

POLITECHNIKA GDAŃSKA
WYDZIAŁ INŻYNIERII LĄDOWEJ I ŚRODOWISKA
KATEDRA MECHANIKI BUDOWLI I MOSTÓW

PRACA DOKTORSKA

**PLASTYCZNOŚĆ W 6-PARAMETROWEJ NIELINIOWEJ
TEORII POWŁOK, EFEKTYWNOŚĆ OBLICZEŃ MES**

MGR INŻ. STANISŁAW BURZYŃSKI

PROMOTOR DR HAB. INŻ. WOJCIECH WITKOWSKI

GDAŃSK, SIERPIEŃ 2014

Pracę dedykuję moim najbliższym,

Annie i Agacie

SPIS TREŚCI

Skorowidz oznaczeń	3
1. Wstęp	5
1.1 Stan wiedzy	6
1.2 Założenia	8
1.3 Próba jednoosiowego rozciągania – rola w opisie teorii plastyczności	8
1.4 Znaczenie polskich uczonych w rozwoju teorii plastyczności.....	10
1.4.1 Maksymilian Tytus Huber	10
1.4.2 Włodzimierz Trzywdar Burzyński.....	12
1.4.3 Polska szkoła plastyczności	13
1.5 Organizacja pracy	14
2. Zarys teorii powłok.....	15
2.1 Powłoka jako ciało trójwymiarowe.....	15
2.2 Zasady zachowania, równania ruchu.....	16
2.3 Ciało typu powłoka, równania ruchu	17
2.4 Zasada prac wirtualnych, miary odkształceń	20
2.5 Współrzędne fizyczne, notacja macierzowo-operatorowa.....	20
2.6 Linearyzacja	23
3. Równania sprężysto-plastyczne ośrodka Cosseratów.....	25
3.1 Wprowadzenie.....	25
3.2 Statyka i kinematyka w liniowym ośrodku Cosseratów	25
3.2.1 Problem brzegowy	26
3.3 Równania sprężysto-plastyczne	27
3.3.1 Stan sprężysty w ośrodku Cosseratów	27
3.3.2 Redukcja do zagadnienia płaskiego	28
3.4 Założenia klasycznej teorii plastyczności	31
3.4.1 Zagadnienie jednowymiarowe	33
3.4.2 Kryteria uplastycznienia	35
3.4.3 Zagadnienie przestrzenne.....	37
3.5 Plastyczność w ośrodku Cosseratów	41
4. Algorytmy numeryczne	45
4.1 Numeryczne rozwiązanie równań plastyczności.....	45
4.2 Idea algorytmów rozwiązywania równań plastyczności.....	45
4.3 Równania plastyczności jako zagadnienie brzegowe równania różniczkowego zwyczajnego	46
4.4 Closest Point Projection Method (CPPM).....	49
4.5 Algorytmiczna macierz konstytutywna.....	50
4.6 Cutting Plane Algorithm (CPA)	51
4.7 Porównanie algorytmów CPPM i CPA	52
4.8 Algorytmy powrotu – płaski ośrodek Cosseratów	52
4.9 Test algorytmów CPPM i CPA	55
4.10 Rozwiązanie przyrostowe w zagadnieniach sprężysto-plastycznych	57
4.11 Algorytmy plastyczności w globalnym algorytmie MES	57
5. Implementacja w 6-parametrowej nieliniowej teorii powłok	61
5.1 Aproksymacja skończenie wymiarowa i interpolacja	61
5.1.1 Interpolacja wielkości wektorowych	61
5.1.2 Interpolacja wielkości z grupy $SO(3)$	62
5.1.3 Interpolacja wielkości z grupy $so(3)$	63

5.2 Wektory i macierze elementowe	64
5.3 Śledzenie ścieżek równowagi.....	65
5.4 Prawo konstytutywne dla sił i momentów przekrojowych	66
6. Efektywność obliczeń.....	71
6.1 Rozwój komputerów osobistych	71
6.2 Koncepcja obliczeń wielowątkowych.....	72
6.3 Rozwiązywanie rzadkich układów równań.....	75
7 Przykłady numeryczne.....	81
7.1 Problem Kircha w ośrodku Cosseratów	82
7.2 Tarcza z otworem.....	85
7.3 Panel walcowy – Scordelis-Lo roof	88
7.4 Cylinder ścinany.....	95
7.5 Wspornik ceowy.....	100
7.6 Panel płytowy w kształcie korytka.....	106
8. Podsumowanie.....	115
8.1 Oryginalne aspekty pracy	115
8.2 Wnioski z pracy.....	115
8.3 Kierunki dalszych badań	116
8.4 Podziękowania	117
9. Dodatki	119
A. Opis obrotów	119
B. Geometria powierzchni.....	121
C. Całkowanie numeryczne.....	122
D. Program PLST2GID.....	124
10. Literatura.....	127

SKOROWIDZ OZNACZEŃ

\mathcal{E}^3	3-wymiarowa punktowa przestrzeń euklidesowa, przestrzeń afiniczna
E^3	3-wymiarowa wektorowa przestrzeń euklidesowa, przestrzeń wektorowa ze zdefiniowanym produktem wewnętrznym (iloczynem skalarnym), przestrzeń translacyjna dla przestrzeni \mathcal{E}^3
R^3	przeźrzeń rzeczywista, 3-krotny produkt przestrzeni liczb rzeczywistych R
M	powierzchnia podstawowa powłoki
P	ciało typu powłoka
σ, σ_{ij}	niesymetryczny tensor naprężenia (tensor naprężenia siłowego), reprezentacja macierzowa
s	dewiator tensora σ
μ, μ_{ij}	niesymetryczny tensor naprężenia momentowego, reprezentacja macierzowa
$N(\mathbf{x})$	tensor sił przekrojowych
$M(\mathbf{x})$	tensor momentów przekrojowych
$T_0(\mathbf{x})$	tensor struktury powłoki w konfiguracji odniesienia
$T(\mathbf{x}, t)$	tensor struktury powłoki w konfiguracji aktualnej
t_α^0, t_3^0	wektory bazy ortogonalnej
ε_β	wektor odkształceń membranowych i poprzecznych
κ_β	wektor krzywizn
ε_{ij}	składowe tensora odkształcenia
κ_{ij}	składowe tensora krzywizny
ε_{ijk}	składowe symbolu permutacyjnego
$J_{1,2,3}$	niezmienniki tensora
\mathbf{u}	wektor rzeczywistych, uogólnionych przemieszczeń powłoki
$\mathbf{e}(\mathbf{u}) = \begin{Bmatrix} \varepsilon_\beta(\mathbf{u}) \\ \kappa_\beta(\mathbf{u}) \end{Bmatrix}$	wektor odkształceń uogólnionych
$\mathbf{s} = \begin{Bmatrix} \mathbf{n}^\beta \\ \mathbf{m}^\beta \end{Bmatrix}$	wektor naprężeń uogólnionych
$\mathbf{p} = \begin{Bmatrix} \mathbf{f} \\ \mathbf{c} \end{Bmatrix}$	wektor powierzchniowego obciążenia zewnętrznego
$\mathbf{s}^* = \begin{Bmatrix} \mathbf{n}^* \\ \mathbf{m}^* \end{Bmatrix}$	wektor obciążenia brzegowego
$\bar{\mathbf{B}}(\mathbf{u})$	operator macierzowy w relacji odkształcenie-przemieszczenie
$\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\varepsilon}$	wektory naprężenia i odkształcenia płaskiego ośrodka Cosseratów
C_l	operator konstytutywny płaskiego ośrodka Cosseratów
K_T, K_M, K_G	styczna macierz sztywności, część materiałowa, część geometryczna

$A_{,i} = \frac{\partial A}{\partial x_i}$	pochodna cząstkowa po współrzędnych
$\dot{A} = \frac{dA}{dt}$	pochodna po zmiennej czasowej
$\frac{Df^\alpha}{Dt} = \frac{\partial f^\alpha}{\partial t}$	pochodna materialna w opisie materialnym
$\frac{D}{Dt} f^k = \frac{\partial f^k}{\partial t} + v^j f_{,j}^k$	pochodna materialna w opisie przestrzennym
$f_{,j}^k$	pochodna kowariantna pola \mathbf{f}
μ, λ	stałe Lamégo
E, ν	moduł Younga, współczynnik Poissona
μ_c	dodatkowy moduł ścinania
l, l_b, l_t	długości charakterystyczne mikrostruktury
α_s, α_t	współczynnik ścinania, współczynnik owinięcia
h_0	grubość powłoki
f	funkcja plastycznego płynięcia
σ_Y	granica plastyczności
γ	skalarny mnożnik plastyczny
$\bar{\varepsilon}^p$	efektywne (skumulowane) odkształcenie plastyczne
H	styczny moduł wzmocnienia izotropowego
E_T	styczny moduł sprężysto-plastyczny
K	styczny moduł wzmocnienia kinematycznego
ε^p	tensor odkształcenia plastycznego
\mathbf{e}	dewiator tensora odkształcenia
\mathbf{a}	tensor parametrów wzmocnienia
\mathbf{N}	tensor płynięcia
\mathbf{H}	uogólniony moduł wzmocnienia
\mathbf{A}	tensor termodynamicznych sił wzmocnienia
ψ	funkcja potencjału plastycznego
$\mathbf{C}^e, \mathbf{C}^{ep}$	sprężysty i sprężysto-plastyczny operator konstytutywny
σ_e, ε_e	intensywności naprężenia i odkształcenia
β	tensor przesunięcia powierzchni płynięcia we wzmocnieniu kinematycznym (ang. <i>back stress tensor</i>)
$\Pi_{(e)}$	fizyczny element skończony, podobszar dziedziny zadania
$\xi = (\xi_1, \xi_2)$	baza naturalna
$SO(3)$	grupa właściwych tensorów ortogonalnych
$so(3)$	mały obrót w przestrzeni stycznej do $SO(3)$, tensor skośnie symetryczny
$S(p)$	przyspieszenie w obliczeniach wielowątkowych
$E(p)$	wydajność obliczeń wielowątkowych
$\mathbf{s} \cdot \mathbf{t}, \mathbf{S} \cdot \mathbf{t}, \mathbf{S} \cdot \mathbf{T}$	działanie nasunięcia prostego
$\mathbf{S} : \mathbf{T}$	działanie pełnego nasunięcia
$\mathbf{S} \otimes \mathbf{T}$	działanie iloczynu zewnętrznego

1. WSTĘP

Teoria plastyczności jest jednym z najszerzej opisanych w literaturze typów nieliniowości materiałowej. Wynika to z zapotrzebowania inżynierów na odwzorowanie zachowania konstrukcji (czy to budowlanych, czy też części maszyn) po przekroczeniu obciążenia, które powoduje przejście jej materiału ze stanu sprężystego do plastycznego. Na poziomie naprężeń w konstrukcji mówi się o osiągnięciu granicy plastyczności. Główne rozróżnienie pomiędzy tymi stanami leży w odwracalności deformacji wynikającej z przyłożenia i odjęcia obciążenia. Materiał sprężysty powróci do swojego pierwotnego kształtu, uplastyczniony zaś zachowa („zapamięta”¹) częściowo zmianę swojego kształtu. Zmiana ta, tj. odkształcenia trwałe, kumulują się i mają istotny wpływ na wyężenie materiału w dalszych cyklach obciążania i odciążania.

Tak jak teoria plastyczności znajduje wiele zastosowań w pracy inżyniera, tak wiele konstrukcji może być traktowana jako powłoka. Wyróżnikiem specyficznej geometrii tych trójwymiarowych ciał jest jeden z wymiarów (grubość), wielokrotnie mniejszy od dwóch pozostałych. Konstrukcje powłokowe charakteryzują się możliwością przenoszenia dużych obciążeń, przy stosunkowo niskim ciężarze własnym. CALLADINE [1983] wymienia następujące obszary zastosowań teorii powłok: konstrukcje budowlane (historyczne kopuły kamienne i współczesne profile walcowane), instalacje przemysłowe (kotły, rury itp.), konstrukcje pojazdów (lądowych, wodnych, powietrznych), drobne przedmioty codziennego użytku (obudowy sprzętów elektronicznych, opakowania itp.). W każdym z wymienionych przypadków może pojawić się konieczność rozpatrzenia obiektu od strony teorii naukowej, tj. wyjaśnienie zachodzących zjawisk na podstawie obserwacji i stanu wiedzy oraz wyciągnięcie wniosków co do przyszłych przypadków.

Wielokrotnie na przestrzeni lat podejmowano próby opisu teorii powłok wykonanych z materiału sprężysto-plastycznego. W pracy CALLADINE [1983] wskazano następujące zastosowania tak sformułowanej teorii: formowanie zakrzywionych zbiorników i innych obiektów z płaskich blach (duże strefy uplastycznienia i znaczne zmiany geometrii), lokalne uplastycznienie pod obciążeniami skupionymi lub liniowymi (mały wpływ na globalną deformację), duży wpływ nawet małych stref uplastycznienia na pokrytyczne zachowanie konstrukcji (analiza stateczności).

W wielu aspektach projektowania konstrukcji, w szczególności w teorii powłok, rewolucyjne okazało się zastosowanie Metody Elementów Skończonych do określania stanu deformacji i wyężenia. Pozwala ona na rozpatrywanie niemal dowolnych geometrii pod szerokim wachlarzem obciążeń, w wielu typach analiz. Powszechność komputerów powoduje, że jest ona dostępna dla niemal każdego projektanta. Za rozpowszechnieniem MES kryje się zagrożenie w postaci nieodpowiedzialnego jej zastosowania. Pozostaje ona

¹ Dlatego materiały plastyczne klasyfikuje się jako materiały z pamięcią.

narzędziem, w którym wszelkie dane wejściowe i interpretacja wyników zależy od człowieka. Trafność analiz wykonanych z wykorzystaniem MES została wielokrotnie potwierdzona, jednak wiele ośrodków naukowych dąży do coraz lepszego jej poznania i rozszerzenia jej spektrum zastosowań.

Najważniejszym celem niniejszej pracy jest sformułowanie i implementacja numeryczna sprężysto-plastycznych równań konstytutywnych w ramach nieliniowej 6-parametrowej teorii powłok (zob. m.in. CHRÓŚCIELEWSKI I IN. [2004] i cytowana tam literatura). Teoria ta rozwijana jest od wielu lat m.in. w zespole Katedry Mechaniki Budowli i Mostów na Politechnice Gdańskiej. Wśród tematów zrealizowanych na jej kanwie warto wymienić takie jak: analiza problemów dynamiki, opis kompozytów (zachowanie sprężyste), zastosowanie elementów skończonych o założonym polu odkształceń, analiza powłok zbudowanych z materiałów FGM, czy wreszcie, będąca tematem niniejszej rozprawy, implementacja materiału sprężysto-plastycznego.

Autor dysertacji uzyskał dostęp do starannie przygotowanego oprogramowania bazującego na solidnym podłożu teoretycznym, dającym komfort pracy nad implementacją kolejnych zagadnień. Nie w pełni był dotąd wykorzystywany potencjał nowoczesnych technologii komputerowych do przyspieszenia obliczeń numerycznych. Stąd częścią niniejszej pracy stało się przystosowanie algorytmów numerycznych do obliczeń wielowątkowych oraz implementacja nowoczesnych algorytmów rozwiązywania układów równań (ang. *solver*, w dalszej części pracy te pojęcia będą używane naprzemiennie) dedykowanych do układów formułowanych w ramach MES.

1.1 Stan wiedzy

Problem sprężysto-plastycznej analizy konstrukcji powłokowych był wielokrotnie poruszany w literaturze, zarówno od strony czysto teoretycznej (zob. CALLADINE [1983]), jak i obliczeń numerycznych (zob. np. przegląd literatury w EBERLEIN, WRIGGERS [1999]).

Niewątpliwie kluczową rolę w rozwoju analiz numerycznych problemów powłokowych odgrywa Metoda Elementów Skończonych. EBERLEIN, WRIGGERS [1999] podają 2 główne powody dla których elementy skończone w analizie powłok sprężysto-plastycznych są bardzo zaawansowane (ang. *highly sophisticated*). Pierwszym z nich jest konieczność specjalnego potraktowania rotacyjnych stopni swobody w analizie skończonych obrotów. Należy podkreślić, że rozpatrywana tutaj teoria powłok jest wolna od tego problemu. Obrotowe stopnie swobody, w szczególności rotacja wokół osi normalnej (ang. *drilling*), pojawiają się w niej w sposób naturalny. Drugą trudnością jest sformułowanie równań konstytutywnych dla sił i momentów przekrojowych, z założenia definiowanych na powierzchni odniesienia. W tym celu można wprowadzić pewne założenia dotyczące rozkładu deformacji na grubości powłoki i na tej podstawie zrealizować całkowanie składowych naprężenia dla uzyskania sił przekrojowych. Wadą tego podejścia jest konieczność przyjęcia dodatkowych założeń (w stosunku do analizy czysto sprężystej), zaletą możliwość prostej implementacji ogólnie znanych i stosowanych praw konstytutywnych płaskiego stanu naprężenia lub stanu przestrzennego. Takie podejście znalazło zastosowanie w niniejszej pracy.

W drugiej koncepcji uwzględnienia plastyczności w powłokach, relację sprężysto-plastyczną buduje się bezpośrednio dla sił przekrojowych (zob. np. BANK, BIENIEK² [1988]). Tutaj przejście z relacji sprężysto-plastycznej dla naprężeń do relacji dla sił przekrojowych odbywa się na etapie rozważań teoretycznych. Takie postępowanie powoduje, że zastosowanie prostych modeli sprężysto-plastycznych daje skomplikowane sformułowanie (zob. np. DUJC, BRANK [2012] i cytowana tam literatura).

W niniejszej pracy równania plastyczności są rozwiązywane dla przypadku płaskiego stanu naprężenia (uogólnionego na przypadek ośrodka Cosseratów). Zastosowanie algorytmów bezpośrednio przeniesionych ze stanu trójwymiarowego powodowałoby w tym przypadku powstanie нефizycznych, wychodzących poza płaszczyznę, składowych tensora naprężenia. W pracy SIMO, TAYLOR [1986] zaproponowano algorytm utrzymujący założenia płaskiego stanu naprężenia, w pracy RAMM, MATZENMILLER [1987] zastosowano go do analizy powłok. W dysertacji rozszerzono ten algorytm na przypadek kontinuum Cosseratów.

Obszerne przeglądy literatury dotyczące konstrukcji powłokowych można znaleźć w książkach JEMIELITA [1991], CHRÓSCIELEWSKI I IN. [2004], WIŚNIEWSKI [2010]. Spektrum zagadnień powłokowych, z jakimi mierzą się współcześnie badacze, zawarto w książkach pokonferencyjnych konferencji SSTA (*Shell Structures, Theory and Applications*), zob. PIETRASZKIEWICZ, GÓRSKI [2014] i poprzednie edycje, a także np. KRÄTZIG, OŃATE [1990].

Ciągły rozwój MES oraz innych metod numerycznych nie byłby możliwy gdyby nie rozpowszechnienie komputerów osobistych. Przez wiele lat efektywność obliczeń (w szczególności ich czas trwania) była zależna tylko od maksymalnej prędkości taktowania procesora, programy działały sekwencyjnie realizując kolejno zapisane w kodzie instrukcje. Nowoczesne procesory pozwalają na wykonywanie wielu działań jednocześnie – ich architektura jest wielowątkowa. Zasadniczo nie jest przy tym zwiększane maksymalne taktowanie, uzasadnieniem są tu kwestie technologiczne i ekonomiczne. Koncepcja obliczeń wielowątkowych została opisana np. w pracy GRAMA I IN. [2003].

Centralnym punktem algorytmu MES jest rozwiązanie układu równań liniowych. Typowe układy równań MES charakteryzują się tzw. rzadką macierzą współczynników (nieliczne współczynniki są niezerowe). Zastosowanie tradycyjnych algorytmów rozwiązywania (zob. przegląd metod w KINCAID, CHENEY [2006]) jest czasochłonne i wymaga dużych zasobów pamięci operacyjnej komputera. Znacząco lepszą wydajność osiągają specjalne algorytmy dedykowane bardzo dużym układom równań. Są one stosowane w obliczeniach naukowych i oprogramowaniu komercyjnym, w autorskim programie komputerowym zastosowano procedury z bibliotek HSL i PARDISO (zob. rozdz. 6).

² prof. M. Bieniek, absolwent (1948) i pracownik naukowy (1948-1952) na Politechnice Gdańskiej

Niniejsza dysertacja korzysta z wymienionych powyżej badań naukowych i jest dedykowana rozważeniu następującej tezy:

Możliwe jest symulowanie deformacji plastycznych w nieliniowej 6-parametrowej teorii powłok z implementacją formalizmu sprężysto-plastycznego ośrodka Cosseratów z wykorzystaniem numerycznie efektywnych algorytmów MES.

1.2 Założenia

U podstaw realizowanych w pracy badań leżą następujące założenia:

1. formalizm nieliniowej 6-parametrowej teorii powłok;
2. teoria ścinania pierwszego rzędu do wyznaczenia rozkładu odkształceń na grubości powłoki, wprowadzona tylko na poziomie formułowania równań konstytutywnych;
3. sprężysto-plastyczny płaski stan naprężenia (PSN) uogólniony na kontinuum Cosseratów w warstwie powłoki. Przyjęcie PSN w warstwie płyty lub powłoki wynika z praktyczności takiego podejścia do celów inżynierskich (zob. np. HUGHES [2000]).

Uwieńczenie badań stanowi realizacja przykładów numerycznych. Pozwalają one na weryfikację poczynionych założeń teoretycznych i odniesienie do dotychczas przedstawionych w literaturze wyników. W badaniach numerycznych autor posłużył się autorskim programem komputerowym (*CiMplast*), bazującym na programie do analizy powłok w zakresie sprężystym (*CAM*). W programie zaimplementowane są następujące narzędzia badawcze:

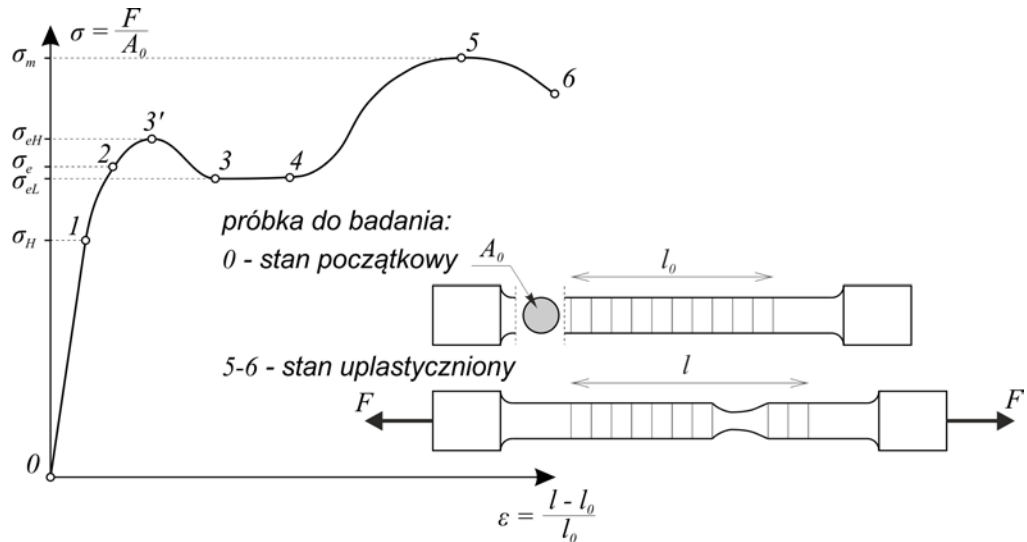
1. wykorzystanie Metody Elementów Skończonych, w szczególności rodziny lagranżowskich elementów skończonych CAM;
2. rozwiązanie równań plastyczności iteracyjnymi algorytmami *Closest Point Projection Method* (CPPM) oraz *Cutting Plane Algorithm* (CPA);
3. wykorzystanie nowoczesnych algorytmów numerycznych – zrównoleglenie obliczeń oraz rozwiązanie rzadkiego układu równań w algorytmie MES.

1.3 Próba jednoosiowego rozciągania – rola w opisie teorii plastyczności

Ze względu na sformułowaną tezę i zakres pracy, zasadne jest streszczenie pewnych faktów nt. jednowymiarowej (1D) plastyczności. Zaawansowanie i wielość zastosowań teorii plastyczności nie zmienia faktu, że przy pozyskiwaniu parametrów materiałowych podstawową i powszechnie stosowaną (m.in. ze względu na łatwość realizacji), jest próba jednoosiowego rozciągania (np. próbki metalowe) lub ściskania (np. próbki betonowe) materiału.

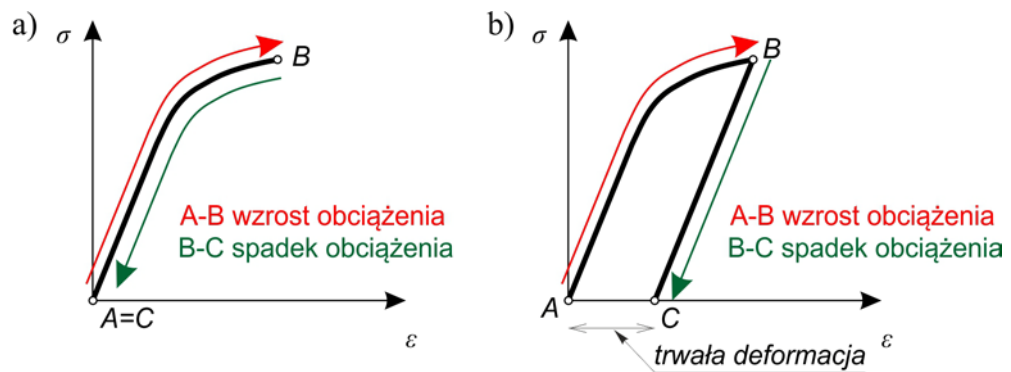
Bez straty na ogólności rozważań, można je zawęzić do rozpatrzenia rozciągania próbek metalowej. Na podstawie uzyskanego w próbie jednoosiowej wyniku, w postaci wykresu zależności naprężenia nominalnego od odkształcenia próbki ($\sigma - \varepsilon$), można zdefiniować opis zachowania sprężysto-plastycznego materiału. Typowy wykres $\sigma - \varepsilon$ uzyskany z badań stali miękkiej (rys. 1.1) zawiera określenie wartości pewnych granic: granica proporcjonalności

σ_H , wyraźna granica plastyczności σ_e , granica plastyczności górna σ_{eH} i dolna σ_{eL} , wytrzymałość na rozciąganie σ_m . Wyróżnia się też następujące odcinki na wykresach: platforma idealnej plastyczności (3-4), wzmocnienie plastyczne (4-5), odcinek niestatecznej deformacji (5-6).



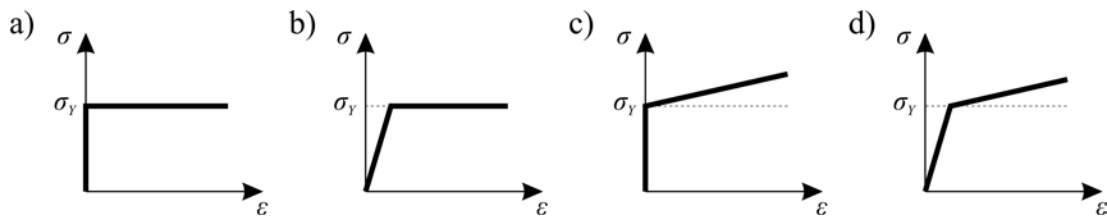
Rys. 1.1 Próba jednoosiowego rozciągania. Wykres $\sigma - \varepsilon$ dla stali miękkiej, geometria i zachowanie rozciąganej próbki.

Deformację sprężystą i plastyczną odróżnia zachowanie materiału po ustąpieniu obciążenia. Materiał sprężysty wraca do swojego pierwotnego kształtu, natomiast w materiale plastycznym (jeśli jest przekroczona granica plastyczności), pewna część deformacji zostaje utrwalona. Wykresy $\sigma - \varepsilon$ dla opisanych sytuacji zestawiono na rys. 1.2.



Rys. 1.2 Próba jednoosiowego rozciągania. Wykres $\sigma - \varepsilon$ a) materiał sprężysty b) materiał plastyczny.

Opis teoretyczny oraz implementacja numeryczna krzywej $\sigma - \varepsilon$ z uwzględnieniem wszystkich jej szczegółów byłaby kłopotliwa. Stąd uzasadnione, również praktyką inżynierską, jest przyjęcie pewnych uproszczonych zależności $\sigma - \varepsilon$ (rys. 1.3), zob. np. SKRZYPEK [1986]. Wyróżniona jest jedynie granica plastyczności σ_Y (oznaczona inaczej niż wcześniej dla odróżnienia danych z eksperymentu od wartości założonej przy wybranej aproksymacji krzywej $\sigma - \varepsilon$).



Rys. 1.3 Aproksymacja krzywej $\sigma - \varepsilon$. Materiały idealne a) sztywno-plastyczny b) idealnie sprężysto-plastyczny c) sztywno-plastyczny ze wzmocnieniem d) sprężysto-plastyczny ze wzmocnieniem.

Oczywistym jest, że nie tylko metale wykazują zachowanie sprężysto-plastyczne. Dotyczy to również innych materiałów, takich jak beton, drewno, ośrodek gruntowy czy tworzywa sztuczne. Ich różnorodność powoduje, że w różny sposób mogą w nich przebiegać procesy uplastycznienia, a także wymaga doboru odpowiednich metod badawczych do oceny właściwych zjawisku parametrów materiałowych.

Zadaniem teorii plastyczności jest opisanie wyżej wymienionych zjawisk w wyidealizowanym kontinuum, w możliwie prosty sposób, jednocześnie wystarczająco dokładnie w stosunku do rzeczywistych procesów.

Wiele miejsca w opracowaniach traktujących o plastyczności poświęcono na przedstawienie rysu historycznego rozwoju teorii jej opisującej. Przełomowym okresem w jej tworzeniu był początek XX w., kiedy to 3 uczonych, niezależnie od siebie, sformułowało hipotezę wyężenia materiału znaną dziś jako kryterium Hubera-Misesa-Hencky'ego, w literaturze angielskojęzycznej częściej jako kryterium von Misesa. O ile początkowo praca prof. Hubera [1904] była nieznaną na zachodzie (wydana we Lwowie, w języku polskim), to już w 1950 r. R. Hill w swoim wielokrotnie cytowanym dziele dotyczącym matematycznych podstaw plastyczności (HILL [1950]) ją przywołuje. Niezrozumiałym jest zatem fakt, iż współcześni autorzy prac przeglądowych (zob. np. BRHUNS [2014]) przemilczają jej istnienie. Zasadnym wydaje się zatem wskazanie wpływu polskich uczonych na rozwój teorii plastyczności.

1.4 Znaczenie polskich uczonych w rozwoju teorii plastyczności

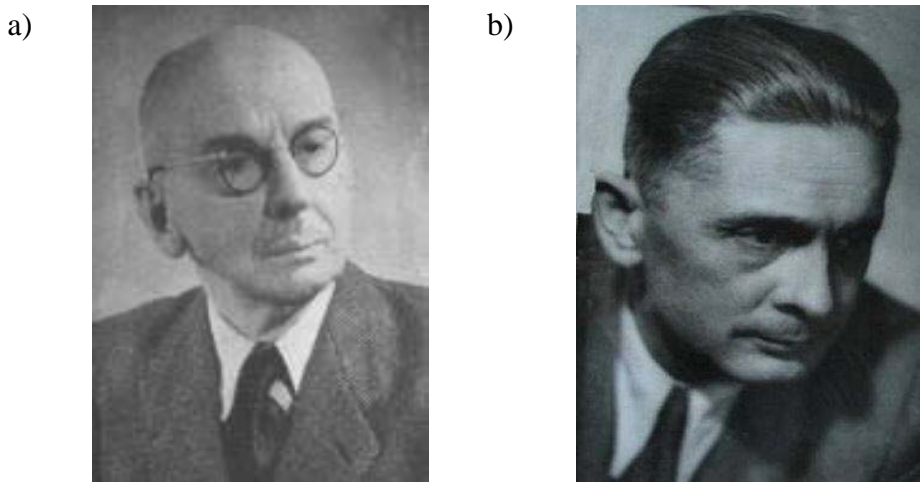
Pierwszeństwo w zasługach dla rozwoju teorii plastyczności należy się dwóm wielkim uczonym pracującym w I poł. XX w. – prof. Maksymilianowi Tytusowi Huberowi i prof. Włodzimierzowi Trzywdarowi Burzyńskiemu (rys. 1.4).

1.4.1 Maksymilian Tytus Huber

Hipoteza Hubera-Misesa-Hencky'ego jest zapewne najczęściej stosowanym w obliczeniach inżynierskich kryterium uplastycznienia. M.in. w książkach HILL [1950] oraz JONES [2009] przywołano najistotniejsze prace mówiące o historii tej hipotezy. Pierwszeństwo w powiązaniu energii odkształcenia postaciowego z uplastycznieniem materiału należy się wielkiemu uczonemu, Jamesowi Clerkowi Maxwellowi³. W liście do Williama Thomsona z 1856 r. proponuje on dekompozycję energii odkształcenia na część

³ Osiągnięcia J.C. Maxwella podaje w swym monumentalnym dziele BADUR [2009].

postaciową i objętościową. Formułuje przy tym hipotezę, mówiącą o tym, że materiał pozostaje w zakresie sprężystym, jeśli wartość energii postaciowej nie przekroczy pewnego parametru (ang. *resilience of rigidity*). Ma on wartość pracy włożonej w materiał w procesie czystego ścinania, która powoduje trwałe odkształcenie. Maxwell wspomina o tym, że nie spotkał się z badaniami dotyczącymi próby wielokierunkowego odkształcenia i uzyskania uplastycznienia. Planował on zrealizowanie opisu matematycznego i przeprowadzenie eksperymentów, ale żadne dalsze prace (według najlepszej wiedzy Autora) nie wskazują na spełnienie tych zamiarów.



Rys. 1.4 Badacze teorii plastyczności a) prof. M.T. Huber b) prof. W. Burzyński

Koncepcję odkształcenia postaciowego jako miary uplastycznienia powtórnie (bez wiedzy o pomysłach Maxwella) proponuje wielki polski uczonec Maksymilian Tytus Huber (HUBER [1904]). Reprinty oryginalnych prac Hubera oraz ocenę ich znaczenia dla nauki polskiej i światowej można znaleźć w pracy OLESIAK, ENGEL [2010].

Oryginalna praca Hubera ta nie zdobyła szerokiego rozgłosu na świecie, przeszkodą był głównie język publikacji. Sam Huber po publikacji pracy wycofał się na jakiś czas z wygłaszania na wykładach zawartych w niej tez, twierdząc że inne kryteria lepiej opisują przeprowadzone eksperymenty. Dopiero na nowo zrealizowane próby potwierdziły słuszność jego założeń.

Po Huberze, dwóch innych uczonych realizuje niezależne badania, z których wynika identyczne kryterium – są to Richard von Mises (w 1913 r.) oraz Heinrich Hencky (w 1924 r.). Mises w swojej pracy proponuje kryterium uplastycznienia zależne tylko od drugiego niezmiennika stanu naprężenia. Dopiero Hencky wskazuje na interpretację tegoż niezmiennika jako właściwą energię odkształcenia postaciowego. W 1924 r. trzech uczonych spotyka się na Kongresie Mechaniki Technicznej w holenderskim mieście Delft. Wymiana doświadczeń między nimi owocuje pracami kolejnego znakomitego polskiego uczonego, ucznia Hubera, Włodzimierza Burzyńskiego (BURZYŃSKI [1928], BURZYŃSKI [1929]).

HILL [1950] i JONES [2009] podkreślają, że w swojej pracy Huber nie precyzuje, czy jego kryterium dotyczy uplastycznienia, czy też kruchego pęknięcia. Istotnie, w pierwszym akapicie swojej pracy Huber pisze (pisownia oryginalna):

Najogólniej cel nauki o wytrzymałości streszcza się w odpowiedzi na pytanie: Jakie siły zewnętrzne wywołują w danym ciele stałym (względnie układzie ciał stałych) niebezpieczeństwo pęknięcia w oznaczonym stopniu?

Dalej, w wielu miejscach pracy, pojawia się termin *pęknięcie*. Na podstawie przeglądu literatury i własnych obserwacji Huber formułuje zdania:

Odształcenie elementu ciała określa jego wyężenie.[...] Wyężenie materiału mierzy się właściwą pracą odształcenia.

Niemniej jednak potwierdzeniem, że Huber swoje kryterium traktuje jako kryterium uplastycznienia, jest fragment:

[...] w praktyce technicznej nie dopuszczamy z reguły odształceń poza granicą sprężystości, chodzi nam przeto nie tyle o niebezpieczeństwo pęknięcia, ile o niebezpieczeństwo przekroczenia granicy sprężystości, które według wszelkiego prawdopodobieństwa mierzy również właściwa praca odształcenia [...]

1.4.2 Włodzimierz Trzywdar Burzyński

Warto tutaj poświęcić miejsce na omówienie wkładu prof. Włodzimierza Trzywdara Burzyńskiego na rozwój teorii plastyczności w okresie międzywojennym. W swojej pracy (BURZYŃSKI [1928]), będącej równocześnie dysertacją doktorską, klasyfikuje dotychczas ogłoszone hipotezy wyężenia materiału oraz formułuje własną hipotezę, znaną jako hipoteza Burzyńskiego lub hipoteza niezmienników.

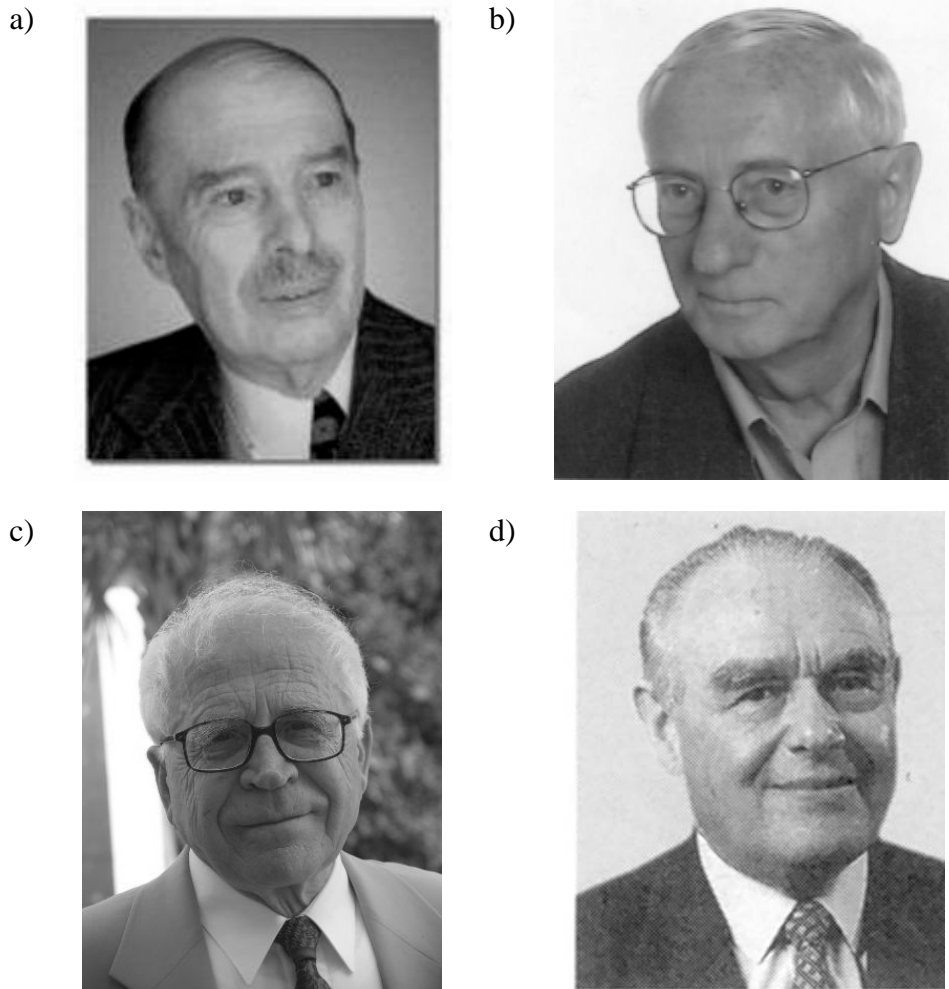
Praca Burzyńskiego została opublikowana w czasie, gdy środowisko badaczy teorii plastyczności było wyraźnie podzielone między zwolenników hipotez naprężeniowych oraz przychylających się do hipotez energetycznych (do tej grupy zaliczali się Huber i Burzyński). Uzasadnia to ostrą krytykę hipotez naprężeniowych zawartą w pracach Burzyńskiego, a także w jego wystąpieniach na konferencjach międzynarodowych.

Hipoteza Burzyńskiego rozszerza hipotezę Hubera o dodatkowy człon, związany z energią odształcenia objętościowego. Formułując swoją hipotezę, Burzyński pragnął nadać jej cechy ogólne, dzięki czemu miała mieć zastosowanie w szerokiej klasie materiałów. Takie też było dążenie części ówczesnych badaczy – powiązanie w jedność hipotez wyężenia dla materiałów sprężysto-plastycznych i sprężysto-kruchych.

Burzyński konsekwentnie krytykował hipotezy wytrzymałościowe pomijające wpływ pośredniego naprężenia głównego σ_2 (np. hipotezy Treski i Mohra). Za wartościowe uważał tylko te hipotezy, które przy odpowiednim doborze współczynników przechodzą w hipotezę Hubera. Przeciwno takiemu podejściu przeczy wiele danych eksperymentalnych (częściowo dostępnych, gdy Burzyński tworzył swoje dzieła), potwierdzających stosowalność hipotez Treski i Mohra do pewnych grup materiałów.

1.4.3 Polska szkoła plastyczności

Wpływ polskich uczonych na rozwój teorii plastyczności nie kończy się na dokonaniach profesorów Hubera i Burzyńskiego. Znaczący wpływ w tej dziedzinie mają badacze Instytutu Podstawowych Problemów Techniki Polskiej Akademii Nauk (IPPT PAN). Należy tu wymienić prof. Wacława Olszaka, prof. Zenona Mróza, prof. Piotra Perzynę. Na Politechnice Krakowskiej swoje badania prowadził prof. Michał Życzkowski. Wspólnym mianownikiem pracy wymienionych uczonych, oprócz tematyki badań, była długoletnia praca w ośrodkach zagranicznych. Portrety uczonych zestawiono na rys. 1.5.



Rys. 1.5 Polscy badacze teorii plastyczności a) prof. W. Olszak b) prof. Z. Mróz c) prof. P. Perzyna d) prof. M. Życzkowski.

Prof. Olszak (1902-1980) był wybitnym organizatorem nauki, uznawanym za twórcę polskiej szkoły teorii plastyczności, ale także znakomitym inżynierem praktykiem (stworzył projekty wielu obiektów mostowych, m.in. na Wiśle). Jego wpływ na polską szkołę mechaniki stawia się na równi z wpływem prof. Hubera i prof. Nowackiego. Pracę doktorską, poświęconą teorii sprężystości, wykonał pod kierunkiem prof. Hubera w 1933 r.

Pod kierunkiem prof. Olszaka pracę w IPPT PAN w 1955 r. rozpoczął prof. Mróz (ur. 1930). W 1959 r. obronił pracę doktorską „Nośność graniczna i optymalne projektowanie płyt i powłok”. W 1964 r. uzyskał habilitację, realizując pracę w temacie „Związki fizyczne

w teorii plastyczności”. Jest najszerzej cytowanym na świecie polskim naukowcem, zaś zaproponowany przez niego wielo-powierzchniowy model materiału sprężysto-plastycznego powszechnie nazywany jest *modelem Mroza* (zob. np. KHAN, HUANG [1995]).

Z IPPT PAN związana jest również praca prof. P. Perzyny (1932-2013). Uznawany jest za twórcę teorii lepkoplastyczności, Jego imieniem nazwano model opisujący to zjawisko (zob. np. DE BORST I IN. [2012]). Istotną część Jego badań stanowiło modelowanie konstytutywne materiałów niesprężystych z uwzględnieniem opisu lokalizacji i zniszczenia. Jego oryginalną koncepcją jest opis tego problemu w ramach termodynamicznej struktury z parametrami wewnętrznymi, wybieranymi z uwzględnieniem podstaw fizycznych, jak również obserwacji doświadczalnych. Koncepcja ta znalazła zastosowanie w badaniu metodami analitycznymi zjawisk lokalizacji i zniszczenia w monokryształach oraz w materiałach polikrystalicznych.

Praca naukowa prof. M. Życzkowskiego była związana z Politechniką Krakowską, tam też obronił swój doktorat (1955) i habilitację (1961). W obu przypadkach były to pierwsze takie osiągnięcia na tamtejszej uczelni. Główne obszary Jego badań to nieliniowe problemy w teorii plastyczności, stateczność układów mechanicznych oraz teoria i zastosowania optymalizacji.

