cuánticas, y mantener una implicación lógica preservadora de valores designados, entonces los conjuntos de interpretación para la disyunción y conjunción no pueden cumplir adecuación (2.5) simultáneamente. De acuerdo con lo que mostramos en la primera sección, esto implica que no puede haber funcionalidad de la verdad, sin importar el número de valores de verdad. Eso quiere decir que no existen homomorfismos entre el retículo cuántico y un álgebra con un dominio de n elementos, $n \in \mathbb{N}$.

VI. Análisis de un ejemplo particular representativo: La lógica cuántica trivalente de Reichenbach

Un número importante de autores han sugerido que la adopción de una lógica no estándar daría una solución a ciertos problemas originados por la mecánica cuántica. El "problema de la adopción" es un problema ampliamente discutido en la filosofía de la lógica [Beall and Restall (2001), Haack (1980), Padro (2015)]. Algunos de los autores que siguieron estas líneas son Putnam [Putnam (1968)] y Reichenbach [Reichenbach (1967)]. Al fundamentar a favor de un cambio de lógica, Reichenbach propone un sistema trivalente. Para él, tal sistema es más adecuado que un sistema en el cual algunas proposiciones no tomen valores en ciertos contextos, como pasaría si se propusiera una semántica funcional para el retículo cuántico que permitiera huecos en los valores de verdad. Permitir huecos de valores de verdad apuntaría en el sentido de proponer una semántica *paracompleta* para el retículo. Reichenbach prefiere una semántica funcional basada en tablas trivalentes. El argumento de Reichenbach tiene la siguiente estructura: si se usa una lógica clásica, la mecánica cuántica produce algunas consecuencias inaceptables o *anomalías causales*. Pero si se usa una lógica trivalente, estas anomalías pueden ser evitadas y esto es, demás, la manera menos molesta de evitarlas. Recordemos que en Jorge and Holik (2020), se prueba que, al margen de la cantidad de valores de verdad, el retículo de proposiciones cuánticas no admite un homomorfismo de álgebras, es decir, no permite asignarle una semántica funcional (matrices deterministas o tablas de verdad). Por otro lado, en la sección I y II, hemos mostrado que, al margen de la funcionalidad de la verdad, no pueden existir matrices no deterministas que cumplan el criterio de adecuación de Avron, si se desea no validar distributividad. Por lo tanto, si mostramos que la propuesta de Reichenbach cumple adecuación, no será un buen candidato para brindar una semántica al retículo de proyectores. Como se vio en la sección 1, veritativo-funcionalidad no implica adecuación si no se piden condiciones extras. Mostraremos que las tablas para la disyunción y conjunción dadas por Reichenbach cumplen adecuación. Para ver una discusión más profunda del tema, se recomienda [Haack (1980)] y su bibliografía.

Observación: Esta sección no tiene mayor pretensión que mostrar un ejemplo famoso en relación con la adecuación presentada. En realidad, como el sistema trivaluado de Reichenbach tiene más conectivos que los utilizados en el retículo cuántico, no se aplican directamente los resultados anteriormente encontrados. De todas formas, puede ser un ejemplo que ayude a consolidar algunas ideas.

La lógica trivalente de Reichenbach cuenta con tres negaciones: la negación diametral, la negación completa y la negación cíclica. También cuenta con tres conectivos de implicación llamados implicación estándar, implicación alternativa y cuasi implicación. Nosotros sólo vamos a analizar las tablas para la conjunción y disyunción.

El conjunto de valores de verdad y el de valores designados de Reichenbach son

$$V = \{v, i, f\} \ \ ; \quad D = \{v\}.$$

v y f representan los clásicos "verdadero" y "falso" e i es el valor llamado "indeterminado" o "posible".

$\tilde{\vee}$	v	i	f
v	v	v	v
i	v	i	i
f	v	i	f

(16)

$\tilde{\wedge}$	v	i	f
v	v	i	f
i	i	i	f
f	f	f	f

(17)

Mirando la tabla para la disyunción, puede verse que cada vez que alguno de los disyuntos toma valores designados, es decir toma el valor v, la valuación asigna también un valor designado a la disyunción. Por otro lado, cuando los valores para los disyuntos son i o f, la disyunción toma alguno de los valores i o f, esto es, toma valores no designados. La matriz de la disyunción cumple la adecuación de Avron. Para la tabla de la conjunción puede realizarse la misma observación: sólo cuando ambos conyuntos toman el valor designado, la conjunción es designada. Por lo tanto, este conectivo también cumple adecuación. Puede observarse que, aun así, si al conjunto de valores designado pertenecieran tanto v como i, las matrices serían adecuadas. Según lo visto en la sección 2, estas matrices deberían validar la distributividad. Veamos que cumplen la desigualdad distributiva no deseada en la cuántica. Para ser gráficos, construiremos la tabla de verdad asociada con las proposiciones $((A \vee B) \wedge C)$ y $((A \wedge C) \vee (B \wedge C))$. Mostraremos que en esta semántica son proposiciones equivalentes, es decir, se implican mutuamente.