1.5 Organizacja pracy

Rozdz. 2 zawiera podstawowe wiadomości z zakresu nieliniowej 6-parametrowej teorii powłok, wystarczające do wprowadzenia sprężysto-plastycznej relacji konstytutywnej w dalszej części pracy. W rozdz. 3 zebrano wiadomości dotyczące równań sprężysto-plastycznych w ośrodku Cosseratów. Przestrzenny stan naprężenia zredukowano do stanu płaskiego. Przedstawiono założenia klasycznej teorii plastyczności i jej aplikację do ośrodka Cosseratów. Rozdz. 4 przedstawia algorytmy rozwiązywania równań plastyczności i podaje formuły dla algorytmu autorskiego. Przedstawione jest umiejscowienie algorytmów w ogólnym schemacie MES. Rozdz. 5 zawiera informacje nt. użytego sformułowania MES oraz podaje przepis na całkowanie stanu naprężenia po grubości powłoki, dla uzyskania relacji konstytutywnej dla sił i odkształceń przekrojowych. W rozdz. 6 zebrano rozważania dotyczące efektywności obliczeń numerycznych – możliwości wprowadzenia obliczeń wielowątkowych oraz wydajności solverów dla rzadkich układów równań. W rozdz. 7 zestawiono przykłady numeryczne stanowiące weryfikację wcześniejszych wyprowadzeń. W rozdz. 8 podsumowano pracę i przedstawiono możliwe kierunki dalszych prac. W rozdz. 9 zestawiono dodatkowe informacje, dotyczące obrotów, geometrii powierzchni, całkowania numerycznego oraz wizualizacji wyników. Pracę zamyka spis cytowanej literatury.

2. ZARYS TEORII POWŁOK

Celem niniejszego rozdziału jest wprowadzenie formalizmów nieliniowej 6-parametrowej teorii powłok niezbędnego do wprowadzenia sprężysto-plastycznej relacji konstytutywnej w dalszej części pracy. Należy podkreślić, że szczególnie początkowe rozważania są tylko jednym z wielu możliwych podejść do filozofii analitycznego opisu powłoki.

2.1 Powłoka jako ciało trójwymiarowe

Powłoka jest trójwymiarowym ciałem \mathcal{B} (zob. np. CHRÓŚCIELEWSKI [1996], PIETRASZKIEWICZ [2001]), składającym się z cząstek materialnych $x \in \mathcal{B}$. Wśród innych ciał powłoki wyróżniają się specyficzną geometrią przestrzenną, którą można opisać pewną powierzchnią M i przypisaną każdej jej punktowi grubością $h_0 > 0$. Można też stwierdzić, że powłoka jest ciałem stałym zajmującym obszar pomiędzy dwiema powierzchniami, których przeciętna odległość w stosunku do rozmiarów samych powierzchni jest niewielka (WOŹNIAK [1966]). W mechanice powłok wyróżnia się pewną szczególną powierzchnię tzw. powierzchnią podstawową M , która pozwala na opisanie trójwymiarowych zagadnień za pomocą wielkości zależnych tylko od dwóch zmiennych.

Samo pojęcie ciała rozumiane jest w sensie klasycznej mechaniki ośrodków ciągłych (zob. np. RYMARZ [1993]). \mathcal{B} traktowane jest jako zorientowana rozmaitość różniczkowalna (zob. np. WANG [1967]), przy czym dokładne określenie tego pojęcia wykracza poza zakres niniejszej pracy. Przyjmuje się, że \mathcal{B} jest zanurzone w przestrzeni euklidesowej \mathcal{E}^3 . Ciało ulega deformacji, która jest gładkim i odwracalnym odwzorowaniem χ_t . Uzyskuje się w ten sposób konfigurację rzeczywistą χ_t , będącą obrazem \mathcal{B} , zanurzonym w \mathcal{E}^3 .

Opis analityczny wymaga swoistego uporządkowania przestrzeni, przez co można ją będzie opisać elementami zbioru liczb rzeczywistych R . Dla dowolnego punktu w przestrzeni euklidesowej i przy ustalonej bazie w przestrzeni translacyjnej E^3 , można składowe wektora wodzącego tego punktu podać jako uporządkowaną trójkę liczb z przestrzeni R^3 . Można zatem wskazać położenie cząstki $x \in \mathcal{E}^3$ przez składowe $\{x^i\} \in R^3$ wektora $\mathbf{x} \in E^3$. Formalnie zapisujemy tą obserwację przez $\mathbf{x} = \chi_t(x)$.

Opis analityczny wymaga wprowadzenia pewnej dowolnie wybranej konfiguracji $B = \kappa(\mathcal{B})$, tj. gładkiego i odwracalnego odwzorowania $\kappa: \mathcal{B} \rightarrow B \subset \mathcal{E}^3$, dającego obraz \mathcal{B} w przestrzeni fizycznej. Konfiguracja B może, ale nie musi, być jedną z konfiguracji rzeczywistych χ_t . W opisie analitycznym zwykle wybiera się jedną ustaloną konfigurację B_0 zwaną konfiguracją odniesienia. W szczególności B_0 może odpowiadać stanowi nieodkształconemu, co jest charakterystyczne dla stosowanego w niniejszej pracy opisu

Lagrange'a. Poniżej, dla zwięzłości zapisu, pod określeniem „ciało B ” rozumie się pewną konfigurację B ciała \mathcal{B} .

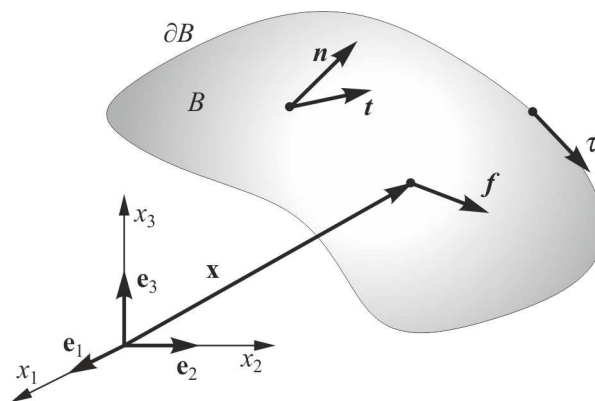
2.2 Zasady zachowania, równania ruchu

Cząstki $x \in \mathcal{B}$ powłoki muszą spełniać trzy prawa ruchu (NATANSON [1890]¹ w BADUR [2005]):

- każde ciało trwa w spoczynku lub porusza się ruchem, jednostajnym po linii prostej, dopóki siły przyłożone nie zmuszą ciała do zmiany jego stanu,
- zmiana ruchu jest proporcjonalna do przyłożonej siły poruszającej i odbywa się w kierunku linii prostej, wzdłuż której siła jest przyłożona,
- przeciwdziałanie jest zawsze równe i przeciwne działaniu tj. wzajemne działania dwóch ciał są zawsze równe sobie i posiadają ten sam kierunek lecz przeciwne zwroty.

W odniesieniu do zagadnień mechanicznych z prawami ruchu związane są zasady zachowania pędu i momentu pędu (por. RYMARZ [1993])

Przeniesienie równań mechaniki punktów na poziom mechaniki kontinuum nie jest sprawą prostą i budzi kontrowersje (zob. BADUR [2005], str. 113). W poniższych rozważaniach przyjmuje się klasyczne podejście (zob. np. HOLZAPFEL [2001], MARSDEN I HUGHES [1983]). Ciało B (rys. 2.1) w ruchu w czasie t doświadcza oddziaływań o charakterze masowym i kontaktowym. Odpowiednio definiuje się gęstość sił masowych (na jednostkę objętości) $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$ oraz gęstość sił powierzchniowych (na jednostkę powierzchni) $\boldsymbol{\tau}(\mathbf{x}, t)$. Dodatkowo w ciele występują siły wewnętrzne wynikające z naprężeń $\mathbf{t}(\mathbf{x}, t, \mathbf{n})$, oddziałujących przez dowolną powierzchnię o normalnej \mathbf{n} .



Rys. 2.1 Ciało materialne.

Całkowitą siłę i całkowity moment działające na ciało B zapisuje się odpowiednio jako:

¹ NATANSON W.[1890]: *Wstęp do Fizyki Teoretycznej*, Warszawa.

$$\mathbf{F}(t) = \int_{\partial B_t} \mathbf{t} da + \int_{B_t} \mathbf{f} dv, \quad (2.1)$$

$$\mathbf{M}(t) = \int_{\partial B_t} \mathbf{r} \times \mathbf{t} da + \int_{B_t} \mathbf{r} \times \mathbf{f} dv. \quad (2.2)$$

Kontynualne odpowiedniki zasady zachowania pędu i krętu mają postaci:

$$\frac{D}{Dt} \int_{B_t} \rho \mathbf{v} dv = \int_{\partial B_t} \mathbf{t} da + \int_{B_t} \mathbf{f} dv, \quad (2.3)$$

$$\frac{D}{Dt} \int_{B_t} \mathbf{r} \times \rho \mathbf{v} dv = \int_{\partial B_t} \mathbf{r} \times \mathbf{t} da + \int_{B_t} \mathbf{r} \times \mathbf{f} dv. \quad (2.4)$$

Postulat Cauchy'ego orzeka, że jeżeli spełnione jest prawo zachowania pędu, wtedy \mathbf{t} zależy liniowo od \mathbf{n} , to znaczy istnieje tensor $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t)$ zwany tensorem Cauchy'ego oraz że zachodzi

$$\mathbf{t}(\mathbf{x}, t, \mathbf{n}) = \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t) \mathbf{n}. \quad (2.5)$$

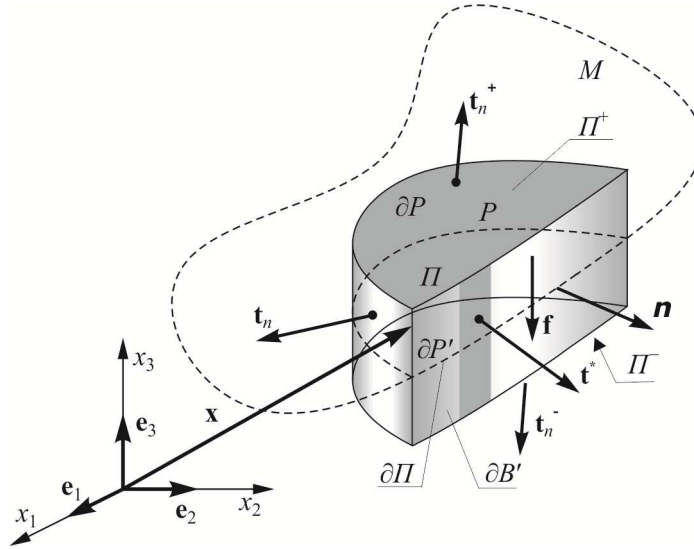
2.3 Ciało typu powłoka, równania ruchu

Rozpatruje się teraz pewne trójwymiarowe ciało P typu powłoka, zob. rys. 2.2. Ciało to zostało skonstruowane (wycięte z ciała B) w taki sposób, że zawiera wszystkie punkty leżące na liniach prostopadłych do M . Na rys. 2.2 przez Π oznaczono część powierzchni podstawowej powłoki w konfiguracji odniesienia, która jest zawarta w ciele P . Zakłada się, że położenie pewnej cząstki w P opisuje wektor wodzący \mathbf{x} . Niech teraz $\mathbf{y} \subset P(t)$ oznacza położenie tej cząstki w chwili t . Wtedy ruch pewnego punktu ciała P i powierzchni podstawowej M opisują odpowiednio dwa równania: $\mathbf{y}(\mathbf{x}) = \mathbf{x} + \mathbf{u}(\mathbf{x})$, $\mathbf{y}(\mathbf{x}) = \mathbf{x} + \mathbf{u}(\mathbf{x})^2$. Dalsze etapy formułowania równań rozpatrywanej tu teorii powłok przedstawiają się następująco:

1. wprowadza się tzw. sprowadzone zasady mechaniki dla powierzchni Π , wyrażane przez trójwymiarowe wielkości określone dla ciała P ,
2. wyprowadza się lokalne równania ruchu punktu powłoki,
3. wprowadza się tożsamość całkową, którą interpretuje się jako zasadę prac wirtualnych,
4. otrzymana zasada stanowi podstawę do definicji miar odkształceń,
5. miary odkształceń pozwalają na skonstruowanie postaci równania konstytutywnego.

² Tutaj i dalej wektory oznaczone prostą czcionką (np. \mathbf{x}) odnoszą się do ciała typu powłoka, wektory oznaczone ukośną czcionką (np. \boldsymbol{x}) - do powierzchni odniesienia.

Szczegółowe rozwinięcie powyższych punktów można odnaleźć w pracy CHRÓŚCIELEWSKI I IN. [2004] i cytowanej tam literaturze. Dla kompletności, w niniejszej pracy przedstawia się skrót, odniesiony do zagadnień statyki, por. też WITKOWSKI [2005], WITKOWSKI [2011].



Rys. 2.2 Ciało typu powłoka.

Zasady zachowania (2.3) i (2.4) orzekają odpowiednio o równaniu równowagi sił i równaniu równowagi momentów dla płata Π :

$$\mathcal{F}(\Pi) \equiv \mathbf{F}(P) = \mathbf{0}, \quad \mathcal{M}(\Pi) = \mathbf{M}(P) = \mathbf{0}. \quad (2.6)$$

Występujące w (2.6) wielkości to: całkowita siła oraz całkowity moment, działające na dowolną część Π powierzchni odniesienia, wyrażone przez:

$$\mathcal{F}(\Pi) = \iint_{\Pi} \mathbf{f} da + \int_{\partial\Pi \setminus \partial M_f} \mathbf{n}_n dl + \int_{\partial\Pi \cap \partial M_f} \mathbf{n}^* dl, \quad (2.7)$$

$$\mathcal{M}(\Pi) = \iint_{\Pi} (\mathbf{c} + \mathbf{y} \times \mathbf{f}) da + \int_{\partial\Pi \setminus \partial M_f} (\mathbf{m}_n + \mathbf{y} \times \mathbf{n}_n) dl + \int_{\partial\Pi \cap \partial M_f} (\mathbf{m}^* + \mathbf{y} \times \mathbf{n}^*) dl. \quad (2.8)$$

Określenia składników powyższych wzorów i ich odniesienie do wielkości dla ciała trójwymiarowego zestawiono w tab. 2.1, a rys. 2.3 przedstawia koncepcję wektorów przekrojowych.

Poprzez analogię do (2.5) postuluje się istnienie tensora przekrojowych sił $N(\mathbf{x})$ i tensora przekrojowych momentów $M(\mathbf{x})$, takich że:

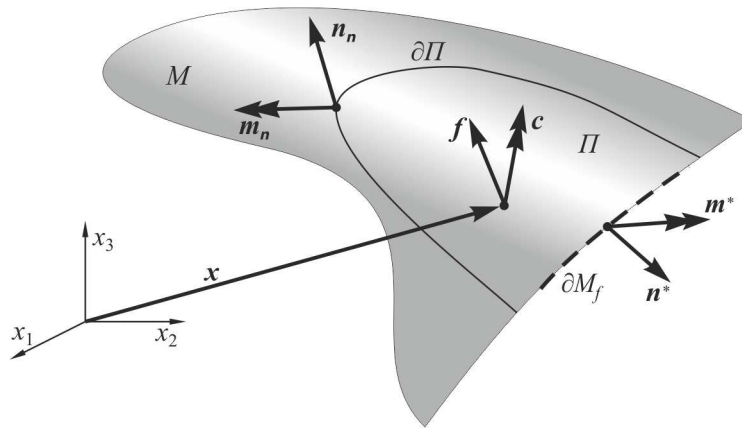
$$\mathbf{n}_n(\mathbf{x}) = N(\mathbf{x})\mathbf{n}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{m}_n(\mathbf{x}) = M(\mathbf{x})\mathbf{n}(\mathbf{x}). \quad (2.9)$$

Zdefiniowawszy całkowitą siłę i całkowity moment działający na dowolną część Π powierzchni odniesienia, wyprowadza się różniczkowe równania równowagi:

$$\text{Div}N + \mathbf{f} = \mathbf{0}, \quad \text{Div}M + ad^{-1}(NF^T - FN^T) + \mathbf{c} = \mathbf{0}. \quad (2.10)$$

Tab. 2.1. Zestawienie wielkości: wektory przekrojowe i odpowiadające im definicje w ciele trójwymiarowym

Ciało typu powłoka, wektory przekrojowe	Ciało trójwymiarowe
siły powierzchniowe $\iint_{\Pi} f da$	$\iiint_P \mathbf{f} dv + \iint_{\Pi^+} \mathbf{t}_n^+ da^+ - \iint_{\Pi^-} \mathbf{t}_n^- da^-$
momenty powierzchniowe $\iint_{\Pi} (\mathbf{c} + \mathbf{y} \times \mathbf{f}) da$	$\iiint_P \mathbf{y} \times \mathbf{f} dv + \iint_{\Pi^+} \mathbf{y}^+ \times \mathbf{t}_n^+ da^+ - \iint_{\Pi^-} \mathbf{y}^- \times \mathbf{t}_n^- da^-$
siły wewnętrzne $\int_{\partial\Pi/\partial M_f} \mathbf{n}_n dl$	$\iint_{\partial P' \wedge \partial B'} \mathbf{t}_n da$
momenty wewnętrzne $\int_{\partial\Pi/\partial M_f} (\mathbf{m}_n + \mathbf{y} \times \mathbf{n}_n) dl$	$\iint_{\partial P' \wedge \partial B'} \mathbf{y} \times \mathbf{t}_n da$
siły brzegowe $\int_{\partial M_f} \mathbf{n}^* dl$	$\iint_{\partial B'_f} \mathbf{t}^* da$
momenty obciążeń brzegowych $\int_{\partial M_f} (\mathbf{m}^* + \mathbf{y} \times \mathbf{n}^*) dl$	$\iint_{\partial B'_f} \mathbf{y} \times \mathbf{t}^* da$



Rys. 2.3 Koncepcja przekrojowych sił i momentów

Szczegółowe wyprowadzenie wzoru (2.10) i definicje wielkości w nim występujących można odnaleźć w pracy CHRÓŚCIELEWSKI I IN. [2004]. Odwzorowanie

$$ad : E^3 \rightarrow so(3) \tag{2.11}$$

przyporządkowuje skośnie symetrycznemu tensorowi $\mathbf{W} \in so(3)$ jego wektor osiowy \mathbf{w} tj. $\mathbf{W}\mathbf{a} = \mathbf{w} \times \mathbf{a}$ dla każdego $\mathbf{a} \in E^3$. Równania (2.10) uzupełnić należy o statyczne warunki brzegowe:

$$\mathbf{n}^* - N\mathbf{n} = \mathbf{0}, \mathbf{m}^* - M\mathbf{n} = \mathbf{0}. \tag{2.12}$$

2.4 Zasada prac wirtualnych, miary odkształceń

Przyjmuje się, że brzeg ∂M powierzchni podstawowej M jest sumą dwóch części $\partial M = \partial M_d \cup \partial M_f$, $\partial M_d \cap \partial M_f = \emptyset$, na których zadane są odpowiednio przemieszczeniowe ∂M_d i naprężeniowe ∂M_f warunki brzegowe. Dalej zakłada się istnienie dwóch pól: $\mathbf{v}(\mathbf{x})$ i $\mathbf{w}(\mathbf{x})$ będących, odpowiednio, kinematycznie dopuszczalnym polem wirtualnych przesunięć i obrotów

$$\mathbf{w} = (\mathbf{v}, \boldsymbol{\omega}), \quad (2.13)$$

które spełniają jednorodne warunki brzegowe $\mathbf{v}(\mathbf{x}) = \mathbf{w}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ na ∂M_d . Biorąc za punkt wyjścia sformułowanie silne (2.10) można pokazać (zob. np. CHRÓŚCIELEWSKI I IN. [2004]), że równoważne mu sformułowanie słabe dane jest przez zasadę prac wirtualnych w postaci

$$\iint_M \{\mathbf{N} \cdot (\nabla \mathbf{v} - \mathbf{W}\mathbf{F}) + \mathbf{M} \cdot \nabla \mathbf{w}\} da = \iint_M (\mathbf{f} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{c} \cdot \boldsymbol{\omega}) da + \int_{\partial M_f} (\mathbf{n}^* \cdot \mathbf{v} + \mathbf{m}^* \cdot \boldsymbol{\omega}) dl. \quad (2.14)$$

Analiza członu opisującego wirtualną pracę sił wewnętrznych wskazuje, że z odpowiednio: przekrojowymi miarami sił $\mathbf{N}(\mathbf{x})$ i momentów $\mathbf{M}(\mathbf{x})$, sprzężone są energetycznie tensory:

$$\delta \mathbf{E}(\mathbf{x}) \equiv \nabla \mathbf{v}(\mathbf{x}) - \mathbf{W}(\mathbf{x})\mathbf{F}(\mathbf{x}), \quad \delta \mathbf{K}(\mathbf{x}) \equiv \nabla \mathbf{w}(\mathbf{x}), \quad (2.15)$$

które definiują naturalne miary odkształcenia powłoki. Można pokazać (zob. BURZYŃSKI [2013a]), że dla układu płaskiego (płaski stan odkształcenia/naprężenia) przechodzą one we wzory znane dla liniowego ośrodka Cosseratów, zob. np. NOWACKI [1971]. Stąd równania opisujące ruch powłoki mają postać ogólną, typową dla ośrodka z mikrostrukturą:

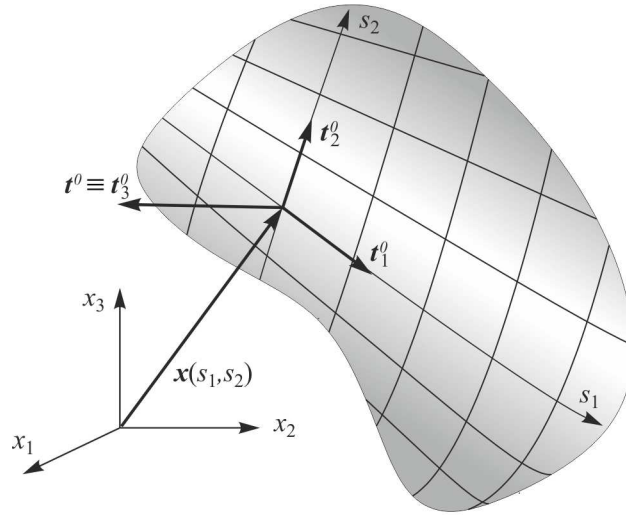
$$\mathbf{y}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{x} + \mathbf{u}(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{T}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{Q}(\mathbf{x}, t)\mathbf{T}_0(\mathbf{x}). \quad (2.16)$$

Nieosobliwe tensory $\mathbf{T}(\mathbf{x}, t)$ i $\mathbf{T}_0(\mathbf{x})$, nazywane są tensorami struktury powłoki, odpowiednio, w konfiguracji aktualnej (w czasie t) i konfiguracji odniesienia (w czasie $t = 0$). Ich definicja zostanie podana w dalszej części pracy.

2.5 Współrzędne fizyczne, notacja macierzowo-operatorowa

W kolejnym kroku wprowadza się na M współrzędne w postaci powierzchniowej bazy ortogonalnej, zob. rys. 2.4. W implementacji komputerowej MES stanowią one składnik zbioru danych. Jednostkowe wektory stycznyc bazy i wektor normalny wyznacza się z klasycznych wzorów (zob. np. WOŹNIAK [1966] oraz dodatek B):

$$\mathbf{t}_\alpha^0 = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial s_\alpha}, \quad \alpha = 1, 2, \quad \mathbf{t}^0 \equiv \mathbf{t}_3^0 = \mathbf{t}_1^0 \times \mathbf{t}_2^0, \quad \mathbf{t}_i^0 = \mathbf{t}_0^i. \quad (2.17)$$



Rys. 2.4 Baza ortogonalna na M .

Wektory określone przez (2.17) spełniają warunki:

$$\mathbf{t}_i^0 \cdot \mathbf{t}_j^0 = \delta_{ij}, \quad \|\mathbf{t}_i^0\| = 1. \quad (2.18)$$

W prezentowanej tu implementacji elementów skończonych bazę $\{\mathbf{t}_i^0\}$ przyjmuje się jako wynik obrotu ustalonej bazy odniesienia $\{\mathbf{e}_i\}$ tzn.:

$$\mathbf{t}_i^0(\mathbf{x}) = \mathbf{T}_0(\mathbf{x})\mathbf{e}_i, \quad i = 1, 2, 3. \quad (2.19)$$

Zatem tensor struktury $\mathbf{T}_0(\mathbf{x})$ jest, podobnie jak wektor wodzący $\mathbf{x} = \mathbf{x}(s_\beta)$, częścią danych zadania. W ruchu powłoki aktualną orientację $\mathbf{t}_i(\mathbf{x})$ otrzymuje się jako wynik następujących zależności, por. (2.16)₂:

$$\mathbf{t}_i(\mathbf{x}) = \mathbf{Q}(\mathbf{x})\mathbf{t}_i^0(\mathbf{x}) = \mathbf{Q}(\mathbf{x})\mathbf{T}_0(\mathbf{x})\mathbf{e}_i = \mathbf{T}(\mathbf{x})\mathbf{e}_i, \quad i = 1, 2, 3. \quad (2.20)$$

Model kinematyczny rozpatrywanej tu teorii powłok zgodny jest z modelem powierzchni Cosseratów wyposażonej w trzy ortogonalne nierozciągliwe direktory $\mathbf{t}_i^0(\mathbf{x})$ i $\mathbf{t}_i(\mathbf{x})$.

W ustalonej bazie z tożsamości całkowitej wynikają w sposób naturalny (por. np. CHRÓŚCIELEWSKI I IN [2004]) wektory wirtualnych odkształceń i wirtualnych krzywizn w postaci:

$$\delta \boldsymbol{\varepsilon}_\beta(\mathbf{x}) = \mathbf{v}_{,\beta} + \mathbf{y}_{,\beta} \times \mathbf{w} = \mathbf{v}_{,\beta} + (\mathbf{t}_\beta + \boldsymbol{\varepsilon}_\beta) \times \mathbf{w}, \quad \delta \boldsymbol{\kappa}_\beta(\mathbf{x}) = \mathbf{w}_{,\beta}. \quad (2.21)$$

Można pokazać (por. np. CHRÓŚCIELEWSKI I IN. [2004] i cytowana tam literatura), że definicje powłokowych miar odkształceń odpowiadające (2.21) dane są przez:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_\beta = \mathbf{y}_{,\beta} - \mathbf{t}_\beta = \mathbf{u}_{,\beta} + (\mathbf{1} - \mathbf{Q})\mathbf{t}_\beta^0, \quad \boldsymbol{\kappa}_\beta = \text{ad}^{-1}(\mathbf{Q}_{,\beta} \mathbf{Q}^T). \quad (2.22)$$

Zatem nawiązując do postaci zapisu wektora uogólnionych wirtualnych przemieszczeń (2.13) określa się wektor rzeczywistych przemieszczeń powłoki

$$\mathbf{u} = (\mathbf{u}, \mathbf{Q}). \quad (2.23)$$

W dalszym ciągu pracy, ze względu na ukierunkowanie na zastosowanie w programie komputerowym, przyjmuje się notację macierzowo-operatorową (por. np. CHRÓŚCIELEWSKI I IN [2004], MIŚKIEWICZ [2010], WITKOWSKI [2011]). Równania kinematyczne (2.21) i (2.22) zapisuje się jako:

$$\mathbf{e}(\mathbf{u}) = \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}_1(\mathbf{u}) \\ \boldsymbol{\varepsilon}_2(\mathbf{u}) \\ \boldsymbol{\kappa}_1(\mathbf{u}) \\ \boldsymbol{\kappa}_2(\mathbf{u}) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_{,1} + (\mathbf{1} - \mathbf{Q})\mathbf{t}_1^0 \\ \mathbf{u}_{,2} + (\mathbf{1} - \mathbf{Q})\mathbf{t}_2^0 \\ \text{ad}^{-1}(\mathbf{Q}_{,1} \mathbf{Q}^T) \\ \text{ad}^{-1}(\mathbf{Q}_{,2} \mathbf{Q}^T) \end{Bmatrix}, \quad \delta \mathbf{e} = \begin{Bmatrix} \delta \boldsymbol{\varepsilon}_1 \\ \delta \boldsymbol{\varepsilon}_2 \\ \delta \boldsymbol{\kappa}_1 \\ \delta \boldsymbol{\kappa}_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{v}_{,1} + (\mathbf{t}_1 + \boldsymbol{\varepsilon}_1) \times \mathbf{w} \\ \mathbf{v}_{,2} + (\mathbf{t}_2 + \boldsymbol{\varepsilon}_2) \times \mathbf{w} \\ \mathbf{w}_{,1} \\ \mathbf{w}_{,2} \end{Bmatrix}. \quad (2.24)$$

Energetycznie sprzężone z (2.24)₁ miary uogólnionych naprężeń zestawia się w wektorze

$$\mathbf{s} = \begin{Bmatrix} \mathbf{n}^\beta \\ \mathbf{m}^\beta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{n}^1 \\ \mathbf{n}^2 \\ \mathbf{m}^1 \\ \mathbf{m}^2 \end{Bmatrix}. \quad (2.25)$$

Podobnie zestawiane są odpowiednio wektory powierzchniowego obciążenia zewnętrznego i wektory obciążenia brzegowego:

$$\mathbf{p} = \begin{Bmatrix} \mathbf{f} \\ \mathbf{c} \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{s}^* = \begin{Bmatrix} \mathbf{n}^* \\ \mathbf{m}^* \end{Bmatrix}. \quad (2.26)$$

Operator $\bar{\mathbf{B}}(\mathbf{u})$ budujący relację przemieszczenie-odkształcenie (2.21) w formie $\delta \mathbf{e} = \bar{\mathbf{B}}(\mathbf{u}) \mathbf{w}$ ma postać

$$\bar{\mathbf{B}}(\mathbf{u}) = \begin{bmatrix} \mathbf{1}(\cdot)_{,1} & (\mathbf{t}_1 + \boldsymbol{\varepsilon}_1) \times (\cdot) \\ \mathbf{1}(\cdot)_{,2} & (\mathbf{t}_2 + \boldsymbol{\varepsilon}_2) \times (\cdot) \\ \mathbf{0} & \mathbf{1}(\cdot)_{,1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1}(\cdot)_{,2} \end{bmatrix}. \quad (2.27)$$

W powyższej notacji, zakładając że $\mathbf{u} = (\mathbf{u}, \mathbf{Q})$ spełnia przemieszczeniowe warunki brzegowe $\mathbf{u} = \mathbf{u}^*$ na ∂M_d , równanie (2.14) zapisuje się jako $G[\mathbf{u}; \mathbf{w}] \equiv G_i[\mathbf{u}; \mathbf{w}] - G_e[\mathbf{u}; \mathbf{w}]$ tj.:

$$\iint_M (\bar{\mathbf{B}}(\mathbf{u}) \mathbf{w})^T \mathbf{s} da - \iint_M \mathbf{w}^T \mathbf{p} da + \int_{\partial M_f} \mathbf{w}^T \mathbf{s}^* dl = 0, \quad \mathbf{s} = \mathbf{C} \mathbf{e}(\mathbf{u}). \quad (2.28)$$

2.6 Linearyzacja

Równanie (2.28) jest w ogólnym przypadku nieliniowe ze względu na zmiany geometrii i zmiany macierzy konstytutywnej \mathbf{C} (tu sprężysto-plastycznej) w relacji (2.28)₂. Do rozwiązania równania (2.28)₁ stosuje się tutaj metodę typu Newtona (por. np. SZYMKIEWICZ [2012]). Wymaga ona zlinearyzowania równania (2.28) tzn.

$$\delta G[\mathbf{u}; \Delta \mathbf{u}, \mathbf{w}] + G[\mathbf{u}; \mathbf{w}] = 0. \quad (2.29)$$

Zlinearyzowaną postać zasady wirtualnych przemieszczeń, w otoczeniu rozwiązania próbnego $\mathbf{u} = (\mathbf{u}, \mathbf{Q})$ uzyskuje się obliczając pochodną kierunkową (2.28)₁ w punkcie \mathbf{u} w kierunku czyli $\Delta \mathbf{u}$

$$\delta G[\mathbf{u}; \Delta \mathbf{u}, \mathbf{w}] = \frac{d}{d\eta} G[\mathbf{u}(\eta); \mathbf{w}]_{\eta=0} = \delta G_i[\mathbf{u}; \Delta \mathbf{u}, \mathbf{w}] - \delta G_e[\mathbf{u}; \Delta \mathbf{u}, \mathbf{w}]. \quad (2.30)$$

Szczegółowe wyprowadzenia można odnaleźć w CHRÓŚCIELEWSKI I IN [2004]. W wyniku działań rozpisanych w (2.30) uzyskuje się zlinearyzowany człon opisujący wirtualną pracę wewnętrzną

$$\delta G_i[\mathbf{u}; \Delta \mathbf{w}, \mathbf{w}] = \iint_M \left((\bar{\mathbf{B}}\mathbf{w})^T \mathbf{C} (\bar{\mathbf{B}}\Delta \mathbf{w}) + (\bar{\mathbf{D}}\mathbf{w})^T \mathbf{G} (\bar{\mathbf{D}}\Delta \mathbf{w}) \right) da. \quad (2.31)$$

W (2.31) oznaczono:

$$\mathbf{G}(\mathbf{u}) = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & -\mathbf{n}^1 \times (\cdot) \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & -\mathbf{n}^2 \times (\cdot) \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & -\mathbf{m}^1 \times (\cdot) \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & -\mathbf{m}^2 \times (\cdot) \\ \mathbf{n}^1 \times (\cdot) & \mathbf{n}^2 \times (\cdot) & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{H} \end{bmatrix}, \quad \bar{\mathbf{D}} = \begin{bmatrix} \mathbf{1}(\cdot)_{,1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{1}(\cdot)_{,2} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1}(\cdot)_{,1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1}(\cdot)_{,2} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{bmatrix}. \quad (2.32)$$

gdzie $\mathbf{H}(\mathbf{u}) = \mathbf{n}^\beta \otimes (\mathbf{t}_\beta + \boldsymbol{\varepsilon}_\beta) - (\mathbf{n}^\beta \cdot (\mathbf{t}_\beta + \boldsymbol{\varepsilon}_\beta)) \mathbf{1}$. W dalszym ciągu rozważania ograniczają się do przypadku, gdy obciążenia nie zależą od deformacji \mathbf{u} (obciążenia martwe), a zatem $\delta G_e[\mathbf{u}; \Delta \mathbf{w}, \mathbf{w}] = 0$. W konsekwencji z równania (2.29) uzyskuje się równanie

$$\begin{aligned} & \iint_M (\mathbf{w}^T \bar{\mathbf{B}}^T \mathbf{C} \bar{\mathbf{B}} \Delta \mathbf{u} + \mathbf{w}^T \bar{\mathbf{D}}^T \mathbf{G} \bar{\mathbf{D}} \Delta \mathbf{u}) da = \\ & = \iint_M \mathbf{w}^T \mathbf{p} da + \int_{\partial M_f} \mathbf{w}^T \mathbf{s}^* dl - \iint_M (\bar{\mathbf{B}}(\mathbf{u}) \mathbf{w})^T \mathbf{s}(\mathbf{e}(\mathbf{u})) da, \end{aligned} \quad (2.33)$$

które jest punktem wyjścia do aproksymacji skończenie wymiarowej omówionej w rozdziale 5.

3. RÓWNANIA SPRĘŻYSTO-PLASTYCZNE OŚRODKA COSSERATÓW

3.1 Wprowadzenie

Rolą równań konstytutywnych w mechanice ośrodków ciągłych (MOC) jest podanie związków między polem naprężeń i odkształceń. Jednocześnie układ równań prawa materiałowego uzupełnia ogólny bilans równań i niewiadomych problemu brzegowego mechaniki ośrodków ciągłych (por. np. RYMARZ [1993]). Równania konstytutywne opisują bogactwo materiałów jakie występuje w przyrodzie i ich reakcje na oddziaływanie zewnętrzne. Praktyka inżynierska pokazuje, że przyłożenie tego samego obciążenia np. do próbki wykonanej ze stali i pianki spowoduje odmienne procesy deformacji tych próbek. Ta sama praktyka wskazuje, że ten sam materiał wykazuje różne odpowiedzi zależnie np. od stanu początkowej deformacji czy prędkości odkształcenia.

Równania równowagi oraz zasady zachowania charakteryzują się uniwersalnością. Cecha ta nie dotyczy równań konstytutywnych (zob. np. RYMARZ [1993]), co nie powinno być zaskakującym faktem. Trudno jest bowiem zamknąć bogactwo materiałów w kilku związkach równań. Z tego względu teoria równań konstytutywnych rządzi się własnymi prawami i postulatami, reprezentującymi ogólne charakterystyki mechaniczne materiału, zgodne z codziennym doświadczeniem. Trzy zasadnicze postulaty to: postulat determinizmu, postulat lokalności i postulat obiektywności materiałowej. Szczegółową dyskusję tych praw można odnaleźć przykładowo w pracach NOLL [1958], PERZYNA [1978] i RYMARZ [1993].

W niniejszym rozdziale przedstawione zostaną wybrane informacje dotyczące równań konstytutywnych ze szczególnym uwzględnieniem ośrodka Cosseratów. Ze względu na przyjęte wcześniej założenia rozważania ograniczone są do przypadku płaskiego stanu naprężenia i małych odkształceń.

3.2 Statyka i kinematyka w liniowym ośrodku Cosseratów

Ośrodkiem Cosseratów¹ nazywa się kontinuum, którego punkty oprócz współrzędnych geometrycznych, posiadają zorientowanie w przestrzeni. Pole obrotów jest zatem w najbardziej ogólnym przypadku niezależne od pola przemieszczeń, choć możliwe jest także uzależnienie ich od siebie. Pierwszeństwo w pełnym opisie ośrodka takiego typu należy się braciom Cosserat (1909 r.), por. ERICKSEN, TRUESDELL [1958]. Teoria Cosseratów początkowo nie wzbudziła zainteresowania, zwrócono się ku niej powtórnie dopiero w II. poł. XX w. Wśród wielu wczesnych artykułów i monografii, podkreślić należy znaczenie dzieł NOWACKI [1971], ERINGEN I SUHUBI [1964], które miały decydujący wpływ na rozwój teorii ośrodków z mikrostrukturą.

¹ W niniejszej pracy zamiennie z tym pojęciem używana będzie nazwa „ośrodek mikropolarny” (zob. dyskusja nazewnictwa w WITKOWSKI [2011]).

3.2.1 Problem brzegowy

Za pracą DYSZLEWICZ [2004] poniżej zestawiono podstawowe informacje dotyczące liniowego ośrodka Cosseratów w odniesieniu do statyki oraz równań nim rządzących.

Równania równowagi przyjmują postać:

$$\sigma_{ji,j} + f_i = 0, \quad \epsilon_{ijk} \sigma_{jk} + \mu_{ji,j} + b_i = 0, \quad (3.1)$$

gdzie σ_{ij} i μ_{ij} oznaczają, odpowiednio, niesymetryczne tensory naprężenia Cauchy'ego (naprężenia siłowego) i naprężenia momentowego; f_i i b_i siły i momenty masowe, zaś ϵ_{ijk} oznacza tensor permutacyjny².

Równania (3.1) należy uzupełnić o warunki brzegowe. Na brzegu dziedziny zadania $\partial\Omega = \partial\Omega_u \cup \partial\Omega_\sigma$ wprowadzone zostają warunki brzegowe. Są to wartości przemieszczeń i obrotów na fragmencie brzegu $\partial\Omega_u$:

$$u_i = f_i, \quad \varphi_i = g_i \quad (3.2)$$

oraz wartości wektorów naprężeń siłowych i momentowych na fragmencie $\partial\Omega_\sigma$

$$\sigma_{ji} n_j = p_i, \quad \mu_{ji} n_j = m_i, \quad (3.3)$$

gdzie n_j jest wektorem normalnym na brzegu. Składowe wektorów translacji oraz obrotu zostały oznaczone przez, odpowiednio, u_i i φ_i . Przez f_i , g_i , p_i oraz m_i oznaczono pewne zadane wartości translacji, obrotów, obciążeń siłowych oraz momentowych.

Równania zgodności wyrażone są jako:

$$\epsilon_{li,h} - \epsilon_{hi,l} - \epsilon_{khi} \kappa_{lk} + \epsilon_{kli} \kappa_{hk} = 0, \quad \kappa_{li,h} - \kappa_{hi,l} = 0, \quad (3.4)$$

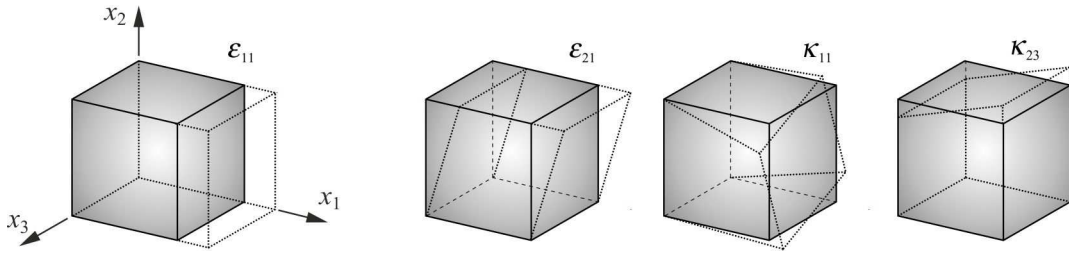
Tutaj ϵ_{ij} i κ_{ij} są, odpowiednio, składowymi tensorów odkształcenia ϵ i krzywizny κ . Składowe te zdefiniowane są jako:

$$\epsilon_{ji} = u_{i,j} - \epsilon_{kji} \varphi_k, \quad \kappa_{ji} = \varphi_{i,j}. \quad (3.5)$$

Na rys. 3.1 pokazano formy deformacji elementarnego wycinka kontinuum, na których wymuszono wybrane odkształcenia i krzywizny. Należy zauważyć, że równania (3.5) jednoznacznie opisują stan odkształcenia wyłącznie w odniesieniu do sformułowania liniowego. Przy przejściu do sformułowania nieliniowego pojawiają się pewne niejednoznaczności, por. PIETRASZKIEWICZ, EREMEYEV [2009]. Autorzy wskazali, że

² dla permutacji parzystej ($i, j, k = 1, 2, 3, 2, 3, 1$ albo $3, 1, 2$) tensor permutacyjny przyjmuje wartość 1, dla permutacji nieparzystej ($i, j, k = 3, 2, 1, 2, 1, 3$ albo $1, 3, 2$) wartość -1 , w pozostałych przypadkach 0.

w zagadnieniach nieliniowych znane są różne podejścia. Dotyczy to zwłaszcza tensora krzywizny, który nazywany jest także tensorem wykrzywienia, ang. *wryness tensor*).



Rys. 3.1 Formy deformacji wycinka kontinuum (MINDLIN [1964])

3.3 Równania sprężysto-plastyczne

Podstawową przeszkodą na drodze do powszechnego stosowania ośrodka Cosseratów, jest potrzeba wprowadzenia większej liczby parametrów materiałowych w stosunku do ośrodka Cauchy'ego. Ze względu na brak szczegółowych metod identyfikacji, a tym samym brak wartości liczbowych przypisanych konkretnym materiałom, wartości dodatkowych parametrów przyjmuje się dowolnie. Znajduje tutaj zastosowanie analiza parametryczna, zob. np. NAKAMURA I IN. [1984], BURZYŃSKI I IN. [2014a,b,c]. Przegląd literatury na temat prób oznaczenia parametrów ośrodka można znaleźć w pracach ALTENBACH I IN. [2010], WITKOWSKI [2011].

Jednym z poszukiwanych parametrów jest tzw. długość charakterystyczna. To pojęcie poza znaczeniem teoretycznym jest ściśle związane z regularyzacją rozwiązań MES, szczególnie w przypadku analiz sprężysto-plastycznych ośrodków gruntowych, zob. np. DE BORST [1991], TEJCHMAN, WU [1993], BURZYŃSKI [2013a]. Teoria Cosseratów znajduje dobre umotywowanie w zastosowaniu do ośrodków gruntowych, gdzie dodatkowe stopnie swobody mogą być interpretowane jako obroty ziaren. Długość charakterystyczną można wtedy przyjąć jako średnią średnicę ziaren zob. np. BOBIŃSKI [2006]. Również w przypadku betonu, długość charakterystyczną można uzależnić od wymiarów w mikrostrukturze materiału por. np. BOBIŃSKI [2006].

3.3.1 Stan sprężysty w ośrodku Cosseratów

Uzupełnieniem do bilansu niewiadomych z równań (3.1), (3.5) są równania konstytutywne, które dla ośrodka liniowo sprężystego można zapisać w postaci:

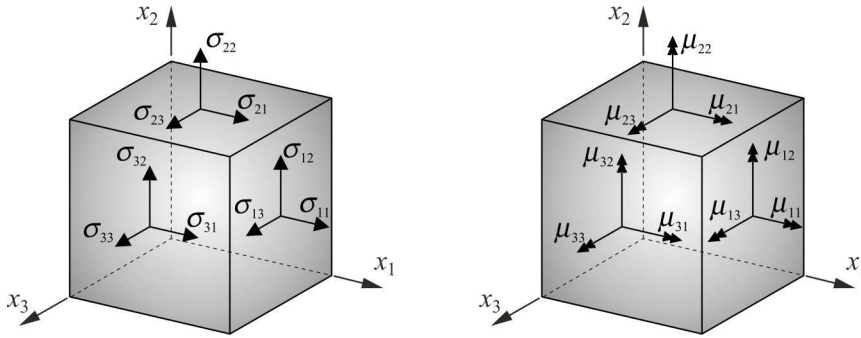
$$\sigma_{ij} = (\mu + \mu_c) \varepsilon_{ij} + (\mu - \mu_c) \varepsilon_{ji} + \lambda \varepsilon_{ii} \delta_{ij}, \quad (3.6)$$

$$\mu_{ij} = \beta \kappa_{ij} + \gamma \kappa_{ji} + \alpha \kappa_{ii} \delta_{ij}. \quad (3.7)$$

Tutaj μ oraz λ oznaczają stałe Lamégo, które są wyrażalne przez moduł Younga E i współczynnik Poissona ν :

$$\mu = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad \text{oraz} \quad \lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} = \frac{2\mu\nu}{(1-2\nu)}. \quad (3.8)$$

Przez μ_c oznaczono dodatkowy moduł ścinania (moduł rotacji), zaś β , α i γ są modułami gradientu rotacji (zob. NEFF [2008]). W literaturze można znaleźć różne równoważne zestawy parametrów materiałowych ośrodka Cosseratów, związki między nimi zostały zestawione np. w pracy WITKOWSKI [2011]. Na rys. 3.2 zaprezentowano składowe tensorów naprężenia siłowego i naprężenia momentowego w przestrzeni 3-wymiarowej (3D).