A	B	C	$A \vee B$	$(A \vee B) \wedge C$	$A \wedge C$	$B \wedge C$	$(A \wedge C) \vee (B \wedge C)$
v	v	v	v	v	v	v	v
i	v	v	v	v	i	v	v
f	v	v	v	v	f	v	v
v	i	v	v	v	v	i	v
i	i	v	i	i	i	i	i
f	i	v	i	i	f	i	i
v	f	v	v	v	v	f	v
i	f	v	i	i	i	f	i
f	f	v	f	f	f	f	f
v	v	i	v	i	i	i	i
i	v	i	v	i	i	i	i
f	v	i	v	i	f	i	i
v	i	i	v	i	i	i	i
i	i	i	i	i	i	i	i
f	i	i	i	i	f	i	i
v	f	i	v	i	i	f	i
i	f	i	i	i	i	f	i
f	f	i	f	f	f	f	f
v	v	f	v	f	f	f	f
i	v	f	v	f	f	f	f
f	v	f	v	f	f	f	f
v	i	f	v	f	f	f	f
i	i	f	i	f	f	f	f
f	i	f	i	f	f	f	f
v	f	f	v	f	f	f	f
i	f	f	i	f	f	f	f
f	f	f	f	f	f	f	f

(18)

Viendo las columnas correspondientes con las dos proposiciones involucradas en la distributividad, es decir, las columnas 5 y 8, concluimos que ambas son equivalentes y, por lo tanto, se valida distributividad con esta semántica. Por supuesto, esto es una consecuencia de la adecuación de las tablas para $\vee$ y $\wedge$, como ya habíamos probado, y no depende de la cantidad de valores de verdad ni de los designados.

Alguien podría observar que, al haber más conectivos lógicos en el sistema de Reichenbach, el significado de la disyunción y conjunción presentadas no es el mismo que en el caso sus análogos en el retículo de Birkhoff y von Neumann. El objetivo de esta sección no es apoyar ni que el significado de los conectivos viene dado de manera representacionalista [Nuel (1962), Boghossian (1993)], a través de sus tablas de verdad, ni tampoco de forma inferencialista [Aspeita (2008), Brandom (2000), Buacar (2015), Dummett, (1991), Gentzen (1964)], a través de sus reglas de introducción y eliminación (entre otras), sino mostrar un ejemplo que debido a la adecuación de sus conectivos valida distributividad. También se podría decir que, en el sistema de Reichenbach, a pesar de validar esta propiedad, las anomalías se evitan de otra manera con participación de los conectivos que acá no se estudiaron. Algo del estilo pasa en el sistema LPS (*Propositional superposition logic*) de Tzouravas [Tzouvaras (2020)], donde existe un nuevo conectivo de superposición que se encuentra a mitad de camino (en términos semánticos) entre la disyunción y la conjunción. Que en este sistema se valide distributividad no tiene las mismas connotaciones que en el retículo cuántico. Por esto mismo, remarcamos que el objetivo de la presente sección es sólo presentar un ejemplo de la forma lo más gráfica posible.

VII. Relaciones de consecuencia lógica derivadas en el marco de la Nmatriz cuántica

En esta sección, vamos a estudiar algunas propiedades que tienen las Nmatrices cuánticas con relación a las propiedades algebraicas de los proyectores. Será de gran relevancia para nosotros la relación de orden parcial entre proyectores, representada en el retículo de von Neumann por la inclusión de subespacios ("$\leq$"). Desde el punto de vista de los estados cuánticos, se puede probar que $P \leq Q$ si y sólo si $\mathrm{tr}(\rho P) \leq \mathrm{tr}(\rho Q)$ para todo ρ, lo cual se interpreta como "la probabilidad de que ocurra el evento P es menor o igual a la probabilidad de que ocurra el evento Q". Es importante remarcar que, si la probabilidad de que ocurra P es uno para un estado dado (lo cual se interpreta como “la propiedad representada por P es verdadera para ese estado”), se sigue que la probabilidad de Q también va a ser uno. Por lo tanto, desde una perspectiva física operacional, la relación de orden parcial entre dos proposiciones puede ser interpretada como una suerte de implicación, dado que, si dos proposiciones son representadas por los proyectores P y Q (tal como hicimos en la sección 2.2), entonces, $P \leq Q$ implica que “siempre que ocurra P, también debe ocurrir Q”. Por otro lado, observamos que, más allá de su interpretación operacional –la cual no da lugar a ambigüedades–, no es sencillo dar una representación axiomática de la relación de orden parcial como una implicación material en un sistema lógico. Esto se expresa en el hecho de que existen distintas axiomatizaciones de la lógica cuántica [remitimos al lector a Haack (1980), Martínez Muñoz (1995), Tzouvaras (2020)], en las que la implicación de define de distintas maneras.

En lo que sigue, vamos a mostrar la relación que guardan las valuaciones definidas por las Nmatrices cuánticas con la relación de “$\leq$” y el resto de los conectivos lógico-cuánticos. Comencemos por mencionar que, dado que las valuaciones definidas por las tablas (10), (11) y (12) son exactamente iguales a los estados cuánticos, tenemos que:

$$P \leq Q \Leftrightarrow P \vDash Q \tag{19}$$

La relación expresada en la ecuación 19, nos da la llave para conectar la noción de implicación semántica con el resto de los conectivos lógico-cuánticos. Primero, notemos que, dado que $P \leq P \vee Q$ y $Q \leq P \vee Q$, luego, usando el hecho de que la probabilidad cuántica preserva la relación de orden parcial (ecuación 6), se obtiene que

$$P \vDash P \vee Q \tag{20}$$

y

$$Q \vDash P \vee Q \tag{21}$$

Además, si $P \leq R$ y $Q \leq R$, entonces, se sigue que $P \vee Q \leq R$. De esta forma, obtenemos que:

$$\text{Si } P \vDash R \text{ y } Q \vDash R\text{, entonces } P \vee Q \vDash R \tag{22}$$

Por definición del conectivo “$\wedge$” del retículo, tenemos que

$$P \wedge Q \leq P \ \text{ y } \ P \wedge Q \leq Q$$

Lo que significa que

$$P \wedge Q \vDash P \quad \text{y} \quad P \wedge Q \vDash \mathrm{Q} \tag{23}$$

Sabemos que la negación del retículo de proyectores puede ser vista como una orto-complementación. Recordemos la definición de orto-complementación [Carranza (2013)]

Definición 7.1 Sea $(A, \leq)$ un conjunto parcialmente ordenado con máximo 1 y mínimo 0. Una orto-complementación es una función $\perp: A \to A$, tal que para cada $a, b \in A$:

- $a \leq b$ si y solo si $b^\perp \leq a^\perp$
- $(a^\perp)^\perp = a$
- $a \vee a^\perp = 1$
- $a \wedge a^\perp = 0$

El que la negación se comporte como una orto-complementación del retículo, tiene como consecuencias inmediatas que:

$$P \vDash Q \Leftrightarrow \neg Q \vDash \neg P \tag{24}$$

y

$$P \vDash \neg(\neg P); \quad \neg(\neg P) \vDash P; \qquad \vDash P \vee P^\perp \tag{25}$$

Finalmente, como puede probarse que el retículo cuántico es ortomodular, se cumple

$$P \vDash Q \Rightarrow Q = P \vee (Q \wedge \neg P) \tag{26}$$

(para una discusión sobre el tema, se recomienda ver Martínez Muñoz (1995)). La última igualdad implica una doble implicación lógica. Sabemos que los estados cuánticos cumplen que si la probabilidad que asignan a P y a Q es 1, entonces también asignan probabilidad 1 a $P \wedge Q$. Por lo tanto, dado que las valuaciones de la Nmatriz son los estados cuánticos, se cumple que:

$$P, Q \vDash P \wedge Q \tag{27}$$

Con lo visto hasta aquí, la Nmatriz cuántica presentada en la sección III, cuyas valuaciones son los estados cuánticos, valida las siguientes relaciones de consecuencia lógica:

1. $P \vDash P \vee Q$
2. $Q \vDash P \vee Q$
3. Si $P \vDash R$ y $Q \vDash R$, entonces $P \vee Q \vDash R$
4. $P \wedge Q \vDash P$
5. $P \wedge Q \vDash Q$
6. $\vDash P \vee \neg P$
7. $P \vDash \neg(\neg P)$

8. $\neg(\neg P) \vDash P$
9. Si $P \vDash Q$, entonces $\neg Q \vDash \neg P$
10. Si $P \vDash Q$, entonces $Q = P \vee (Q \wedge \neg P)$
11. $P, Q \vDash P \wedge Q$

Por lo tanto, las relaciones de consecuencia lógicas anteriores dan un marco semántico en el cual desarrollar la semántica Nmatricial del retículo de proyectores. La semántica anterior da una estructura lógica a las proposiciones cuánticas. Es objeto de la lógica cuántica formal estudiar esta estructura de forma sintáctica.

La lógica cuántica formal, como toda lógica formal, requiere que hagamos explícita una sintaxis y que abandonemos los postulados semánticos (y el lenguaje semi-interpretado). Sin embargo, no hay una sola sintaxis que pueda reconstruirse a partir de la estructura lógico-algebraica de la teoría cuántica. Este problema ya fue discutido al principio de la sección. Los diferentes sistemas que se han propuesto (y se sigue trabajando en el desarrollo de otras alternativas) tienen diferencias lógicas y metalógicas importantes. Para varios sistemas de lógica cuántica formal, ha sido demostrada su corrección y completitud [Chiara (1986), Stachow (1981)].

Para finalizar esta sección, mostraremos de forma explícita cómo algunas de las relaciones anteriores se validan utilizando la Nmatriz cuántica presentada en III (sin hacer uso de las propiedades de los proyectores en del espacio de Hilbert). Mostraremos que la Nmatriz cuántica valida algunos axiomas de manera inmediata. Otros axiomas necesitan consideraciones más cuidadosas relativas a las propiedades del retículo de proyectores y de los estados cuánticos.

Consideremos en primer lugar la relación 1. Tenemos que probar que toda valuación de la Nmatriz cuántica que otorgue un valor designado a P, le dará también un valor designado a $P \vee Q$. Aunque trabajaremos con un conjunto de valores designados formado sólo por el 1, podría tomarse un conjunto más general. Separemos en dos casos dependiendo de si los proyectores involucrados son o no ortogonales:

- Si $P \perp Q$, entonces $v(P) \in D = \{1\}$ y $v(Q) = 0$. Por lo tanto, $v(P \vee Q) \in \widetilde{\vee}_{(v(P),v(Q))} = \{v(P) + v(Q)\} = \{1\}$. Esto significa que la valuación asignará un valor designado (1) a la disyunción.
- Si $P \not\perp Q$, entonces $v(P) = 1$ y $v(P \vee Q) \in \widetilde{\vee}_{(1,v(Q))} = [max(1, v(Q)), 1] = \{1\}$. Por lo tanto, la valuación también asigna 1 a la disyunción.

La condición 2 se cumple exactamente de la misma manera.

Dado que 4 y 5 son muy similares, sólo demostraremos 4. Tenemos que mostrar que, para toda valuación que cumpla $v(P \wedge Q) = 1$, también se cumple $v(P) = 1$. $v(P \wedge Q) = 1 \in \widetilde{\wedge}_{(v(P),v(Q))} = \left[0, min\left(v(P), v(Q)\right)\right]$. La única forma de que 1 pertenezca a este conjunto es que tanto P como Q adquieran el valor 1. Con lo cual se obtiene lo deseado.

Ahora nos concentramos en 7. Este esquema nos dice que la disyunción $(P \vee \neg P)$ es una tautología, esto es, que representa el proyector que proyecta sobre el espacio de Hilbert completo. Ya mencionamos que esta negación puede ser interpretada como una orto-complementación, dado que cumple los 4 ítems de la definición de orto-complementación. Esto significa que los proyectores asociados a las proposiciones P y $\neg P$ son ortogonales. En ese caso, $v(P \vee \neg P) \in \widetilde{\vee}_{(a,1-a)} = \{a + (1 - a)\} = \{1\}$, lo cual prueba lo deseado.