Rys. 3.2 Składowe tensorów naprężenia.

3.3.2 Redukcja do zagadnienia płaskiego

Ze względu na przyjęte w pracy założenia (zob. rozdz. 1) dalsze rozważania dotyczą dwuwymiarowego (2D), płaskiego zagadnienia, będącego uogólnieniem klasycznego płaskiego stanu naprężenia (PSN). Wyróżniając płaszczyznę $x_1 - x_2$, zgodnie z założeniami PSN, wartość następujących składowych tensorów σ_{ij} i μ_{ij} przyjmuje się jako zerową:

$$\sigma_{33} = \sigma_{13} = \sigma_{31} = \sigma_{23} = \sigma_{32} = 0, \quad (3.9)$$

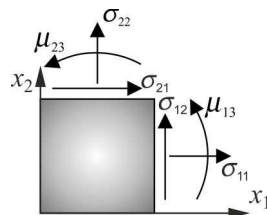
$$\mu_{11} = \mu_{22} = \mu_{33} = \mu_{12} = \mu_{21} = \mu_{31} = \mu_{32} = 0. \quad (3.10)$$

Odpowiednio wśród odkształceń i krzywizn zerowe są:

$$\varepsilon_{13} = \varepsilon_{31} = \varepsilon_{23} = \varepsilon_{32} = 0, \quad (3.11)$$

$$\kappa_{11} = \kappa_{22} = \kappa_{33} = \kappa_{12} = \kappa_{21} = 0. \quad (3.12)$$

Liczba niezerowych naprężeń (naprężeń momentowych) i odkształceń (krzywizn) nie jest sobie równa. Składniki ε_{33} , κ_{31} , κ_{32} nie są zerowe, ale są zależne od pozostałych i zostaną wyznaczone z warunku zerowania odpowiadających im energetycznie sprzężonych składowych tensorów naprężenia. Niezerowe składniki σ_{ij} i μ_{ij} zostały zestawione na rys. 3.3.



Rys. 3.3 Składowe tensorów naprężeń w płaskim stanie naprężenia Cosseratów.

Rozpisując równania konstytutywne (3.6) i (3.7) dla poszczególnych składowych otrzymujemy:

$$\sigma_{11} = 2\mu\varepsilon_{11} + \lambda(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}), \quad (3.13)$$

$$\sigma_{22} = 2\mu\varepsilon_{22} + \lambda(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}), \quad (3.14)$$

$$\sigma_{33} = 2\mu\varepsilon_{33} + \lambda(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}) = 0, \quad (3.15)$$

$$\sigma_{12} = (\mu + \mu_c)\varepsilon_{12} + (\mu - \mu_c)\varepsilon_{21}, \quad (3.16)$$

$$\sigma_{21} = (\mu + \mu_c)\varepsilon_{21} + (\mu - \mu_c)\varepsilon_{12}, \quad (3.17)$$

$$\mu_{13} = \beta\kappa_{13} + \gamma\kappa_{31}, \quad \mu_{23} = \beta\kappa_{23} + \gamma\kappa_{32} \quad (3.18)$$

$$\mu_{31} = \beta\kappa_{31} + \gamma\kappa_{13} = 0, \quad \mu_{32} = \beta\kappa_{32} + \gamma\kappa_{23} = 0. \quad (3.19)$$

Z równania (3.15) wyznaczamy ε_{33} i podstawiamy do (3.13) i (3.14) otrzymując:

$$\sigma_{11} = \left(2\mu + \lambda - \frac{\lambda^2}{2\mu + \lambda}\right)\varepsilon_{11} + \left(\lambda - \frac{\lambda^2}{2\mu + \lambda}\right)\varepsilon_{22}, \quad (3.20)$$

$$\sigma_{22} = \left(\lambda - \frac{\lambda^2}{2\mu + \lambda}\right)\varepsilon_{11} + \left(2\mu + \lambda - \frac{\lambda^2}{2\mu + \lambda}\right)\varepsilon_{22}. \quad (3.21)$$

Z równań (3.19)_{1,2} wyznaczamy κ_{31} i κ_{32} i podstawiamy odpowiednio do równań (3.18)_{1,2} otrzymując:

$$\mu_{13} = (\beta - \gamma^2/\beta)\kappa_{13}, \quad \mu_{23} = (\beta - \gamma^2/\beta)\kappa_{23}. \quad (3.22)$$

Za pracą NEFF [2008] parametry β i γ można wyrazić za pomocą innych stałych, tzw. długości charakterystycznych l_b (ang. *characteristic length for bending*) i l_t (ang. *characteristic length for torsion*):

$$\gamma = 4\mu l_b^2, \quad \beta = 2\mu l_t^2 - \gamma. \quad (3.23)$$

Podstawienie (3.23) do (3.22) prowadzi do:

$$\mu_{13} = 2\mu \frac{l_t^4 - 4l_b^2 l_t^2}{l_t^2 - 2l_b^2} \kappa_{13}, \quad \mu_{23} = 2\mu \frac{l_t^4 - 4l_b^2 l_t^2}{l_t^2 - 2l_b^2} \kappa_{23}. \quad (3.24)$$

Do dalszych wyprowadzeń, w celu zmniejszenia liczby parametrów materiałowych i uzgodnienia postaci równania konstytutywnego z pracą DE BORST [1991], wprowadza się długość charakterystyczną l wyrażoną przez

$$l^2 = \frac{l_t^4 - 4l_b^2 l_t^2}{l_t^2 - 2l_b^2}, \quad (3.25)$$

taką że formuły (3.24)_{1,2} zyskują, odpowiednio, postać:

$$\mu_{13} = 2\mu l^2 \kappa_{13}, \quad \mu_{23} = 2\mu l^2 \kappa_{23}. \quad (3.26)$$

Wprowadzenie (3.8) upraszcza zapis zależności (3.20) i (3.21), które wraz z (3.16), (3.17), (3.24)_{1,2} dają równanie konstytutywne w liniowym ośrodku Cosseratów, będącym uogólnieniem klasycznego PSN, w formie

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C}_l^e \boldsymbol{\varepsilon}, \quad (3.27)$$

gdzie

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{21} \\ \mu_{13} \\ \mu_{23} \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{C}_l^e = \begin{bmatrix} \mu c_1 & \mu c_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \mu c_2 & \mu c_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mu + \mu_c & \mu - \mu_c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mu - \mu_c & \mu + \mu_c & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 2\mu l^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2\mu l^2 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\varepsilon} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{12} \\ \varepsilon_{21} \\ \kappa_{13} \\ \kappa_{23} \end{Bmatrix}. \quad (3.28)$$

Tutaj $c_1 = 2(1+\nu)/(1-\nu^2)$ oraz $c_2 = \nu c_1$. Wyrażenia (3.28)_{1,2,3} można zapisać blokowo:

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\sigma}_m \\ \boldsymbol{\sigma}_d \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{C}_l^e = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{mm}^e & \mathbf{C}_{md}^e \\ \mathbf{C}_{dm}^e & \mathbf{C}_{dd}^e \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\varepsilon} = \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}_m \\ \boldsymbol{\varepsilon}_d \end{Bmatrix}. \quad (3.29)$$

W stanie sprężystym pozaprzekątniowe macierze \mathbf{C}_{md}^e , \mathbf{C}_{dm}^e są zerowe, lecz w przypadku aktywnego procesu plastycznego zyskują niezerowe składniki, stąd konieczność ich wprowadzenia (zob. rozdz. 5).

Na wartości parametrów materiałowych ośrodka Cosseratów nałożone są pewne ograniczenia (zob. NEFF [2008]), wynikające z dodatniej określoności wyrażenia na energię potencjalną w ośrodku. Są one zebrane w postaci nierówności:

$$\mu > 0, \quad 3\mu + 2\lambda > 0, \quad \mu_c > 0, \quad \gamma + \beta > 0, \quad \gamma - \beta > 0, \quad \gamma + \beta + 3\alpha > 0. \quad (3.30)$$

Biorąc pod uwagę (3.23), nierówność (3.30)₅ można przekształcić do:

$$8\mu l_b^2 - 2\mu l_t^2 > 0 \Rightarrow 4l_b^2 > l_t^2 \Rightarrow 2l_b > l_t. \quad (3.31)$$

3.4 Założenia klasycznej teorii plastyczności

Na podstawie obserwacji doświadczeń, m.in. prób jednoosiowego rozciągania, formułuje się pewne właściwości deformacji plastycznych. W pracy RYMARZ [1993] wymieniono postulaty jakie musi spełniać teoria plastyczności:

1. jeśli nie jest przekroczona pewna granica plastyczności, materiał zachowuje się w sposób sprężysty, z jednoznacznie określoną relacją naprężenie-odkształcenie;
2. granica plastyczności określona jest jako funkcja skalarna składowych tensora naprężenia i pewnych parametrów. Można ją interpretować jako hiperpowierzchnię w przestrzeni naprężenia taką, że dozwolone stany naprężenia znajdują się w jej wnętrzu oraz na powierzchni;
3. nie są uwzględnione wpływy reologiczne, granica plastyczności nie zależy od prędkości zmian odkształcenia czy naprężenia;
4. w stanie plastycznym obowiązują odmienne od sprężystych prawa konstytutywne. Powinny one być analogiczne do równań konstytutywnych lepkiej cieczy np. cieczy Stokesa;
5. występuje zjawisko wzmocnienia, polegające na zmianie granicy plastyczności wraz z ewolucją obciążenia. Jest ono jednoznacznie powiązane z wartościami parametrów funkcji płynięcia;
6. należy uwzględnić efekty termiczne, w tym wpływ temperatury na wartość granicy plastyczności (efekty te są pominięte w niniejszej pracy);
7. materiał uplastyczniony jest nieściśliwy, co jest uzasadnione obserwowanym w próbach dla metali brakiem zależności uplastycznienia od obciążenia hydrostatycznego w wielu materiałach, co formalnie można zapisać jako³:

$$\text{tr}(d\boldsymbol{\varepsilon}^p) = d\varepsilon_{ii}^p = 0, \quad i = 1, 2, 3; \quad (3.32)$$

8. zakłada się addytywną dekompozycję tensora prędkości odkształcenia i jego przyrostu na części sprężystą i plastyczną, co ogranicza rozważania do małych odkształceń:

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = \dot{\varepsilon}_{ij}^e + \dot{\varepsilon}_{ij}^p, \quad d\varepsilon_{ij} = d\varepsilon_{ij}^e + d\varepsilon_{ij}^p, \quad d\varepsilon_{ij}^p = \dot{\varepsilon}_{ij}^p dt \quad (3.33)$$

dla których określono warunek początkowy

$$\varepsilon_{ij}(t_0) = \varepsilon_{ij}^e(t_0) + \varepsilon_{ij}^p(t_0). \quad (3.34)$$

³ W niniejszej pracy nieskończenie małe przyrosty oznaczane są przez „d” nawiązując do notacji używanej w pracy HILL [1950] czy KHAN I HUANG [1995]. Niektórzy autorzy (Rymarz, Skrzypek, De Souza i inni) preferują zapis z wykorzystaniem „d”.

Warto rozwinąć postulat 4. Jak pisze RYMARZ [1993] w stanie plastycznym równania materiałowe powinny mieć formę zbliżoną do równań cieczy lepkiej. Ciecz ta należy do materiałów z zanikającą pamięcią i jest przykładem materiału typu różniczkowego. W takim materiale stan naprężenia powiązany jest z (przestrzennym) tensorem prędkości deformacji o składowych

$$d_{ij} = \frac{1}{2}(v_{i,j} + v_{j,i}), \quad (3.35)$$

gdzie $v_{i,j}$ oznacza przestrzenny gradient prędkości (por. np. RYMARZ [1993]). Ponieważ prędkość jest pochodną materialną pola przemieszczenia w opisie przestrzennym, to formalnie

$$\dot{u}_i = \frac{Du_i}{Dt} = \frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} v_j. \quad (3.36)$$

W przypadku małych przemieszczeń zachodzi zerowanie wyrażenia $\partial u_i / \partial x_j$ i wzór (3.36) daje znaną relację $\dot{u}_i = v_i$, a w konsekwencji dla ośrodka Cauchy'ego

$$d_{ij} \approx \frac{1}{2} \left(\frac{d}{dt} u_{i,j} + \frac{d}{dt} u_{j,i} \right) = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (u_{i,j} + u_{j,i}) = \dot{\varepsilon}_{ij}. \quad (3.37)$$

Powyższy wynik wskazuje, że rozważania dotyczące stanu plastycznego powinny być zapisywane względem prędkości (małego) odkształcenia lub równoważnie przyrostu odkształcenia tzn. $\dot{\varepsilon}_{ij}^p dt = d\varepsilon_{ij}^p$. Słuszne są zatem związki (3.33).

Z wprowadzonym w postulacie 7. założeniem o nieściśliwości uplastycznionego materiału wiąże się pojęcie współczynnika Poissona w deformacji plastycznej, oznaczonego przez ν^p (KHAN, HUANG [1995]). Rozpatrzmy stan jednoosiowego rozciągania w materiale, taki że $\sigma_{11} > 0$ (rozciąganie), reszta składowych tensora naprężenia jest zerowa. Materiał doznaje wydłużenia w kierunku działającego obciążenia (składowa odkształcenia $\varepsilon_{11} > 0$) i skrócenia w kierunkach poprzecznych ($\varepsilon_{22} < 0$, $\varepsilon_{33} < 0$).

W kontekście postulatu 7. warto wprowadzić rozróżnienie na materiały wykazujące bądź nie wykazujące wrażliwości na ciśnienie hydrostatyczne (ang. *pressure sensitive* i *pressure insensitive*). Badania eksperymentalne wykazały (zob. KHAN, HUANG [1995]), że próbka metalowa poddana ciśnieniu hydrostatycznemu o wartości 2,5 GPa nie wykazała przejścia w stan plastyczny. Stąd powszechnie przyjmuje się, że kryteria uplastycznienia dla metali nie uwzględniają aksjatora tensora naprężenia. Inaczej na ciśnienie hydrostatyczne reagują np. materiały porowate, dla których można wskazać wartość ciśnienia, przy którym następuje uplastycznienie. W przypadku tej grupy materiałów konieczne jest formułowanie dedykowanych im kryteriów uplastycznienia.

3.4.1 Zagadnienie jednowymiarowe

Sformułowane zależności opisujące formalnie 1-wymiarowy problem sprężysto-plastyczny. W tensorze naprężenia niezerowa jest jedynie składowa $\sigma_{11} \equiv \sigma$, zaś w tensorze odkształcenia istotna jest $\varepsilon_{11} \equiv \varepsilon$ (w niniejszym podpunkcie obowiązują oznaczenia bez indeksów). Niniejszy podpunkt stanowi opis formalny próby jednoosiowej opisanej w rozdz. 1 i jest swoistym wstępem do rozważań plastyczności w ośrodku przestrzennym, gdzie pewne pojęcia zostaną powtórzone i rozszerzone.

Sprężysta relacja naprężenie – odkształcenie jest jednoznacznie określona przez prawo konstytutywne dla przyrostów

$$d\sigma = E d\varepsilon^e = E(d\varepsilon - d\varepsilon^p). \quad (3.38)$$

Materiał zaczyna zachowywać się w sposób plastyczny, gdy wartość naprężenia osiągnie granicę plastyczności σ_Y , co formalnie można zapisać wprowadzając tzw. funkcję plastycznego płynięcia, która przyjmuje wartości niedodatnie:

$$f = |\sigma| - \sigma_Y, \quad f \leq 0. \quad (3.39)$$

Użycie modułu z wartości naprężenia w (3.39)₁ wynika z założenia, że przy ścisaniu i rozciąganiu materiału granica plastyczności jest identyczna⁴. Gdy funkcja plastycznego płynięcia f jest ujemna, zmiana w wyężeniu materiału może być tylko sprężysta, zaś gdy osiąga wartość $f = 0$, możliwe są 2 dalsze procesy: obciążanie plastyczne lub odciążanie sprężyste. Można zatem opisać zmienność przyrostu odkształcenia plastycznego jako:

$$\begin{aligned} f < 0 & - \text{stan sprężysty, więc } d\varepsilon^p = 0 \\ f = 0 & - \text{stan plastyczny, więc } d\varepsilon^p \begin{cases} = 0 & \text{odciążanie} \\ \neq 0 & \text{obciążanie} \end{cases} \end{aligned} \quad (3.40)$$

Przyrost odkształcenia plastycznego, dodatni przy rozciąganiu plastycznym, ujemny zaś przy ścisaniu, jest określony jako

$$d\varepsilon^p = d\gamma \operatorname{sgn}(\sigma), \quad (3.41)$$

gdzie γ jest pewnym skalarem (tzw. mnożnikiem plastycznym), a funkcja sgn jest określona jako

$$\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} +1 & x \geq 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}. \quad (3.42)$$

Mnożnik plastyczny jest określony przez warunki obciążenia/odciążenia:

⁴ Taką właściwość zakłada się np. dla stali i inne metale.

$$d\gamma \geq 0, \quad f \leq 0, \quad f d\gamma = 0, \quad (3.43)$$

znane jako warunki Kuhna-Tuckera⁵ (zob. np. SIMO, HUGHES [1998]) oraz warunek zgodności

$$d\gamma \dot{f} = 0. \quad (3.44)$$

W przypadku idealnej plastyczności zakłada się niezmienność funkcji płynięcia f . Jednak w wielu badaniach zaobserwowano zmianę zakresu sprężystego zachowania materiału, zjawisko to nazywane jest wzmocnieniem (osłabieniem) materiału. Granica plastyczności σ_Y może być zależna od parametrów uplastycznienia, jej zmiennością rządzi tzw. prawo wzmocnienia. Podstawowymi typami wzmocnienia są izotropowe, kinematyczne oraz mieszane, w którym równoległe zachodzą 2 wcześniej wymienione⁶. We wzmocnieniu izotropowym granica plastyczności jest przyjmowana jako:

$$\sigma_Y = \sigma_Y(\bar{\epsilon}^p), \quad d\sigma_Y = H d\bar{\epsilon}^p, \quad (3.45)$$

gdzie $\bar{\epsilon}^p$ jest skalarnym parametrem (tzw. skumulowanym, efektywnym odkształceniem plastycznym), obliczanym z formuły

$$\bar{\epsilon}^p = \int_0^t |\dot{\epsilon}^p| dt, \quad (3.46)$$

zaś $H = d\sigma_Y/d\bar{\epsilon}^p$ jest stycznym modułem wzmocnienia izotropowego. Przyrost skumulowanego odkształcenia plastycznego wyraża się w próbie jednoosiowej jako

$$d\bar{\epsilon}^p = |d\epsilon^p|, \quad (3.47)$$

zaś wykorzystując dodatkowo (3.41) można zapisać

$$d\bar{\epsilon}^p = d\gamma. \quad (3.48)$$

W drugim przywołanym typie wzmocnienia (wzmocnienie kinematyczne) funkcja f rozszerzana jest o dodatkowy składnik do postaci

$$f = |\sigma - \beta| - \sigma_Y. \quad (3.49)$$

Parametr β ma sens naprężenia (ang. *back stress*) i informuje o położeniu środka dziedziny sprężystej, przesuwanego się wraz z postępowaniem procesu uplastycznienia. Prawo ewolucji parametru β jest definiowane jako

$$d\beta = d\bar{\epsilon}^p K = d\gamma K \operatorname{sgn}(\sigma - \beta), \quad (3.50)$$

⁵ W książce DE BORST I IN. [2012] te same warunki noszą nazwę warunków Karusha-Kuhna-Tuckera.

⁶ Oprócz tego wyróżnić można wzmocnienie energetyczne (ang. *work hardening*)

gdzie K jest modułem wzmocnienia kinematycznego.

Rozszerzając funkcję (3.39) o oba wymienione typy wzmocnienia:

$$f = |\sigma - \beta| - \sigma_Y (\bar{\varepsilon}^p) \quad (3.51)$$

i różniczkując ją po zmiennej czasowej otrzymuje się wyrażenie

$$\frac{df}{dt} = \frac{df}{d\sigma} \frac{d\sigma}{dt} + \frac{df}{d\beta} \frac{d\beta}{dt} + \frac{df}{d\bar{\varepsilon}^p} \frac{d\bar{\varepsilon}^p}{dt}. \quad (3.52)$$

Wobec dowolności dt mamy

$$df = \frac{df}{d\sigma} d\sigma + \frac{df}{d\beta} d\beta + \frac{df}{d\bar{\varepsilon}^p} d\bar{\varepsilon}^p = \operatorname{sgn}(\sigma - \beta) d\sigma - \operatorname{sgn}(\sigma - \beta) d\beta - \frac{d\sigma_Y}{d\bar{\varepsilon}^p} d\bar{\varepsilon}^p, \quad (3.53)$$

wykorzystując (3.38), (3.41), (3.45)₂, (3.47), (3.48), (3.50) otrzymujemy

$$df = \operatorname{sgn}(\sigma - \beta) E d\varepsilon - (E + K + H) d\gamma. \quad (3.54)$$

W procesie uplastycznienia wartość funkcji f pozostaje stała i zerowa, więc obowiązuje $df = 0$ (por. (3.43)). Mamy zatem, wykorzystując (3.54)

$$d\gamma = \frac{\operatorname{sgn}(\sigma - \beta) E d\varepsilon}{E + K + H}, \quad (3.55)$$

zaś po powtórny zastosowaniu (3.38) i (3.41) otrzymujemy wyrażenie na sprężysto-plastyczny moduł styczny E_T

$$\frac{d\sigma}{d\varepsilon} = \frac{E(K + H)}{E + K + H} = E_T. \quad (3.56)$$

Jeśli pomięte zostanie wzmocnienie, to (3.55) upraszcza się do

$$d\gamma = \operatorname{sgn}(\sigma - \beta) d\varepsilon = \pm d\varepsilon. \quad (3.57)$$

3.4.2 Kryterium uplastycznienia

Funkcja (3.39) pełni kluczową rolę w opisie zachowania sprężysto-plastycznego materiału. W tym miejscu następuje przejście od zagadnienia 1-wymiarowego do problemu przestrzennego, stąd konieczność rozbudowania opisu funkcji (3.39). W przestrzeni naprężenia przyjmuje się pewną funkcję f , definiującą obszar zachowania sprężystego materiału. Warunek $f < 0$ jest spełniony dla stanu sprężystego, przy uplastycznieniu jest $f = 0$, zaś $f > 0$ nie jest dozwolone. Ostatni warunek implikuje tzw. warunek zgodności: jeśli zachodzi $f = 0$, to dla dowolnego przyrostu naprężenia $d\sigma$ musi być spełnione

$$f = 0 \xrightarrow{\text{zachodzi przyrost } d\sigma} f + df = 0 \Rightarrow df = 0. \quad (3.58)$$

Z (3.58) wynika rozróżnienie procesów:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij} < 0, \quad f = 0 & \quad - \quad \text{odciążenie, proces bierny} \\ \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij} = 0, \quad f = 0 & \quad - \quad \text{stan neutralny,} \\ \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij} > 0, \quad f = 0 & \quad - \quad \text{obciążenie, proces czynny.} \end{aligned} \quad (3.59)$$

Na potrzeby dalszych rozważań zostaną przytoczone pewne uwagi dotyczące funkcji plastycznego płynięcia dla materiału izotropowego (zob. np. SKRZYPEK [1986]). Ogólną funkcję

$$f = f(\sigma_{ij}) \quad (3.60)$$

można zastąpić funkcją naprężeń głównych lub niezmienników tensora naprężenia, odpowiednio:

$$f = f(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3), \quad f = f(J_{1\sigma}, J_{2\sigma}, J_{3\sigma}). \quad (3.61)$$

Taka możliwość wynika z niezależności właściwości materiału od orientacji układu kierunków głównych względem materiału. Drugi i trzeci niezmiennik tensora naprężenia można równoważnie zastąpić niezmiennikami jego dewiatora $\mathbf{s} = \boldsymbol{\sigma} - \frac{1}{3} \text{tr}(\boldsymbol{\sigma}) \mathbf{I}$

$$f = f(J_{1s}, J_{2s}, J_{3s}). \quad (3.62)$$

W klasycznym ośrodku tensor dewiatora naprężenia siłowego (II walencji, symetryczny) ma 3 niezmienniki (tj. pewne wartości obliczane z jego składowych, a niezależne od wyboru bazy) (zob. np. RYMARZ [1983]):

$$J_{1\sigma} = \text{tr}(\boldsymbol{\sigma}), \quad J_{2s} = \frac{1}{2} \left(\text{tr}(\mathbf{s}^2) - \underbrace{\text{tr}^2(\mathbf{s})}_{=0} \right) = \frac{1}{2} \text{tr}(\mathbf{s}^2), \quad J_{3s} = \det(\mathbf{s}), \quad (3.63)$$

lub w zapisie wskaźnikowym:

$$J_{1\sigma} = \sigma_{ii}, \quad J_{2s} = \frac{1}{2} s_{ij} s_{ij}, \quad J_{3s} = \frac{1}{6} \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{pqr} s_{ip} s_{jq} s_{kr}. \quad (3.64)$$

W większości doświadczeń obserwowany jest brak wpływu ciśnienia hydrostatycznego na przejście materiału w stan plastyczny, stan ten jest reprezentowany przez niezmiennik $J_{1\sigma}$. Pominięcie jego wpływu powoduje, że powierzchnia plastycznego płynięcia staje się tzw. walcową powierzchnią płynięcia, o osi równonachylonej do osi głównych stanu naprężenia. HILL [1950] podaje wyniki badań na próbkach metalowych (miedzianych, aluminiowych, ze stali miękkiej), w których kryteria oparte na niezmienniku J_{2s} sprawdzają się znakomicie. Uwzględnienie J_{3s} może dać jeszcze lepszą zgodność, lecz nieistotną z praktycznego punktu

widzenia (zob. HILL [1950]). Bogaty przegląd hipotez wytrzymałościowych można znaleźć w pracy YU [2002].

Hipoteza zaproponowana przez Hubera [1904] może być zapisana w formie (por. np. LUBLINER [2006])

$$f = \sqrt{3J_{2s}} - \sigma_Y \leq 0. \quad (3.65)$$

Ze względu na innych autorów, niezależnie proponujących tą formułę (zob. rozdz. 1) nazywana jest hipotezą Hubera-Misesa-Hencky'ego (H-M-H). Jest to jedna z najczęściej przywoływanych hipotez wytrzymałościowych.

Jako uzupełnienie, podana zostanie hipoteza Burzyńskiego (zob. rozdz. 1). Ma ona formę (por. BURZYŃSKI [1928])

$$f = -\frac{\sigma_c \sigma_r}{\tau_0^2} J_{2s} + \left(1 - \frac{\sigma_c \sigma_r}{3\tau_0^2}\right) J_{1\sigma}^2 + (\sigma_c - \sigma_r) J_{1\sigma} - \sigma_c \sigma_r \leq 0, \quad (3.66)$$

gdzie σ_c , σ_r i τ_0 są granicami wytrzymałości, odpowiednio, z prób ściskania, rozciągania i ścinania. Hipoteza ta nie będzie przedmiotem dalszych badań.

3.4.3 Zagadnienie przestrzenne

Poprzez analogię do stanu jednowymiarowego dla przyrostów odkształcenia plastycznego $d\boldsymbol{\varepsilon}^p$ i tensora parametrów wzmocnienia $d\mathbf{a}$ wprowadza się relacje:

$$d\boldsymbol{\varepsilon}^p = d\gamma \mathbf{N}(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{A}), \quad d\mathbf{a} = d\gamma \mathbf{H}(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{A}), \quad (3.67)$$

gdzie $d\gamma$ jest pewnym nieujemnym parametrem skalarnym, funkcje tensorowe $\mathbf{N} = \mathbf{N}(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{A})$ oraz $\mathbf{H} = \mathbf{H}(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{A})$ są to odpowiednio tzw. tensor płynięcia oraz uogólniony moduł wzmocnienia, zależne od tensora naprężenia $\boldsymbol{\sigma}$ i tensora termodynamicznych sił wzmocnienia \mathbf{A} (zob. DE SOUZA NETO I IN. [2008]). Parametr $d\gamma$ musi spełniać warunki:

$$d\gamma \geq 0, \quad f d\gamma = 0. \quad (3.68)$$

Zakłada się istnienie niezerowej, wypukłej funkcji potencjału plastycznego

$$\psi = \psi(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{A}), \quad (3.69)$$

takiej że $\psi(\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{0}, \mathbf{A} = \mathbf{0}) = 0$. Można od niej uzależnić funkcje tensorowe ze wzorów (3.67):

$$\mathbf{N} \equiv \frac{\partial \psi}{\partial \boldsymbol{\sigma}}, \quad \mathbf{H} \equiv -\frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{A}}. \quad (3.70)$$

W szczególnym przypadku stowarzyszonego prawa płynięcia, które jest przedmiotem analizy niniejszej pracy, mamy $f \equiv \psi$, wzory na przyrosty (3.67) przyjmują postać:

$$d\boldsymbol{\varepsilon}^p = d\gamma \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}}, \quad d\boldsymbol{\alpha} = d\gamma \frac{\partial f}{\partial \mathbf{A}}. \quad (3.71)$$

Gdy obowiązuje (3.70)₁ prawo płynięcia jest niestowarzyszone. Sytuacja taka ma miejsce w analizie materiałów wrażliwych na ciśnienie (np. podłoże gruntowe).

Istotnym w teorii plastyczności jest pojęcie materiału statecznego. W pracy DRUCKER [1959] podana jest jego definicja (znana jako postulat Druckera): *praca wykonana przez działające siły zewnętrzne na przyrostach odpowiednich składowych wektora przemieszczenia, którą one wywołują, musi być nieujemna (dodatnia lub zero)*. Należy przy tym podkreślić, że postulat ten dotyczy tylko materiałów ze wzmocnieniem w których obowiązuje stowarzyszone prawo płynięcia.

Szerokie omówienie wniosków wynikających z postulatu Druckera można znaleźć m.in. w pracy OLSZAK I IN. [1965]. Najważniejsze z nich to 2 nierówności:

$$(\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}^*) : d\boldsymbol{\varepsilon}^p \geq 0, \quad (3.72)$$

$$d\boldsymbol{\sigma} : d\boldsymbol{\varepsilon}^p \geq 0, \quad (3.73)$$

gdzie $\boldsymbol{\sigma}^*$ jest stanem naprężenia, przy którym $f(\boldsymbol{\sigma}^*) \leq 0$. Z (3.72) i (3.73) wynikają 2 własności funkcji plastycznego płynięcia f :

- funkcja ta jest wypukła i gładka;
- kierunek przyrostu odkształcenia plastycznego jest prostopadły do powierzchni f i skierowany na zewnątrz.

Dowód tychże warunków można znaleźć m.in. w pracy OLSZAK I IN. [1965].

Sprężysto-plastyczne równanie konstytutywne określone jest jako relacja prędkości zmian tensorów naprężenia i odkształcenia

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{C}^{ep} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}. \quad (3.74)$$

Podstawą wyznaczenia postaci operatora \mathbf{C}^{ep} jest równanie zgodności, uzyskane przez różniczkowanie funkcji f po zmiennej czasowej (z uwzględnieniem (3.67))

$$\dot{f} = \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : \dot{\boldsymbol{\sigma}} + \frac{\partial f}{\partial \mathbf{A}} * \dot{\mathbf{A}} = \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : \dot{\boldsymbol{\sigma}} + \frac{\partial f}{\partial \mathbf{A}} * \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \boldsymbol{\alpha}} * \dot{\boldsymbol{\alpha}} = \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : \dot{\boldsymbol{\sigma}} + \gamma \frac{\partial f}{\partial \mathbf{A}} * \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \boldsymbol{\alpha}} * \mathbf{H} = 0, \quad (3.75)$$

gdzie znaczenie działania $*$ jest zależne od postaci \mathbf{A} , zaś zerowanie całego wyrażenia wynika z (3.58). Równanie (3.74) uzupełnione o zależność (3.67)₁ daje

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{C}^e : (\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p) = \mathbf{C}^e : (\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \dot{\gamma} \mathbf{N}). \quad (3.76)$$

Po podstawieniu (3.76) do (3.75) można uzyskać wzór określający zmienność parametru γ

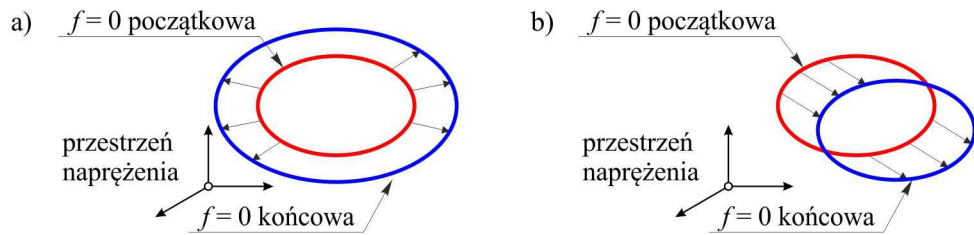
$$\dot{\gamma} = \frac{\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : \mathbf{C}^e : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p}{\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : \mathbf{C}^e : \mathbf{N} - \frac{\partial f}{\partial \mathbf{A}} * \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \boldsymbol{\alpha}} * \mathbf{H}}. \quad (3.77)$$

Podstawienie (3.77) do (3.76) daje relację konstytutywną

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \left[\mathbf{C}^e - \frac{(\mathbf{C}^e \cdot \mathbf{N}) \otimes \left(\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \cdot \mathbf{C}^e \right)}{\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : \mathbf{C}^e \cdot \mathbf{N} - \frac{\partial f}{\partial \mathbf{A}} * \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \boldsymbol{\alpha}} * \mathbf{H}} \right] : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \mathbf{C}^{ep} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}. \quad (3.78)$$

W podstawowym podejściu, ewolucja kształtu powierzchni płynięcia (wzmocnienie) może przebiegać według dwóch klasycznych schematów:

- wzmocnienie izotropowe – zmiana kształtu z równomiernym wzrostem (puchnięciem) powierzchni (rys. 3.4a);
- wzmocnienie kinematyczne – przesunięcie powierzchni bez zmiany kształtu (rys. 3.4b).



Rys. 3.4 Ewolucja kształtu powierzchni płynięcia a) wzmocnienie izotropowe b) wzmocnienie kinematyczne.

Możliwa jest, jak wcześniej wspomniano, kombinacja wymienionych zachowań (wzmocnienie mieszane) lub inne, bardziej złożone procesy (np. wzmocnienie anizotropowe, tworzenie naroży plastycznych).

W celu opisanego procesu wzmocnienia w przyjętej tu teorii plastyczności, w pierwszej kolejności należy zdefiniować intensywność naprężenia $\hat{\sigma}$, jako skalarną funkcję składowych tensora naprężenia $\boldsymbol{\sigma}$ lub jego dewiatora $\mathbf{s} = \boldsymbol{\sigma} - tr(\boldsymbol{\sigma})\mathbf{I}$

$$\hat{\sigma} = \hat{s} = \sqrt{\frac{3}{2} \mathbf{s} : \mathbf{s}}. \quad (3.79)$$

Analogicznie definiowana jest intensywność odkształcenia $\hat{\varepsilon}$. Przyjmując dodatkowo $\nu = \frac{1}{2}$ (co odpowiada postulatowi nieściśliwości materiału w procesie uplastycznienia) można zapisać

$$\hat{\varepsilon} = \hat{e} = \sqrt{\frac{2}{3} \mathbf{e} : \mathbf{e}}, \quad (3.80)$$

gdzie $\mathbf{e} = \boldsymbol{\varepsilon} - tr(\boldsymbol{\varepsilon})\mathbf{I}$ jest dewiatorem tensora odkształcenia.

Intensywność odkształcenia plastycznego $\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}^p$ odgrywa szczególną rolę w opisie wzmocnienia w teorii plastyczności i jest nazywana efektywnymi lub zastępczymi odkształceniami plastycznymi. Zwykle oznaczana jest przez $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^p$,

$$\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^p \equiv \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}^p = \sqrt{\frac{2}{3} \boldsymbol{\varepsilon}^p : \boldsymbol{\varepsilon}^p}. \quad (3.81)$$

Wzmocnienie izotropowe jest opisane przez jeden parametr skalarny zależny od deformacji plastycznej. Sprecyzować zatem można wielkości zawarte w (3.67)₂:

$$\boldsymbol{\alpha} \equiv \{\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^p\}, \quad \mathbf{A} \equiv \{\boldsymbol{\kappa}\}, \quad \kappa = \kappa(\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^p). \quad (3.82)$$

Parametr κ ma sens naprężenia i określa zmienność granicy plastycznego płynięcia

$$\sigma_Y = \sigma_{Y0} + \kappa(\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^p). \quad (3.83)$$

Przyjęcie funkcji plastycznego płynięcia w formie

$$f(\boldsymbol{\sigma}, \sigma_Y) = g(\boldsymbol{\sigma}) - \sigma_Y \leq 0 \quad (3.84)$$

pozwała na obliczenie pochodnych występujących m.in. we wzorze (3.77):

$$\mathbf{H} = -\frac{\partial f}{\partial \mathbf{A}} \equiv -\frac{\partial \sigma_Y}{\partial \boldsymbol{\kappa}} = 1, \quad \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \boldsymbol{\alpha}} \equiv \frac{d\boldsymbol{\kappa}}{d\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^p} = H. \quad (3.85)$$

W opisie wzmocnienia kinematycznego wprowadza się pewien dodatkowy tensor $\boldsymbol{\beta}$ (ang. *back-stress tensor*), określający przesunięcie powierzchni płynięcia w wyniku zaistnienia procesu plastycznego. Powierzchnia płynięcia jest zatem zależna od stanu naprężenia i tensora $\boldsymbol{\beta}$:

$$f = f(\boldsymbol{\eta}, \mathbf{A}), \quad \boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\beta}. \quad (3.86)$$

Zbiory sił i parametrów wzmocnienia określone są następująco:

$$\boldsymbol{\alpha} \equiv \{\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^p\}, \quad \mathbf{A} \equiv \{\boldsymbol{\beta}\}. \quad (3.87)$$

Ewolucja tensora $\boldsymbol{\beta}$ może być określona na kilka sposobów, które zestawiono w tab. 3.1. (zob. SKRZYPEK [1986]). W tab. 3.1 zmienna c jest pewnym modułem wzmocnienia, zaś η współczynnikiem proporcjonalności.

Tab. 3.1. Prawa ewolucji tensora $\boldsymbol{\beta}$.

autor	prawo ewolucji $\boldsymbol{\beta}$
Melan, Prager	$\dot{\boldsymbol{\beta}} = c \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_p$
Melan	$\dot{\boldsymbol{\beta}} = \dot{\boldsymbol{\sigma}}$
Ziegler	$\dot{\boldsymbol{\beta}} = (\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\beta}) \dot{\eta}$

3.5 Plastyczność w ośrodku Cosseratów

Badania dotyczące plastyczności w ośrodku Cosseratów można podzielić na 2 nurty. W pierwszym z nich bierze się pod uwagę niezależność translacji i obrotów w ośrodku oraz wynikającą z tego możliwość niezależnego przekroczenia granicy plastyczności ze względu na translacje lub obroty. W konsekwencji formułuje się wielokryteriowe hipotezy uplastycznienia⁷. W drugim z nurtów wpływy naprężenia siłowego i naprężenia momentowego są uwzględnione w jednym kryterium uplastycznienia. To podejście znalazło zastosowanie szczególnie w badaniach nad zjawiskiem lokalizacji w materiałach z osłabieniem, gdzie zastosowanie formalizmu ośrodka Cosseratów pozwala uzyskać regularyzację wyników.

Jak już wspomniano, ośrodek Cosseratów jest wykorzystywany przy modelowaniu problemów sprężysto-plastycznych wykazujących tzw. lokalizację (zob. np. TEJCHMAN, WU [1993]). Pod pojęciem lokalizacji rozumiane jest powstanie w obciążanym ciele wąskich stref uplastycznionego materiału, podczas gdy pozostałe fragmenty ciała zachowują się podobnie do brył sztywnych, nie zmieniając znacząco swojej geometrii, jedynie przesuając i obracając się względem siebie. Problem ten szczególnie objawia się w materiałach wykazujących osłabienie, tj. ośrodkach gruntowych i innych w których występują mikrouszkodzenia w czasie obciążania (BELYTSCHKO I IN. [1986]).

Kluczowymi, wielokrotnie cytowanymi pracami w badaniu zachowania ośrodka mikropolarnego w kontekście zadań wykazujących lokalizację są prace De Borsta (DE BORST [1991,1993]). Inne publikacje w tym nurcie to m.in. TEJCHMAN, WU [1993], XIKUI LI, HONGXIANG TANG [2005], KHOEI I IN. [2006, 2007], KHOEI, KARIMI [2008], EBRAHIMIAN I IN. [2012].

W pracy PAPANICOLOPULOS, VEVEAKIS [2011] można znaleźć wyprowadzenie kryteriów uplastycznienia wywiedzionych z zachowania materiału na poziomie cząstek. Oddzielnie rozpatrywany jest wpływ przesunięć i obrotów stykających się cząstek względem siebie.

Rozwiązania analityczne dla problemów sprężysto-plastycznych dla ośrodka mikropolarnego podają autorzy prac LIPPMANN [1969] (rura skręcana) oraz FOREST, SIEVERT [2003] (prosty poślizg, czyste zginanie).

W pracy BURZYŃSKI [2013a] dyskutowany jest problem zbieżności rozwiązań MES z użyciem elementów skończonych wyższych rzędów, z nieliniowością geometryczną. Prezentowane są rozwiązania w PSO. Pewne wstępne badania nad sprężysto-plastycznym ośrodkiem mikropolarnym, pozostającym w PSN zawarto w pracy BURZYŃSKI [2013b]. Natomiast w pracach BURZYŃSKI I IN. [2014b,c] zawarto opis i badania nad wprowadzeniem

⁷ W nurcie hipotez wielokryteriowych, warto podkreślić udział polskich autorów, w szczególności prace SAWCZUK [1967] i WĄGROWSKA [1984]. Inne pozycje literatury to m.in. LIPPMANN [1969].

formalizmu sprężysto-plastycznego ośrodka Cosseratów do nieliniowej 6-parametrowej teorii powłok.

W tym miejscu uwaga zostanie skierowana na hipotezy 1-kryteriowe, w których powierzchnię płynięcia podaje się jako uogólnienie powierzchni wynikającej z hipotezy H-M-H (Huber-Mises-Hencky), uwzględniające wpływ naprężeń momentowych. W ogólnym wzorze

$$f = \sqrt{3J_2} - \sigma_Y \leq 0 \quad (3.88)$$

stosowane są różne wyrażenia na uogólnienie niezmiennika dewiatora naprężenia J_2 .

W pracy DE BORST [1991] niezmiennik J_2 podany jest jako

$$J_2 = a_1 s_{ij} s_{ij} + a_2 s_{ij} s_{ji} + a_3 \mu_{ij} \mu_{ij} / l^2, \quad (3.89)$$

gdzie s_{ij} są składowymi dewiatora tensora naprężenia Cauchy, μ_{ij} składowymi tensora naprężenia momentowego, zaś a_1 , a_2 i a_3 są pewnymi stałymi swobodnymi. Praca DE BORST [1993] wprowadza kryterium Druckera-Pragera, jako rozszerzenie zależności (3.88), bez wpływu na J_2 . Dobór parametrów materiałowych a_1 , a_2 i a_3 powinien być taki, że przy braku naprężenia momentowego funkcja płynięcia redukuje się do postaci przyjmowanej dla klasycznego kontinuum. Zachodzi w nim symetria tensora naprężenia, a co za tym idzie symetria dewiatora naprężenia ($s_{ij} = s_{ji}$), mamy więc

$$J_2 = a_1 s_{ij} s_{ij} + a_2 s_{ij} s_{ij} = (a_1 + a_2) s_{ij} s_{ij}. \quad (3.90)$$

Musi zachodzić zatem $a_1 + a_2 = \frac{1}{2}$ (por. wzór (3.64)₂). W pracy DE BORST [1991] podano następujące zestawy parametrów jako możliwe do przyjęcia: $a_1 = a_2 = \frac{1}{4}$, $a_1 = \frac{3}{8}$, $a_2 = \frac{1}{8}$, $a_1 = \frac{3}{4}$, $a_2 = -\frac{1}{4}$.

We wzorze (3.89) szczególną uwagę zwraca obecność parametru materiałowego l , opisującego równocześnie zachowanie ciała w zakresie sprężystym. Takie działanie krytykuje w swojej pracy W. Burzyński (BURZYŃSKI [1929]), stwierdzając:

Stałe sprężystości bowiem nie mają nic wspólnego z wyężeniem – albo ściślej – nie wyężenie zależy od nich, ale one od wyężenia.

Wprowadzanie parametru l wydaje się być uzasadnione ujednoczeniem miana wszystkich składowych wyrażenia (3.89). Aby zadość uczynić uwadze W. Burzyńskiego, należałoby potraktować l jako dodatkową stałą, niezależną od analogicznego parametru sprężystego, i opisać prawem wzmocnienia, tak jak inne parametry kryteriów uplastycznienia. Ślady takiego podejścia można znaleźć w pracy IORDACHE, WILLAM [1998].