El axioma 8 dice que el valor de verdad de la doble negación debe coincidir con el valor de la proposición original para el caso en el cual esta proposición tiene un valor designado. Si $v(A) = a$, entonces $v(\neg(A)) \in \widetilde{\neg}_{(v(A))} = \{1 - a\}$y $v(\neg(\neg(A))) \in \widetilde{\neg}_{(v(\neg(A)))} = \widetilde{\neg}_{(1-a)} = \{a\}$. Es decir, si a es un valor designado, el valor de A, entonces la doble negación también será designada. Razones idénticas prueban también 9. Dejamos al lector que corrobore que el axioma 10 también se satisface sin mayores inconvenientes.

Para analizar los axiomas 3, 6, y 11, es necesario un mayor detenimiento y utilizar propiedades de nuestro modelo pretendido, el retículo cuántico de proyectores.

También es importante mencionar que, si se deseara adecuar alguno de los conjuntos $\widetilde{\vee}$, $\widetilde{\wedge}$ con el fin de simplificar la validación de alguno de los axiomas (como, por ejemplo, el 6), una de las maneras posibles es presentada en [Jorge and Holik (2020)]. En ese trabajo se muestra que una opción para adecuar el conjunto de interpretación de la conjunción es (para el caso en el cual los proyectores asociados no son ortogonales):

$$\text{Si } a, b \in D, \text{ entonces } \widetilde{\wedge}_{(a,b)} = [0, min(a, b)] \cap D.$$

Y si se deseara hacer lo mismo para la disyunción: si $a, b \notin D$, entonces $\widetilde{\vee}_{(a,b)} = [max(a, b), 1] \cap (V \setminus D)]$. Lo anterior es una posibilidad estrictamente lógica para forzar la adecuación de los conectivos. Si se utilizara este criterio, habría que justificarlo físicamente antes de aplicarlo al retículo cuántico. En futuros trabajos estudiaremos qué papel juega la adecuación de los conjuntos de interpretación en el marco del problema del *límite clásico*.

VIII. Estudio de la adecuación de la Nmatriz cuántica

En esta sección, analizaremos qué grado de adecuación de los conjuntos de interpretación para la conjunción y disyunción es implicado por las relaciones de consecuencia lógica anteriores (1 a 11). De esta manera, podremos analizar en qué medida la Nmatriz cuántica presentada en la sección 3 es un serio candidato para brindar la semántica del retículo.

Centremos primero la atención en 4, 5 y 11. Si queremos que una interpretación valide estas tres relaciones, preservando valores designados, entonces, el conjunto $\widetilde{\wedge}$ debe cumplir adecuación. Veamos un poco mejor esto.

La relación 11 expresa que si tenemos una valuación v tal que $v(P) = a \in D$ y $v(Q) = b \in D$, estamos comprometidos (por conservación de valores designados) con $v(P \wedge Q) \in D$. Esto es, si $a \in D$ y $b \in D$, entonces $\widetilde{\wedge}_{(a,b)} \subset D$.

La relación 4 prohíbe mantener valuaciones v, tales que $v(P) = a \notin D$ y $v(P \wedge Q) \in D$. Por lo tanto, $v(P) = a \notin D$ implica $v(P \wedge Q) \notin D$. De la misma forma, la relación 5 prohíbe mantener las valuaciones v, tales que $v(Q) = b \notin D$ y $v(P \wedge Q) \in D$. Es decir, $v(Q) \notin D$ implica $v(P \wedge Q) \notin D$. Por lo tanto, 4 y 5 implican:

Si $v(P) = a \notin D$ o $v(Q) = b \notin D$, entonces $\widetilde{\wedge}_{(a,b)} \subset V \setminus D$.

Resumiendo: 4, 5, 11 implican que el conjunto de interpretación para la conjunción debe ser adecuado.

Como vimos en la sección V, la falla de la propiedad distributiva en el retículo cuántico está directamente ligada a la adecuación conjunta de ambos conectivos. Por lo tanto, si no queremos validar distributividad, habiendo ya probado que 4, 5, 11 implican adecuación de la conjunción, tenemos que mostrar que las relaciones 1, 2 y 3 no implican un conjunto de interpretación $\widetilde{\vee}$ adecuado.

Para mostrar que los axiomas relativos a la disyunción no implican un conjunto de interpretación adecuado para este conectivo, veamos que, en principio, podemos tener una valuación, v, tal que $v(P \vee Q) \in D$, $v(P) = a \notin D$ y $v(Q) = b \notin D$. Los enunciados 1 y 2 se validan automáticamente. El enunciado 3 admite una valuación como ésta dependiendo del valor que tal valuación otorgue a R. Es decir, todas las valuaciones como las presentadas, que además cumplan que $v(R) = c \in D$, validarán el tercer enunciado. No necesariamente se descartan todas las valuaciones que den valor designado a la disyunción mientras dan valores no designados a sus disyuntos. Esto significa que 1, 2 y 3 no se comprometen necesariamente con conjuntos adecuados para la disyunción. Es más, si queremos no validar distributividad, debemos quedarnos sólo con los no adecuados. En Jorge and Holik, (2020), se utiliza un conjunto $\widetilde{\vee}_{(a,b)} = [max(a,b), 1]$, el cual permite que pase lo anterior. Es decir, permite valuaciones tales que asignan valores no designados a P, Q, mientras designan a la disyunción. La semántica presentada en Jorge and Holik, (2020) para el retículo de proyectores depende del concepto de ortogonalidad y también del de orden propio del retículo.

Resumiendo lo dicho hasta ahora, podríamos decir que las relaciones que estamos estudiando tienen varios modelos, es decir admiten diferentes semánticas. Vimos que 4, 5, y 6 implican un conjunto de interpretación $\widetilde{\wedge}$, tal que cumpla adecuación. Sin embargo, 1, 2 y 3 podrían ser validados por un conjunto de interpretación para la disyunción que no necesariamente sea adecuado. Un conjunto $\widetilde{\vee}$ adecuado satisface automáticamente estas tres relaciones, pero no es cierta la vuelta. También sabemos que, si no queremos validar distributividad, entonces, no podemos tener simultáneamente conjuntos adecuados para la disyunción y conjunción. Puede probarse fácilmente que una semántica veritativo funcional clásica de dos valores, la misma que utilizamos en la lógica proposicional clásica, valida las once relaciones. Sin embargo, también sabemos que una tal semántica valida todo el fragmento positivo de la lógica clásica, es decir, validará distributividad.

IX DIGRESIÓN FILOSÓFICA[1]

Llegado este punto de nuestro desarrollo, y debido a que en éste aparecieron autores como Reichenbach y Putnam, es legítimo formular la pregunta acerca de cuál es el estatuto lógico/filosófico que deberíamos asignarle al formalismo Nmatricial expuesto en este trabajo, así como especificar cuál es la perspectiva de los autores al respecto. Es sabido que Putnam sostuvo que la Mecánica Cuántica era una razón suficiente para cambiar la Lógica Clásica por una lógica cuántica [Putnam (1968)]. Esto está directamente relacionado con la siguiente pregunta: ¿los argumentos motivados por datos empíricos pueden ser suficientes para inducir cambios en la lógica? Y si es así, ¿este cambio debe darse de forma local o global? [Haack (1980)]. Es decir, si cambiamos LC por alguna lógica cuántica, ¿este cambio debe tener un dominio total o parcial? En este trabajo, creemos que es razonable adoptar la perspectiva de que las razones empíricas no son suficientes, por sí mismas, para justificar un cambio en los cimientos de la lógica. Es decir, las motivaciones para hacer modificaciones en la lógica deben tener su origen en argumentos que vayan más allá de lo que podamos recabar a partir de los datos empíricos que arrojan las ciencias particulares. Uno de los motivos principales es que el conjunto de evidencia empírica favorable a cualquier teoría científica, la subdetermina [Kukla (1996), (1994)]. Es decir, dado un conjunto finito de hechos empíricos, existen muchas teorías (no necesariamente compatibles entre sí) que son coherentes con esos hechos. A su vez, como cada teoría admite diferentes interpretaciones, y las mismas pueden no compartir la ontología, las teorías subdeterminan su ontología [véase, por ejemplo, las diferencias entre DeWitt (1970), Lombardi and Castagnino (2008), Lombardi and Dieks (2014)]. Es famoso el caso de la mecánica bohmiana (MB). El formalismo de David Bohm tiene el mismo conjunto de predicciones empíricas que la Mecánica Cuántica estándar (dos teorías diferentes que comparten conjunto de enunciados empíricos). Ambas teorías admiten múltiples interpretaciones y, sin embargo, sus interpretaciones no coinciden [Solé Bellet (2010)] (caso de las trayectorias surrealistas, entre otros). No hace falta más que nombrar que las partículas bohmianas pueden contar con trayectorias bien definidas en el espacio y que el principio de incertidumbre de Heisenberg debe ser interpretado de forma gnoseológica o epistémica, en lugar de ontológicamente como admite la cuántica estándar. En lo que a este trabajo respecta, en MB no es necesario asignar un retículo ortomodular no distributivo a las proposiciones de la teoría, ya que MB es compatible con una metalógica clásica. Es decir, las partículas bohmianas pueden tener, al mismo tiempo, posiciones y velocidades bien definidas, aunque no sea posible conocerlas con precisión suficiente debido a limitaciones de orden epistémico (MB es compatible con distintos tipos de Realismo). El formalismo de MB no se desarrolla en espacios de Hilbert y, por lo tanto, el retículo de los subespacios cerrados del Hilbert (o de proyectores) ya no es representativo como en la cuántica estándar. Entonces, el mismo conjunto de evidencia empírica podría tomarse como razón a favor del cambio de lógica, en caso de que se adopte la perspectiva de la mecánica cuántica estándar, o como razón en contra del cambio si se adopta la perspectiva de la MB, dado que esta última es compatible con la lógica clásica. Es decir, la evidencia empírica no alcanza para justificar el cambio. También es cierto que la mecánica cuántica estándar, por sí misma, tampoco implica necesariamente un cambio de lógica. Cuando los físicos miden en los laboratorios y relazan cálculos, hacen razonamientos que se pueden enmarcar dentro de la lógica clásica. El tema es que a las proposiciones acerca de sistemas cuánticos, el físico les asocia una estructura algebraica particular, la cual se denomina usualmente *lógica cuántica*. Pero, en última instancia, podría considerarse que, tal estructura, es de naturaleza meramente algebraica, sin necesidad de comprometer a la lógica como tal. Nuestro sistema Nmatricial para la cuántica tiene los siguientes objetivos: por un lado, brindar una nueva aplicación del formalismo de Nmatrices como posible semántica del retículo de proyectores cuánticos; por el otro, dar una nueva interpretación posible de los estados cuánticos como valuaciones de una Nmatriz dada. La aplicación que presentamos al dominio cuántico no debe ser necesariamente interpretada como la interpretación canónica del formalismo Nmatricial, ni como apoyando un cambio de lógica basado en la teoría cuántica. En nuestro metalenguaje seguimos contando con la lógica clásica, tanto cuando estamos en el marco Nmatricial, como cuando hacemos razonamientos acerca del retículo de proyectores cuánticos.