Nieco inne niż (3.89) uogólnienie niezmiennika J_2 podane jest m.in. w pracy FOREST, SIEVERT [2003]. Przyjmuje się tam

$$J_2 = a_1 s_{ij} s_{ij} + a_2 s_{ij} s_{ji} + b_1 \mu_{ij} \mu_{ij} + b_2 \mu_{ij} \mu_{ji}, \quad (3.91)$$

gdzie b_1, b_2 są parametrami. W przykładach numerycznych w powyższej pracy stosowane są wartości $a_1 = 1,5$, $a_2 = 0$, $b_1 = 1,5/l_u^2$ i $b_2 = 0$, gdzie l_u jest pewnym wymiarem charakterystycznym rozpatrywanego zadania.

W pracy BESDO [1974] dyskutowane są 4 funkcje plastycznego płynięcia:

$$f_a = s_{ij} s_{ij} + \mu_{ij} \mu_{ij} / l^2 - \frac{2}{3} \sigma_Y^2, \quad (3.92)$$

$$f_b = s_{ij} s_{ij} + \mu_{ij} \mu_{ij} / l^2 + \alpha s_{ij} \mu_{ij} / l - \frac{2}{3} \sigma_Y^2, \quad (3.93)$$

$$f_c = s_{ij} s_{ij} + \mu_{ij} \mu_{ij} / l^2 + |\alpha / l| |s_{ij} \mu_{ij}| - \frac{2}{3} \sigma_Y^2, \quad (3.94)$$

$$f_d = s_{ij} s_{ij} + \mu_{ij} \mu_{ij} / l^2 + \frac{\alpha}{\sigma_Y l^2} s_{ij} \mu_{ik} \mu_{jk} - \frac{2}{3} \sigma_Y^2, \quad (3.95)$$

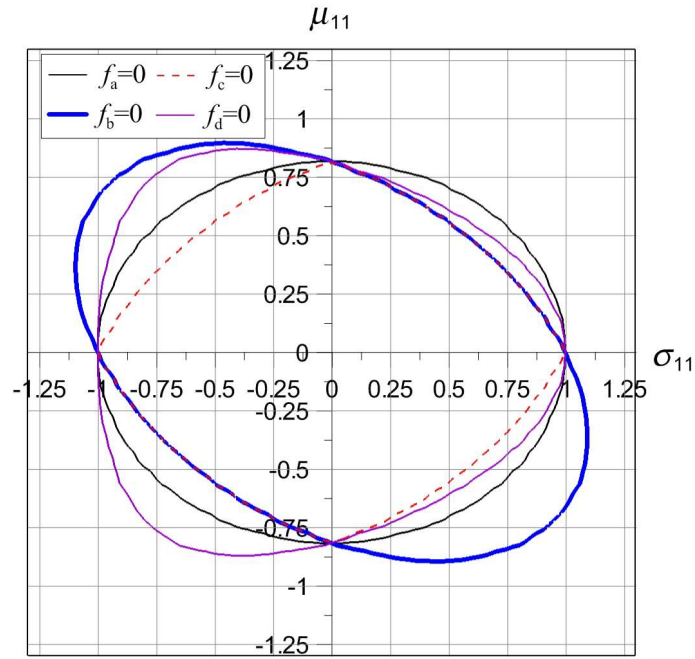
gdzie α jest parametrem. Przyjmowane wartości parametru α są ograniczone przez konieczność zapewnienia wypukłości poszczególnych funkcji. Na rys. 3.5 zestawiono kontury miejsc zerowych funkcji (3.92)-(3.95) dla stanu naprężenia, w którym jedynie σ_{11} i μ_{11} są niezerowe. Przyjęto wartości parametrów $\alpha = 1$, $\sigma_Y = 1$, $l = 1$.

Równie istotne co określenie funkcji płynięcia jest określenie przyrostu efektywnych odkształceń plastycznych $\bar{\epsilon}^p$ (zob. (3.81)), uogólnionych na przypadek ośrodka mikropolarnego. De Borst w swoich pracach proponuje:

$$\bar{\epsilon}^p = \sqrt{b_1 de_{ij}^p de_{ij}^p + b_2 de_{ij}^p de_{ji}^p + b_3 d\kappa_{ij}^p d\kappa_{ij}^p l^2}, \quad (3.96)$$

w którym b_1, b_2 i b_3 są pewnymi stałymi swobodnymi, takimi że $b_1 + b_2 = \frac{2}{3}$, co zapewnia przejście do klasycznej teorii plastyczności. IORDACHE, WILLAM [1998] podają formułę

$$d\bar{\epsilon}^p = \sqrt{de_{ij}^p de_{ij}^p + d\kappa_{ij}^p d\kappa_{ij}^p l_p^2}. \quad (3.97)$$



Rys. 3.5 Miejsca zerowe funkcji płynięcia według BESDO [1974]

W niniejszej pracy stosowane w obliczeniach numerycznych stosowane są zależności ze wzorów (3.88), (3.89), (3.96). Przyjmuje się wartości współczynników:

$$a_1 = \frac{1}{4}, a_2 = \frac{1}{4}, a_3 = \frac{1}{2}, b_1 = \frac{1}{3}, b_2 = \frac{1}{3}, b_3 = \frac{2}{3}. \quad (3.98)$$

4. ALGORYTMY NUMERYCZNE

Rozdział 3 został poświęcony rozważaniom na temat teorii plastycznego płynięcia w ośrodkach klasycznym i Cosseratów. Analityczne rozwiązania zestawionych tam równań podane są tylko dla ograniczonej liczby przykładów. Dzięki zastosowaniu metod numerycznych można rozszerzyć możliwości analizy sprężysto-plastycznej na zadania inżynierskie, o dowolnej geometrii i obciążeniu.

Rozważania niniejszego rozdziału koncentrują się wokół algorytmów numerycznych w kontekście Metody Elementów Skończonych. Mowa będzie o realizowanych na poziomie punktu algorytmach rozwiązywania równań plastyczności oraz o ogólnym algorytmie MES, pozwalającym na analizowanie problemów uwzględniających nieliniowość materiałową.

4.1 Numeryczne rozwiązanie równań plastyczności

Wraz z intensywnym rozwojem metod numerycznych w inżynierii zaistniała konieczność opracowania algorytmów umożliwiających rozwiązanie sformułowanych w rozdz. 3 równań plastyczności. Z perspektywy czasu za pionierską (zob. SIMO, HUGHES [1998]) pracę dotyczącą rozwoju metod komputerowych uznaje się pracę WILKINS [1963], w której podano klasyczny algorytm powrotu na powierzchnię płynięcia w kierunku promieniowym (ang. *return radial algorithm*). Równolegle rozwijane były inne podejścia do rozwiązania postawionego problemu, np. oparte na poszukiwaniu sprężysto-plastycznej relacji konstytutywnej (np. NAYAK, ZIENKIEWICZ [1972]). Porównanie dokładności rozwiązań przy użyciu różnych metod znaleźć można na przykład w pracy KRIEG, KRIEG [1977]. Zastosowany tam sposób oceny dokładności algorytmów, z pewnymi modyfikacjami, znalazł zastosowanie w wielu kolejnych zob. np. SIMO, HUGHES [1998], ARTIOLI I IN. [2006] i cytowana tam literatura

Algorytmy sformułowane dla przestrzennego stanu naprężenia w łatwy sposób mogą być dostosowane do przypadku płaskiego stanu odkształcenia. Trudności pojawiają się przy formułowaniu algorytmu dla płaskiego stanu naprężenia, ze względu na spełnienie warunku zerowania się jednego z naprężeń głównych. Praca SIMO, TAYLOR [1986] podaje przegląd literatury dotyczącej tego problemu, a także wprowadza oryginalne jego rozwiązanie – proste i skuteczne, a co za tym idzie chętnie powtarzane przez kolejnych autorów. Koncepcję tą do analizy powłok w zakresie sprężysto-plastycznym wykorzystano między innymi w pracy RAMM, MATZENMILLER [1987]. Praktyczne zastosowanie algorytmu zostanie pokazane w rozdz. 4.9.

4.2 Idea algorytmów rozwiązywania równań plastyczności

Za pracą DE SOUZA I IN. [2008] zestawione zostaną podstawowe wiadomości dotyczące formułowania algorytmów rozwiązywania równań plastyczności. Podstawowy problem początkowy plastyczności formułowany jest następująco: w wyróżnionym punkcie rozpatrywanego ciała znamy wartość początkową tensora odkształceń sprężystych $\varepsilon^e(t_0)$

i historię zmian całkowitych odkształceń $\boldsymbol{\varepsilon}(t)$, gdzie zmienna czasowa t zawiera się w pewnym skończonym przedziale $t \in \langle t_0, T \rangle$ oraz wartość początkową tensora parametrów wzmocnienia $\boldsymbol{\alpha}(t_0)$. Poszukiwane są funkcje $\boldsymbol{\varepsilon}^e(t)$, $\boldsymbol{\alpha}(t)$ oraz $\dot{\gamma}(t)$ (odpowiednio: odkształcenie sprężyste, tensor parametrów wzmocnienia, skalarny mnożnik plastyczny), spełniające warunki:

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^e(t) = \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}(t) - \dot{\gamma}(t) \mathbf{N}(\boldsymbol{\sigma}(t), \mathbf{A}(t)), \quad (4.1)$$

$$\dot{\boldsymbol{\alpha}} = \dot{\gamma} \mathbf{H}(\boldsymbol{\sigma}(t), \mathbf{A}(t)), \quad (4.2)$$

$$\dot{\gamma}(t) \geq 0, \quad f(\boldsymbol{\sigma}(t), \mathbf{A}(t)) \leq 0, \quad \dot{\gamma}(t) f(\boldsymbol{\sigma}(t), \mathbf{A}(t)) = 0. \quad (4.3)$$

Tutaj t oznacza parametr pseudo-czasu w zagadnieniach nieliniowej statyki, gdzie może być utożsamiony z mnożnikiem obciążenia. Rozwiązania numeryczne równań (4.1)-(4.3) wymagają zastąpienia problemu ciągłego problemem dyskretnym. Stosując metodę Eulera wstecz¹ (ang. *backward Euler* lub *implicit Euler*) zob. np. BUTCHER [2008], przy danych wartościach $\boldsymbol{\varepsilon}_n^e$ oraz $\boldsymbol{\alpha}_n$ na początku kroku przyrostowego o długości $\Delta t = t_{n+1} - t_n$ oraz znanym przyroście $\Delta \boldsymbol{\varepsilon}$ rozwiązać należy równania

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^e = \boldsymbol{\varepsilon}_n^e + \Delta \boldsymbol{\varepsilon} - \Delta \gamma \mathbf{N}(\boldsymbol{\sigma}_{n+1}, \mathbf{A}_{n+1}), \quad (4.4)$$

$$\boldsymbol{\alpha}_{n+1} = \boldsymbol{\alpha}_n + \Delta \gamma \mathbf{H}(\boldsymbol{\sigma}_{n+1}, \mathbf{A}_{n+1}), \quad (4.5)$$

w których niewiadomymi są $\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^e$ (równoważnie $\boldsymbol{\sigma}_{n+1}$), $\boldsymbol{\alpha}_{n+1}$, $\Delta \gamma$. Spełnione muszą być warunki, znane jako warunki Kuhna-Tuckera (np. SIMO, HUGHES [1998]):

$$\Delta \gamma \geq 0, \quad f(\boldsymbol{\sigma}_{n+1}, \mathbf{A}_{n+1}) \leq 0, \quad \Delta \gamma f(\boldsymbol{\sigma}_{n+1}, \mathbf{A}_{n+1}) = 0. \quad (4.6)$$

4.3 Równania plastyczności jako zagadnienie brzegowe równania różniczkowego zwyczajnego

Równania plastyczności są równaniami różniczkowymi zwyczajnymi. Numeryczne metody rozwiązywania takich równań są opisane w wielu pozycjach literatury, zob. np. SZYMKIEWICZ [2012].

Zagadnienie brzegowe formułowane jest jako:

$$y' = f(x, y), \quad (4.7)$$

$$y(a) = y_a, \quad (4.8)$$

¹ Uzasadnienie wyboru tej metody i opis innych metod można znaleźć w pracy CRISFIELD [1996].

zaś jego rozwiązaniem jest funkcja $y = y(x)$ spełniająca powyższe równanie w zadanym przedziale $\langle a, b \rangle$.

Metody numeryczne pozwalają na uzyskanie rozwiązania dyskretnego, tj. dla wybranych punktów $x_0, x_1, \dots, x_n, x_{n+1}, \dots$ obliczone są $y_0, y_1, \dots, y_n, y_{n+1}, \dots$ - przybliżone wartości rozwiązania dokładnego $y(x_0), y(x_1), \dots, y(x_n), y(x_{n+1}), \dots$.

Podstawowy podział metod rozróżnia metody jawne (*explicit*) oraz niejawne (*implicit*). Zakładamy, że wartości y_0, y_1, \dots, y_n są znane, poszukujemy y_{n+1} . W metodach jawnych wartość poszukiwana jest wyznaczana z równania

$$y_{n+1} = H(x, y_{n-j}, \dots, y_{n-1}, y_n). \quad (4.9)$$

Metody niejawne wymagają rozwiązania równania nieliniowego

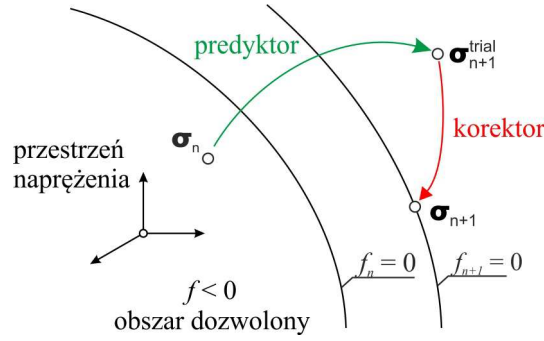
$$G(H, y_{n+1}) = G(x, y_{n-j}, \dots, y_{n-1}, y_n, y_{n+1}) = 0. \quad (4.10)$$

W obu przypadkach, dla $j > 0$ otrzymujemy metody wielokrokowe, zaś $j = 0$ metody jednokrokowe.

Równania plastyczności rozwiązywane mogą być metodami jawnymi lub niejawnymi. W ostatnich latach szczególną popularność zdobyły metody niejawne, których ogólne założenia zostaną opisane szczegółowo w dalszej części pracy. Rozwiązanie równania (4.10) realizowane jest metodą *predyktor-korektor*. Jej algorytm można przedstawić ogólnie jako:

1. obliczenie przybliżonej wartości $y_{n+1} = H(x, y_{n-j}, \dots, y_{n-1}, y_n)$
2. iteracyjne poprawianie wartości y_{n+1} , do spełnienia warunku (4.10) z żadaną dokładnością.

W powyższy schemat wpisują się metody rozwiązywania równań plastyczności w warunkach zadanego odkształcenia (ang. *strain driven problem*). Obliczenie predyktora rozwiązania realizowane jest przez potraktowanie całości przyrostu odkształcenia jako sprężystego. Obliczone w ten sposób naprężenia σ_{n+1}^{trial} mogą leżeć poza powierzchnią plastycznego płynięcia. Stąd zadaniem metody jest sprowadzenie stanu naprężenia na tą powierzchnię, tj. obliczenie korektora (rys. 4.1).



Rys. 4.1 Koncepcja rozwiązania równań plastyczności według schematu predyktor-korektor. Materiał ze wzmocnieniem.

Dalsze przekształcenia są ściśle związane z implementacją numeryczną algorytmów, stąd konieczność określenia postaci pewnych obiektów. Przez $\boldsymbol{\sigma}$, $\boldsymbol{\epsilon}$ będą oznaczone odpowiednio zbiory składowych tensorów naprężenia i odkształcenia w notacji Voigta (są to wektory kolumnowe). Operator konstytutywny \mathbf{C} jest macierzą kwadratową.

Pewne ogólne przekształcenia są wspólne dla algorytmów typu predyktor-korektor. Akumulacja sumarycznego odkształcenia realizowana jest przez formułę

$$\boldsymbol{\epsilon}_{n+1} = \boldsymbol{\epsilon}_n + \Delta\boldsymbol{\epsilon} \quad (4.11)$$

zaś plastycznego odkształcenia (z wykorzystaniem stowarzyszonego prawa plastycznego płynięcia – por. (3.71)₁) na podstawie

$$\boldsymbol{\epsilon}_{n+1}^p = \boldsymbol{\epsilon}_n^p + \Delta\boldsymbol{\epsilon}_{n+1}^p = \boldsymbol{\epsilon}_n^p + \Delta\gamma_{n+1} \mathbf{N}_{n+1}, \quad (4.12)$$

gdzie $\mathbf{N}_{n+1} = \left. \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right|_{\boldsymbol{\sigma}=\boldsymbol{\sigma}_{n+1}}$ (por. (3.70)₁). Etykiety dolne w (4.11), (4.12) i dalej wskazują na

wartości dyskretne w chwilach t_n , t_{n+1} , takich że $\Delta t = t_{n+1} - t_n$ jest pewnym ustalonym krokiem pseudo-czasowym.

Wektor naprężenia na końcu kroku przyrostowego może być zapisany jako

$$\boldsymbol{\sigma}_{n+1} = \mathbf{C}^e \boldsymbol{\epsilon}_{n+1}^e = \mathbf{C}^e (\boldsymbol{\epsilon}_{n+1} - \boldsymbol{\epsilon}_{n+1}^p), \quad (4.13)$$

przy czym powinien być spełniony warunek

$$f_{n+1} = f(\boldsymbol{\sigma}_{n+1}, \mathbf{A}_{n+1}) = 0, \quad (4.14)$$

gdzie \mathbf{A}_{n+1} jest wektorem sił wzmocnienia. Nie wyróżnia się na tym etapie żadnej z hipotez plastycznego płynięcia. Wzór (4.13) można sformułować wykorzystując liniowo sprężysty predyktor naprężenia $\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{trial} = \boldsymbol{\sigma}_n + \mathbf{C}^e \Delta\boldsymbol{\epsilon}$

$$\boldsymbol{\sigma}_{n+1} = \boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{trial} + \Delta\boldsymbol{\sigma}_{n+1} = \boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{trial} - \Delta\gamma_{n+1} \mathbf{C}^e \mathbf{N}_{n+1}. \quad (4.15)$$

Można zapisać analogiczne do (4.15) równanie dla poszukiwanego stanu parametrów wzmocnienia $\boldsymbol{\alpha}_{n+1}$, z wykorzystaniem predyktora $\boldsymbol{\alpha}_{n+1}^{trial} = \boldsymbol{\alpha}_n$ (por. (3.70) i (3.71)₂)

$$\boldsymbol{\alpha}_{n+1} = \boldsymbol{\alpha}_{n+1}^{trial} + \Delta\gamma_{n+1} \mathbf{H}_{n+1}. \quad (4.16)$$

4.4 Closest Point Projection Method (CPPM)

Uogólniona odległość w przestrzeni naprężenia definiowana jest jako

$$d(\boldsymbol{\sigma}_a, \boldsymbol{\sigma}_b) = \|\boldsymbol{\sigma}_a - \boldsymbol{\sigma}_b\|_{\mathbf{C}^e}, \quad (4.17)$$

gdzie $\|\boldsymbol{\sigma}\|_{\mathbf{C}^e} = \sqrt{\boldsymbol{\sigma} : (\mathbf{C}^e)^{-1} : \boldsymbol{\sigma}}$, zaś $\boldsymbol{\sigma}_a$ i $\boldsymbol{\sigma}_b$ są współrzędnymi dwóch dowolnych punktów w przestrzeni naprężenia. Koncepcja metody *Closest Point Projection* może być sformułowana jako poszukiwanie naprężenia $\boldsymbol{\sigma}_{n+1}$, takiego że

$$d = d(\boldsymbol{\sigma}_{n+1}, \boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{trial}) \quad (4.18)$$

jest minimalne wśród wszystkich $\boldsymbol{\sigma}_{n+1}$ spełniających warunek $f(\boldsymbol{\sigma}_{n+1}, \mathbf{A}_{n+1}) = 0$.

W metodzie CPPM zestawiamy układ równań nieliniowych (4.14), (4.15), (4.16) (pominięte etykiety dolne $n+1$):

$$f = f(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{A}) = 0, \quad (4.19)$$

$$\mathbf{r} = -\boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{\sigma}^{trial} - \Delta\gamma \mathbf{C}^e \mathbf{N} = \mathbf{0}, \quad (4.20)$$

$$\mathbf{q} = \boldsymbol{\alpha}_{n+1} - \boldsymbol{\alpha}_n - \Delta\gamma \mathbf{H}(\boldsymbol{\sigma}_{n+1}, \mathbf{A}_{n+1}) = \mathbf{0}. \quad (4.21)$$

U podstaw metody leży zatem ściśle spełnienie warunku plastycznego płynięcia, zaś przyrost odkształcenia plastycznego ma być proporcjonalny do gradientu funkcji plastycznego płynięcia na końcu kroku.

Układ równań zostanie rozwiązany metodą iteracyjną Newtona-Raphsona, (zob. np. SZYMKIEWICZ [2012]). Linearyzacja w punkcie znanego tensora naprężeń daje nowy układ równań, z którego można wyznaczyć przybliżone wartości poszukiwanych funkcji:

$$f^{(k+1)} \approx f^{(k)} + \left(\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}}\right)^{(k)T} \Delta\boldsymbol{\sigma}^{(k)} + \left(\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\alpha}}\right)^{(k)T} \Delta\boldsymbol{\alpha}^{(k)} + \left(\frac{\partial f}{\partial \Delta\gamma}\right)^{(k)} \delta\gamma^{(k)} = 0, \quad (4.22)$$

$$\mathbf{r}^{(k+1)} \approx \mathbf{r}^{(k)} + \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \boldsymbol{\sigma}}\right)^{(k)} \Delta\boldsymbol{\sigma}^{(k)} + \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \boldsymbol{\alpha}}\right)^{(k)} \Delta\boldsymbol{\alpha}^{(k)} + \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \Delta\gamma}\right)^{(k)} \delta\gamma^{(k)} = \mathbf{0}, \quad (4.23)$$

$$\mathbf{q}^{(k+1)} \approx \mathbf{q}^{(k)} + \left(\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial \boldsymbol{\sigma}}\right)^{(k)} \Delta\boldsymbol{\sigma}^{(k)} + \left(\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial \boldsymbol{\alpha}}\right)^{(k)} \Delta\boldsymbol{\alpha}^{(k)} + \left(\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial \Delta\gamma}\right)^{(k)} \delta\gamma^{(k)} = \mathbf{0}. \quad (4.24)$$

Górne etykiety (k) oznaczają numer iteracji. Rozwiązanie układu równań (4.22)-(4.24) ze względu na przyrosty poszukiwanych wartości pozwala na addytywne uaktualnienie wartości: mnożnika skalarnego, składowych naprężenia i parametrów wzmocnienia, odpowiednio według równań:

$$\Delta\gamma^{(k+1)} = \Delta\gamma^{(k)} + \delta\gamma^{(k)}, \quad (4.25)$$

$$\boldsymbol{\sigma}^{(k+1)} = \boldsymbol{\sigma}^{(k)} + \Delta\boldsymbol{\sigma}^{(k)}, \quad (4.26)$$

$$\boldsymbol{\alpha}^{(k+1)} = \boldsymbol{\alpha}^{(k)} + \Delta\boldsymbol{\alpha}^{(k)}. \quad (4.27)$$

Warunki zbieżności mogą być podane jako $f^{(k+1)} < TOL_1$, $\mathbf{r}^{(k+1)} < TOL_2$ i $\mathbf{q}^{(k+1)} < TOL_2$, gdzie TOL_1 i TOL_2 są pewnymi parametrami.

4.5 Algorytmiczna macierz konstytutywna

Z algorytmem CPPM ściśle związana jest tzw. algorytmiczna (lub konsystentna) macierz konstytutywna. O ile styczna macierz (zob. rozdz. 3) jest sformułowana w odniesieniu do nieskończone małych przyrostów naprężeń i odkształceń, to w przypadku obliczeń numerycznych uzasadnione jest opisanie zależności konstytutywnej pomiędzy skończonymi przyrostami naprężeń i odkształceń. Uzasadnienie takiego wyboru wynika z przyrostowo-iteracyjnej metody rozwiązania problemu na poziomie globalnym, gdzie sformułowanie macierzy sztywności odgrywa ważną rolę ze względu na zbieżność obliczeń. W rozdziale 7.2 zaprezentowano przykład numeryczny, w którym analizowane jest użycie różnych macierzy konstytutywnych i ich wpływ na zbieżność rozwiązania MES.

Szczegółowe informacje o znaczeniu i sposobie formułowania algorytmicznej macierzy konstytutywnej można znaleźć m.in. w pracach SIMO, HUGHES [1998] oraz KLEIBER [1995].

Różniczkowanie po zmiennej czasowej równania (4.13) daje

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{C}^e (\dot{\boldsymbol{\epsilon}} - \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p) = \mathbf{C}^e \dot{\boldsymbol{\epsilon}} - \Delta\dot{\gamma} \mathbf{C}^e \mathbf{N} - \Delta\dot{\gamma} \mathbf{C}^e \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \dot{\boldsymbol{\sigma}}, \quad (4.28)$$

po przekształceniu

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \left[\mathbf{I} + \Delta\dot{\gamma} \mathbf{C}^e \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right]^{-1} \mathbf{C}^e [\dot{\boldsymbol{\epsilon}} - \Delta\dot{\gamma} \mathbf{N}], \quad (4.29)$$

gdzie \mathbf{I} jest macierzą jednostkową odpowiedniego rzędu. Analogicznie, różniczkowanie (4.16) daje po przekształceniach

$$\dot{\boldsymbol{\alpha}} = \Delta\dot{\gamma} \left[\mathbf{I} - \Delta\dot{\gamma} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial \boldsymbol{\alpha}} \right]^{-1} \mathbf{H}. \quad (4.30)$$

Do warunku zgodności

$$\dot{f} = \left(\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right)^T \dot{\boldsymbol{\sigma}} + \left(\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\alpha}} \right)^T \dot{\boldsymbol{\alpha}} + \frac{\partial f}{\partial \Delta \gamma} \Delta \dot{\gamma} = 0, \quad (4.31)$$

podstawiamy (4.29) i (4.30), z otrzymanego wyrażenia wyznaczamy $\Delta \dot{\gamma}$, które to powtórnie wykorzystujemy w (4.29) i przekształcamy to wyrażenie do

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{Q} \left[\begin{array}{c} \mathbf{C}^e \\ \mathbf{N}^T \mathbf{Q} \mathbf{C}^e \\ \mathbf{N}^T \mathbf{Q} \mathbf{C}^e \mathbf{N} - \left(\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\alpha}} \right)^T \mathbf{R} \mathbf{H} - \frac{\partial f}{\partial \Delta \gamma} \end{array} \right] \dot{\boldsymbol{\epsilon}} = \mathbf{C}^{ep} \dot{\boldsymbol{\epsilon}}. \quad (4.32)$$

W (4.32) \mathbf{C}^{ep} jest poszukiwaną algorytmiczną macierzą konstytutywną, zaś:

$$\mathbf{Q} = \left[\mathbf{I} + \Delta \gamma \mathbf{C}^e \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right]^{-1}, \quad \mathbf{R} = \left[\mathbf{I} - \Delta \gamma \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial \boldsymbol{\alpha}} \right]^{-1} \quad (4.33)$$

są pewnymi macierzami pomocniczymi.

4.6 Cutting Plane Algorithm (CPA)

Metoda CPA jest również metodą iteracyjną. Z równania (4.13) otrzymujemy wzór na iteracyjny przyrost naprężenia

$$\Delta \boldsymbol{\sigma}^{(k)} = \boldsymbol{\sigma}^{(k+1)} - \boldsymbol{\sigma}^{(k)} = -\mathbf{C}^e \Delta \boldsymbol{\epsilon}^{p(k)}. \quad (4.34)$$

Przyrost odkształcenia plastycznego obliczamy zakładając jego proporcjonalność do normalnej do powierzchni plastycznego płynięcia w ostatniej znanej iteracji

$$\Delta \boldsymbol{\epsilon}^{p(k)} = \Delta \gamma^{(k)} \mathbf{N}^{(k)}. \quad (4.35)$$

Znany jest zatem, po uwzględnieniu równania (4.35) w (4.34), iteracyjny przyrost naprężenia

$$\Delta \boldsymbol{\sigma}^{(k)} = -\Delta \gamma^{(k)} \mathbf{C}^e \mathbf{N}^{(k)}. \quad (4.36)$$

Pozostaje obliczyć przyrost parametru $\Delta \gamma$, wykorzystując linearyzację funkcji (4.19) wokół znanego naprężenia $\boldsymbol{\sigma}^{(k)}$

$$f^{(k+1)} = f^{(k)} + \mathbf{N}^{(k)} \Delta \boldsymbol{\sigma}^{(k)} = f^{(k)} - \Delta \gamma^{(k)} \left(\mathbf{N}^{(k)} \right)^T \mathbf{C}^e \mathbf{N}^{(k)}. \quad (4.37)$$

Wymagane jest spełnienie $f^{(k+1)} = 0$, więc otrzymujemy

$$\Delta \gamma^{(k)} = \frac{f^{(k)}}{\left(\mathbf{N}^{(k)} \right)^T \mathbf{C}^e \mathbf{N}^{(k)}}. \quad (4.38)$$

Warunek zbieżności dany jest jako $f^{(k+1)} < TOL_1$.

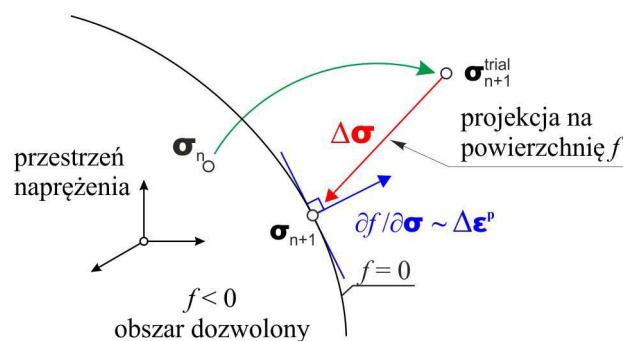
4.7 Porównanie algorytmów CPPM i CPA

Podstawową różnicą między opisywanymi metodami jest linearyzacja równań plastyczności wokół różnych punktów w przestrzeni naprężenia.

Zaletą metody CPPM jest możliwość wyprowadzenia konsystentnej stycznej macierzy konstytutywnej. Metoda CPA nie wymaga obliczania drugiej pochodnej funkcji płynięcia. To działanie może być kłopotliwe w przypadku złożonej postaci funkcji. Ta niedogodność może być zniwelowana przy użyciu tzw. systemów algebry komputerowej (ang. *CAS – Computer Algebra System*), np. Maxima².

Dla obu metod można przedstawić interpretację geometryczną w przestrzeni naprężenia (szczegółowo opisana np. w SIMO, HUGHES [1998]). Interpretacja geometryczna metody CPPM została przedstawiona na rys. 4.2. Celem obliczeń jest znalezienie takiego punktu σ_{n+1} , że odległość między nim a punktem σ_{n+1}^{trial} jest najmniejsza (w sensie odległości (4.17)) z zachowaniem stowarzyszonego prawa płynięcia na końcu kroku przyrostowego (proporcjonalność odkształcenia plastycznego do gradientu funkcji płynięcia). Przyrost naprężenia $\Delta\sigma$ jest związany z $\Delta\epsilon^p$ przez relację (zob. (4.12) i (4.15))

$$\Delta\sigma = -\mathbf{C}^e \Delta\epsilon^p. \quad (4.39)$$



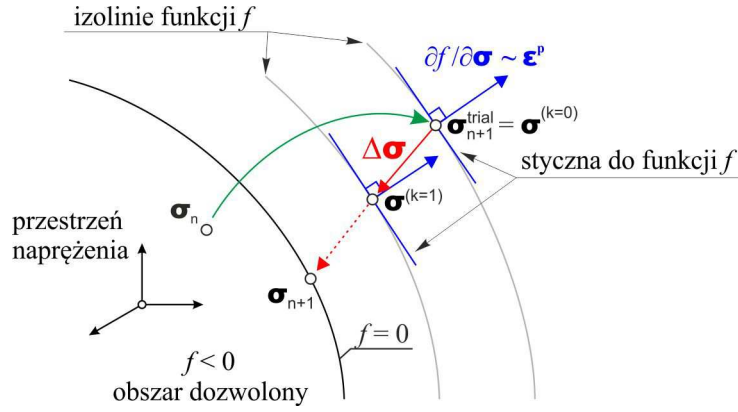
Rys. 4.2 Interpretacja graficzna metody CPPM (opis w tekście).

Interpretacja graficzna metody CPA jest została pokazana na rys. 4.3. W k -tej iteracji poszukiwany jest gradient funkcji f w punkcie $\sigma^{(k)}$. Proporcjonalne do niego jest odkształcenie plastyczne, na podstawie którego obliczany jest przyrost naprężenia.

4.8 Algorytmy powrotu – płaski ośrodek Cosseratów

W niniejszym podpunkcie zostaną przedstawione uściślenia algorytmów powrotu na powierzchnię plastycznego płynięcia na przypadek ośrodka Cosseratów. Ze względu na zakres przykładów numerycznych dostępnych w literaturze przedmiotu, ograniczono się do kryterium uplastycznienia typu J_2 ze wzmocnieniem izotropowym, obowiązuje stowarzyszone prawo płynięcia.

² <http://maxima.sourceforge.net/>



Rys. 4.3 Interpretacja graficzna metody CPA (opis w tekście).

Składowe tensorów naprężenia i odkształcenia grupujemy w wektory, zapisujemy też relację konstytutywną (zob. rozdz. 3, wzory (3.27) i (3.28)):

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{21} \\ \mu_{13} \\ \mu_{23} \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{C}_I^e = \begin{bmatrix} \mu c_1 & \mu c_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \mu c_2 & \mu c_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mu + \mu_c & \mu - \mu_c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mu - \mu_c & \mu + \mu_c & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 2\mu l^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2\mu l^2 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\varepsilon} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{12} \\ \varepsilon_{21} \\ \kappa_{13} \\ \kappa_{23} \end{Bmatrix}, \quad (4.40)$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C}_I^e \boldsymbol{\varepsilon}. \quad (4.41)$$

Kryterium uplastycznienia ma postać (zob. rozdz. 3, wzór (3.90)):

$$f = \sqrt{3J_2} - \sigma_Y(\bar{\varepsilon}^p) \leq 0, \quad J_2 = a_1 s_{ij} s_{ij} + a_2 s_{ij} s_{ji} + a_3 \mu_{ij} \mu_{ij} / l^2. \quad (4.42)$$

Składnik pod pierwiastkiem w (4.42)₁ rozpisany przy uwzględnieniu niezerowych składników zgrupowanych w (4.40)₁ przyjmuje formę

$$3J_2 = \sigma_{11}^2 + \sigma_{22}^2 - \sigma_{11}\sigma_{22} + 3a_1\sigma_{12}^2 + 6a_2\sigma_{12}\sigma_{21} + 3a_1\sigma_{21}^2 + 3\frac{a_3}{l^2}\mu_{13}^2 + 3\frac{a_3}{l^2}\mu_{23}^2. \quad (4.43)$$

Prawem wzmocnienia rządzą parametry:

$$\boldsymbol{\alpha} \equiv \{\bar{\varepsilon}^p\}, \quad \mathbf{A} \equiv \{\kappa\}, \quad \kappa = \kappa(\bar{\varepsilon}^p) = H\bar{\varepsilon}^p, \quad \sigma_Y = \sigma_{Y0} + \kappa(\bar{\varepsilon}^p) = \sigma_{Y0} + H\bar{\varepsilon}^p. \quad (4.44)$$

Stowarzyszone prawo płynięcia daje

$$\mathbf{N} = \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}}. \quad (4.45)$$

Formuła (4.45) wraz z wyrażeniem (4.15), dającym wartość poszukiwanych składowych naprężenia, gwarantują spełnienie warunku płaskiego stanu naprężenia na końcu kroku obliczeniowego. Takie podejście oryginalnie zaprezentowali SIMO, TAYLOR [1986].

Jak pokazano w pracy DE BORST [1991], przyjęcie współczynników a_1 , a_2 i a_3 według (3.99), daje równość

$$\Delta\gamma = \Delta\bar{\varepsilon}^p. \quad (4.46)$$

W przypadku algorytmu CPPM (ze wzmocnieniem izotropowym) układ równań (4.22)-(4.24) można ograniczyć do pierwszego i drugiego z nich, z niewiadomymi $\Delta\boldsymbol{\sigma}$ i $\delta\gamma$. Zredukowana postać jest dana jako:

$$\mathbf{J} \begin{Bmatrix} \Delta\boldsymbol{\sigma}^{(k)} \\ \delta\gamma^{(k)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -f^{(k)} \\ -\mathbf{r}^{(k)} \end{Bmatrix}, \quad (4.47)$$

gdzie \mathbf{J} określone jako

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \left(\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right)^{(k)T} & \left(\frac{\partial f}{\partial \Delta\gamma} \right)^{(k)} \\ \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right)^{(k)} & \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \Delta\gamma} \right)^{(k)} \end{bmatrix}. \quad (4.48)$$

Składniki niezbędne do zaimplementowania algorytmów CPPM i CPA do autorskiego programu komputerowego są określone jako:

$$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \sqrt{3} \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\sigma}} (\sqrt{J_2}) = \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{1}{\sqrt{J_2}} \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\sigma}} (J_2) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{3}{J_2}} \begin{Bmatrix} \frac{2}{3} \sigma_{11} - \frac{1}{3} \sigma_{22} \\ \frac{2}{3} \sigma_{22} - \frac{1}{3} \sigma_{11} \\ 2a_1 \sigma_{12} + 2a_2 \sigma_{21} \\ 2a_2 \sigma_{12} + 2a_1 \sigma_{21} \\ 2a_3/l^2 \mu_{13} \\ 2a_3/l^2 \mu_{23} \end{Bmatrix}, \quad (4.49)$$

$$\frac{\partial f}{\partial \Delta\gamma} \equiv \frac{\partial f}{\partial \bar{\varepsilon}^p} = \frac{\partial}{\partial \bar{\varepsilon}^p} (-\sigma_Y(\bar{\varepsilon}^p)) = \frac{\partial}{\partial \bar{\varepsilon}^p} (-\sigma_{Y0} - H\bar{\varepsilon}^p) = -H, \quad (4.50)$$

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\sigma}} (-\boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{\sigma}^{trial} - \Delta\gamma \mathbf{C}^e \mathbf{N}) = \mathbf{I} - \Delta\gamma \mathbf{C}^e \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \mathbf{N} = \mathbf{I} - \Delta\gamma \mathbf{C}^e \frac{\partial^2 f}{\partial \boldsymbol{\sigma}^2}, \quad (4.51)$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^2 f}{\partial \boldsymbol{\sigma}^2} &= \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \left(\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right) = \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \left(\frac{1}{2\sqrt{J_2}} \begin{pmatrix} \frac{2}{3}\sigma_{11} - \frac{1}{3}\sigma_{22} \\ \frac{2}{3}\sigma_{22} - \frac{1}{3}\sigma_{11} \\ 2a_1\sigma_{12} + 2a_2\sigma_{21} \\ 2a_2\sigma_{12} + 2a_1\sigma_{21} \\ 2a_3/l^2 \mu_{13} \\ 2a_3/l^2 \mu_{23} \end{pmatrix} \right) = \\
 &= \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \left(\frac{1}{2\sqrt{J_2}} \right) \begin{pmatrix} \frac{2}{3}\sigma_{11} - \frac{1}{3}\sigma_{22} \\ \frac{2}{3}\sigma_{22} - \frac{1}{3}\sigma_{11} \\ 2a_1\sigma_{12} + 2a_2\sigma_{21} \\ 2a_2\sigma_{12} + 2a_1\sigma_{21} \\ 2a_3/l^2 \mu_{13} \\ 2a_3/l^2 \mu_{23} \end{pmatrix}^T + \frac{1}{2\sqrt{J_2}} \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \begin{pmatrix} \frac{2}{3}\sigma_{11} - \frac{1}{3}\sigma_{22} \\ \frac{2}{3}\sigma_{22} - \frac{1}{3}\sigma_{11} \\ 2a_1\sigma_{12} + 2a_2\sigma_{21} \\ 2a_2\sigma_{12} + 2a_1\sigma_{21} \\ 2a_3/l^2 \mu_{13} \\ 2a_3/l^2 \mu_{23} \end{pmatrix} = \\
 &= -\frac{\sqrt{3}}{4} (J_2)^{-3/2} \begin{pmatrix} \frac{2}{3}\sigma_{11} - \frac{1}{3}\sigma_{22} \\ \frac{2}{3}\sigma_{22} - \frac{1}{3}\sigma_{11} \\ 2a_1\sigma_{12} + 2a_2\sigma_{21} \\ 2a_2\sigma_{12} + 2a_1\sigma_{21} \\ 2a_3/l^2 \mu_{13} \\ 2a_3/l^2 \mu_{23} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{2}{3}\sigma_{11} - \frac{1}{3}\sigma_{22} \\ \frac{2}{3}\sigma_{22} - \frac{1}{3}\sigma_{11} \\ 2a_1\sigma_{12} + 2a_2\sigma_{21} \\ 2a_2\sigma_{12} + 2a_1\sigma_{21} \\ 2a_3/l^2 \mu_{13} \\ 2a_3/l^2 \mu_{23} \end{pmatrix}^T + \frac{1}{2\sqrt{J_2}} \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2a_1 & 2a_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2a_2 & 2a_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2a_3/l^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2a_3/l^2 \end{bmatrix}, \quad (4.52)
 \end{aligned}$$

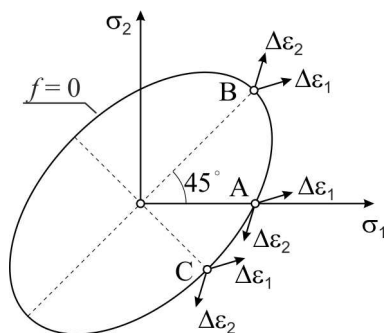
$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \Delta\gamma} &= \frac{\partial}{\partial \Delta\gamma} \left(-\boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{\sigma}^{trial} - \Delta\gamma \mathbf{C}^e \mathbf{N} \right) = \\
 &= -\mathbf{C}^e \mathbf{N} = -\mathbf{C}^e \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = -\mathbf{C}^e \begin{pmatrix} \frac{2}{3}\sigma_{11} - \frac{1}{3}\sigma_{22} \\ \frac{2}{3}\sigma_{22} - \frac{1}{3}\sigma_{11} \\ \sqrt{J_2} \begin{pmatrix} 2a_1\sigma_{12} + 2a_2\sigma_{21} \\ 2a_2\sigma_{12} + 2a_1\sigma_{21} \\ 2a_3/l^2 \mu_{13} \\ 2a_3/l^2 \mu_{23} \end{pmatrix} \end{pmatrix}. \quad (4.53)
 \end{aligned}$$

W (4.50) wykorzystano zależność (4.46).

4.9 Test algorytmów CPPM i CPA

Do testowania zaprezentowanych algorytmów zastosowano metodę zaproponowaną w pracy KRIEG, KRIEG [1977] i użytą m.in. w SIMO, HUGHES [1998], ARTIOLI I IN. [2006].

Rozpatrywane są 3 stany naprężenia (oznaczone jako punkty A, B, C na rys. 4.4), w każdym z nich jedynie składniki σ_{11} i σ_{22} są niezerowe. W każdym z punktów zachodzi $f = 0$. Wartości naprężeń i odkształceń w tych punktach, przy założeniu płaskiego stanu naprężenia, zebrano w tab. 4.1.



Rys. 4.4 Powierzchnia plastycznego pływnięcia i punkty testowe. Wektory pokazują zmianę stanu naprężenia przy danym przyroście odkształcenia, gdyby zachowany był sprężysty zakres deformacji.

Tab. 4.1 Punkty testowe dla algorytmów powrotu

	σ_{11}	σ_{22}	ε_{11}	ε_{22}
p. A	σ_Y	0	σ_Y/E	$-\nu\sigma_Y/E$
p. B	σ_Y	σ_Y	$(1-\nu)\sigma_Y/E$	$(1-\nu)\sigma_Y/E$
p. C	$1/\sqrt{3}\sigma_Y$	$-1/\sqrt{3}\sigma_Y$	$\frac{(1+\nu)\sigma_Y}{\sqrt{3}E}$	$-\frac{(1+\nu)\sigma_Y}{\sqrt{3}E}$

Następnie zakładany jest przyrost odkształceń: składowa ε_{11} rośnie o $\Delta\varepsilon_{11}$, zaś składowa ε_{22} o $\Delta\varepsilon_{22}$, powodując przejście w stan plastyczny. Na rys. 4.4 strzałki odchodzące od punktów pokazują, jak zmieniłby się stan naprężenia przy wskazanym przyroście odkształcenia, gdyby materiał pozostawał w stanie sprężystym. Dla każdego punktu dla obu algorytmów rozpatrywane jest 61×61 przypadków przyrostów odkształceń, które to przyrosty są dobierane proporcjonalnie do wyjściowych wartości odkształceń:

$$\frac{\Delta\varepsilon_{11}}{\varepsilon_{11}} = 0; 0,1; 0,2; \dots 6, \quad \frac{\Delta\varepsilon_{22}}{\varepsilon_{22}} = 0; 0,1; 0,2; \dots 6. \quad (4.54)$$

Dla tak narzuconych przyrostów wykonywane są obliczenia numeryczne daną metodą (CPPM lub CPA) na dwa sposoby:

1. obliczenia pseudo-dokładne – przyrost odkształceń jest dzielony na 1000 kroków obliczeniowych, dają naprężenia „dokładne” σ^* ;
2. obliczenia przybliżone – naprężenia σ są liczone dla przyrostu odkształceń w 1 kroku obliczeniowym.

Oceniana jest różnica rozwiązań pseudo-dokładnego i przybliżonego, błąd obliczany jest ze wzoru

$$\delta = \frac{\|\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}^*\|}{\|\boldsymbol{\sigma}^*\|}, \quad (4.55)$$

gdzie $\|\cdot\|$ oznacza normę kwadratową, zdefiniowaną jako $\|\mathbf{x}\| = \left(\sum_i \sum_j (x_{ij})^2 \right)^{1/2}$.

W obliczeniach numerycznych przyjęto stałe materiałowe $E = 3 \cdot 10^4$, $\nu = 0,3$, $\sigma_Y = \sqrt{3}$ oraz kryterium typu J_2 . Dokładność algorytmów powrotu na powierzchnię płynięcia określono przyjmując $TOL_1 = TOL_2 = 10^{-3}$.

Na rys. 4.5 przedstawiono mapy wartości błędu δ dla różnych metod (CPPM i CPA) oraz punktów (A, B, C). Wyniki dla punktów B i C wykazują symetrię, co wynika z położenia tych punktów na płaszczyźnie naprężeń. W przypadku każdego z punktów, maksymalna wartość błędu jest niższa w przypadku metody CPPM. Uzyskane maksymalne wartości oraz kształty izol linii błędu δ odpowiadają wartościom z pracy SIMO, HUGHES [1998].

4.10 Rozwiązanie przyrostowe w zagadnieniach sprężysto-plastycznych

Istotnym aspektem analiz uwzględniających nieliniowość materiałową jest właściwy sposób obliczania przyrostów odkształceń (zob. np. KLEIBER [1985], RAMM, MATZENMILLER [1987]). W trakcie analizy konfiguracje ciała dzielą się na tzw. uzasadnione fizycznie, spełniające warunki równowagi (konfiguracja początkowa, aktualna, poszukiwana) oraz niefizyczne, dyktowane tylko procesem rozwiązywania równań (związane z iteracjami równowagi), rys. 4.6. Stąd uzasadnionym sposobem obliczania przyrostu odkształceń $\Delta \boldsymbol{\epsilon}$ (4.11) jest obliczanie go na podstawie skumulowanego przyrostu przemieszczeń, odniesionego do ostatnio wyznaczonej konfiguracji równowagi

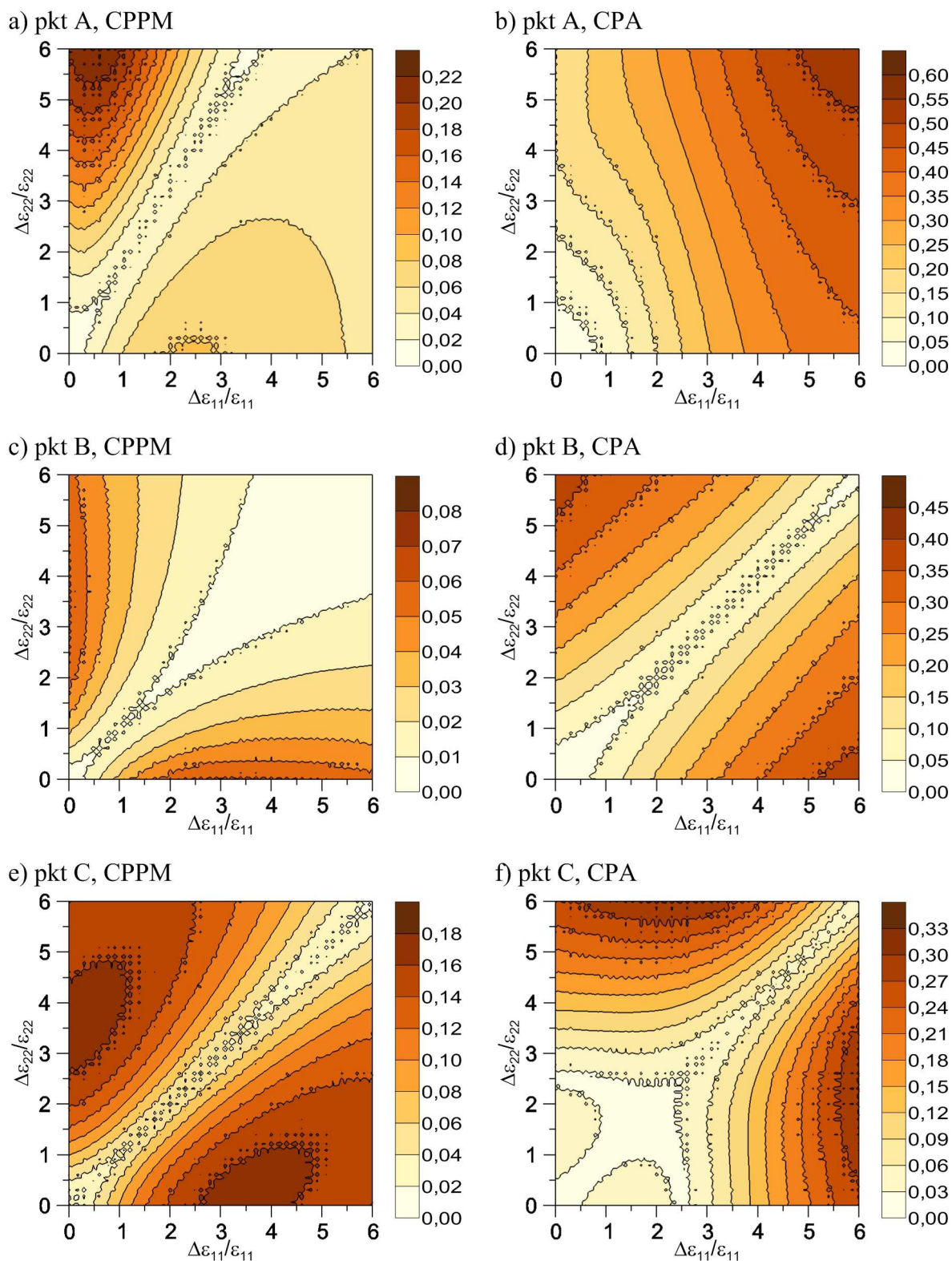
$$\Delta \boldsymbol{\epsilon} = \Delta \boldsymbol{\epsilon}(\Delta \mathbf{u}^{(i)}), \quad i = 1, 2, 3, \dots \quad (4.56)$$

Błędnym jest podejście, w którym $\Delta \boldsymbol{\epsilon} = \Delta \boldsymbol{\epsilon}(\delta \mathbf{u}^{(i)})$ oraz $\boldsymbol{\epsilon}_n = \boldsymbol{\epsilon}_n(\mathbf{u}_n + \Delta \mathbf{u}^{(i-1)})$. W procesach sprężysto-plastycznych rozwiązanie jest zależne od historii procesu deformacji, zatem w teście nie mogą być kumulowane parametry związane z niezerównoważonymi konfiguracjami wynikające z iteracyjnego poszukiwania równowagi.

4.11 Algorytmy plastyczności w globalnym algorytmie MES

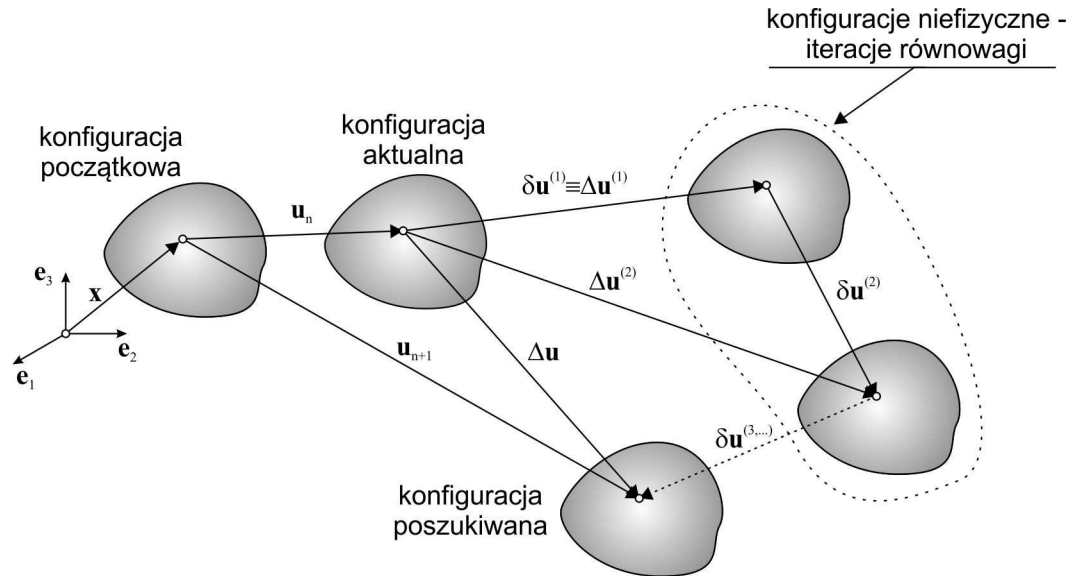
Podstawy MES w zakresie analiz liniowych i nieliniowych są opisane w wielu pozycjach literatury, zob. np. BATHE [1982].

Schemat blokowy ideowego algorytmu MES uwzględniającego nieliniowość materiałową pokazano na rys. 4.7. Punktem wyjścia do wykonania kroku obliczeniowego jest ostatnia konfiguracja równowagi ciała. Procedura jest inicjowana z zerowymi wartościami skumulowanych przemieszczeń. Budowa macierzy i wektorów elementowych odbywa się z uwzględnieniem wpływu nieliniowości materiałowej. Obliczone na podstawie aktualnie skumulowanego wektora przemieszczeń odkształcenia mogą dawać niedopuszczalny stan



Rys. 4.5 Izomapy błędów algorytmów powrotu na powierzchnię płynięcia.

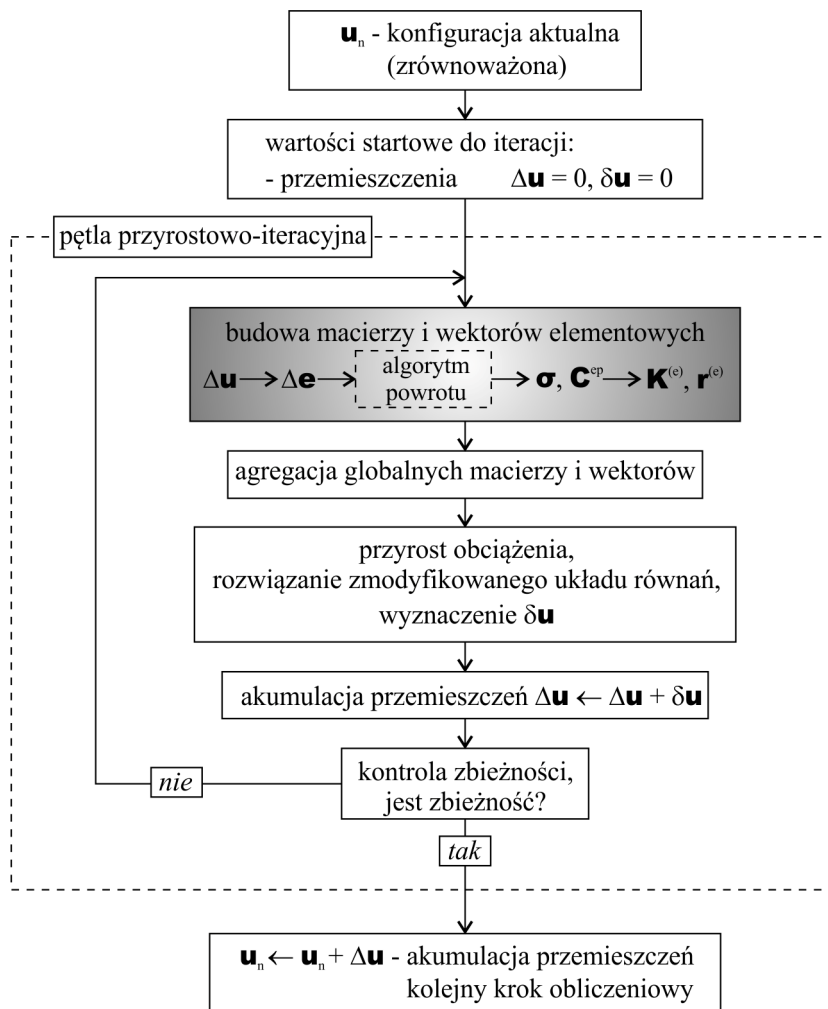
naprężenia, przekraczający granicę plastyczności. Konieczne jest użycie algorytmu powrotu na powierzchnię plastycznego płynięcia, który w rezultacie daje wartość naprężenia spełniającą kryterium uplastycznienia. Równolegle tworzone są lokalne macierze konstytutywne, pozwalająca na obliczenie macierzy sztywności elementowych.



Rys. 4.6 Konfiguracje w algorytmie przyrostowym

Pozostałe kroki wewnątrz jednej iteracji są standardowe zob. np. KLEIBER [1985]. W przypadku braku zbieżności następuje powtórne uruchomienie procedury plastycznej, za każdym razem realizującej obliczenia na podstawie skumulowanego przyrostu przemieszczeń. Stany niezrównoważone nie są składowane w pamięci komputera, tylko ostatecznie uzyskany stan zrównoważony jest składowany i używany jako startowy w kolejnym kroku.

Kleiber [1995] zauważa, że w przypadku analiz sprężysto-plastycznych rozwiązania zależą od drogi obciążania, stąd też wpływ na jakość rozwiązania może mieć długość kroków obliczeniowych. Ma to miejsce szczególnie w przypadku analiz, gdzie występują lokalne odciążenia konstrukcji. Dobre rezultaty w takich problemach daje zastosowanie konsystentnej macierzy sztywności (zob. rozdz. 4.5).



Rys. 4.7 Ideowy algorytm MES uwzględniający nieliniowość materiałową

5. IMPLEMENTACJA W 6-PARAMETROWEJ NIELINIOWEJ TEORII POWŁOK

5.1 Aproksymacja skończenie wymiarowa i interpolacja

W pracy wykorzystuje się lagranżowskie powłokowe elementy skończone CAM (por. CHRÓŚCIELEWSKI I IN. [1992], CHRÓŚCIELEWSKI [1996], CHRÓŚCIELEWSKI I IN. [2004]). Punktem wyjścia sformułowania jest klasyczne (zob. np. ZIENKIEWICZ [1972]) założenie MES o aproksymacji dziedziny problemu

$$M \approx M_h = \sum_{e=1}^{N_e} \Pi_{(e)} \quad (5.1)$$

po powierzchni niepokrywających się dziedzin – elementów skończonych $\Pi_{(e)}$. Każdy element $\Pi_{(e)}$ jest obrazem tzw. elementu wzorcowego (macierzystego) $\pi_{(e)} = [-1, +1] \times [-1, +1]$. Element wzorcowy jest to zwarty i ograniczony obszar w R^2 , określony w bazie naturalnej $\xi = (\xi_1, \xi_2)$. Węzły typowego elementu skończonego $\Pi_{(e)}$ są określone przez ich wektory wodzące \mathbf{x}_a , ($a = 1, \dots, N$). Tutaj liczba węzłów N przyjmuje wartości 4, 9 lub 16. W każdym węźle określone jest sześć stopni swobody: trzy wirtualne (i rzeczywiste) przemieszczenia oraz trzy wirtualne (i rzeczywiste) parametry obrotu.

W ramach omawianego tu sformułowania występują trzy rodzaje zmiennych podlegających interpolacji. Są to: zmienne typu wektorowego np. wektor wodzący $\mathbf{x}(\xi)$ czy przemieszczenie translacyjne $\mathbf{u}(\xi)$ oraz jego wirtualne i rzeczywiste przyrosty, zmienna z grupy obrotów $so(3)$ tj. wektor wirtualnego obrotu $\mathbf{w}(\xi)$ i zmienne z grupy obrotów $SO(3)$, tzn. tensor obrotu $\mathbf{Q}_a = \mathbf{Q}(\xi_a)$ oraz tensory mikrostruktury $\mathbf{T}_a = \mathbf{T}(\xi_a)$ i $\mathbf{T}_{0a} = \mathbf{T}_0(\xi_a)$. Dla wymienionych zmiennych obowiązują różne sposoby interpolacji odpowiednio omówione poniżej, por. WITKOWSKI [2005], CHRÓŚCIELEWSKI, WITKOWSKI [2006], CHRÓŚCIELEWSKI I IN. [2011].

5.1.1 Interpolacja wielkości wektorowych

Wielkości o charakterze wektorowym w przestrzeni R^3 , podlegają interpolacji, której ogólny schemat zapisywany jest wzorem

$$\mathbf{x}(\xi) = \sum_{a=1}^{N_{(w)}} L_a(\xi) \mathbf{x}_a \quad (5.2)$$

Tutaj $N_{(w)} = \{4, 9, 16\}$ oznacza liczbę węzłów elementu skończonego, a $L_a(\xi)$ określa funkcję kształtu węzła a wyrażoną przez iloczyn dwóch wielomianów Lagrange'a

$$L_a(\xi) \stackrel{a \leftrightarrow i, j}{\equiv} L_i^n(\xi^1) L_j^n(\xi^2), \quad (5.3)$$

gdzie

$$L_i^n(\xi) = \frac{(\xi - \xi^0) \dots (\xi - \xi^{i-1})(\xi - \xi^{i+1}) \dots (\xi - \xi^n)}{(\xi^i - \xi^0) \dots (\xi^i - \xi^{i-1})(\xi^i - \xi^{i+1}) \dots (\xi^i - \xi^n)} \quad (5.4)$$

Tak określone węzłowe funkcje kształtu $L_a(\xi)$ tworzą elementową macierz funkcji kształtu, tj.

$$\mathbf{L}(\xi) = \left[\mathbf{L}_1(\xi) \quad \mathbf{L}_2(\xi) \quad \dots \quad \mathbf{L}_{N_w}(\xi) \right], \quad \mathbf{L}_a(\xi) = \begin{bmatrix} L_a(\xi) \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & L_a(\xi) \mathbf{1} \end{bmatrix}, \quad (5.5)$$

5.1.2 Interpolacja wielkości z grupy $SO(3)$

Poddanie bezpośredniej interpolacji typu (5.1) obiektów z grupy $SO(3)$ powoduje, w ogólnym przypadku, wyprowadzenie ich z tej grupy. Dyskusję tego zagadnienia można znaleźć m.in. w pracach CHRÓŚCIELEWSKI I IN. [1993, 2000, 2002], CHRÓŚCIELEWSKI [1996].

Procedurę interpolacji utrzymującą poddany temu działaniu obiekt w grupie $SO(3)$ można rozpisać na następujące kroki (opis za pracą WITKOWSKI [2005]):

- Ustalenie pewnego typowego reprezentanta $\bar{\mathbf{Q}} \in SO(3)$, zbioru dyskretnych wartości $\mathbf{Q}_a = \mathbf{Q}(\xi_a)$ funkcji $\mathbf{Q}(\xi)$ w węzłach $\pi_{(e)}$, ($a=1, \dots, n_w$). W autorskim programie numerycznym stosuje się do wyznaczenia $\bar{\mathbf{Q}}$ niezależną od położenia węzłów ortonormalizację uśrednionych po węzłach ($a=1, \dots, n_w$) składowych węzłowych wektorów najeżenia t_{ij}^a , $t_j^a = t_{ij}^a \mathbf{e}_i \Rightarrow \mathbf{t}_j^a$ zbioru wektorów elementu $\mathbf{Q}_a \Rightarrow \mathbf{Q}_a \equiv [\mathbf{t}_1^a \mid \mathbf{t}_2^a \mid \mathbf{t}_3^a]$. Wyróżnionym jest zawsze wektor normalny $t_3^a \Rightarrow \mathbf{t}_3^a$.
- „Przecignięcie” przy pomocy tak obliczonego $\bar{\mathbf{Q}}^T \in SO(3)$ wartości dyskretnych \mathbf{Q}_a z węzłów w bliskie otoczenie elementu neutralnego $\mathbf{1} \in SO(3)$ gdzie błąd interpolacji jest najmniejszy:

$$\mathbf{R}_a = \bar{\mathbf{Q}}^T \mathbf{Q}_a, \quad (a=1, \dots, n_w), \quad \bar{\mathbf{Q}} = const. \quad (5.6)$$

- Obliczenie w węzłach elementu wektora obrotu φ_a z przecigniętych blisko $\mathbf{1} \in SO(3)$ tensorów \mathbf{R}_a . W zastosowanej w niniejszej pracy parametryzacji kanonicznej (zob. dodatek A) wykorzystuje się równania:

$$\cos \varphi_a = \frac{1}{2}(tr \mathbf{R}_a - 1), \quad 2 \sin \varphi_a (\text{ad} \varphi_a) = \mathbf{R}_a^T - \mathbf{R}_a \Rightarrow \text{ad} \varphi_a = \frac{1}{2 \sin \varphi_a} (\mathbf{R}_a^T - \mathbf{R}_a). \quad (5.7)$$

- Interpolacja współrzędnych wektora obrotu $\tilde{\varphi}(\xi)$ jako elementów R^3 według schematu

$$\tilde{\varphi}(\xi) = \begin{Bmatrix} \tilde{\varphi}_1(\xi) \\ \tilde{\varphi}_2(\xi) \\ \tilde{\varphi}_3(\xi) \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^{n_w} L_a(\xi) \begin{Bmatrix} \varphi_{1a} \\ \varphi_{2a} \\ \varphi_{3a} \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^{n_w} L_a(\xi) \varphi_a, \quad (5.8)$$

a dla pochodnych dla $\varphi_{,\beta}$ zgodnie z regułą

$$\tilde{\varphi}(\xi)_{,\beta} = \begin{Bmatrix} \tilde{\varphi}_1(\xi)_{,\beta} \\ \tilde{\varphi}_2(\xi)_{,\beta} \\ \tilde{\varphi}_3(\xi)_{,\beta} \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^{n_w} L_a(\xi)_{,\beta} \begin{Bmatrix} \varphi_{1a} \\ \varphi_{2a} \\ \varphi_{3a} \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^{n_w} L_a(\xi)_{,\beta} \varphi_a, \quad (5.9)$$

gdzie przez $L_a(\xi)_{,\beta}$ oznaczono pochodne funkcji kształtu po współrzędnych łukowych (zob. np. CHRÓŚCIELEWSKI [1996]).

Obliczenie funkcji interpolujących $\tilde{\mathbf{R}}(\xi)$ i $\tilde{\mathbf{R}}(\xi)_{,\beta}$ z wykorzystaniem interpolacji parametrów $\tilde{\varphi}(\xi)$ oraz $\tilde{\varphi}(\xi)_{,\beta}$ odpowiednio zgodnie z formułami:

$$\tilde{\mathbf{R}}(\xi) = \mathbf{1} + \tilde{a}(\xi) (\text{ad}\tilde{\varphi}(\xi)) + \tilde{b}(\xi) (\text{ad}\tilde{\varphi}(\xi))^2, \quad (5.10)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{R}}(\xi)_{,\beta} = & \tilde{a}(\xi)_{,\beta} \tilde{\Phi}(\xi) + \tilde{a}(\xi) \tilde{\Phi}(\xi)_{,\beta} \\ & + \tilde{b}(\xi)_{,\beta} \tilde{\Phi}(\xi)^2 + \tilde{b}(\xi) (\tilde{\Phi}(\xi)_{,\beta} \tilde{\Phi}(\xi) + \tilde{\Phi}(\xi) \tilde{\Phi}(\xi)_{,\beta}), \end{aligned} \quad (5.11)$$

gdzie:

$$\tilde{\Phi}(\xi) = \text{ad}(\tilde{\varphi}(\xi)), \quad \tilde{\Phi}(\xi)_{,\beta} = \text{ad}(\tilde{\varphi}(\xi)_{,\beta}), \quad (5.12)$$

$$\tilde{a}(\xi) = \frac{\sin \|\tilde{\varphi}(\xi)\|}{\|\tilde{\varphi}(\xi)\|}, \quad \tilde{b}(\xi) = \frac{1 - \cos \|\tilde{\varphi}(\xi)\|}{\|\tilde{\varphi}(\xi)\|^2}, \quad (5.13)$$

$$\tilde{a}(\xi)_{,\beta} = \frac{\cos \|\tilde{\varphi}(\xi)\| - \tilde{a}(\xi)}{\|\tilde{\varphi}(\xi)\|^2} \tilde{\varphi}(\xi) \cdot \tilde{\varphi}(\xi)_{,\beta}, \quad \tilde{b}(\xi)_{,\beta} = \frac{-2\tilde{b}(\xi) - \tilde{a}(\xi)}{\|\tilde{\varphi}(\xi)\|^2} \tilde{\varphi}(\xi) \cdot \tilde{\varphi}(\xi)_{,\beta}. \quad (5.14)$$

e) „Popchnięcie” przy pomocy $\bar{\mathbf{Q}}$ funkcji $\tilde{\mathbf{R}}(\xi)$ i $\tilde{\mathbf{R}}(\xi)_{,\beta}$ do położenia wyjściowego:

$$\tilde{\mathbf{Q}}(\xi) = \bar{\mathbf{Q}} \tilde{\mathbf{R}}(\xi), \quad \bar{\mathbf{Q}} = \text{const}, \quad (5.15)$$

$$\tilde{\mathbf{Q}}_{,\beta}(\xi) = \bar{\mathbf{Q}} \tilde{\mathbf{R}}(\xi)_{,\beta}. \quad (5.16)$$

Tutaj symbol \mathbf{Q} reprezentuje nie tylko sam tensor obrotu ze wzoru (5.6), lecz także inne obiekty ortogonalne, np. tensory struktury $\mathbf{T}_0, \mathbf{T}, \mathbf{T}_{,\beta} \in SO(3)$. Niemniej jednak, w sposób właściwy dla każdego obiektu, należy wybrać reprezentanta odpowiadającego $\bar{\mathbf{Q}}$ z pkt. a).

5.1.3 Interpolacja wielkości z grupy $so(3)$

Wektor wirtualnego obrotu $\mathbf{w} \in so(3)$ podlega interpolacji po transformowaniu jego składowych do wyjściowego układu odniesienia \mathbf{e}_i tj.

$$\mathbf{w}(\xi) = w_i(\xi) \mathbf{t}_i(\xi) = \bar{w}_j(\xi) \mathbf{e}_j = \bar{w}_j(\xi) \mathbf{T}^T(\xi) \mathbf{t}_j(\xi). \quad (5.17)$$

Prowadzi to w konsekwencji do reguły interpolacji zapisanej wzorem

$$\begin{Bmatrix} \tilde{w}_1(\xi) \\ \tilde{w}_2(\xi) \\ \tilde{w}_3(\xi) \end{Bmatrix} = \mathbf{T}(\xi) \sum_{a=1}^N L_a(\xi) \begin{Bmatrix} \bar{w}_{1a} \\ \bar{w}_{1a} \\ \bar{w}_{1a} \end{Bmatrix} \quad (5.18)$$

w którym stosować należy procedurę interpolacji na grupie obrotów $SO(3)$.

5.2 Wektory i macierze elementowe

Podstawienie omówionych wyżej schematów interpolacyjnych do równania (2.38) i pominięcie na tym etapie etykiet przyrostowo-iteracyjnych, prowadzi do wyrażenia:

$$\begin{aligned} & \iint_M (\mathbf{w}^T \mathbf{B}^T \mathbf{C} \mathbf{B} \Delta \mathbf{u} + \mathbf{w}^T \mathbf{D}^T \mathbf{G} \mathbf{D} \Delta \mathbf{u}) da = \\ & = \iint_M \mathbf{w}^T \mathbf{p} da + \int_{\partial M_f} \mathbf{w}^T \mathbf{s}^* dl - \iint_M (\mathbf{B}(\mathbf{u}) \mathbf{w})^T \mathbf{s}(\mathbf{e}(\mathbf{u})) da, \quad \mathbf{B} = \bar{\mathbf{B}} \mathbf{L}, \quad \mathbf{D} = \bar{\mathbf{D}} \mathbf{L}, \end{aligned} \quad (5.19)$$

z którego, po aproksymacji (5.1), wynikają definicje następujących macierzy i wektorów opisujących element CAM (por. CHRÓŚCIELEWSKI I IN. [2004]):

- materiałowa część stycznej macierzy sztywności $\mathbf{K}_T^{(e)} = \mathbf{K}_M^{(e)} + \mathbf{K}_G^{(e)}$

$$\mathbf{K}_M^{(e)} = \iint_{\Pi(e)} \mathbf{L}^T \bar{\mathbf{B}}^T \mathbf{C} \bar{\mathbf{B}} \mathbf{L} da; \quad (5.20)$$

- geometryczna część stycznej macierzy sztywności

$$\mathbf{K}_G^{(e)} = \iint_{\Pi(e)} \mathbf{L}^T \bar{\mathbf{D}}^T \mathbf{G} \bar{\mathbf{D}} \mathbf{L} da; \quad (5.21)$$

- elementowy wektor obciążeń zewnętrznych

$$\mathbf{p}^{(e)} = \iint_{\Pi(e)} \mathbf{L}^T \mathbf{p} da + \int_{\partial \Pi(e)} \mathbf{L}^T \mathbf{s}^* ds; \quad (5.22)$$

- elementowy węzłowy wektor sił wewnętrznych

$$\mathbf{r}^{(e)} = \iint_{\Pi(e)} \mathbf{B}^T \mathbf{s}(\mathbf{u}) da. \quad (5.23)$$

W konsekwencji otrzymuje się z równania (5.19) macierzowe równanie:

$$\mathbf{K}_T^{(e)} \Delta \mathbf{q}_{(e)} = \Delta \mathbf{p}^{(e)} + \mathbf{j}^{(e)}, \quad \mathbf{j}^{(e)} = \mathbf{p}^{(e)} - \mathbf{r}^{(e)}. \quad (5.24)$$

Składnik $\Delta \mathbf{p}^{(e)}$ w (5.24) może być wyrażony jako

$$\Delta \mathbf{p}^{(e)} = \Delta \lambda \mathbf{p}_{ref}^{(e)}, \quad (5.25)$$

gdzie $\Delta \lambda$ jest przyrostem mnożnika obciążenia, zaś $\mathbf{p}_{ref}^{(e)}$ obciążeniem odniesienia.

W trakcie analizy konstrukcji, wektory i macierze zestawione we wzorach (5.20)-(5.23), są obliczane dla wszystkich elementów skończonych w dziedzinie problemu, a następnie podlegają działaniu agregacji (standardowa procedura MES, zob. np. KLEIBER [1989]). Procedura agregacji pozwala na sformułowanie globalnego układu równań, analogicznego do (5.24), w postaci:

$$\mathbf{K}_T \Delta \mathbf{q} = \Delta \mathbf{p} + \mathbf{j}, \quad \mathbf{j}^{(e)} = \mathbf{p}^{(e)} - \mathbf{r}^{(e)}. \quad (5.26)$$

5.3 Śledzenie ścieżek równowagi

Obliczenia numeryczne ścieżek równowagi wymagają wprowadzenia pojęcia przestrzeni rozszerzonej o wymiarze $N+1$, gdzie N oznacza liczbę stopni swobody zadania. Jej elementami są przyrosty $\Delta \bar{\mathbf{q}} = \{\Delta \mathbf{q}, \Delta \lambda\}^T$. Rozwiązanie układu równań (5.26) odbywa się pośrednio przez rozwiązanie tzw. rozszerzonego układu równań (zob. np. WASZCZYSZYN [1995]):

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_T^{(i)} & \mathbf{p}_{ref}^{(i)} \\ \bar{\mathbf{t}}^{(i)T} & \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta \mathbf{q}^{(i+1)} \\ \Delta \lambda^{(i+1)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{j}^{(i)} \\ \tau \end{Bmatrix}. \quad (5.27)$$

W (5.27) etykiety górne (i) odnoszą się do numeru iteracji w rozwiązaniu przyrostowo-iteracyjnym MES (por. rozdz. 4).

Formułując odpowiednią postać wektora $\bar{\mathbf{t}}$ można uzyskać różne techniki sterowania rozwiązaniem:

- $\bar{\mathbf{t}} = \{0, \dots, 0 | 1\}$, $\tau \equiv \Delta \lambda^*$ - sterowanie obciążeniem;
- $\bar{\mathbf{t}} = \{0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0 | 0\}$, $\tau \equiv \Delta q^*$ - sterowanie przemieszczeniem;
- $\bar{\mathbf{t}} = \left\{ \frac{\Delta \bar{\mathbf{q}}}{\|\Delta \bar{\mathbf{q}}\|} \right\}$, $\tau \equiv \Delta s^*$ - sterowanie parametrem łuku;

gdzie $\Delta \lambda^*$, Δq^* oraz Δs^* są zadanymi przyrostami tzw. parametrów kontrolnych. W niniejszej pracy, w przykładach numerycznych (rozdz. 7), stosowane jest sterowanie obciążeniem i przemieszczeniem (analizy sprężysto-plastyczne) oraz sterowanie parametrem łuku (wyłączenie analizy sprężyste).

W ogólności, układ równań (5.27) jest układem o niesymetrycznej macierzy współczynników. W przypadku sterowania obciążeniem lub przemieszczeniem przekształcenie układu do postaci, w której macierz współczynników jest symetryczna, jest trywialne. Inaczej jest w przypadku sterowania parametrem łuku. W programie CAM oryginalnie zaimplementowano procedurę rozwiązywania niesymetrycznego (ze względu na ostatni wiersz i kolumnę) układu równań dla tego przypadku. Jednym z celów niniejszej pracy była implementacja nowych procedur rozwiązywania układów równań (zob. rozdz. 6),

dedykowanych układom symetrycznym. Stąd też konieczne było zastosowanie rozwiązania układu (5.27) równań nie bezpośrednio, lecz według niniejszej procedury.

Wektor $\bar{\mathbf{t}}$ ma postać

$$\bar{\mathbf{t}} = \left\{ \frac{\Delta \bar{\mathbf{q}}}{\|\Delta \bar{\mathbf{q}}\|} \right\} = \left\{ \frac{\Delta \mathbf{q}}{\|\Delta \mathbf{q}\|}, \frac{\Delta \lambda}{\|\Delta \bar{\mathbf{q}}\|} \right\} = \{\bar{\mathbf{t}}_{\mathbf{q}}, \Delta \bar{\lambda}\}, \quad (5.28)$$

zatem układ równań (5.27) można zapisać jako:

$$\mathbf{K}_T^{(i)} \Delta \mathbf{q}^{(i+1)} + \mathbf{p}_{ref}^{(i)} \Delta \lambda^{(i+1)} = \mathbf{j}^{(i)}, \quad (5.29)$$

$$\bar{\mathbf{t}}_{\mathbf{q}}^{(i)T} \Delta \mathbf{q}^{(i+1)} + \Delta \bar{\lambda}^{(i)} \Delta \lambda^{(i+1)} = \tau. \quad (5.30)$$

Mnożąc lewostronnie równanie (5.29) przez $[\mathbf{K}_T^{(i)}]^{-1}$ otrzymujemy

$$\Delta \mathbf{q}^{(i+1)} + [\mathbf{K}_T^{(i)}]^{-1} \mathbf{p}_{ref}^{(i)} \Delta \lambda^{(i+1)} = [\mathbf{K}_T^{(i)}]^{-1} \mathbf{j}^{(i)}. \quad (5.31)$$

Wyznaczenie z (5.31) wektora $\Delta \mathbf{q}^{(i+1)}$ i wstawienie go do (5.30) po przekształceniach daje wyrażenie

$$\Delta \lambda^{(i+1)} = \frac{\tau - \bar{\mathbf{t}}_{\mathbf{q}}^{(i)T} [\mathbf{K}_T^{(i)}]^{-1} \mathbf{j}^{(i)}}{\Delta \bar{\lambda} - \bar{\mathbf{t}}_{\mathbf{q}}^{(i)T} [\mathbf{K}_T^{(i)}]^{-1} \mathbf{p}_{ref}^{(i)}}. \quad (5.32)$$

Znając wartość $\Delta \lambda^{(i+1)}$, z przekształcenia (5.31) można znaleźć wartość $\Delta \mathbf{q}^{(i+1)}$, co daje pełne rozwiązanie wyjściowego układu równań. Należy podkreślić, że w obliczeniach numerycznych nie ma potrzeby wyznaczania odwrotności macierzy $\mathbf{K}_T^{(i)}$, składniki $[\mathbf{K}_T^{(i)}]^{-1} \mathbf{j}^{(i)}$ i $[\mathbf{K}_T^{(i)}]^{-1} \mathbf{p}_{ref}^{(i)}$ uzyskuje się przez rozwiązanie układu równań z symetryczną macierzą współczynników $\mathbf{K}_T^{(i)}$.

5.4 Prawo konstytutywne dla sił i momentów przekrojowych

Na potrzeby dalszych rozważań wprowadza się indeksy m, s, b, d oznaczające odpowiednio składniki membranowe, poprzeczne, zgięciowe i związane z owinięciem. W kolejnym kroku odkształcenia na powierzchni odniesienia powłoki zestawiane są w wektor

$$\mathbf{e}^M = \{e_{11}^M \ e_{22}^M \ e_{12}^M \ e_{21}^M \ | \ e_1^M \ e_2^M \ | \ \kappa_{11}^M \ \kappa_{22}^M \ \kappa_{12}^M \ \kappa_{21}^M \ | \ \kappa_1^M \ \kappa_1^M \}^T = \{\mathbf{e}_m^M \ | \ \mathbf{e}_s^M \ | \ \mathbf{e}_b^M \ | \ \mathbf{e}_d^M \}^T. \quad (5.33)$$

Celem rozróżnienia odkształceń na powierzchni odniesienia od odkształceń w warstwie wprowadzono indeks górny M wyróżniający te pierwsze. Energetycznie sprzężone z odkształceniami \mathbf{e}^M są siły i momenty przekrojowe (zob. CHRÓŚCIELEWSKI [1996]), zgrupowane w wektorze

$$\mathbf{s} = \{N^{11} N^{22} N^{12} N^{21} | Q^1 Q^2 | M^{11} M^{22} M^{12} M^{21} | M^1 M^2\}^T = \{\mathbf{s}_m | \mathbf{s}_s | \mathbf{s}_b | \mathbf{s}_d\}^T. \quad (5.34)$$

Relację między wektorami \mathbf{e}^M i \mathbf{s} określa macierz konstytutywna \mathbf{C} taka, że

$$\mathbf{s} = \mathbf{C} \mathbf{e}^M. \quad (5.35)$$

Wyprowadzenie jej składników będzie przedmiotem poniższych rozważań.

Podstawowym założeniem przyjętym tutaj do określenia rozkładu odkształceń po grubości powłoki jest założenie kinematyczne powszechnie znane jako teoria Reissnera-Mindlina¹ (R-M). Wprowadzone jest ono tylko na poziomie formułowania równań konstytutywnych, wprowadzona w rozdz. 2 teoria jest wolna od tego typu założeń. Mówi ono o tym, że zbiór punktów materialnych, leżących na prostej prostopadłej do powierzchni odniesienia w konfiguracji początkowej, leży na prostej w dowolnej konfiguracji aktualnej. Zamiennie do terminu „kinematyka Reissnera-Mindlina” można użyć określenia „teoria ścinania pierwszego rzędu” (ang. *First Order Shear Theory - FOSD*). Przegląd literatury na ten temat można znaleźć na przykład w pracach KREJA, SCHMIDT [2006], KREJA [2007], WITKOWSKI [2011], SABIK [2012], czy REDDY [1997] i cytowanej tam literaturze.

Po pierwsze, niezbędne jest wyrażenie odkształceń $\boldsymbol{\varepsilon}$ w warstwie powłoki wzdłuż grubości jako zależnych od \mathbf{e}^M . Wykorzystując oznaczenia ze wzorów (3.27)₃ oraz (5.33), można zapisać:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_m = \mathbf{e}_m^M + \zeta \mathbf{e}_b^M, \quad \boldsymbol{\varepsilon}_d = \mathbf{e}_d^M \cdot l, \quad (5.36)$$

gdzie ζ jest współrzędną wzdłuż grubości powłoki, przyjmującą wartości od $-h^-$ do h^+ , zaś l długością charakterystyczną mikrostruktury (zob. (3.27)₂).

W ogólności, ze względu na plastyczny charakter deformacji, prawo konstytutywne łączące składniki zestawione w wektorach $\boldsymbol{\varepsilon}$ i $\boldsymbol{\sigma}$ należy zapisać dla przyrostów $d\boldsymbol{\varepsilon}$ i $d\boldsymbol{\sigma}$ jako

$$d\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C}_l d\boldsymbol{\varepsilon}, \quad (5.37)$$

gdzie

$$\mathbf{C}_l = \begin{cases} \mathbf{C}_l^e & \text{w stanie sprężystym} \\ \mathbf{C}_l^{ep} & \text{w stanie plastycznym} \end{cases}. \quad (5.38)$$

Następnym krokiem jest wyrażenie sił i momentów przekrojowych w postaci przekrojowej (całkowej). Ze względu na charakter relacji (5.37) możliwe jest tylko obliczenie przyrostów sił i momentów przekrojowych. Dla uproszczenia zapisu, w poniższych wyprowadzeniach pominięto przyrostowy charakter wielkości.

¹ Jest to nazwa zwyczajowa, dyskusję na ten temat można znaleźć u JEMIELITY [1991].

Definicję sił przekrojowych jako wynikających ze scałkowania stanu naprężenia w powłoce po jej grubości można znaleźć w wielu pozycjach literatury dotyczącej powłok. Warto w tym miejscu wskazać takie prace jak ŁUKASIEWICZ [1976], PIETRASZKIEWICZ [1977], BAŞAR, KRÄTZIG [2000], LEWIŃSKI, TELEGA [2000], KREJA [2007].

Wartości sił przekrojowych (5.34) są dane następującymi wyrażeniami:

$$\begin{aligned} \mathbf{s}_m &= \int_{-h^-}^{+h^+} \boldsymbol{\sigma}_m \mu d\zeta = \int_{-h^-}^{+h^+} [\mathbf{C}_{mm} \underbrace{(\mathbf{e}_m + \zeta \mathbf{e}_b)}_{\boldsymbol{\epsilon}_m} + \mathbf{C}_{md} \underbrace{l \cdot \mathbf{e}_d}_{\boldsymbol{\epsilon}_d}] \mu d\zeta, \\ &= \mathbf{A}_{mm} \mathbf{e}_m + \mathbf{B}_{mb} \mathbf{e}_b + \mathbf{D}_{md} \mathbf{e}_d \end{aligned} \quad (5.39)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{s}_b &= \int_{-h^-}^{+h^+} \boldsymbol{\sigma}_m \zeta \mu d\zeta \\ &= \int_{-h^-}^{+h^+} [\mathbf{C}_{mm} (\zeta \mathbf{e}_m + \zeta^2 \mathbf{e}_b) + \zeta l \cdot \mathbf{C}_{md} \mathbf{e}_d] \mu d\zeta, \\ &= \mathbf{B}_{bm} \mathbf{e}_m + \mathbf{E}_{bb} \mathbf{e}_b + \mathbf{F}_{bd} \mathbf{e}_d \end{aligned} \quad (5.40)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{s}_d &= \int_{-h^-}^{+h^+} l \cdot \boldsymbol{\sigma}_d \mu d\zeta \\ &= \int_{-h^-}^{+h^+} [l \cdot \mathbf{C}_{dm} (\mathbf{e}_m + \zeta \mathbf{e}_b) + l^2 \cdot \mathbf{C}_{dd} \cdot \mathbf{e}_d] \mu d\zeta, \\ &= \mathbf{D}_{dm} \mathbf{e}_m + \mathbf{F}_{db} \mathbf{e}_b + \mathbf{H}_{dd} \mathbf{e}_d \end{aligned} \quad (5.41)$$

gdzie \mathbf{C}_{mm} , \mathbf{C}_{md} , \mathbf{C}_{dm} , \mathbf{C}_{dd} są blokami operatora sprężystego (zob. (3.28)) bądź plastycznego (zob. (3.78) oraz (4.32)). We wzorach (5.39)-(5.41) składnik μ jest wyznacznikiem tzw. tensora przeniesienia (ang. *shifter tensor*) (zob. np. KONOPÍŃSKA, PIETRASZKIEWICZ [2007]), określonym jako (BAŞAR, KRÄTZIG [2000])

$$\mu = 1 - 2\zeta H + \zeta^2 K, \quad (5.42)$$

gdzie H oraz K oznaczają odpowiednio krzywiznę średnią i Gaussa (zob. dodatek B). W niniejszej pracy przyjęto że $\mu = 1$, co jest założeniem uzasadnionym dla cienkich powłok ($h \ll L$, L - przeciętny wymiar) o małej krzywiznie ($h \ll R_{min}$, R_{min} - minimalna krzywizna).

Siły poprzeczne \mathbf{s}_s nie podlegają całkowaniu po grubości i są wyrażone wprost jako zależne od $\boldsymbol{\epsilon}_s^M$

$$\mathbf{s}_s = \mathbf{D}_{ss} \mathbf{e}_s^M = \begin{bmatrix} G\alpha_s & 0 \\ 0 & G\alpha_s \end{bmatrix} \mathbf{e}_s^M. \quad (5.43)$$

Powyższy związek nie uwzględnia wpływu plastyczności, co jest uzasadnione małym wpływem sił poprzecznych na uplastycznienie cienkich powłok (zob. np. DUJC, BRANK [2012]). Przegląd proponowanych wartości i dyskusję wpływu współczynnika ścinania α_s

można znaleźć np. w BADUR [1984], CHRÓŚCIELEWSKI I IN. [2010]. W niniejszej pracy przyjęto $\alpha_s = 1$.