Un reformista local, esto es, un lógico dispuesto a cambiar la lógica en cierto dominio del discurso, manteniendo la lógica clásica (o alguna otra) en el resto del dominio (ver capítulo 2 de [Haack (1980)]), podría tomar nuestros argumentos para defender que, dentro de un dominio cuántico, la lógica *correcta*, debería ser representada por un sistema Nmatricial cuántico. Los reformadores locales suelen defender un pluralismo lógico, y las reformas locales suelen realizarse con lógicas que son extensiones conservativas de la lógica clásica (como es nuestro caso). Sin embargo, esa consecuencia no se sigue necesariamente de nuestros desarrollos, dado que es posible adoptar una postura en la cual la lógica clásica siga valiendo a nivel metateórico, mientras que las semánticas no deterministas son consideradas como un formalismo matemático adecuado para interpretar un dominio de proyectores dentro de un espacio de *Hilbert* (no hay que olvidar que, por cómo fueron definidas, la semántica Nmatricial es una extensión conservadora de la lógica clásica).

En relación con la discusión anterior, subyace la pregunta acerca de si la lógica es a priori o no. Si se acepta que la evidencia empírica no es razón suficiente para fundamentar un cambio radical en los fundamentos de la lógica, podría argumentarse entonces que esto es una consecuencia de que la lógica es en realidad *a priori*. Este argumento ha sido discutido extensamente en la literatura [Bertolet (1988), Carnap (1988), Pelaéz and Álvaro (2008), Kant (2004), Putnam (1983), Putnam (1979)], y es un problema abierto en la actualidad. La discusión acerca del estatus de la lógica con respecto a las demás ciencias (su excepcionalidad), es decir, si la lógica es excepcional con respecto a las demás ciencias, o si los principios lógicos son o no justificados *a priori*, divide aguas entre excepcionalistas y anti-excepcionalistas [Castro Albano (2020), Hjortland (2016), Hjortland (2019), Hjortland and Martin (2019), Williamson (2010)]. Quine ha defendido que los principios lógicos, al igual que los principios de cualquier otra ciencia, son revisables a la luz de la evidencia empírica [Quine (1980)]. Pero el mismo Quine también reconoce que estos principios son los últimos que deben ser sometidos a tal revisión. Primero deben ser revisados *los principios que estén más alejados del núcleo*. Esto es, los principios físicos, matemáticos, etc. En última instancia, llegado el caso, también los principios lógicos deben ser sometidos a revisión. Nos parece que Quine no tuvo a disposición en su momento los fuertes argumentos a favor de la subdeterminación teórica por parte los *hechos empíricos*. No consideró que, dado cualquier conjunto finito, formado por la evidencia empírica a favor de una teoría, existen muchas otras teorías, no necesariamente compatibles con la primera, que comparten exactamente el mismo conjunto de evidencia empírica. Lo que llamamos *hecho empírico*, puede serlo sólo a la luz de una teoría. Un cierto evento de la naturaleza puede ser considerado como un *hecho empírico* sólo dentro del marco dado por una teoría. Qué puede ser, o no, considerado un *hecho empírico*, depende del marco proporcionado por la teoría. Defendemos la posición de que es *la teoría* la que precede a cualquier observación. No existen hechos empíricos *absolutos*, independientemente del marco teórico. Esto también encuentra apoyo en los *hechos* proporcionados por MB [Solé Bellet (2010)]. Lo que dentro del marco dado por MB se considera un *hecho empírico* (cierta acción a distancia) es considerado dentro del el marco de la cuántica estándar como una *trayectoria surrealista* [véase el capítulo 5 de Solé Bellet (2010)]. Por lo tanto, no vamos a compartir con Quine la posición sobre la no excepcionalidad de los principios lógicos. Cuáles son tales principios, si son los brindados por la lógica clásica o no, es una cuestión aparte. Michael Dummet sostiene la excepcionalidad de la lógica, pero para él los principios lógicos adecuados son los dados por el intuicionismo [Hjortland and Martin (2019)]. De todas formas, si los principios lógicos o matemáticos cambiaran, es decir si estuviésemos frente a otras teorías de conjuntos y otras lógicas diferentes, nuestros razonamientos podrían ser adaptados para brindar una semántica no determinista Nmatricial basada en estos principios. En futuros trabajos, estudiaremos la posibilidad de desarrollar una semántica Nmatricial para la cuántica basada en teorías de conjuntos alternativas (cuasiconjuntos).

Gottlob Frege defendió que el conocimiento lógico es privilegiado por su estatuto fundacional [Martin (2020)]. Compartimos en este sentido la visión aportada por Saul Aaron Kripke, para quien la revisión de los principios lógicos carece totalmente de sentido [véase Kripke (2015)] y sección 4 de

Stairs (2006). Ninguno de los principios básicos de una lógica, como, por ejemplo, *Modus Ponens* o instanciación universal, pueden ser adoptados si uno ya no cuenta con ellos. Es decir, si uno ya dispone de estos principios, cualquier revisión a favor es superflua, y si uno no los tiene incorporados, no hay forma de incorporarlos, ya que cualquier formulación de una regla lógica los presupone. Es el famoso problema de *cómo seguir una regla*, o problema de la adopción [Buacar (2015), Padro (2015)]. En nuestra opinión, es destacable la defensa de esta posición que se realiza en Kripke (2015), donde también trata el problema de la mecánica cuántica con respecto al revisionismo. Recomendamos al lector interesado la lectura del artículo "Kriske, Tupman and Quantum Logic" [Stairs (2006)], donde se reproducen algunos de los razonamientos dados por Kripke, además de poner el foco en la mecánica cuántica y en la crítica a Putnam. Por esto mismo, nuestra pretensión con respecto a la semántica Nmatricial para la cuántica no es la de favorecer un revisionismo, sino la de aportar una forma alternativa de interpretar el retículo de proyectores cuánticos y, a su vez, brindar una aplicación novedosa de este formalismo en el contexto de la teoría cuántica.