Ostatecznie (5.35) może być zapisane jako

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{s}_m \\ \mathbf{s}_s \\ \mathbf{s}_b \\ \mathbf{s}_d \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{mm} & \mathbf{0} & \mathbf{B}_{mb} & \mathbf{D}_{md} \\ \mathbf{0} & \mathbf{D}_{ss} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{B}_{mb}^T & \mathbf{0} & \mathbf{E}_{bb} & \mathbf{F}_{bd} \\ \mathbf{D}_{md}^T & \mathbf{0} & \mathbf{F}_{bd}^T & \mathbf{H}_{dd} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{e}_m \\ \mathbf{e}_s \\ \mathbf{e}_b \\ \mathbf{e}_d \end{Bmatrix}. \quad (5.44)$$

Całki z równań (5.39)-(5.41) mogą być podane w zamkniętej formie w zakresie sprężystym tj. jeśli $\mathbf{C}_l = \mathbf{C}_l^e$ w każdym punkcie na grubości. W tab. 5.1 zestawiono równania konstytutywne w zakresie sprężystym wynikające z powyższych rozważań oraz z pracy CHRÓŚCIELEWSKI I IN. [1992]. Wyprowadzenie zaprezentowanego w tab. 5.1 równania konstytutywnego zawarto w pracy BURZYŃSKI I IN. [2014a].

Tab. 5.1. Równania konstytutywne w zakresie sprężystym.

składnik	niniejsza praca	CHRÓŚCIELEWSKI I IN. [1992]
$N^{11} =$	$C(\varepsilon_{11} + \nu\varepsilon_{22})$	$C(\varepsilon_{11} + \nu\varepsilon_{22})$
$N^{22} =$	$C(\varepsilon_{22} + \nu\varepsilon_{11})$	$C(\varepsilon_{22} + \nu\varepsilon_{11})$
$N^{12} =$	$\frac{1}{2}C(1-\nu)\frac{1}{1-N^2}[\varepsilon_{12} + \varepsilon_{21}(1-2N^2)]$	$C(1-\nu)\varepsilon_{12}$
$N^{21} =$	$\frac{1}{2}C(1-\nu)\frac{1}{1-N^2}[\varepsilon_{12}(1-2N^2) + \varepsilon_{21}]$	$C(1-\nu)\varepsilon_{21}$
$M^{11} =$	$D(\kappa_{11} + \nu\kappa_{22})$	$D(\kappa_{11} + \nu\kappa_{22})$
$M^{22} =$	$D(\kappa_{22} + \nu\kappa_{11})$	$D(\kappa_{22} + \nu\kappa_{11})$
$M^{12} =$	$\frac{1}{2}D(1-\nu)\frac{1}{1-N^2}[\kappa_{12} + \kappa_{21}(1-2N^2)]$	$D(1-\nu)\kappa_{12}$
$M^{21} =$	$\frac{1}{2}D(1-\nu)\frac{1}{1-N^2}[\kappa_{12}(1-2N^2) + \kappa_{21}]$	$D(1-\nu)\kappa_{21}$
$M^1 =$	$2\mu hl^2 \kappa_1$	$\alpha_i D(1-\nu) \kappa_1$
$M^2 =$	$2\mu hl^2 \kappa_2$	$\alpha_i D(1-\nu) \kappa_2$
$C = \frac{Eh}{1-\nu^2}, D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}, N^2 = \frac{\mu_c}{\mu + \mu_c}.$		

W powyższych równaniach pojawia się stała α_i tzw. współczynnik owinięcia. Wpływ tego parametru materiałowego na uogólnione przemieszczenia powłok jest dyskutowany m.in. w pracy CHRÓŚCIELEWSKI [1996]. Pełna zgodność między przedstawionymi relacjami konstytutywnymi zachodzi gdy:

$$\mu = \mu_c \text{ oraz } l = \frac{h}{2} \sqrt{\frac{\alpha_t}{3}}. \quad (5.45)$$

Literatura (CHRÓSCIELEWSKI [1996]) podaje wartości $0 < \alpha_t < 1$, jako niemające znaczącego wpływu na uogólnione przemieszczenia powłok. Stąd podobnie mały wpływ powinno mieć przyjmowanie długości charakterystycznej z przedziału $0 < l < 0,289h_0$ (h_0 - grubość powłoki). Są to jednak oszacowania zgrubne. Pojawiające się w tab. 5.1 współczynniki C , D oraz N^2 to odpowiednio sztywność na rozciąganie, sztywność zgięciowa (płytkowa) oraz liczba sprzężenia (ang. *coupling number*, zob. np. NEFF [2008]).

W literaturze (zob. np. EBERLEIN, WRIGGERS [1999]) mylnie interpretuje się współczynnik owinięcia α_t jako współczynnik kary. Wykazana zależność (5.45)₂ umacnia interpretację α_t jako parametru materiałowego właściwego nieliniowej 6-parametrowej teorii powłok.

Jeśli w dowolnym punkcie na grubości powłoki proces plastyczny jest aktywny macierz konstytutywna przyjmuje wartość $\mathbf{C}_l = \mathbf{C}_l^{ep}$. W takim przypadku niezbędne jest obliczenie wartości z równań (5.39)-(5.41) z wykorzystaniem technik całkowania numerycznego (zob. dodatek C).

6. EFEKTYWNOŚĆ OBLICZEŃ

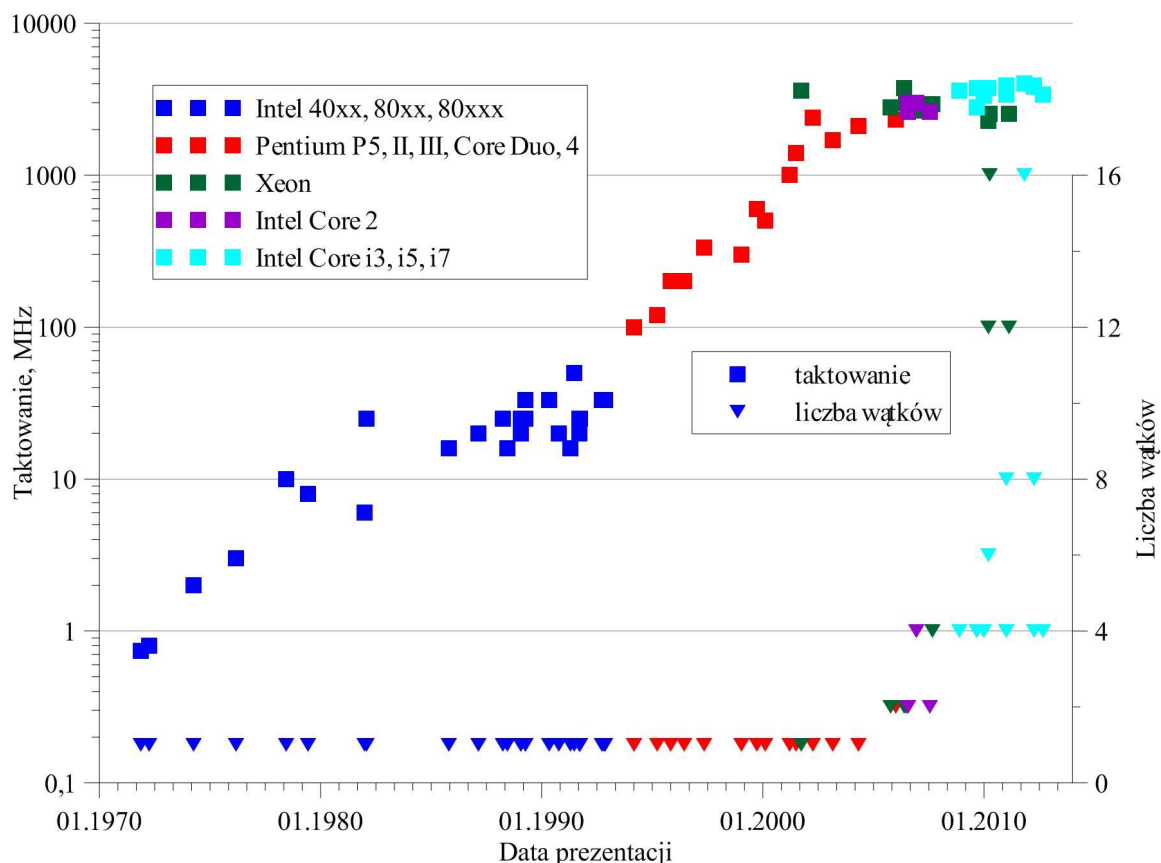
Jak wspomniano we wstępie, analiza numeryczna jest podstawowym narzędziem pracy wielu badaczy oraz projektantów konstrukcji inżynierskich. Zasadniczą cechą metod numerycznych jest zastąpienie układu o nieskończonej liczbie stopni swobody układem o liczbie skończonej. Jedną ze stosowanych metod jest metoda Ritza, jej zasadniczą wadą jest problem z doбором funkcji aproksymacyjnych na całym obszarze zadania. Problem ten przezwyciężono w Metodzie Elementów Skończonych, gdzie stosowana jest aproksymacja zlokalizowana (zob. KLEIBER [1989]). W początkowej fazie rozwoju MES główną przeszkodą na drodze do jej pełnego wykorzystania w praktyce były ograniczone zasoby maszyn obliczeniowych. Wraz z rozwojem komputerów klasy PC (*Personal Computer* – komputer osobisty) stały się one powszechnym narzędziem pracy. Istniejące algorytmy pozwalają na modelowanie skomplikowanych obiektów, w których siatki dyskretyzacyjne są bardzo rozbudowane, co skutkuje koniecznością rozwiązywania wielkich układów równań i przechowywania dużych ilości danych.

Na czas wykonania obliczeń mają wpływ dwa podstawowe czynniki: struktura algorytmu programu oraz wydajność sprzętu komputerowego. W niniejszym rozdziale przedstawiono proponowane przez autora udoskonalenia programu obliczeniowego, mające na celu dostosowanie go do nowoczesnych możliwości języka programowania Fortran oraz architektury komputerów.

6.1 Rozwój komputerów osobistych

Lata 70-te i 80-te XXw. przyniosły rewolucję w dostępie do obliczeń numerycznych. Komputery klasy PC stały się dostępne dla każdego użytkownika, a ich oprogramowanie i sprzęt udoskonalano w bardzo szybkim tempie. Jednym z głównych parametrów stanowiącym o efektywności obliczeń numerycznych prowadzonych na danej jednostce jest częstotliwość taktowania procesora. Decyduje ona o liczbie operacji możliwych do wykonania w danym czasie. Przez wiele lat procesory miały architekturę jednordzeniową – co oznacza, że z deklarowaną częstotliwością taktowania mogły realizować tylko jeden wątek obliczeniowy. Wprowadzenie procesorów wielordzeniowych (a przez to wielowątkowych) znacząco zwiększyło efektywność obliczeń – deklarowana częstotliwość, a zatem szybkość obliczeń, może być osiągnięta dla kilku zadań jednocześnie.

Na rys. 6.1 zestawiono częstotliwość taktowania kolejnych generacji procesorów produkowanych przez firmę INTEL oraz podano iloma wątkami obliczeniowymi dysponuje procesor. Do około 2005 r. częstotliwości procesorów zwiększano wykładniczo. Od tej daty rozwój nastąpił przez zwiększanie liczby dostępnych wątków obliczeniowych, gdyż wzrost prędkości procesorów uległ wyhamowaniu (maksymalne taktowanie na poziomie 2-3GHz). Obecnie bardzo popularne są komputery oferujące 4 wątki obliczeniowe, zaś maszyny dedykowane obliczeniom inżynierskim mają ich nawet 16. Zupełnie inną klasę urządzeń stanowią tzw. klastry obliczeniowe, w których równolegle pracujących procesorów mogą być setki.

Rys. 6.1 Rozwój procesorów Intel – taktowanie oraz liczba wątków¹.

Zmiana w trendzie rozwoju procesorów pociągnęła za sobą zmiany w praktyce tworzenia algorytmów obliczeniowych. Dla zachowania wzrostu szybkości działania programów konieczne stało się stworzenie algorytmów wielowątkowych, tj. takich w których część pracy jest rozdzielana pomiędzy dostępne niezależne wątki i realizowana jednocześnie.

6.2 Koncepcja obliczeń wielowątkowych

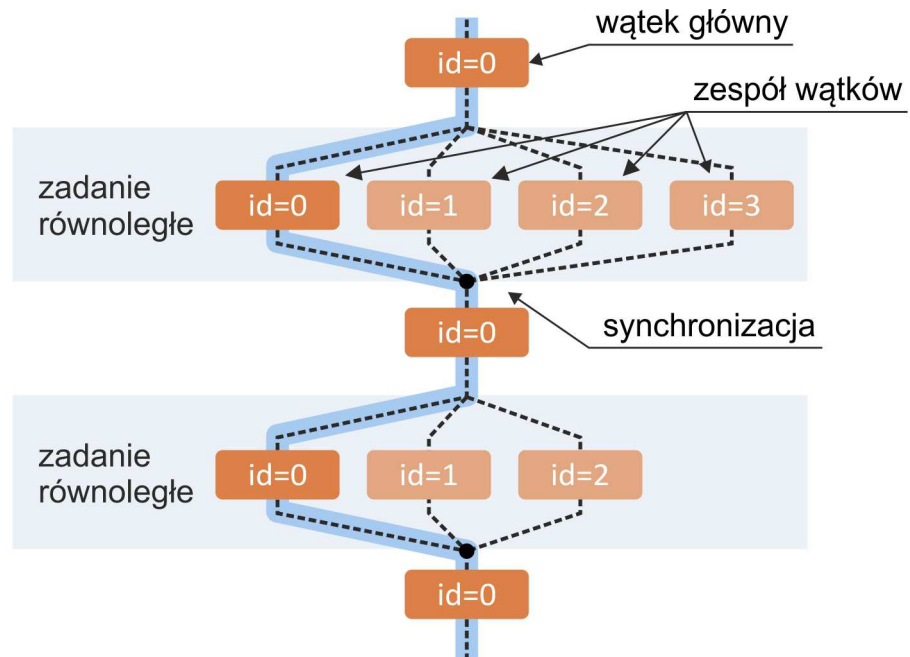
W autorskim programie do zrównoleglenia obliczeń wykorzystano bibliotekę OPENMP (ang. *Open Multi-Processing*)². Biblioteka ta obsługuje dyrektywy kompilatora i zmienne środowiskowe oraz zawiera bibliotekę procedur pozwalających na wprowadzenie wielowątkowości do programów pisanych w języku Fortran oraz C/C++. Niewątpliwą zaletą tej biblioteki jest fakt, że zrównoleglenie programu można uzyskać bez znacznych modyfikacji jego kodu. Dokumentacja biblioteki jest zwarta i czytelna, zaś sama biblioteka jest ciągle udoskonalana i dostosowywana do najnowszego sprzętu komputerowego.

U podstawy koncepcji obliczeń wielowątkowych leży schemat pracy o nazwie *fork and join* (w wolnym tłumaczeniu: *podziel i połącz*) przedstawiony na rys. 6.2. W czasie pracy programu cały czas aktywny jest wątek główny (z przypisanym identyfikatorem $id=0$). W momencie rozpoczęcia zadania równoległego następuje podział zadań obliczeniowych (faza *fork*) pomiędzy wątki zebrane w zespół. Każdy z wątków może na określonych

¹ http://en.wikipedia.org/wiki/List_of_Intel_microprocessors

² <http://openmp.org/wp/>

zasadach korzystać ze wspólnej pamięci (np. w celu odczytu danych), ale ma też pamięć prywatną, niewidoczną dla innych wątków. Gdy każdy z wątków zakończy przypisaną do niego pracę, następuje zredukowanie aktywnych wątków do jednego (faza *join*), wyniki pracy są synchronizowane według określonych zasad, a zasoby prywatne są usuwane. Fazy sekwencyjne i równoległe mogą następować po sobie w dowolnej kolejności, angażując do pracy określoną lub maksymalną dostępną liczbę wątków obliczeniowych. Procedury biblioteki OPENMP w automatyczny sposób tworzą prywatne zasoby pamięci (co może znacząco zwiększyć zapotrzebowanie aplikacji na pamięć operacyjną) i wykonują wszelkie działania związane z zarządzaniem aktywnymi wątkami bez ingerencji programisty.



Rys. 6.2 OPENMP – schemat algorytmu *fork-join*.

Zasadniczy algorytm programów komputerowych bazujących na MES jest sekwencyjny – np. rozwiązanie układu równań musi być poprzedzone sformułowaniem globalnej macierzy sztywności. Są jednak fragmenty programu, gdzie obliczenia można rozdzielić na niezależne od siebie zadania, np. w przypadku formułowania elementowych macierzy i wektorów. Możliwy jest zatem podział pracy w tej fazie obliczeń pomiędzy wątki obliczeniowe, co też zostało zaimplementowane w programie autorskim. Ze względu na konieczność iteracyjnego poszukiwania rozwiązania problemu plastyczności (zob. rozdz. 4.) na poziomie punktu całkowania oraz całkowanie po grubości stanu naprężenia (zob. rozdz. 5.) procedura tworzenia lokalnych macierzy i wektorów jest znacznie bardziej czasochłonna niż w przypadku analizy sprężystej.

Przyspieszenie pracy programu używającego wielu wątków jest związane z pojęciem skalowalności obliczeń (zob. np. GRAMA I IN. [2003]). Miarą skalowalności jest przyspieszenie $S(p)$ (ang. *speedup*) określone jako

$$S(p) = \frac{t(1)}{t(p)}, \quad (6.1)$$

gdzie p oznacza liczbę aktywnych wątków obliczeniowych, zaś $t(n)$ jest czasem wykonania zadania przez n wątków. Pożądane jest przyspieszenie liniowe, tj. $S(p) = p$ lub superliniowe $S(p) > p$. Wystąpienie przyspieszenia superliniowego jest możliwe ze względu na specyfikę tzw. pamięci cache, która może być efektywniej wykorzystana przez kilka równoległe działających małych zadań, niż przez jedno duże (zob. GRAMA I IN. [2003]). W większości przypadków jest $S(p) < p$, co wynika z niemożności zrównoleglenia całego kodu programu oraz dodatkowego czasu niezbędnego na przesyłanie informacji. Obok przyspieszenia definiowana jest także wydajność $E(p)$, według wzoru

$$E(p) = \frac{S(p)}{p}. \quad (6.2)$$

Dla przyspieszenia liniowego $E(p) = 1$, zazwyczaj jest to mniejsza wartość. Przyspieszenie superliniowe implikuje $E(p) \geq 1$.

Przyspieszenie może być oszacowane przez zaprezentowane w 1967 r. tzw. prawo Amdahla³. Rozpatrzmy pewien program komputerowy, który ma być częściowo zrównoleglony (rys. 6.3). Gdy obliczenia realizowane są na 1 wątku, całkowity czas trwania zadania wynosi t_s . Bezwymiarowa wielkość f określa, jaka część programu nie została zrównoleglona. Uruchomienie tego samego zadania przy $p = 4$ aktywnych wątkach powoduje skrócenie czasu obliczeń do czasu t_p .

Na podstawie rys. 6.3, zapisać można

$$t_p = f \times t_s + \frac{(1-f) \times t_s}{p}, \quad (6.3)$$

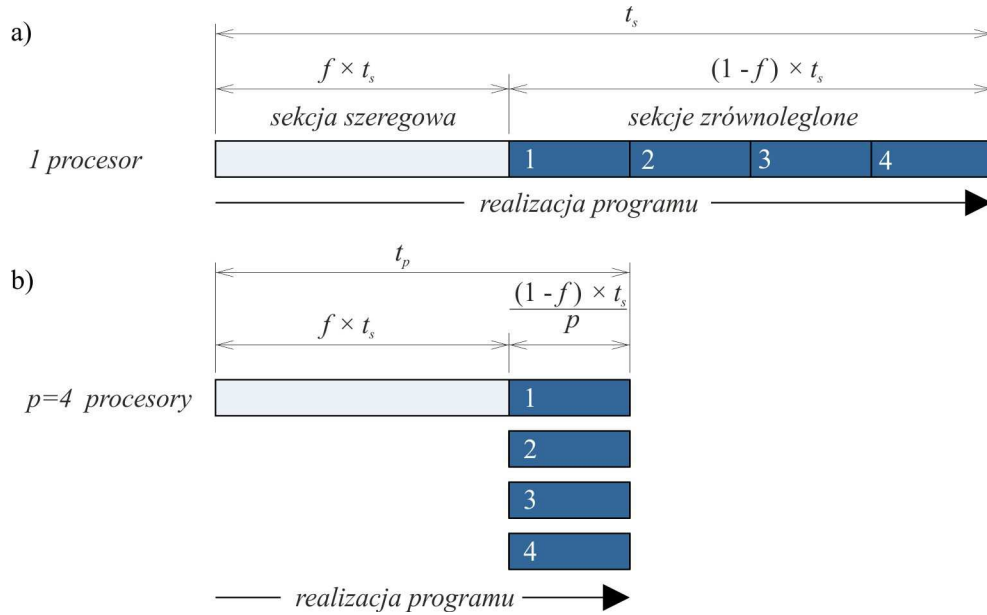
a zatem

$$S(p) = \frac{t_s}{t_p} = \frac{p}{1 + f(p-1)}. \quad (6.4)$$

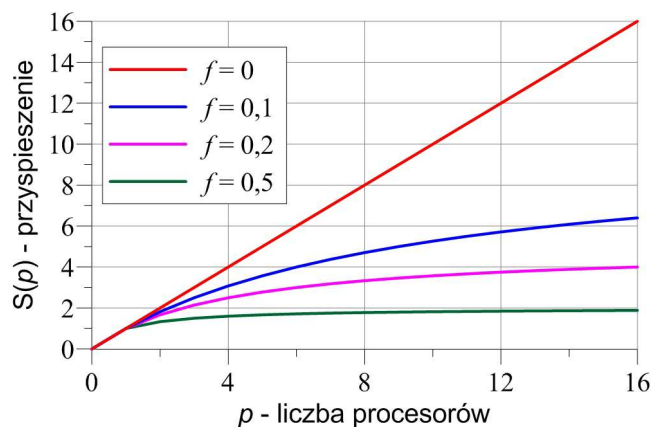
Równanie (6.4) jest nazywane prawem Amdahla. Z formuły (6.4) wynika

$$\lim_{p \rightarrow \infty} S(p) = \frac{1}{f}, \quad (6.5)$$

³ Gene Amdahl (ur. 1922), pracownik IBM, założyciel firmy Amdahl

Rys. 6.3 Realizacja częściowo równoległego programu a) na 1 procesorze b) na $p = 4$ procesorach.

co oznacza, że nawet nieskończona liczba procesorów nie da przyspieszenia większego niż $1/f$. Przyspieszenie $S(p)$ dla różnych współczynników f zestawiono na rys. 6.4. Prawo Amdahla daje zazwyczaj zawyżone wartości przyspieszenia, ma jednak duże znaczenie praktyczne. Można np. oszacować, że jeśli dysponujemy programem, w którym równoległono połowę kodu, to nieopłacalne jest uruchamianie go z użyciem więcej niż 4 procesorów, zmiana przyspieszenia w takim przypadku będzie nieodczuwalna. W rozdz. 7 przedstawione zostanie porównanie przyspieszenia uzyskanego z wykorzystaniem formuły (6.4) z rzeczywiście zmierzonym na pracującym programie (wzór (6.1)).

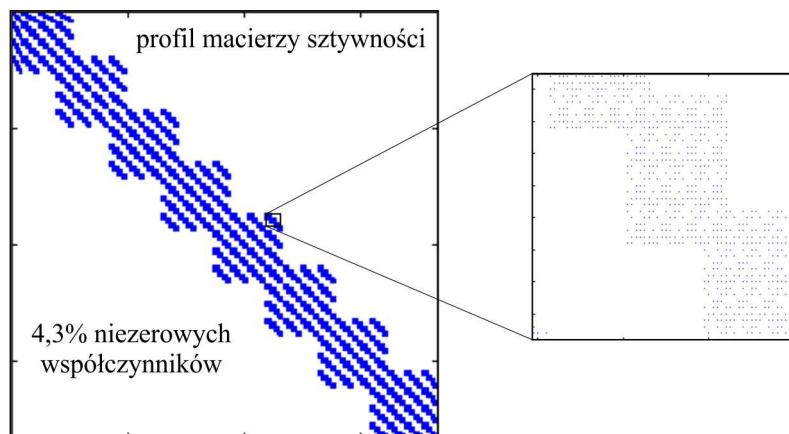


Rys. 6.4 Prawo Amdahla – przyspieszenie obliczeń przy różnym współczynniku równoleglenia kodu.

6.3 Rozwiązywanie rzadkich układów równań

Oddzielnym zagadnieniem jest implementacja algorytmów rozwiązywania rzadkich układów równań (w żargonie: solverów). W klasycznej MES w zagadnieniach statyki generowane są tzw. rzadkie układy równań. Są to układy, w których w macierzy współczynników tylko nieliczne wartości są niezerowe. W przykładach realizowanych w niniejszej pracy stosunek niezerowych współczynników do wszystkich współczynników

jest na poziomie kilku procent. Niezerowe współczynniki zazwyczaj zgromadzone są w pobliżu głównej przekątnej macierzy, związane jest z tym pojęcie *szerokości półpasma* macierzy. Na rys. 6.5 pokazano profil przykładowej macierzy sztywności (zadanie zamieszczone w rozdz. 7.5, 1824 równania).



Rys. 6.5 Profil rzadkiej macierzy sztywności.

W programie komputerowym CiMplast zaimplementowano solwery z bibliotek HSL i PARDISO. Biblioteka HSL⁴ (dawniej Harwell Subroutine Library) jest kolekcją procedur dedykowanych obliczeniom naukowym angażującym bardzo duże zbiory danych. Jest rozwijana od 50 lat, obecnie w STFC Rutherford Appleton Laboratory w brytyjskim Oxfordshire. Dostępne procedury posiadają interfejsy w języku Fortran, C i Matlab. Lista procedur obejmuje kody dedykowane zadaniom: wyznaczania wartości i wektorów własnych, programowania liniowego (problemy optymalizacji), algebry liniowej (rozwiązywania rzadkich układów równań różnych typów i różnymi metodami) oraz rozwiązywania nieliniowych układów równań. Biblioteka jest dostępna nieodpłatnie na licencji akademickiej. Procedury mogą być wywoływane w trybie sekwencyjnym lub wielowątkowym. Zaletą kodów HSL jest ich dostępność w otwartej, nieskompilowanej postaci.

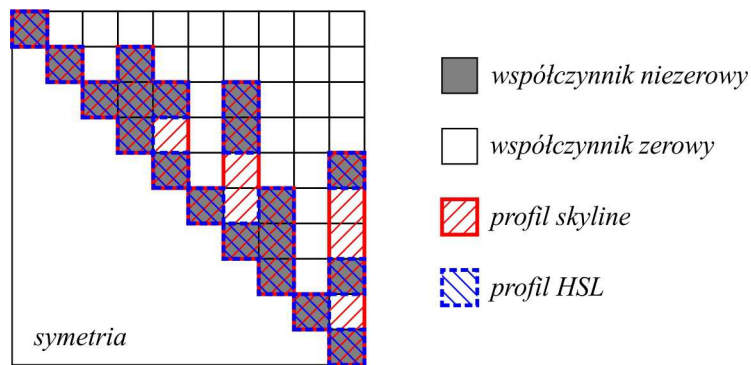
Projekt PARDISO⁵ jest natomiast dedykowany tylko rozwiązywaniu rzadkich układów równań liniowych o wielu niewiadomych. Jest to kod zamknięty, dostępne są interfejsy do języka Fortran, C, C++ i Matlab. Biblioteka jest udostępniona nieodpłatnie do celów akademickich. Producenci biblioteki deklarują, że jest ona dedykowana użyciu na komputerach wielowątkowych, zaś jej wyróżniającą cechą jest dobra gospodarka pamięcią.

Istotnym zagadnieniem jest sposób przechowywania profilu macierzy sztywności w pamięci komputera. Oryginalnie zaimplementowany w programie CAM (zob. CHRÓŚCIELEWSKI [1992] i CHRÓŚCIELEWSKI [1996]) solver typu skyline przechowuje w pamięci komputera współczynniki niezerowe macierzy, ale też wszystkie zera leżące w danej kolumnie pomiędzy przekątną a „najwyżej” leżącym wyrazem (rys. 6.6). Powoduje to istotne zwiększenie zasobów pamięci potrzebnych do przechowywania macierzy sztywności. Inaczej zorganizowane są zasoby używane przez procedury HSL i PARDISO. W obu

⁴ <http://www.hsl.rl.ac.uk>

⁵ <http://www.pardiso-project.org/>

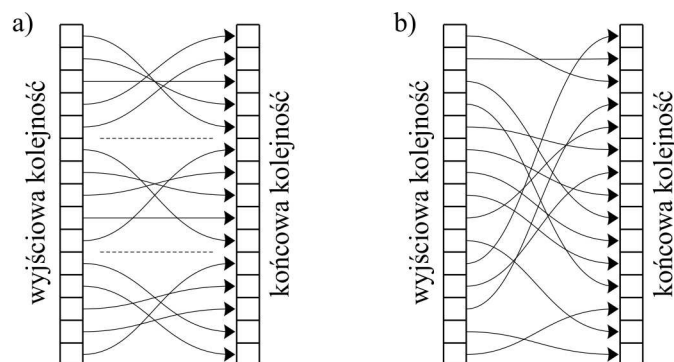
przypadkach zastosowano identyczną strukturę danych, w której niezbędne jest przechowywanie tylko niezerowych współczynników, co zmniejsza zapotrzebowanie na pamięć operacyjną.



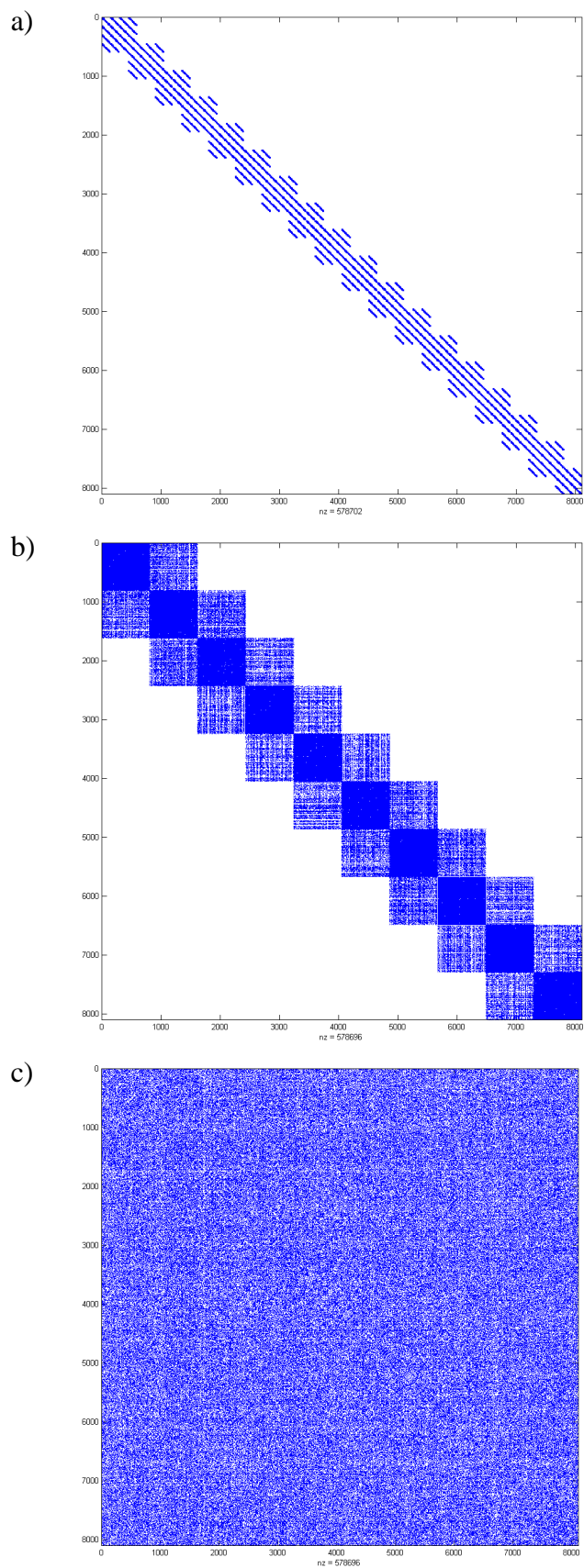
Rys. 6.6 Profil rzadkiej macierzy sztywności – zapisane w pamięci współczynniki.

Korzystając z zaimplementowanych solverów, przetestowano czas rozwiązywania głównego układu równań algorytmu MES wygenerowanego dla dwóch różnych zadań. Zadania znacząco różnią się liczbą niewiadomych układu (8100 oraz 102836). W testach wykorzystano procedurę renumeracji równań układu, która ma symulować nieregularność w numerowaniu węzłów i elementów dyskretyzacji MES. Na rys. 6.7 pokazano schematycznie koncepcję całkowitej oraz blokowej pseudo-losowej renumeracji. Procedura ta, realizowana programem autorskim, ma na celu zwiększenie szerokości półpasma macierzy sztywności (rys. 6.8), a tym samym wydłużyć czas rozwiązywania układu równań. W przypadku renumeracji blokowej równania zostały podzielone na 10 grup, wewnątrz których losowo przydzielono nową numerację.

W tab. 6.1 i 6.2 zestawiono średnie czasy rozwiązywania układów równań (uzyskane każdorazowo z 20 prób) dla różnych solverów. Zastosowano pierwotnie zaimplementowany solver SKYLINE, solver PARDISO (wykonywany sekwencyjnie) oraz solver MA86 (produkowany przez HSL). W przypadku tego ostatniego dodatkowo użyto procedury MC68, która zmienia kolejność równań w układzie, pod kątem jak najlepszej wydajności solvera MA86. Procedurę MA86 wywoływano sekwencyjnie lub z wykorzystaniem 4 wątków obliczeniowych.



Rys. 6.7 Pseudo-losowa renumeracja równań a) blokowa b) całościowa.



Rys. 6.8 Profil macierzy sztywności a) bez renumeracji b) renumeracja blokowa c) renumeracja całościowa

Tab. 6.1 Porównanie efektywności solverów dla układu o $n = 8100$

bez renumeracji	SKYLINE	PARDISO	MA86	MA86+MC68
liczba współczynników	2 484 162	579 042	579 042	579 042
czas rozwiązywania układu, s	0,27	0,10	1 wątek: 0,31 4 wątki: 0,27	1 wątek: 0,11 4 wątki: 0,11
z renumeracją blokową				
liczba współczynników	5 487 924	579 042	579 042	579 042
czas rozwiązywania układu, s	1,42	0,14	1 wątek: 1,32 4 wątki: 0,73	1 wątek: 0,13 4 wątki: 0,14
z renumeracją całościową				
liczba współczynników	32 322 384	579 042	579 042	579 042
czas rozwiązywania układu, s	62,58	0,13	1 wątek: 40,71 4 wątki: 12,59	1 wątek: 0,12 4 wątki: 0,12

Tab. 6.2 Porównanie efektywności solverów dla układu o $n = 102836$

bez renumeracji	SKYLINE	PARDISO	MA86	MA86+MC68
liczba współczynników	108 931 035	3 866 511	3 866 511	3 866 511
czas rozwiązywania układu, s	38,23	1,12	1 wątek: 36,34 4 wątki: 14,14	1 wątek: 1,67 4 wątki: 1,66
z renumeracją blokową				
liczba współczynników	-	3 866 511	3 866 511	3 866 511
czas rozwiązywania układu, s	-	1,37	1 wątek: 1005,9 4 wątki: 316,1	1 wątek: 3,63 4 wątki: 2,64

Części obliczeń nie udało się przeprowadzić ze względu na ograniczenia architektury programu oraz pamięci komputera. Dotyczy to obliczeń z całkowitą renumeracją problemu o $n = 102836$ oraz wywołania solvera SKYLINE z macierzą z renumeracją blokową. Liczba koniecznych do przechowywania współczynników w przypadku tego solvera rośnie gwałtownie w przypadku renumeracji.

Wyniki zestawione w tab. 6.1 i 6.2 potwierdzają bardzo dobrą wydajność nowoczesnych procedur rozwiązywania rzadkich układów równań. Wyróżniająco są wyniki osiągnięte po renumeracjach. O ile w przypadku solverów SKYLINE i „czystego” MA86 renumeracja powoduje znaczne wydłużenie czasu obliczeń (nawet ponad 200-krotne), to solver PARDISO oraz para procedur MA86+MC68 osiągnęły czasy obliczeń jedynie 2-3 razy większe. W obliczeniach numerycznych w rozdz. 7 użyty został solver PARDISO, wykazujący się znakomitą efektywnością obliczeń.

7. PRZYKŁADY NUMERYCZNE

Rozdział zawiera wyniki analiz numerycznych wykonane w autorskim programie obliczeniowym CiMplast. W rozważanych przykładach rozwiązania odniesienia pochodzą z wymienionej każdorazowo literatury lub z autorskich obliczeń porównawczych przeprowadzonych w programie Abaqus v6.12.

Podstawowe informacje o geometrii i przeprowadzonych badaniach w poszczególnych przykładach zestawiono w tab. 7.1. Przykłady uszeregowano według geometrii, począwszy od testowych przykładów płaskich (uogólniony płaski stan naprężenia), przez powłoki jednopłatowe zakrzywione, skończywszy na powłokach wielopłatowych z przecięciami. Ujęto w pracy przykłady powszechnie realizowane w literaturze przedmiotu, w przypadku których rezultaty odniesienia zostały wielokrotnie zweryfikowane. O ile literatura podaje wiele wyników dotyczących powłok jednopłatowych, to w przypadku powłok wielopłatowych w zakresie sprężysto-plastycznym autor napotkał na trudności z odnalezieniem wyników odniesienia z wyjątkiem jednego przykładu. Stąd też zaproponowano poszerzenie dostępnych wyników o powłokę wielopłatową, dotychczas analizowaną w zakresie liniowym sprężystym. Przykłady powłok wielopłatowych są w naturalny sposób dedykowane przyjętej w pracy jako podstawowej 6-parametrowej nieliniowej teorii powłok.

Tab. 7.1 Zestawienie zrealizowanych badań numerycznych.

		przykład					
		7.1	7.2	7.3	7.4	7.5	7.6
geometria	płaska, jednopłatowa	✓	✓				
	zakrzywiona, jednopłatowa			✓	✓		
	fragmentami płaska, wielopłatowa					✓	✓
badanie	wpływ parametrów l oraz μ_c na rozwiązanie liniowe	✓		✓	✓	✓	✓
	analiza geometrycznie nieliniowa					✓	✓
	analiza geometrycznie i materiałowo nieliniowa		✓	✓	✓	✓	✓
	wpływ parametru l na rozwiązanie nieliniowe				✓	✓	✓
	współczynnik spiętrzenia naprężenia	✓					
	wpływ procedury CPPM/CPA na zbieżność		✓				
	wpływ doboru kwadratury całkowania do obliczeń sił przekrojowych			✓		✓	
	nieliniowa analiza stateczności w zakresie sprężystym			✓	✓		
	czas obliczeń zależnie od doboru liczby wątków						✓

Podstawową weryfikację rozważań teoretycznych przedstawionych w niniejszej pracy stanowi porównanie uzyskanych przez autora ścieżek równowagi z takowymi zaczerpniętymi z literatury lub uzyskanymi z programu komercyjnego. Należy przy tym podkreślić, że

technika odczytywania wyników odniesienia z rysunków zamieszczonych w cytowanych pracach może generować błędy odczytu. Autor dołożył starań aby zminimalizować te niedokładności.

Program badań numerycznych (zob. tab. 7.1) objął analizę wpływu na rozwiązania liniowe i nieliniowe stałych materiałowych związanych z teorią ośrodka Cosseratów. Badaniom poddano różne schematy sterowania rozwiązaniem nieliniowym i różne algorytmy rozwiązania równań plastyczności oraz ich wpływ na liczbę iteracji równowagi globalnego rozwiązania. W wybranych przykładach pokazano wpływ doboru kwadratury do całkowania wyrażeń na siły przekrojowe na jakość uzyskiwanych rozwiązań. W przykładzie 7.6 rozpatrzono wpływ liczby wątków obliczeniowych na czas trwania obliczeń numerycznych (zob. rozdz. 6).

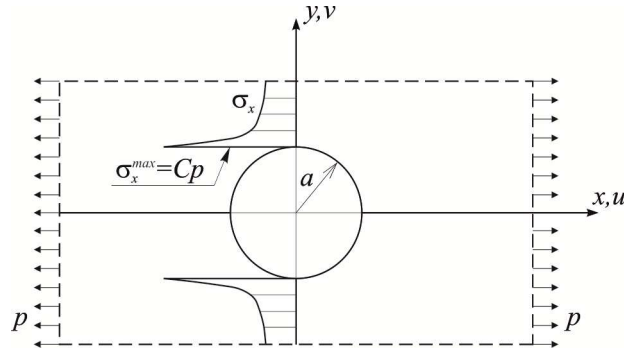
W poszczególnych przykładach wszystkie dane geometryczne i parametry materiałowe podane są bez wskazywania jednostek, tak jak ma to miejsce np. w programie Abaqus. Zakłada się bowiem, że w obliczeniach można przyjąć dowolny spójny układ jednostek (np. m, N, Pa lub mm, N, MPa).

W obliczeniach numerycznych wykorzystywane są 16-węzłowe elementy skończone z rodziny CAM (zob. rozdz. 5) z pełnym całkowaniem, w schemacie 4×4 punkty. Zaletą tych elementów jest bardzo mały wpływ efektu blokady (inaczej zakleszczenie, ang. *locking*) na rozwiązania analiz w porównaniu do elementów 4 i 9-węzłowych (dyskusja w RAMM, STEGMÜLLER [1982]). Niniejsza praca koncentruje się na zagadnieniach związanych z równaniami konstytutywnymi, nie są dyskutowane własności elementów skończonych.

Wizualizację wyników zrealizowano przy pomocy autorskiego programu plst2gid (zob. dodatek D) oraz programów komercyjnych GiD v.11 oraz AutoCAD 2012.

7.1 Problem Kirscha w ośrodku Cosseratów

W przykładzie rozważana jest tarcza o formalnie nieograniczonych wymiarach, z okrągłym otworem (rys. 7.1). Obciążenie jest zadane w postaci równomiernego jednokierunkowego rozciągania z intensywnością p . Jest to tzw. problem Kirscha (zob. GRINCHENKO, ULITKO [1970] i cytowana tam literatura), należący do grupy klasycznych problemów liniowej teorii sprężystości. Rozwiązanie analityczne zadania uogólnionego na przypadek kontinuum Cosseratów można znaleźć np. w pracy DYSZLEWICZ [2004]. Parametry materiałowe przyjęte w przykładzie to moduł Younga $E=100$ i współczynnik Poissona $\nu=0,1$.



Rys. 7.1 Problem Kirscha. Geometria zadania.

Klasyczne rozwiązanie dla ośrodka Cauchy'ego zapisane jest we współrzędnych biegunowych (zob. np. TIMOSHENKO, GOODIER [1962]). Cechą charakterystyczną zadania jest spiętrzenie naprężeń przy otworze. Maksymalne naprężenia normalne w kierunku działania obciążenia osiągną wartość

$$\sigma_x^{\max} = 3p. \quad (7.1)$$

DYSZLEWICZ [2004] podaje współczynnik koncentracji naprężenia w ośrodku Cosseratów jako

$$C = \frac{3+G}{1+G}, \quad (7.2)$$

taki że $\sigma_x^{\max} = Cp$. Zmienna G zależy od parametrów ośrodka Cosseratów według formuły

$$G = \frac{\frac{a_0}{\hat{l}^2}}{1 + \frac{a^2}{4\hat{l}^2} + \frac{a}{2\hat{l}} \cdot \frac{K_0(a/\hat{l})}{K_1(a/\hat{l})}}. \quad (7.3)$$

Tutaj $K_n(x)$ są modyfikowanymi funkcjami Bessela II rzędu (zob. np. ABRAMOWITZ, STEGUN [1970]), a_0 oraz \hat{l} są pewnymi parametrami charakteryzującymi ośrodek Cosseratów, a jest promieniem otworu. Parametry a_0 oraz \hat{l} w (7.3) pozostają w związkach ze współczynnikami wprowadzonymi w rozdz. 3 (l_t, l_b, μ_c) według formuł:

$$a_0 = \frac{(2\mu l_t^2 - 4\mu l_b^2)(2\mu + \lambda)}{4\mu(\mu + \lambda)}, \quad (7.4)$$

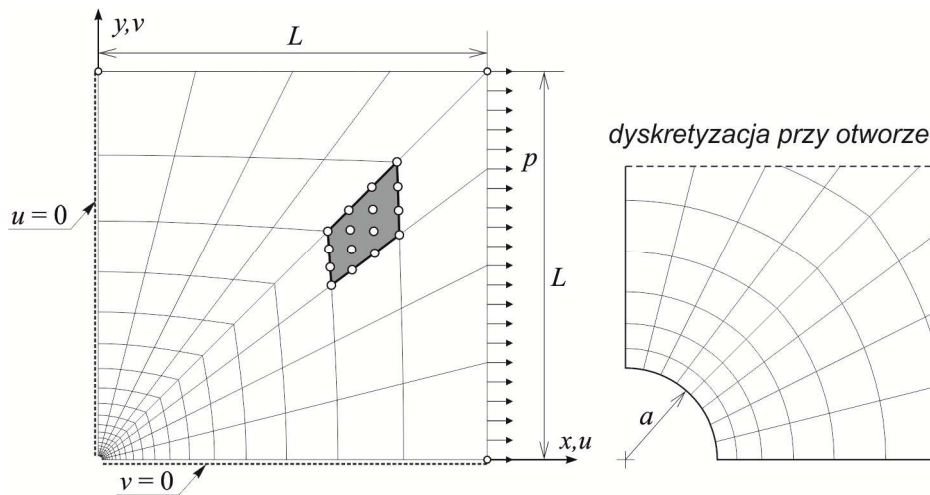
$$\hat{l}^2 = \frac{(2\mu l_t^2 - 4\mu l_b^2)(\mu + \mu_c)}{4\mu_c \mu}. \quad (7.5)$$

Biorąc pod uwagę ograniczenie (3.31), przyjęto $l_t = 3l_b$, co daje $\hat{l}^2 = \frac{45}{7} l_b^2$. Otrzymano zatem:

$$a_0 = \frac{\frac{98}{45} \mu l^2 (2\mu + \lambda)}{4\mu(\mu + \lambda)}, \quad \hat{l}^2 = \frac{\frac{98}{45} \mu l^2 (\mu + \mu_c)}{4\mu_c \mu}, \quad (7.6)$$

co pozwoliło na przeprowadzenie analizy parametrycznej współczynnika C ze względu na charakterystyki materiałowe ośrodka Cosseratów przyjęte w niniejszej pracy (μ_c , l).

Wyniki analityczne porównano z wynikami numerycznymi, uzyskanymi za pomocą MES. Na rys. 7.2 przedstawiono dyskretyzację zadania, z wykorzystaniem podwójnej symetrii tarczy. Ze względu na potrzebę ograniczenia dziedziny problemu o skończonych wymiarach, wystarczająco dużej żeby nie zaburzać rozkładu naprężenia w okolicy otworu, przyjęto wymiar $L = 100$, zaś promień otworu $a = 1$.



Rys. 7.2 Problem Kirscha. Geometria i dyskretyzacja 1/4 zadania.

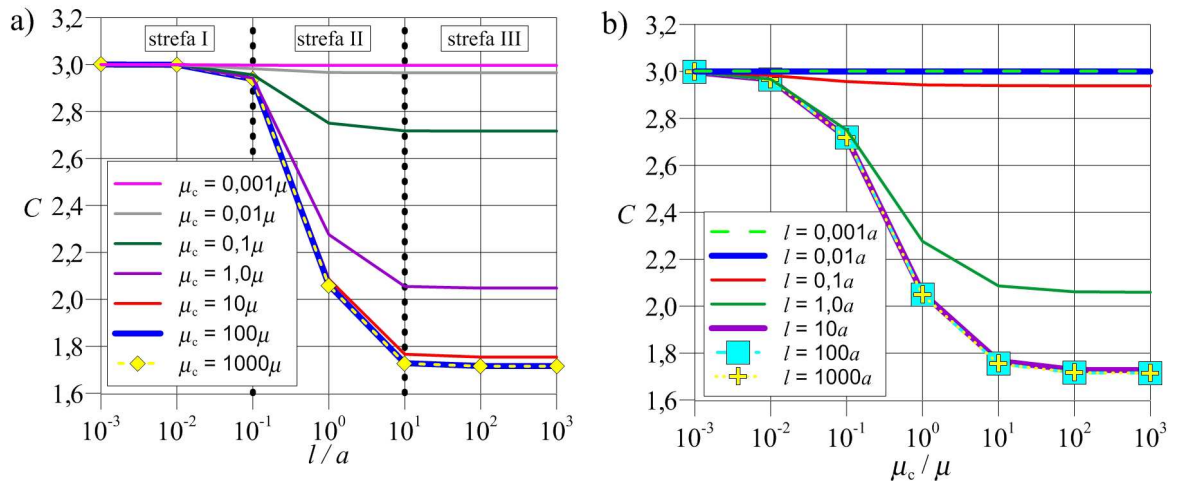
W tab. 7.2 zestawiono wyniki analityczne i numeryczne analizy parametrycznej. Przez błąd rozumiany jest błąd względny według formuły

$$\delta = \frac{C_{\text{numeryczne}} - C_{\text{analityczne}}}{C_{\text{analityczne}}} \cdot 100\% . \quad (7.7)$$

Na rys. 7.3a), b) zestawiono wyniki numeryczne analizy parametrycznej w formie wykresów. Na podstawie uzyskanych wyników można stwierdzić, że gdy dodatkowe stałe pozostają w zakresach $l/a < 10^{-2}$ oraz $\mu_c/\mu < 10^{-2}$ to współczynnik spiętrzenia naprężenia w ośrodku Cosseratów (7.2) niewiele różni się od współczynnika w ośrodku klasycznym ($C = 3$). Dla wyższych wartości tych parametrów współczynnik C ma mniejszą wartość, ale nie mniejszą niż $C = 1,715$. Wyniki obliczeń numerycznych pokazano na rys. 7.3. Wyniki w dziedzinie l/a ujawniają podziały na 3 strefy (JEONG I IN. [2009]) – w pierwszej z nich sztywność układu jest na poziomie rozwiązania klasycznego, w drugiej następuje znaczący przyrost sztywności, w trzeciej sztywność stabilizuje się na pewnym poziomie.

Tab. 7.2 Problem Kirscha. Wartość współczynnika śpiętrzenia C w zależności od parametrów materiałowych.

		długość charakterystyczna l						wynik	
		$0,001a$	$0,01a$	$0,1a$	a	$10a$	$100a$		$1000a$
moduł ścinania μ_c	$0,001 \mu$	3,000	3,000	2,997	2,996	2,996	2,996	2,996	analityczny
		3,001	3,000	2,998	2,997	2,997	2,997	2,997	numeryczny
		0,03%	0,02%	0,03%	0,02%	0,02%	0,02%	0,02%	błąd
	$0,01 \mu$	3,000	2,999	2,983	2,967	2,965	2,965	2,965	analityczny
		3,001	3,000	2,983	2,967	2,966	2,966	2,966	numeryczny
		0,03%	0,02%	-0,01%	0,01%	0,03%	0,03%	0,03%	błąd
	$0,1 \mu$	3,000	2,999	2,955	2,757	2,720	2,719	2,719	analityczny
		3,001	3,000	2,957	2,751	2,718	2,717	2,717	numeryczny
		0,03%	0,02%	0,06%	-0,23%	-0,08%	-0,07%	-0,06%	błąd
	μ	3,000	2,999	2,939	2,270	2,060	2,053	2,053	analityczny
		3,001	3,000	2,943	2,276	2,055	2,048	2,048	numeryczny
		0,03%	0,03%	0,14%	0,28%	-0,22%	-0,23%	-0,23%	błąd
	10μ	3,000	2,999	2,935	2,066	1,768	1,759	1,759	analityczny
		3,001	3,000	2,94	2,086	1,766	1,754	1,754	numeryczny
		0,03%	0,03%	0,16%	0,95%	-0,11%	-0,27%	-0,26%	błąd
	100μ	3,000	2,999	2,935	2,039	1,729	1,719	1,719	analityczny
		3,001	3,000	2,939	2,061	1,728	1,716	1,716	numeryczny
		0,03%	0,03%	0,14%	1,09%	-0,03%	-0,18%	-0,17%	błąd
1000μ	3,000	2,999	2,935	2,036	1,724	1,715	1,715	analityczny	
	3,001	3,000	2,939	2,059	1,727	1,715	1,715	numeryczny	
	0,03%	0,03%	0,14%	1,13%	0,15%	0,01%	0,01%	błąd	

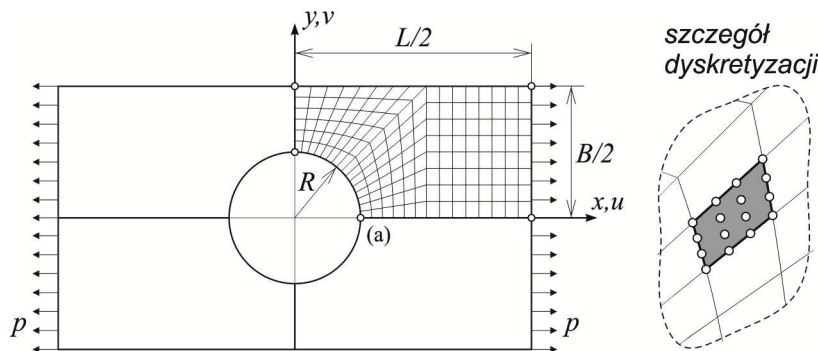
Rys. 7.3 Problem Kirscha. Wartość współczynnika C a) w dziedzinie l/a b) w dziedzinie μ_c/μ .

7.2 Tarcza z otworem

W drugim przykładzie analizowana jest rozciągana tarcza o skończonych wymiarach, z otworem. W stosunku do przykładu 7.1 niniejsze zadanie różni się radykalnie proporcją promienia otworu do szerokości dyskretyzowanej tarczy w kierunku poprzecznym do rozciągania oraz zastosowaniem nieliniowości geometrycznej i materiałowej. Przykład zaczerpnięto z pracy RAMM, MATZENMILLER [1987], gdzie zrealizowano obliczenia

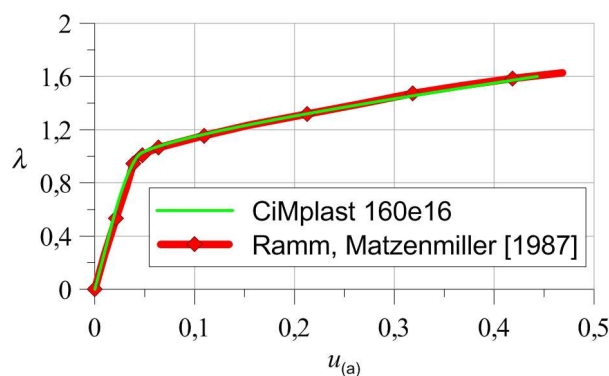
w klasycznym ośrodku. Jest to przykład testowy, dla sprawdzenia zaimplementowanych algorytmów na poziomie warstwy powłoki bez wpływu całkowania po grubości. Wstępne badania wyniki dla tego zadania zaprezentowano w pracy BURZYŃSKI [2013b].

Na rys. 7.4 przedstawiono geometrię i obciążenie tarczy. Ze względu na symetrię zadania rozpatrywana jest 1/4 układu, z dyskretyzacją na 160 elementów 16-węzłowych. Dane geometryczne to $R = 5$, $L = 36$, $B = 20$, stała grubość $h_0 = 1$. Przyjęty został materiał sprężysto-plastyczny ze wzmocnieniem izotropowym, o module Younga $E = 7,0 \cdot 10^4$, współczynnika Poissona $\nu = 0,2$, granicy plastyczności $\sigma_y = 2,43 \cdot 10^2$, module wzmocnienia $E_T = 2,24 \cdot 10^3$. Dodatkowe stałe materiałowe ośrodka Cosseratów to $\mu_c = \mu$ oraz $l = 0,05$. Przyłożone zostało samorównoważące się obciążenie równomiernie rozłożone na krawędzi tarczy o intensywności $p = \lambda p_{ref}$, $p_{ref} = 1,215 \cdot 10^2$.



Rys. 7.4 Tarcza z otworem. Geometria i dyskretyzacja 1/4 zadania.

Porównanie uzyskanych wyników analizy nieliniowej pokazuje bardzo dobrą zgodność z rozwiązaniem odniesienia (rys. 7.5). Ścieżkę równowagi uzyskano wykorzystując algorytm CPPM (rozdz. 4.4).



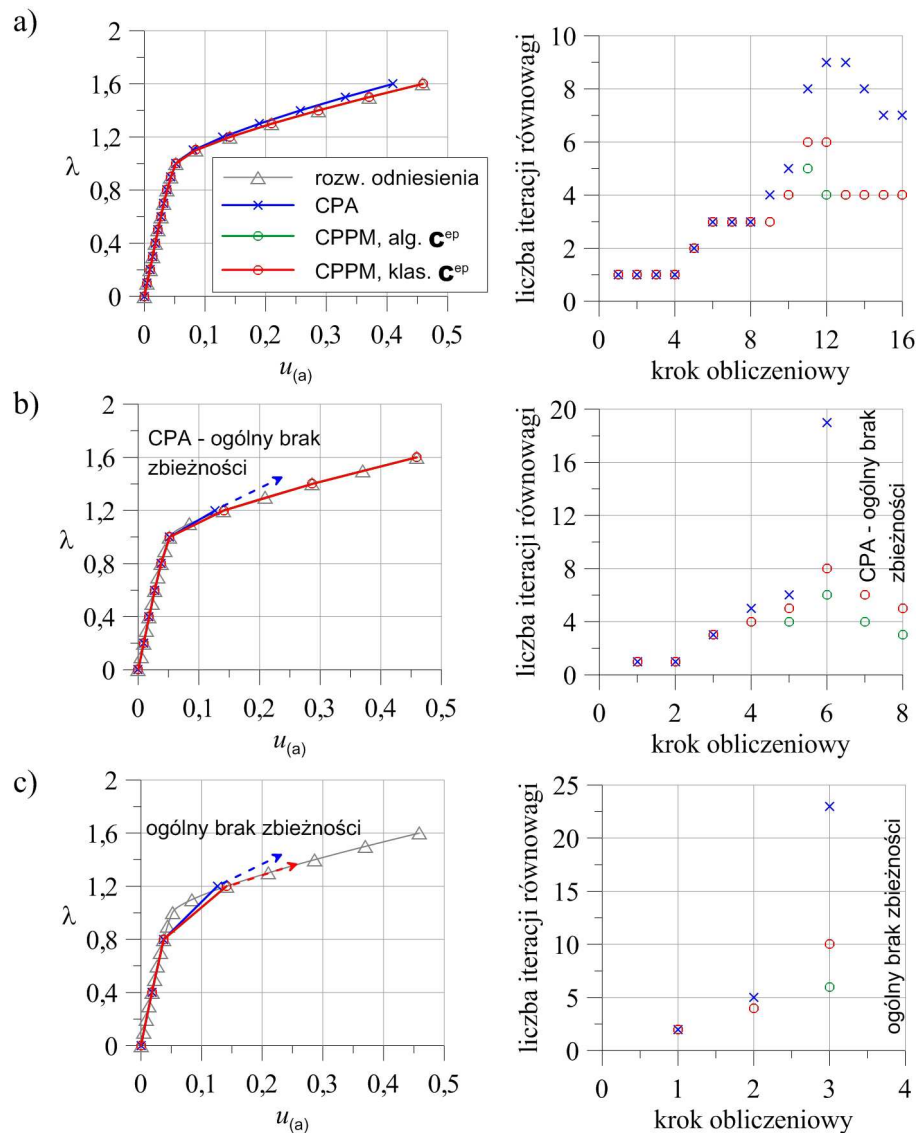
Rys. 7.5 Tarcza z otworem. Ścieżki równowagi rozwiązania geometrycznie i materiałowo nieliniowego.

Głównym celem niniejszego przykładu jest porównanie wpływu algorytmów powrotu na powierzchnię plastyczności na liczbę iteracji równowagi ogólnego procesu rozwiązania. Wzięto pod uwagę algorytmy CPPM (rozdz. 4.4) oraz CPA (rozdz. 4.6). Dodatkowo w przypadku algorytmu CPPM możliwe jest zastosowanie sprężysto-plastycznej macierzy konstytutywnej: klasycznej (rozdz. 3.4.3) lub algorytmicznej (rozdz. 4.5). Porównywano

3 różne programy obciążania, zestawiono je w tab. 7.3. Wyniki analiz, tj. ścieżki równowagi przedstawione na tle rozwiązania odniesienia (160 kroków obliczeniowych, $\Delta\lambda = 0,01$) oraz liczbę iteracji równowagi w poszczególnych krokach obciążeniowych, zestawiono na rys. 7.6.

Tab. 7.3 Tarcza z otworem. Programy obciążania.

nazwa	przyrosty obciążenia
program obciążania 1.	16 kroków, $\Delta\lambda = 0,1$
program obciążania 2.	8 kroków, $\Delta\lambda = 0,2$
program obciążania 3.	4 kroków, $\Delta\lambda = 0,4$



Rys. 7.6 Tarcza z otworem. Porównanie algorytmów przy różnych programach obciążania a) program 1 b) program 2 c) program 3.

Na podstawie przedstawionych rezultatów można stwierdzić, że algorytm CPPM sprawdził się lepiej niż CPA, osiągnięcie zbieżności przy kolejnych przyrostach wymaga mniejszej liczby iteracji. Dodatkową ich redukcję można uzyskać wprowadzając

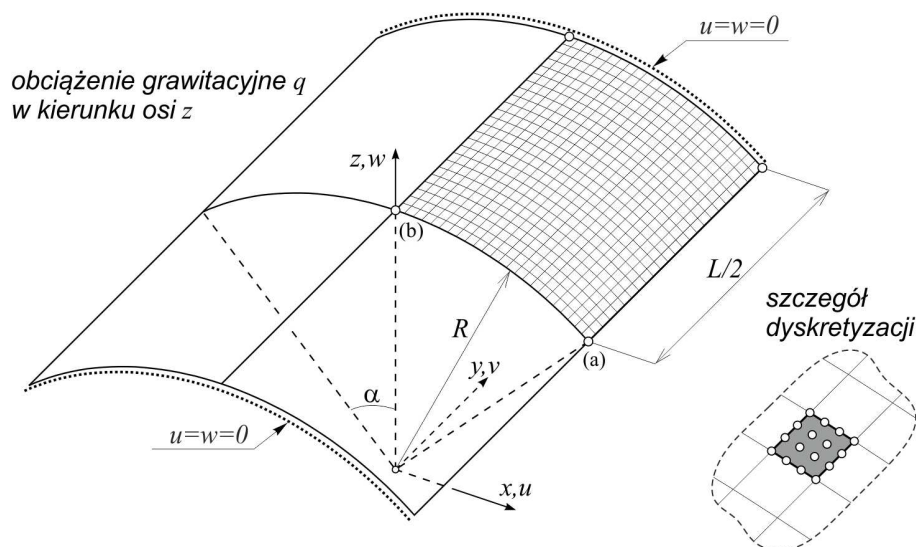
algorytmiczną macierz sztywności, co znajduje potwierdzenie w literaturze (zob. SIMO, HUGHES [1998] i cytowane tam prace), gdzie dyskutowane są założenia teoretyczne towarzyszące definicji algorytmicznej macierzy sztywności. Dla obliczeń wykonanych według programu obciążenia 2. algorytmem CPA oraz według programu 3. (oba algorytmy) przy ostatnim przyroście obciążenia przekroczona została maksymalna liczba iteracji równowagi (nie osiągnięto zbieżności ogólnej).

W dalszych obliczeniach użyty zostanie algorytm CPPM z algorytmiczną macierzą sztywności.

7.3 Panel walcowy – Scordelis-Lo roof

Rozpatrywana jest cylindryczna powłoka z obciążeniem typu ciężar własny, znana w literaturze jako *Scordelis-Lo roof*¹ (zob. np. RAMM, WALL [2004]). Jest to jeden z klasycznych przykładów testowych, interesujący ze względu na swoistą lokalizację strefy uplastycznienia. Z tego względu wykazuje wrażliwość na rząd całkowania wyrażeń całkowych na siły przekrojowe oraz sformułowanie teorii powłok. Różnice w wynikach objawiają się nie tylko w ścieżkach równowagi, ale także w globalnej postaci deformacji. Bogatą dyskusję wyników można znaleźć np. w pracy RAMM, WALL [2004].

Dane geometryczne to $R = 7600$, $L = 15200$, $\alpha = 40^\circ$, grubość powłoki $h_0 = 76$. Przyjęto materiał idealnie sprężysto-plastyczny o module Younga $E = 2,1 \cdot 10^4$, współczynnika Poissona $\nu = 0$, granicy plastyczności $\sigma_y = 4,2$. Ponadto stałe materiałowe ośrodka Cosseratów to $\mu_c = 1,05 \cdot 10^4$ oraz $l = 7,6 \cdot 10^{-1}$. Obciążenie grawitacyjne ma intensywność $q = \lambda q_{ref}$, $q_{ref} = 4,0 \cdot 10^{-3}$ (wyrażony na jednostkę powierzchni), działający zgodnie z kierunkiem osi z i z przeciwnym zwrotem (rys. 7.7).

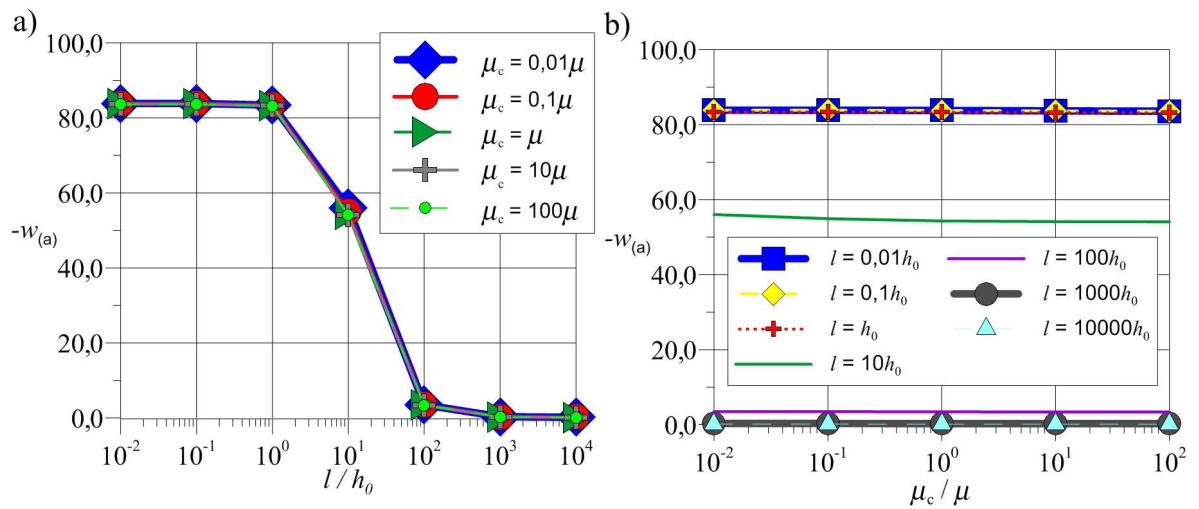


Rys. 7.7 Panel walcowy. Geometria i dyskretyzacja 1/4 zadania.

¹ Oryginalnie zaprezentowany w niedostępnej dla autora pracy SCORDELIS A.C., LO K.S. [1964] Computer analysis of cylindrical shells. *Journal of the American Concrete Institute*, **61**, 539–562.

W analizie sprężysto-plastycznej przy danym obciążeniu wykorzystana jest podwójna symetria. Dyskretyzowana jest 1/4 zadania, z podziałem na 6×6 , 12×12 oraz 24×24 elementów 16-węzłowych o pełnym całkowaniu w płaszczyźnie powłoki. W analizie parametrycznej i badaniu zbieżności, siły przekrojowe są obliczane z wykorzystaniem 7-punktowej kwadratury Gaussa.

Na rys. 7.8 zestawiono rezultaty analizy parametrycznej w zakresie liniowym. Wynikiem jest przemieszczenie $-w_{(a)}$ dla obciążenia $q = q_{ref}$. Zauważalny jest brak wpływu dodatkowego modułu ścinania μ_c na rozwiązanie.



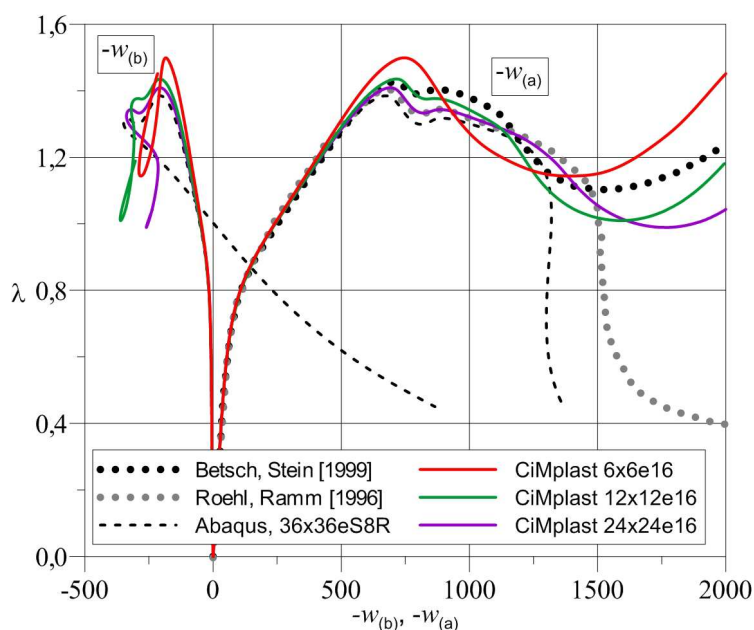
Rys. 7.8 Panel walcowy. Wpływ parametrów μ_c i l na rozwiązania liniowe a) wyniki w dziedzinie l/h_0 b) wyniki w dziedzinie μ_c / μ .

Uzyskany w niniejszej pracy wynik analizy sprężysto-plastycznej (rys. 7.9) odniesiono do rozwiązań przedstawionych w literaturze. W pracy BETSCH, STEIN [1999] analizowane są skończone elementy powłokowe dla teorii skończonych całkowitych odkształceń. ROEHL, RAMM [1996] podają wynik uzyskany przy użyciu klasycznych elementów skończonych rozwiniętych w ramach teorii 5-parametrowej w zakresie małych odkształceń. Praca ta przedstawia także rezultaty dla analiz według teorii powłok 6- i 7-parametrowych², przy różnym doborze kwadratur całkowania po grubości oraz rozwiązanie uzyskane w modelu bryłowym.

Zakres wymienionych w poprzednim akapicie wyników dla różnych sformułowań, wzbogacono o autorskie obliczenia porównawcze w programie Abaqus. Zastosowano dyskretyzację elementami S8R z 6 stopniami swobody w każdym węźle i z 7-punktową kwadraturą Gaussa dla wyrażeń przekrojowych.

² Przy czym w podanej liczbie parametrów nie jest uwzględniony parametr owinięcia wokół osi normalnej. Parametry powyżej 5. dotyczą opisu zmiany grubości powłoki i odkształcenia w kierunku prostopadłym do powierzchni odniesienia.

Otrzymane rezultaty zestawiono na rys. 7.9 (ścieżki równowagi) oraz w tab. 7.4 (wartości mnożnika obciążenia λ_{gr} w punkcie granicznym). Porównując otrzymane wyniki (z programu autorskiego i Abaqusa), można zauważyć dużą różnicę w zachowaniu konstrukcji – pewne rozwiązania wykazują wzmocnienie po osiągnięciu przemieszczenia $z_{(a)} \approx -1500$, zaś dla innych stwierdzono istotne osłabienie. Do pierwszej grupy zaliczają się rozwiązania autorskie oraz rozwiązanie z pracy BETSCH, STEIN [1999], do drugiej zaś wynik ROEHL, RAMM [1996] oraz obliczenia z programu Abaqus. Istotne różnice w zachowaniu analizowanej konstrukcji przy różnych założeniach teorii można zauważyć obserwując postacie deformacji (rys. 7.10, rys. 7.11). Ze względu na różną dostępność metod sterowania procesem nieliniowym (w programie Abaqus sterowanie przemieszczeniem nie jest zaimplementowane), nie udało się uzyskać postaci deformacji o podobnych parametrach obciążenia czy też wybranego przemieszczenia. Deformacja układu uzyskana w programie CiMplast wykazuje powstanie załomu w szczycie powłoki, z nieznacznym wzniesieniem szczytu powłoki ponad stan początkowy. W deformacja pochodzącej z programu Abaqus charakterystyczne jest znaczne przemieszczenie pionowe załomu w kierunku działania obciążenia. Na ścieżkach równowagi tą istotną różnicę można zaobserwować śledząc przemieszczenie $w_{(b)}$.

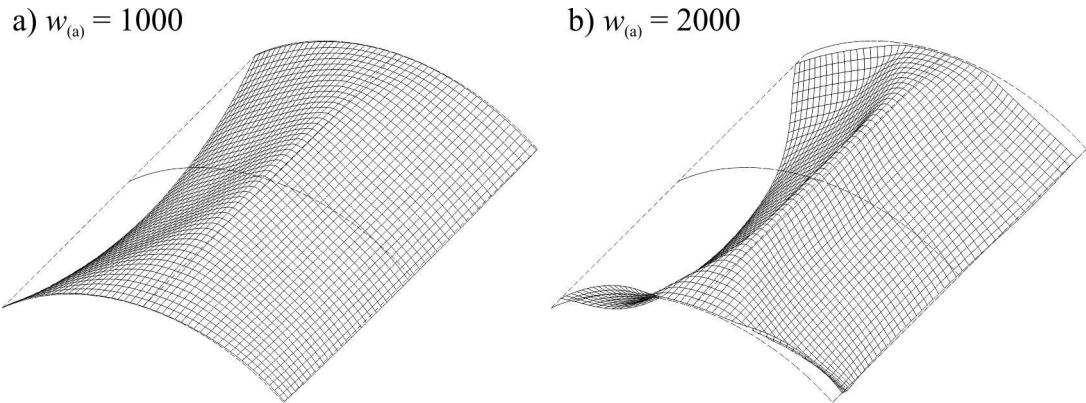


Rys. 7.9 Panel walcowy. Ścieżki równowagi, zbieżność dyskretyzacji.

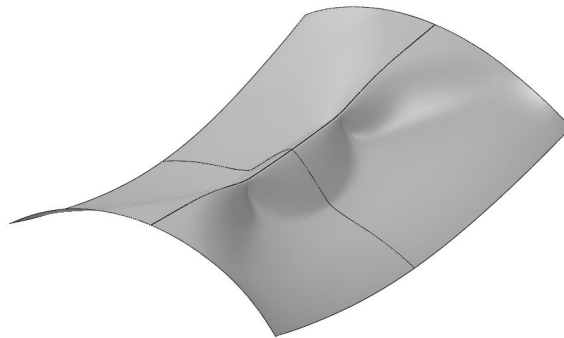
Tab. 7.4 Panel walcowy. Wartości mnożnika obciążeń w punktach granicznych – zbieżność dyskretyzacji, program autorski.

dyskretyzacja	λ_{gr}
6×6e16	1,499
12×12e16	1,436
24×24e16	1,409

Kształt krzywych równowagi (rys. 7.9) oraz wartości mnożnika obciążenia granicznego (tab. 7.4) nie wskazują na uzyskanie zbieżnego wyniku, zauważalne jest podobieństwo jakościowe rezultatów. Do dalszych badań wybrana została dyskretyzacja $24 \times 24 \times 16$.



Rys. 7.10 Panel walcowy. Postać deformacji – program autorski, dyskretyzacja $24 \times 24 \times 16$
a) $w_{(a)} = -1000$ b) $w_{(a)} = -2000$.

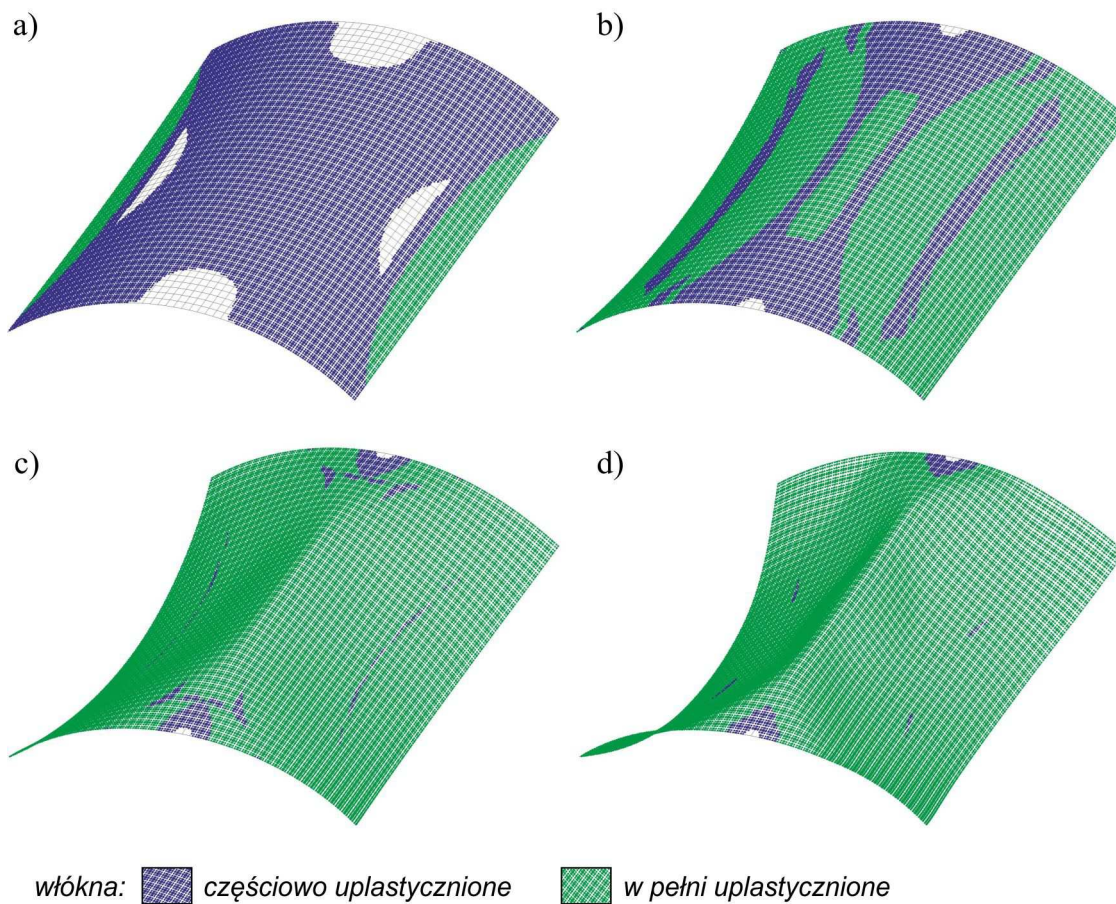


Rys. 7.11 Panel walcowy. Postać deformacji – program Abaqus, $w_{(a)} = -1367$, $\lambda = 0,450$.

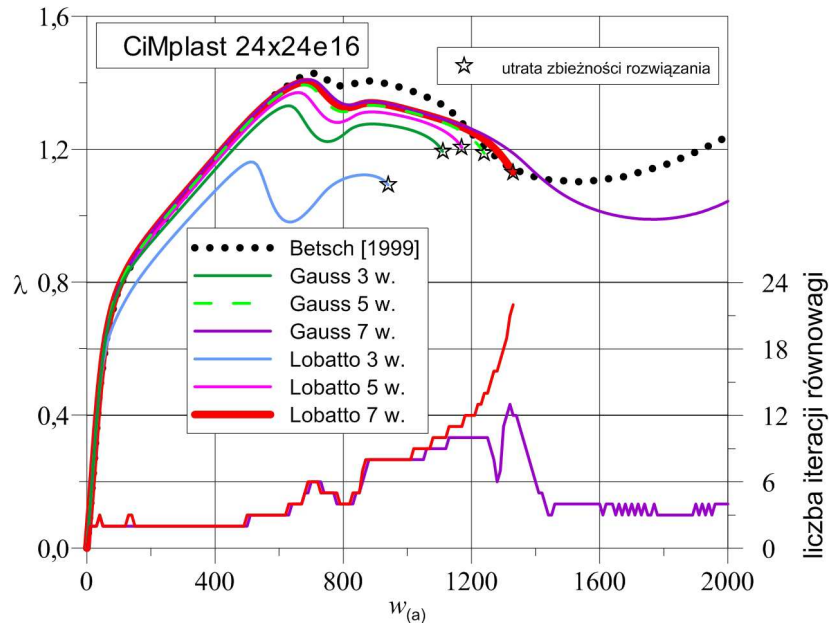
Na rys. 7.12 pokazano rozwój stref uplastycznienia powłoki. Rozróżniono włókna częściowo uplastycznione i w pełni uplastycznione. Początkowo pełnemu uplastycznieniu ulegają włókna w strefach wzdłuż swobodnych krawędzi powłoki, w zakresie sprężystym pozostają jedynie małe fragmenty panelu. W procesie dalszego obciążania, obszar pełnego uplastycznienia włókien rozszerza się na niemal całą konstrukcję.

Obserwując znaczne różnice w otrzymanych rezultatach, zdecydowano się zbadać wpływ doboru kwadratury całkowania wyrażeń przekrojowych. Wyniki w postaci ścieżek równowagi zestawiono na rys. 7.13. Dobór kwadratury (Gaussa lub Lobatto) i jej rząd (3, 5 lub 7 punktów całkowania) okazał się mieć istotny wpływ. Wydaje się być to związane z charakterem uplastycznienia w pierwszej fazie obciążania (zob. rys. 7.12a), gdzie większość włókien jest uplastyczniona częściowo. Jakość rozwiązania zależy zatem od doboru rzędu kwadratury, a tym samym liczby punktów „próbkiowania” na grubości powłoki.

Można zauważyć, że przy jednakowym schemacie sterowania rozwiązaniem nieliniowym (przez wymuszenie przemieszczenia $w_{(a)}$ ze stałym przyrostem $\Delta w_{(a)} = -10$), 7-punktowe kwadratury Gaussa i Lobatto dały nieco inne rezultaty. W przypadku kwadratury Lobatto utracono zbieżność rozwiązania, co poprzedzone było gwałtownym wzrostem niezbędnej do osiągnięcia równowagi liczby iteracji.

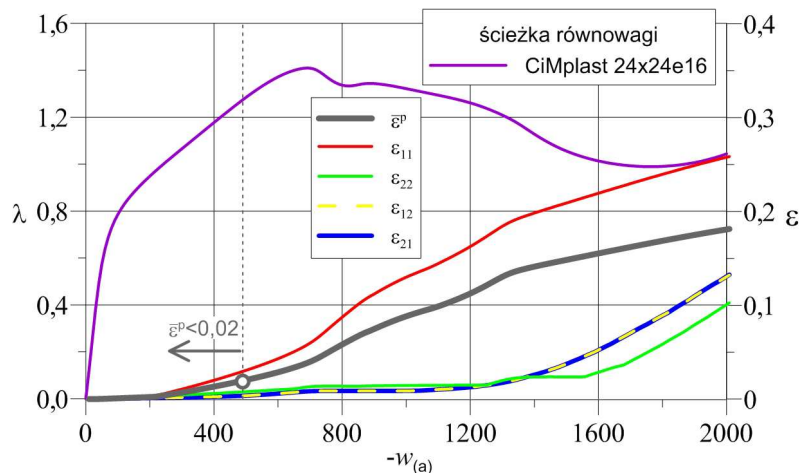


Rys. 7.12 Panel walcowy. Rozwój stref uplastycznienia, program autorski a) $w_{(a)} = -100$, b) $w_{(a)} = -500$
c) $w_{(a)} = -1000$ d) $w_{(a)} = -1500$.



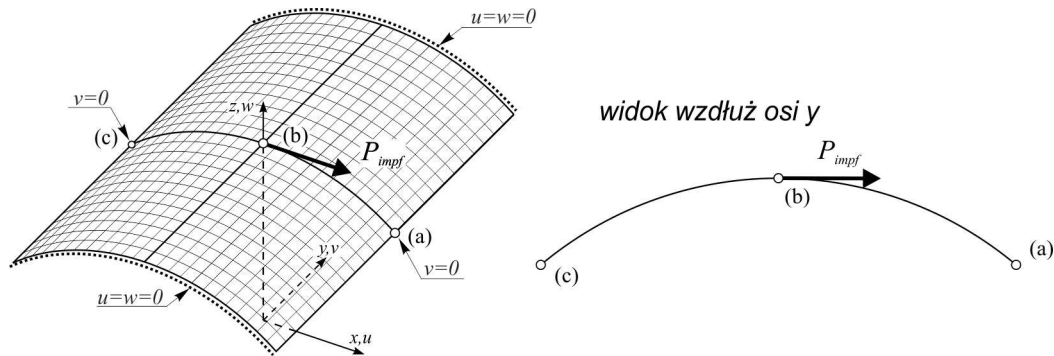
Rys. 7.13 Panel walcowy. Ścieżki równowagi - wpływ doboru kwadratury, program autorski.

Na rys. 7.14 pokazano obwiednię wartości składowych odkształcenia w funkcji przemieszczenia kontrolnego. Mowa tutaj (i w kolejnych przykładach) o całkowitych odkształceniach na poziomie warstwy powłoki, tj. zebranych w wektorze $\boldsymbol{\varepsilon}$ (zob. wzór. (3.28)₃). Pokazano tutaj także obwiednię odkształcenia $\bar{\varepsilon}^p$ (zob. (3.81)). BATHE [1982] podaje, że przy analizie konstrukcji wykazującej duże przemieszczenia i małe odkształcenia (tak jak w niniejszej pracy), wartość tego parametru nie powinna przekraczać 0,02. Przekroczenie tej wartości sugeruje, że właściwym dla tego przykładu jest uwzględnienie dużych odkształceń, co wykracza poza zakres niniejszej pracy. Trudny do oszacowania jest błąd powstający w wyniku niedostosowania teorii (małe odkształcenia) do potrzeb przykładu. Pokazana na rys. 7.9 zgodność jakościowa rozwiązań autorskiego z rozwiązaniami z pracy BETSCH, STEIN [1999] (teoria dużych odkształceń) wskazuje, że w podanym przykładzie wpływ przekroczenia dopuszczalnej wartości $\bar{\varepsilon}^p$ na globalne rozwiązanie nie jest znaczący.



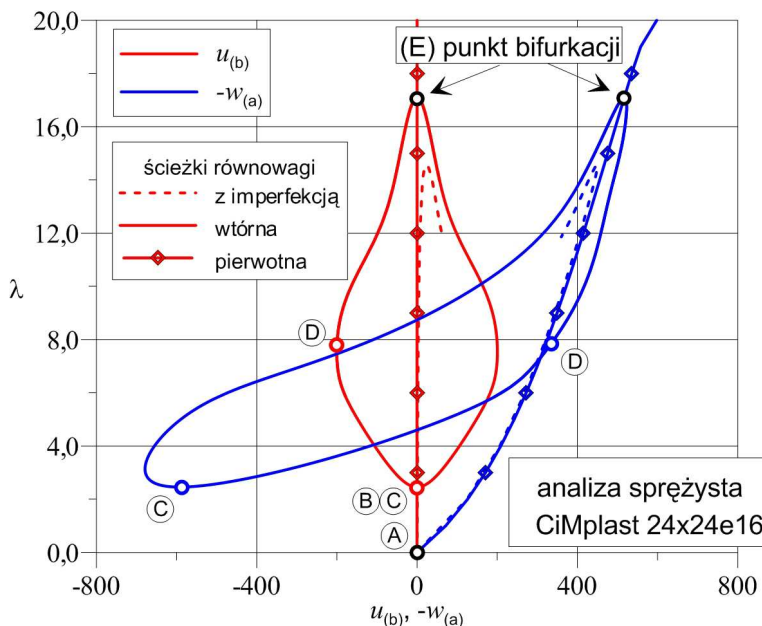
Rys. 7.14 Panel walcowy. Obwiednia wartości składowych odkształcenia.

Osobne zagadnienie, nieporuszone dotąd w literaturze (według najlepszej wiedzy autora), stanowi poszukiwanie punktów bifurkacji rozpatrywanej konstrukcji, w zakresie analizy sprężystej. Aby sprawdzić możliwość wystąpienia niesymetrycznej postaci utraty stateczności rozpatruje się dyskretyzację całości zadania. Imperfekcję obciążeniową wprowadzono w postaci siły skupionej przyłożonej w centralnym punkcie powłoki (b), działającej poziomo w kierunku osi x , o wartości $P_{impf} = \lambda \cdot P_{impf}^{ref}$, $P_{impf}^{ref} = 5,0 \cdot 10^4$ (rys. 7.15).

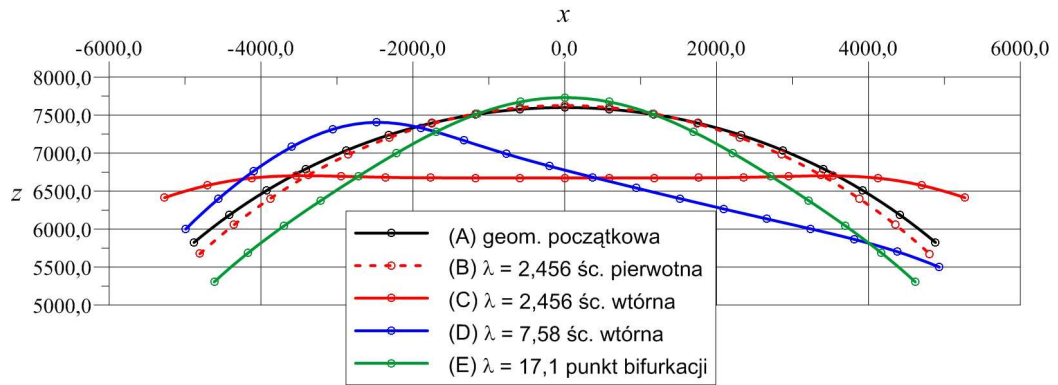


Rys. 7.15 Panel walcowy. Imperfekcja obciążeniowa, dyskretyzacja całego zadania.