Terminaremos con el siguiente comentario. Podría analizarse si, trabajando bajo el presupuesto de un mundo posible, en el cual sus agentes racionales estuviesen sometidos a las leyes cuánticas (sus dinámicas estuviesen dadas por las reglas cuánticas), deberíamos interpretar canónicamente los conectivos lógicos usando nuestra propuesta Nmatricial. Esto es, en un mundo posible (semántica kripkeana) donde sólo existan entes y agentes racionales cuánticos, ¿deberíamos cambiar las reglas lógicas? Si ninguna revisión fundada en los datos empíricos puede dar razones suficientes para un revisionismo lógico, entonces no deberíamos apoyar esto. El problema se torna complejo, ya que toda semántica kripkeana tiene fuertes presupuestos matemáticos y lógicos. El término *mundo posible* de la semántica kripkeana está basado en una ontología fundada en la teoría de conjuntos de Zermelo-Fraenkel (ZF), y la misma cuenta con un metalenguaje lógico con el concepto de identidad como primitivo, el cual puede ser puesto en duda en el dominio cuántico [véase Krause and French (1995), Krause (1992), Krause (1996)]. Por lo tanto, para decidir si dos mundos posibles que sean indistinguibles son el mismo o no, necesitamos contar con el concepto de identidad de la Lógica Clásica. La noción de *identidad transmundana –identidad entre mundos posibles–* es la noción de que el mismo objeto existe en más de un mundo posible (con el mundo real tratado como uno de los mundos posibles). Por lo tanto, uno tiene su hogar en un marco de *mundos posibles* para analizar, o al menos parafrasear, declaraciones sobre lo que es posible o necesario [Kripke, (1982)].

El tema de la identidad transmundana ha sido muy controvertido, incluso entre los filósofos que aceptan la legitimidad de hablar de mundos posibles. Las opiniones van desde ver la noción de una identidad sostenida entre objetos en diferentes mundos posibles como tan problemática que es inaceptable hasta ver la noción como completamente inocua y no más problemática que la afirmación de que los objetos individuales podrían haber existido con propiedades algo diferentes. David Lewis ha propuesto una alternativa a la *identidad transmundana*: la teoría de la contraparte [Lewis (1986), Lewis (1968)]. Para ver de qué manera este tema afecta en cuántica a los razonamientos enmarcados en el teorema de *Kochen-Specker*, recomendamos [de Barros J. P. Jorge and Holik (2020)]. Por lo tanto, vemos que los mismos modelos kripkeanos cuentan con fuertes presupuestos, que no están del todo claros a la hora de razonar en dominios cuánticos.

X. CONCLUSIONES

Hemos discutido distintos aspectos de la descripción de estados cuánticos en términos de semánticas no deterministas. Presentamos una demostración de la imposibilidad de que el retículo de proyectores admita simultáneamente conjuntos de interpretación adecuados para la conjunción y disyunción. En una semántica no determinista Nmatricial, la adecuación simultánea de tales conjuntos implica la distributividad del retículo. Por último, mostramos que la Nmatriz cuántica presentada en la sección III valida las relaciones de consecuencia lógica que vienen inducidas por la relación de orden del retículo y el significado de sus conectivos.

Los resultados presentados aquí permiten ilustrar con mayor precisión cuales son las diferencias entre la lógica cuántica y las estructuras lógicas clásicas desde el punto de vista de las semánticas no deterministas. De nuestra investigación, surge el interrogante acerca de si es posible que la lógica cuántica tenga asociada una teoría de la prueba basada en el formalismo de las semánticas no deterministas. Exploraremos esta ruta de investigación en trabajos futuros.

Facultad de Filosofía y Letras
Universidad de Buenos Aires
Universidad Austral, Pilar (1629)
Argentina
E-mail: jorgejpablo@gmail.com

Instituto de Física La Plata
La Plata (1900)
Buenos Aires CABA (1406),
Argentina
E-mail: olentiev2@gmail.com

NOTAS

[1] Estamos agradecidos a los revisores anónimos por sugerir la inclusión de esta discusión en el trabajo.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BARCELÓ ASPEITA, A. A. (2008), "Patrones inferenciales", *Crítica. Revista Hispanoamericana de Filosofía*, 40 (120), pp. 3–35.

BARROS DE J. P. JORGE, J. A. y HOLIK, F. (2020), "On the Assumptions Underlying ks-Like Contradiction; Arxiv Preprint 2103.06830.

BEALL, J. C. y RESTALL, G. (2001), "Defending Logical Pluralism" en *Logical Consequences, Rival Approaches Proceedings of the 1999 Conference of the Society of Exact Philosophy*, Woods, J. y Brown, B., Kluwer Academic Publishers, pages 1–22.

BERTOLET, R. (1988), "Putnam on the A Priori", *Philosophia*, vol.18 (2-3), pp. 253–263.

BOGHOSSIAN, P. A. (1993), Does an Inferential Role Semantics Rest Upon a Mistake? *Mind and Language*, 8(1), pp. 27–40.

BRANDOM, R. B. (2000), *Articulating Reasons: An Introduction to Inferentialism*; Harvard University Press.

BUACAR, N. (2015), *La justificación de la deducción*; tesis presentada con el fin de cumplimentar con los requisitos finales para la obtención del título Doctor de la Universidad de Buenos Aires en Filosofía.

CASTRO ALBANO, J. (2020), Lógica trascendental y lógica naturalista; *Análisis Filosófico*, 40(Número Especial: Lógica, lenguaje y representación. Homenaje a Alberto Moretti. Diciembre 2020).

CARNAP, R. (1988), *La construcción lógica del mundo*; México, UNAM.

CARRANZA, L. (2013), *La categoría de las retículas cuánticas*; tesis para obtener el grado de Licenciado en Matemáticas. Benemérita Universidad Autónoma de Puebla Facultad de Ciencias Físico Matemáticas.

CHIARA, M. L. D. (1986), "Quantum Logic", *Handbook of Philosophical Logic*, Gabbay, D. y Guenthner, F. (eds.), Springer Netherlands, Dordrecht, pp. 427–469

DEWITT, B. S. (1970), "Mecánica cuántica y realidad", *Física hoy*, 23(9) pp. 30–35.

DUMMETT, M. (1991), *The Logical Basis of Metaphysics*; Oxford University Press.

GENTZEN, G. (1964), "Investigations into Logical Deduction"; *American Philosophical Quarterly*, 1(4), pp. 288–306.

HAACK, S. (1980), *Lógica Divergente*; Madrid, Paraninfo.

HJORTLAND, O. T. (2017), "Anti-Exceptionalism About Logic" *Philosophical Studies*, 174.3, pp. 631–658.

— (2019), What Counts as Evidence for a Logical Theory? *Australasian Journal of Logic*, Vol. 16. 7; *https://doi.org/10.26686/ajl.v16i7.5912*

HJORTLAND, O. T. y MARTIN, B. (en prensa), "Evidence in Logic"; en Lasonen-Aarnio, M. y Littlejohn, C. M. *Routledge Handbook of the Philosophy of Evidence*, Routledge.

KANT, I. (2004), *Crítica de la Razón Pura*; Alfaguara.
KRAUSE, D. (1992), "On a Quasi-Set Theory"; *Notre Dame Journal of Formal Logic*, 33(3), pp. 402-411.
— (1996), "Axioms for Collections of Indistinguishable Objects"; *Logique et Analyse*, 39(153/154), pp. 69–93.
KRAUSE, D. y FRENCH, S. (1995), "A Formal Framework for Quantum Non-Individuality; *Synthese*, 102(1), pp. 95-214.
KRIPKE, S. (1982), *Naming and Necessity*; Harvard University Press.
— (2020), "The Question of Logic" (manuscrito)
KUKLA, A. (1994), "Non-Empirical Theoretical Virtues and the Argument From Underdetermination"; *Erkenntnis*, 41(2), pp. 157–170.
LEWIS, D. (1986), *On the Plurality of Worlds*; Wiley-Blackwell.
— (1968), "Counterpart Theory and Quantified Modal Logic"; *The Journal of Philosophy*, 65(5), pp.113–126.
LOMBARDI, O. y CASTAGNINO, M. (2008), "A Modal-Hamiltonian Interpretation of Quantum Mechanics"; *Studies in History and Philosophy of Science Part B: Studies in History and Philosophy of Modern Physics*, 39(2), pp. 380–443.
LOMBARDI, O. y DIEKS, D. (2016), "Particles in a Quantum Ontology of Properties"; in: *Metaphysics in Contemporary Physics*, editado por Tomasz Bigaj y Christian Wüthrich, Poznan Studies Brill pp. 123-143.
MALAMENT, D. B. (2000), *Notes On Quantum Logic. Version 1.0*; Department of Logic and Philosophy of Science University of California, Irvine.
MARTIN, B. (2020), "Identifying Logical Evidence"; *Synthese*, 198(10): pp. 9069–9095.
MARTÍNEZ MUÑOZ, S. F. (1995), "Lógica Cuántica"; en Menéndez Rodríguez, J. M.; Alchourrón, C. y Orayen, R., *Lógica. Enciclopedia Iberoamericana de Filosofía*. Trotta, Madrid, pp. 227-236.
NUEL, D. B. (1962), "Tonk, Plonk and Plink"; *Analysis*, 22(6), pp. 130–134.
PADRO, R. (2015), "What the Tortoise Said to Kripke: The Adoption Problem and the Epistemology of Logic"; Dissertation, Graduate Center, City University of New York.
PELAÉZ CEDRÉS. Á. J. (2008), *Lo a Priori Constitutivo: Historia y Prospectiva*. Anthropos.
PUTNAM, H. (1968), "Is Logic Empirical?"; en Cohen, R. y Wartofsky, M. *Boston Studies in the Philosophy of Science*, 5. pp. 216-241
— (1979), "Analyticity and Apriority: Beyond Wittgenstein and Quine"; *Midwest Studies in Philosophy*, 4(1):423–441.
— (1983), *Lo Analítico y lo Sintético*; UNAM, México.
QUINE, W. V. O. (1980/1982), *From a Logical Point of View/Desde un punto de vista lógico*; Harvard University Press, Cambridge/Editorial Ariel, Barcelona.
REICHENBACH, H. (1965), "Philosophical Foundations of Quantum Mechanics"; Berkeley, University of California Press.
SOLÉ BELLET, A. (2010), *Realismo e interpretación en mecánica bohemiana*. Tesis doctoral, Universidad complutense de Madrid, Facultad de Filosofía, Departamento de lógica y filosofía de la ciencia.

STACHOW, E. W. (1981), "Sequential Quantum Logic"; en Beltramettti, E. G. y van Fraassen, B. C. (eds), *Current Issues in Quantum Logic*; Springer US, Boston, MA., pp. 173–191

STAIRS, A. (2006), *Kriske, Tupman and Quantum Logic: The Quantum Logician's Conundrum*; en Demopoulos, W. y Pitowsky, I. (eds), *Physical Theory and its Interpretations*; Springer Netherlands, Dordrecht, pp. 53–272.

TZOUVARAS, A. (2020), Algebraic Semantics for Propositional Superposition Logic; *Journal of Applied Non-Classical Logics*, 30(4), pp. 335–366.

WILLIAMSON, T. (2010), "Anti-Exceptionalism"; *The Philosophers' Magazine*, 50 (50), pp. 116–117.