Na rys. 7.16 zestawiono ścieżki równowagi (pierwotne, z imperfekcją, wtórne) uzyskane w nieliniowej analizie stateczności. Stwierdzono istnienie niestatecznego punktu bifurkacji na poziomie obciążenia $\lambda = 17,1$. Zestawienie przekrojów poprzecznych przez powłokę dla różnych punktów równowagi ze wtórnej ścieżki zostało pokazane na rys. 7.17. Prezentowane są przekroje dla poziomów obciążenia $\lambda = 17,1$ (E - punkt bifurkacji), $\lambda = 7,58$ (D - ekstremalne przemieszczenie $u_{(b)}^{\min} = -200,4$) oraz $\lambda = 2,456$ (B, C - możliwe 2 różne symetryczne postaci deformacji, w zależności od ścieżki na której poszukiwana jest równowaga).



Rys. 7.16 Panel walcowy. Ścieżki równowagi w analizie punktów bifurkacji.

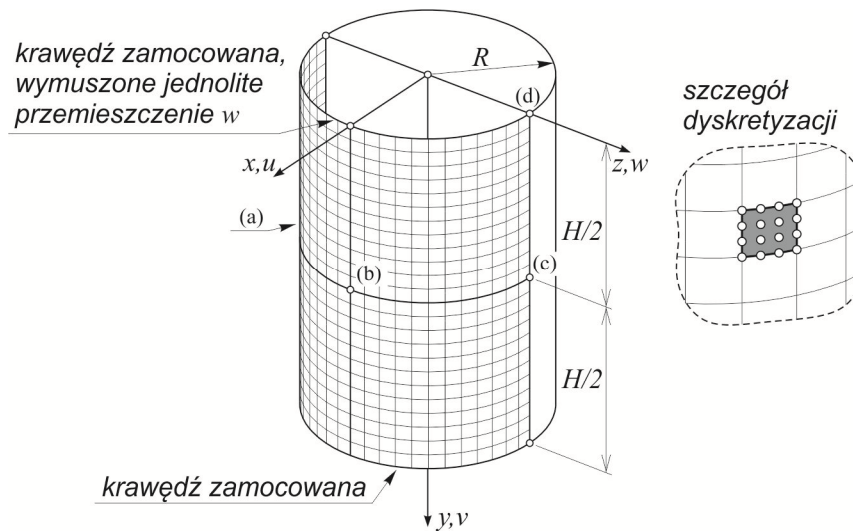


Rys. 7.17 Panel walcowy. Przekroje (c)-(b)-(a) (rys. 7.15) dla różnych ścieżek i poziomów obciążenia. Opisy (A)-(E) odnoszą się do punktów na rys. 7.16.

7.4 Cylinder ścinany

Analizowany jest cylinder, obustronnie zamocowany, poddany ścinaniu poprzez wymuszenie przesunięcia poprzecznego do osi cylindra jednej z podstaw. Pierwszą prezentację przykładu Autor odnalazł w pracy DUJC, BRANK [2012].

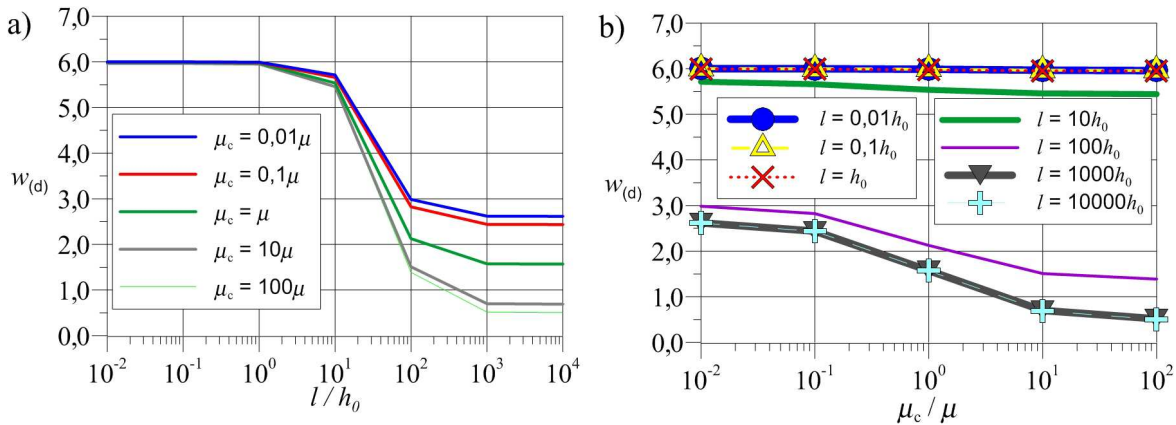
Geometrię i warunki brzegowe pokazano na rys. 7.18. Promień cylindra to $R = 28,5$, wysokość $H = 85,0$, grubość powłoki $h_0 = 0,5$. Parametry idealnie sprężysto-plastycznego materiału to moduł Younga $E = 2,1 \cdot 10^4$, współczynnik Poissona $\nu = 0,3$, granica plastyczności $\sigma_y = 24,0$.



Rys. 7.18 Cylinder ścinany. Geometria i dyskretyzacja 1/2 zadania.

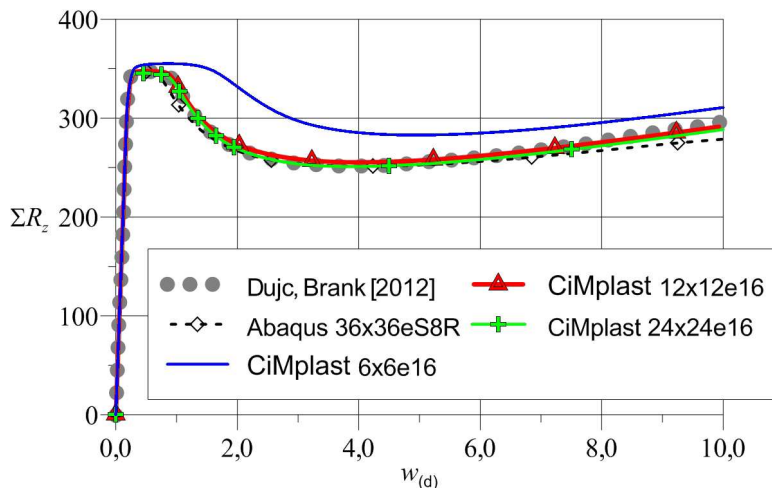
Ze względu na symetrię zadania, rozpatrywane są dyskretyzacje 1/2 cylindra na 12×12 , 24×24 , 36×36 elementów 16-węzłowych, z całkowaniem po grubości według 7-punktowej reguły Gaussa. W pracy DUJC, BRANK [2012] konstrukcję dyskretyzowano bez uwzględnienia symetrii, z użyciem elementów 4-węzłowych o jednolicie zredukowanym całkowaniu, z podziałem na 36 elementów na wysokości i 64 na pełnym obwodzie cylindra.

Na rys. 7.19 zestawiono wyniki analizy parametrycznej ze względu na charakterystyki materiałowe ośrodka Cosseratów w zakresie liniowym. Uzyskano różne wartości przemieszczenia $w_{(d)}$ odpowiadające wartości $\Sigma R_z = 100$ (przez ΣR_z oznaczono sumę reakcji z górnej krawędzi cylindra w kierunku osi z). W niniejszym przykładzie ujawnia się wpływ parametru μ_c na sztywność układu, gdy spełnione jest $l/h_0 \geq 10$.



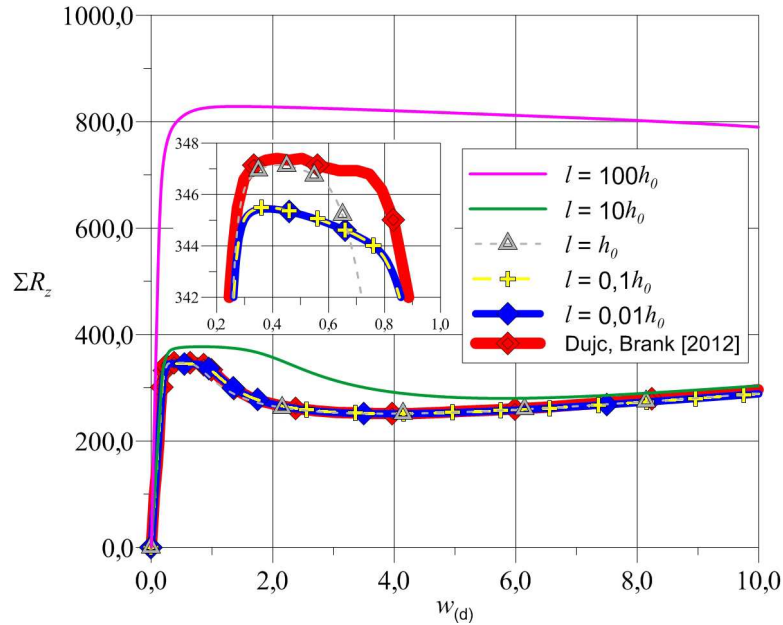
Rys. 7.19 Cylinder ścinany. Wpływ parametrów μ_c i l na rozwiązania liniowe a) wyniki w dziedzinie l/h_0 b) wyniki w dziedzinie μ_c/μ .

Wynik rozwiązań nieliniowych geometrycznie i materiałowo przedstawiono na rys. 7.20. Stałe materiałowe ośrodka Cosseratów, użyte przy badaniu zbieżności podziału, to $\mu_c = 8077$ oraz $l = 1,0 \cdot 10^{-4}$. Można stwierdzić bardzo dobrą zgodność rozwiązania autorskiego z wynikiem odniesienia. Do dalszych badań wybrana została dyskretyzacja z użyciem 24×24 elementów 16-węzłowych.

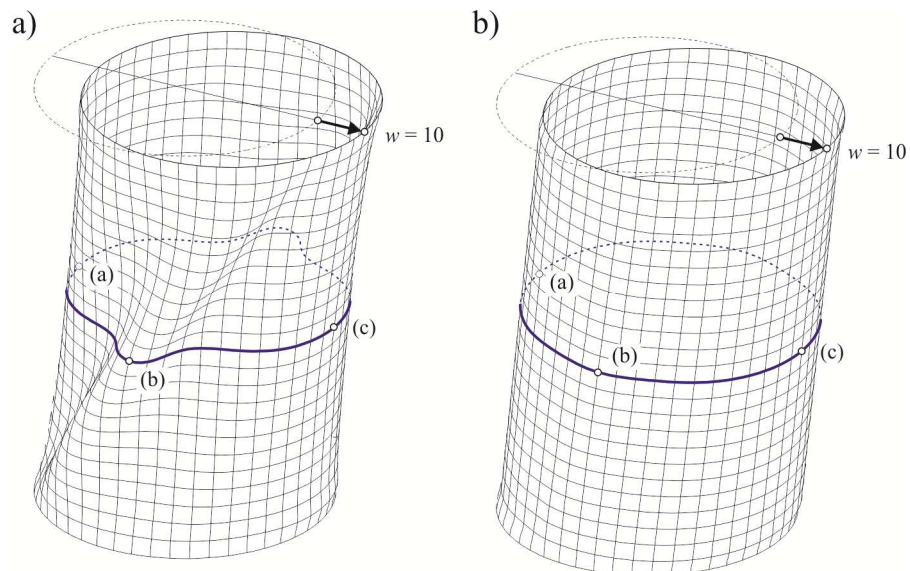


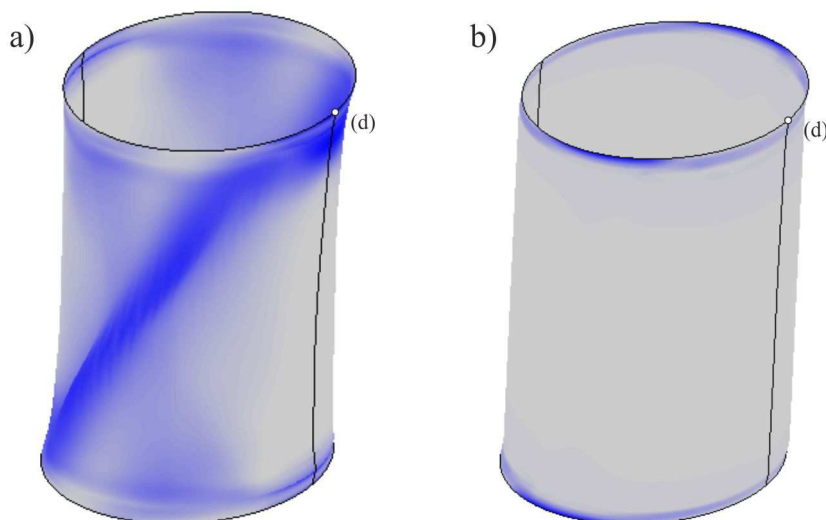
Rys. 7.20 Cylinder ścinany. Ścieżki równowagi.

W dalszej kolejności badano wpływ parametru l na rozwiązanie geometrycznie i materiałowo nieliniowe (rys. 7.21). W zakresie $l/h_0 \leq 1$ rozwiązania pokrywają się z rozwiązaniem odniesienia (DUJC, BRANK [2012]), uzyskanym w ośrodku klasycznym. Powyżej tej wartości układ wykazuje zeszytnienie i zauważalne jest zwiększenie siły granicznej.

Rys. 7.21 Cylinder ścinany. Wpływ parametru l na rozwiązania nieliniowe.

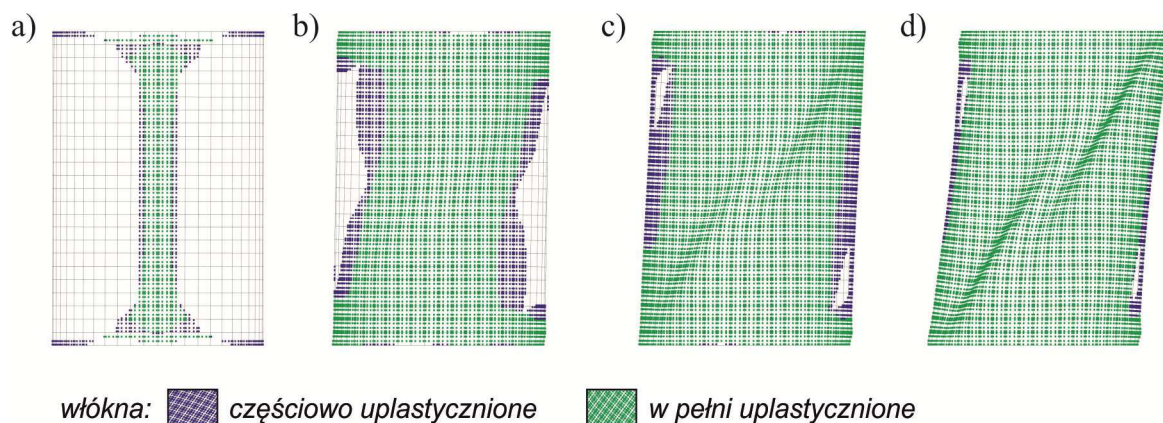
Porównano (rys. 7.22) postacie deformacji przy $l/h_0 = 0,01$ i $l/h_0 = 100$. W pierwszym przypadku ujawnia się charakterystyczna „fałda” związana z wykształceniem się w układzie deformacji typu pola ciągnięć. Przy znaczącym wzroście długości charakterystycznej sztywność owinięcia wzrasta, powodując gładkie ścięcia powłoki. Różny w obu przypadkach jest zasięg stref uplastycznienia (rys. 7.23). W obu przypadkach pokazanych na rys. 7.23 znacząco przekroczona jest wartość odkształceń $\bar{\epsilon}^p$ dopuszczalna dla teorii małych odkształceń. Brak rozwiązań porównawczych zrealizowanych przy wykorzystaniu teorii skończonych odkształceń nie pozwala na ocenę jakości rozwiązań.

Rys. 7.22 Cylinder ścinany. Analiza nieliniowa materiałowo, program autorski – postacie deformacji przy $w_{(d)} = 10$ a) $l/h_0 = 0,01$ b) $l/h_0 = 100$.



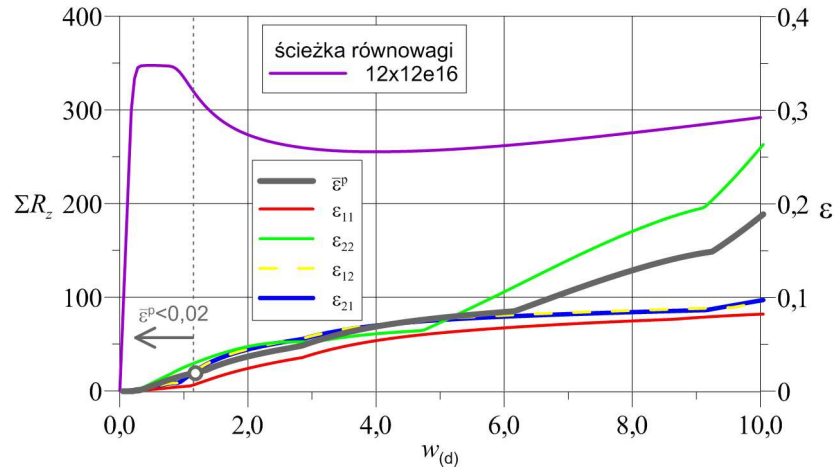
Rys. 7.23 Cylinder ścinany. Analiza nieliniowa materiałowo, program autorski – mapy efektywnych odkształceń plastycznych przy $w_{(d)} = 10$ a) $l/h_o = 0,01$, $\bar{\epsilon}^p \leq 0,077$ b) $l/h_o = 100$, $\bar{\epsilon}^p \leq 1,825$.

Na rys. 7.24 pokazano rozwój stref uplastycznienia w ścinanym cylindrze. W początkowej fazie procesu obciążania wykształca się wąski obszar całkowicie uplastycznionych włókien. Po przekroczeniu punktu granicznego (porównaj rys. 7.20) ponad połowa powłoki pracuje w zakresie plastycznym, choć nawet w ostatniej z rozpatrywanych konfiguracji małe fragmenty konstrukcji pozostają sprężyste.



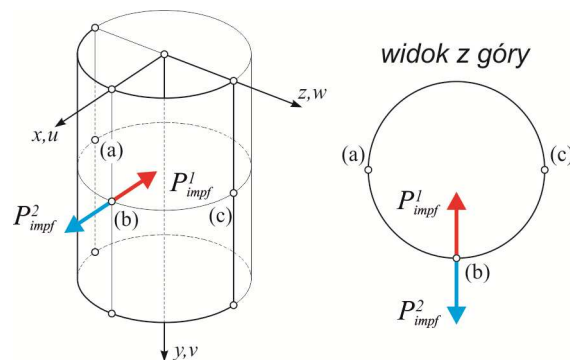
Rys. 7.24 Cylinder ścinany. Analiza nieliniowa materiałowo, program autorski – rozwój stref uplastycznienia $l/h_o = 0,01$, $\mu_c = \mu$ a) $w_{(d)} = 0,2$ b) $w_{(d)} = 1,71$ c) $w_{(d)} = 4,3$ d) $w_{(d)} = 9,5$.

Rys. 7.25 zawiera obwiednię wartości składowych odkształcenia w funkcji przemieszczenia kontrolnego. Zwraca uwagę wczesne osiągnięcie wartości odkształceń $\bar{\epsilon}^p = 0,02$. Wskazuje to na konieczność rozpatrzenia przykładu przy uwzględnieniu teorii skończonych odkształceń, dla weryfikacji jakości rozwiązania po przekroczeniu punktu granicznego.

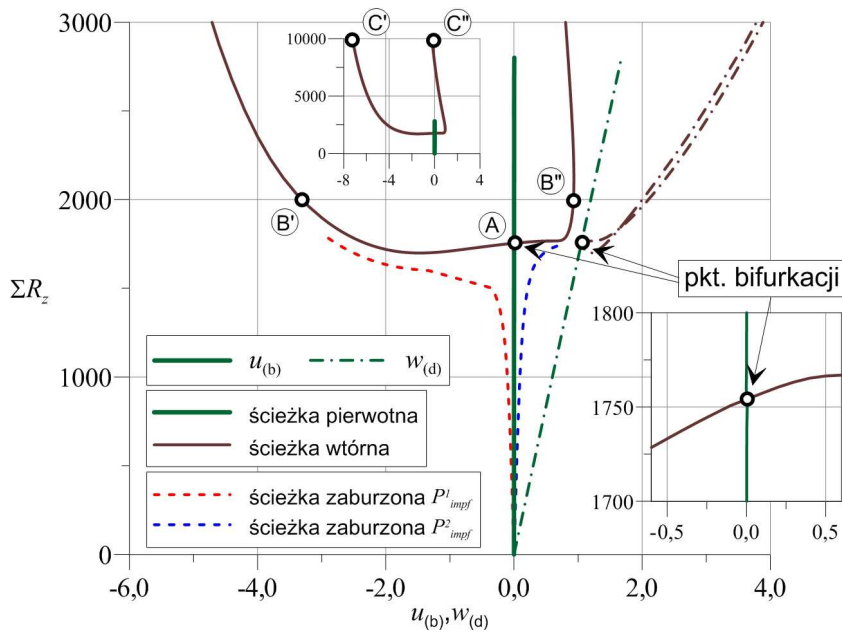


Rys. 7.25 Cylinder ścinany. Obwiednia wartości składowych odkształcenia.

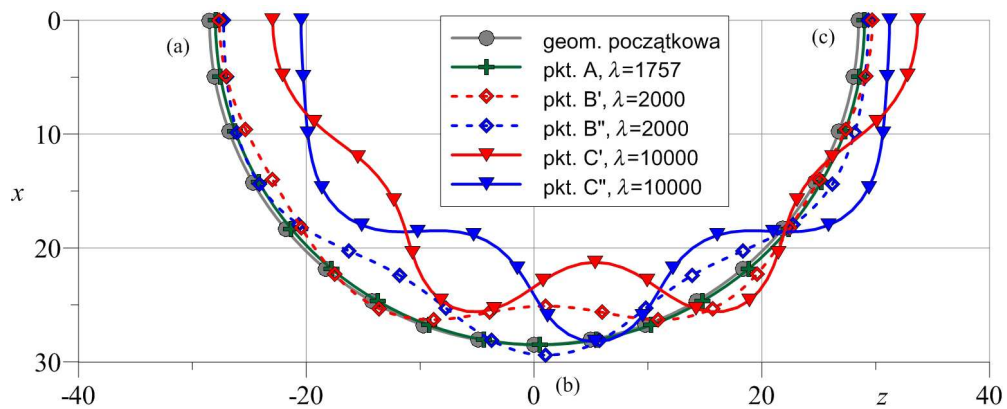
W dalszej kolejności zbadano zachowanie cylindra pozostającego w zakresie sprężystym. Poniższe wyniki częściowo zaprezentowano w pracy BURZYŃSKI I IN. [2014d]. Sugerując się postacią deformacji uzyskaną w analizie sprężysto-plastycznej (zob. rys. 7.22a) podjęto próbę uzyskania analogicznej postaci oraz „symetrycznej”, tj. takiej w której punkt (b) przemieszcza się do wnętrza cylindra. W tym celu wprowadzono w dwóch niezależnych próbach imperfekcje obciążeniowe w postaci sił skupionych, przyłożonych w punkcie (b), o kierunku promieniowym i przeciwnych zwrotach (rys. 7.26). Wartości sił są zmienne i proporcjonalne do aktualnej wypadkowej reakcji z przesuwanej krawędzi, według formuły $P_{impf}^{1,2} = 0,01 \cdot \Sigma R_z$ (zwrot: 1 – do środka; 2 – na zewnątrz cylindra). Uzyskane ścieżki równowagi zestawiono na rys. 7.27. Jeśli rozpatrzmy układ bez imperfekcji, to przy postępującym przesuwaniu krawędzi, początkowo powłoka pozostaje gładka ($u_{(b)} \leq 10^{-3}$). Przy przemieszczeniu $w_{(d)} = 1,05$, co odpowiada wartości obciążenia $\Sigma R_z = 1757$, na ścieżkach równowagi pojawia się rozgałęzienie (punkt bifurkacji), układ może pozostać na ścieżce podstawowej lub przejść na wtórną, w jednym z dwóch kierunków. Uzyskany punkt bifurkacji jest punktem niesymetrycznym, fragment ścieżki wtórnej odpowiadający imperfekcji 1. (ruch do środka) jest stateczny, zaś odpowiadający 2. imperfekcji (ruch na zewnątrz) niestateczny. Klasyfikacja punktów bifurkacji zawarta została np. w WASZCZYSZYN I IN [1990].



Rys. 7.26 Cylinder ścinany. Dwa warianty imperfekcji obciążeniowej, ułatwiającej badanie ścieżki wtórnej.



Rys. 7.27 Cylinder ścinany. Poszukiwanie punktu krytycznego - ścieżki równowagi, program autorski.



Rys. 7.28 Cylinder ścinany. Poszukiwanie punktu krytycznego - przekroje (a)-(b)-(c) dla różnych poziomów obciążenia.

7.5 Wspornik ceowy

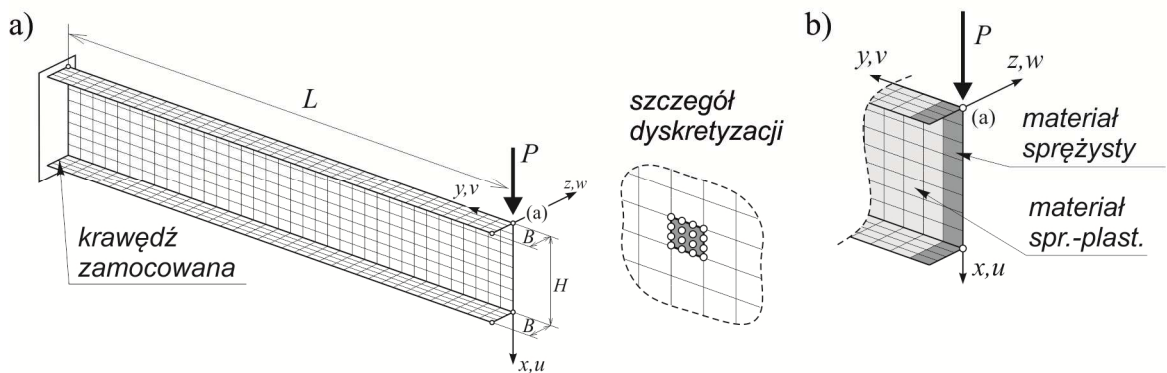
W przykładzie rozpatrywany jest wspornik o przekroju ceowym, obciążony siłą skupioną na jednym końcu, utwierdzony po przeciwnej stronie. Dane zadania zaczerpnięto z pracy CHRÓŚCIELEWSKI I IN. [1992], gdzie rozpatrywana konstrukcja pozostaje w zakresie sprężystym, podobnie jak w pracach WIŚNIEWSKI, TURSKA [2012] oraz CHRÓŚCIELEWSKI I IN. [2004]. Prace EBERLEIN, WRIGGERS [1999] oraz TAN, VU-QUOC [2005] podają rozwiązania dla materiału sprężysto-plastycznego. Analizę wspornika w zakresie sprężysto-plastycznym według sformułowania przedstawionego w niniejszej dysertacji pokazano w pracach BURZYŃSKI I IN. [2014b,c]. Jest to przykład powłoki wielopłatowej, w której 6. stopień swobody i związana z nim sztywność ma istotny wpływ na uzyskane rezultaty analiz.

Całkowita długość belki to $L = 36$, wysokość $H = 6$, szerokość półek $B = 2$, stała grubość powłoki $h_0 = 0,05$ (rys. 7.29a). Przyjęto parametry materiałowe o wartościach:

moduł Younga $E = 10^7$, współczynnik Poissona $\nu = 0,3333$, granica plastyczności materiału idealnie sprężysto-plastycznego $\sigma_y = 5000$. Wartości parametrów materiałowych ośrodka Cosseratów są podane każdorazowo przy odpowiednich rezultatach. Obciążenie stanowi siła skupiona $P = \lambda P_{ref}$, $P_{ref} = 10^2$.

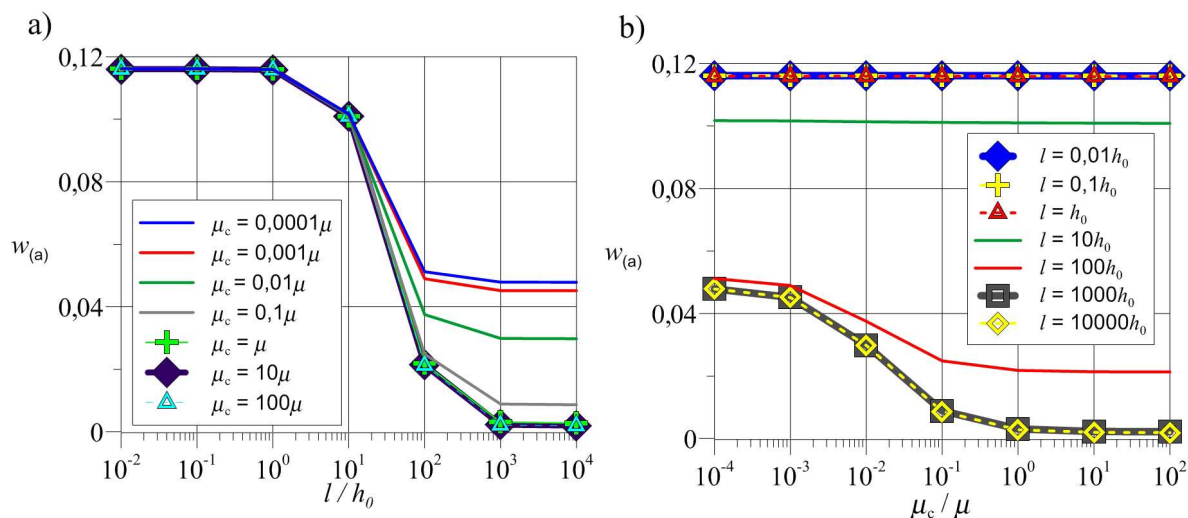
Do obliczeń przyjęto dyskretyzacje opisane schematem $(M+N+M) \times Z$, gdzie podziały na elementy skończone oznaczono jako: M - podział pólki oraz N - podział środnika w przekroju; Z - podział wzdłuż długości.

Punktowe przyłożenie obciążenia powoduje powstanie koncentracji naprężenia, a tym samym rozwój strefy uplastycznienia. Stosowane w pracy sformułowanie MES nie pozwala jednak na uzyskanie regularyzacji (niezależności wyniku do charakterystycznego wymiaru ES) w takich przypadkach. Zdecydowano się zatem na zastosowanie w dyskretyzacji w rzędzie elementów pod siłą skupioną (rys. 7.29b) sprężystego prawa konstytutywnego.



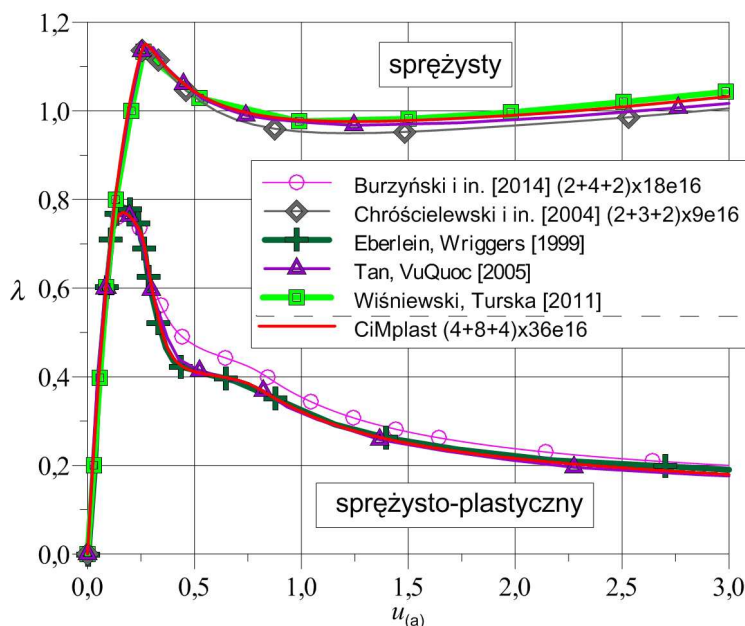
Rys. 7.29 Wspornik ceowy: a) geometria i dyskretyzacja zadania b) szczegół konstrukcji.

Pierwszym badaniem jest ocena wpływu parametrów ośrodka Cosseratów na rozwiązanie liniowe (rys. 7.30), przy $P = P_{ref}$. Podobnie jak w przykładzie 7.4, dla $l/h_0 > 10$ można zauważyć wpływ μ_c na sztywność konstrukcji.



Rys. 7.30 Wspornik ceowy. Wpływ parametrów μ_c i l na rozwiązania liniowe a) wyniki w dziedzinie l/h_0 b) wyniki w dziedzinie μ_c/μ .

Uzyskane ścieżki równowagi (rys. 7.31), z analiz geometrycznie oraz geometrycznie i materiałowo nieliniowych, wykazują dobrą zgodność z rozwiązaniami odniesienia. W rozwiązaniach odniesienia, realizowanych programem CAM, użyto następujących dyskretyzacji: $(2+4+2) \times 18e16$ (BURZYŃSKI I IN. [2014c]) oraz $(2+3+2) \times 9e16$ (CHRÓŚCIELEWSKI I IN. [2004]). Można zatem stwierdzić, że na jakość wyników dla analizy sprężysto-plastycznej decydujący wpływ ma właściwa dyskretyzacja zadania.



Rys. 7.31 Wspornik ceowy. Ścieżki równowagi analiz nieliniowych.

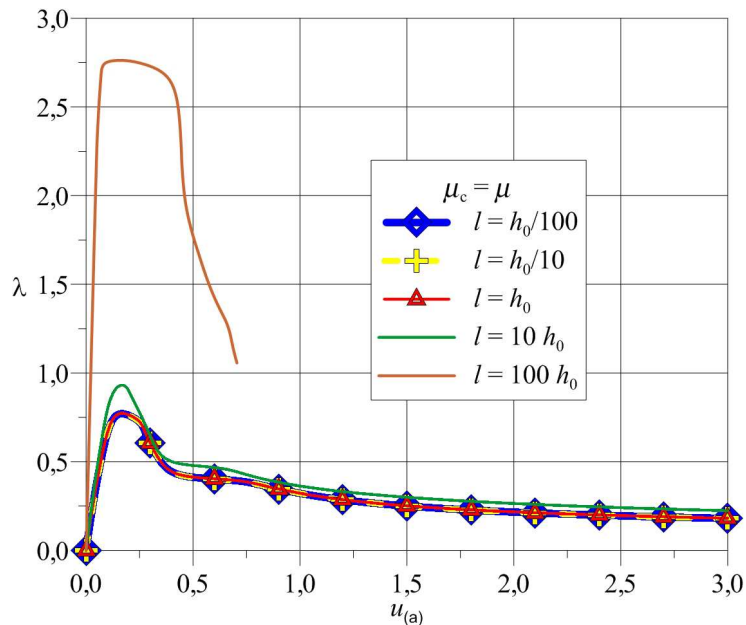
Analizy zbieżności wykonana programem CiMplast pokazuje nieznaczny wpływ dyskretyzacji na uzyskane mnożniki obciążenia w punkcie granicznym (tab. 7.5). Uzasadnieniem dla wyboru dyskretyzacji $(4+8+4) \times 36e16$ do dalszych badań jest

zadowalająca jakość ścieżki poza punktem granicznym (w zakresie wychylenia $w_{(a)} \leq 3,0$, zob. rys. 7.31).

Tab. 7.5 Wspornik ceowy. Wartości mnożnika obciążeń w punkcie granicznym – zbieżność dyskretyzacji MES, analiza materiałowo nieliniowa.

program	dyskretyzacja	λ_{gr}
CiMplast	$(2+4+2) \times 18e16$	0,773
	$(4+8+4) \times 36e16$	0,770
	$(6+12+6) \times 54e16$	0,769

Analiza wpływu parametru l na rozwiązanie sprężysto-plastyczne (rys. 7.32) pokazuje istotny wpływ na sztywność i wartość obciążenia granicznego w zakresie $l/h_0 \geq 10$. W tab. 7.6 zestawiono wartości mnożnika obciążenia w punkcie granicznym dla różnych stosunków l/h_0 .



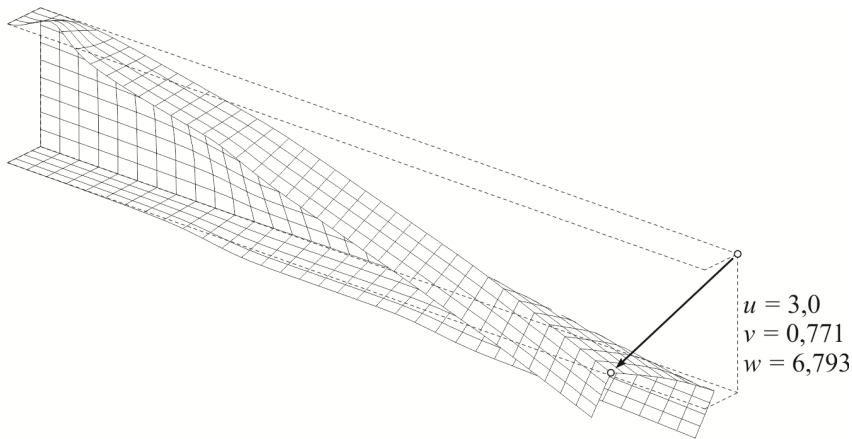
Rys. 7.32 Wspornik ceowy. Wpływ parametru l na rozwiązanie nieliniowe.

Tab. 7.6 Wspornik ceowy. Wartości mnożnika obciążeń w punktach granicznych – wpływ parametru l (dyskretyzacja $(4+8+4) \times 36e16$).

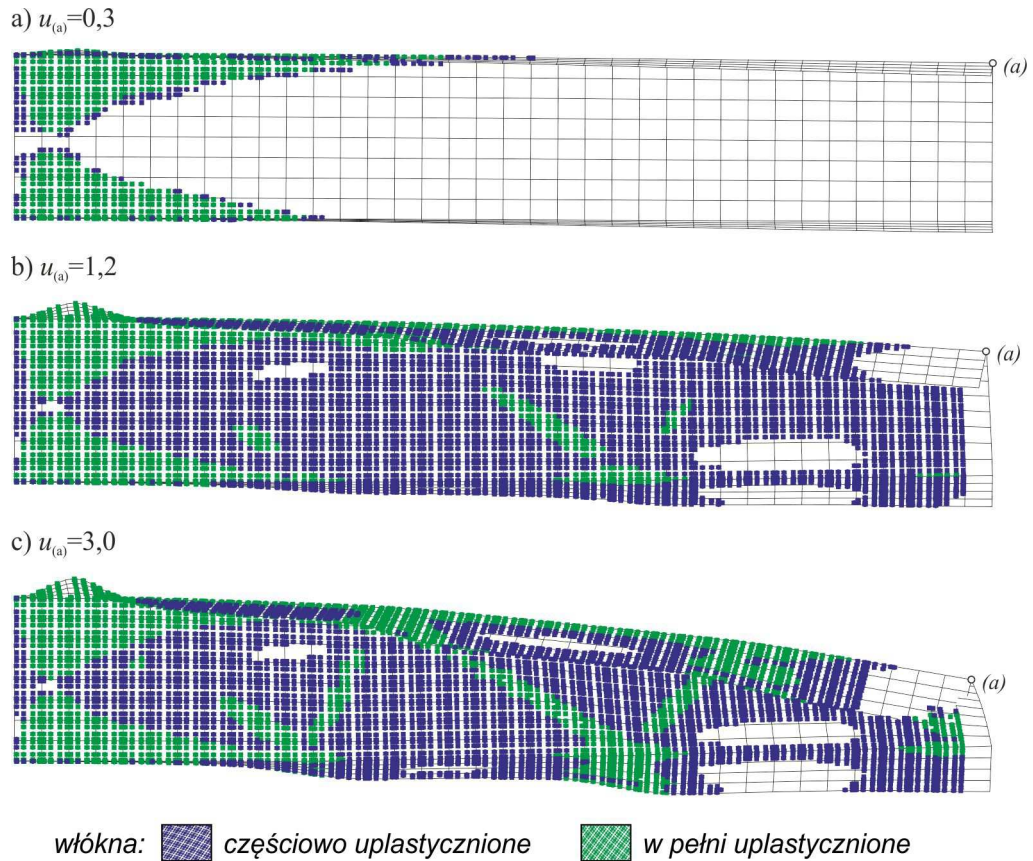
dług. char	λ_{gr}
$l = h_0/100$	2,762
$l = h_0/10$	0,931
$l = h_0$	0,773
$l = 10 h_0$	0,770
$l = 100 h_0$	0,770

Na rys. 7.33 przedstawiono zdeformowaną postać powłoki, otrzymaną w analizie sprężysto-plastycznej, w której przyjęto $l/h_0 = 0,01$ i $\mu_c/\mu = 1$. Deformacja układu na charakter giętno-skrętny.

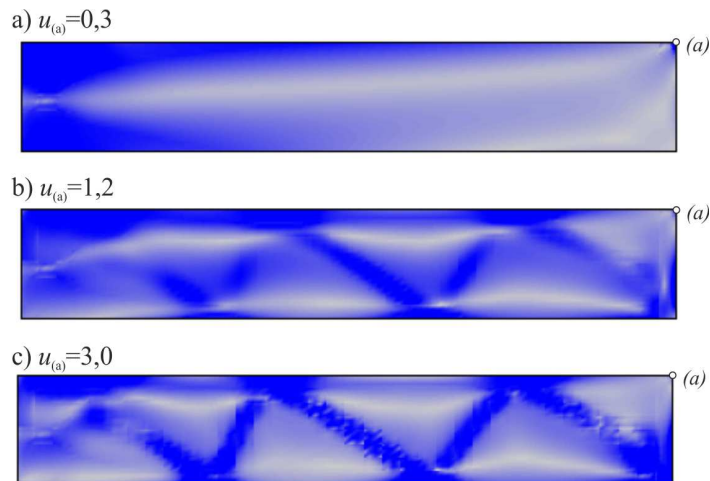
Rozwój stref uplastycznienia w konstrukcji pokazano na rys. 7.34 i rys. 7.35. W pierwszej fazie obciążenia (rys. 7.35a) dominuje zginanie wspornika, uplastycznione strefy znajdują się w sąsiedztwie utwierdzenia wspornika, dając efekt przegubu plastycznego. Dominują włókna w całości uplastycznione. Wraz z postępującym przemieszczeniem pionowym punktu pod obciążeniem skupionym, narasta wpływ mimośrodowo przyłożonej siły, a tym samym skręcania. W obrazie naprężeń (rys. 7.35b) coraz wyraźniej wpisuje się łamany kształt wyciętych stref. Ostatecznie dominują one na mapie naprężeń (rys. 7.35c). Na rys. 7.34b,c) widać, że częściowe uplastycznienie włókien objęło znaczącą część konstrukcji, całkowite zaś jedynie wąskie obszary wyciętych stref.



Rys. 7.33 Wspornik ceowy. Deformacja konstrukcji, analiza nieliniowa materiałowo.

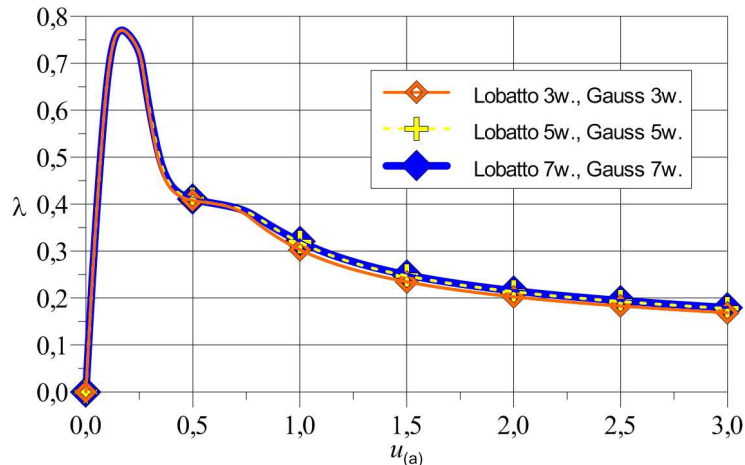


Rys. 7.34 Wspornik ceowy. Analiza nieliniowa materiałowo, program autorski – rozwój stref uplastycznienia. Dyskretyzacja $(4+8+4)\times 36e16$.



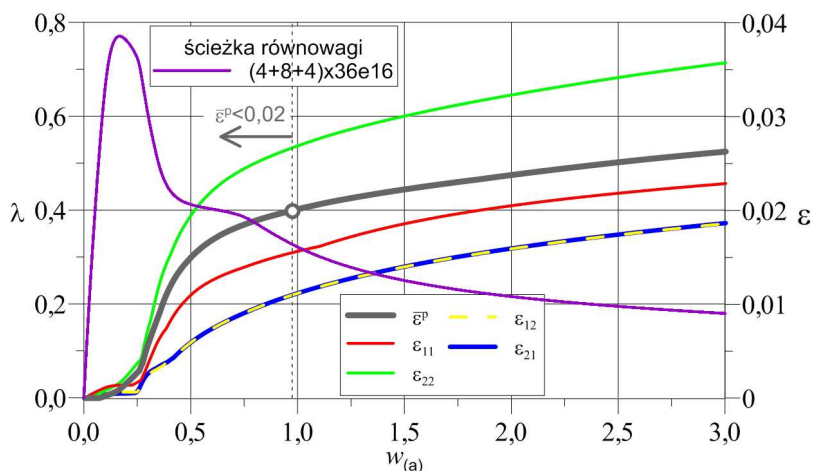
Rys. 7.35 Wspornik ceowy. Analiza nieliniowa materiałowo, program autorski – uogólnione naprężenia efektywne $\sqrt{3J_2}$ (zob. wzory 3.88, 4.45) na środku. Dyskretyzacja $(4+8+4)\times 36e16$.

Na rys. 7.36 zestawiono ścieżki równowagi dla różnego doboru kwadratur całkowania wyrażeń przekrojowych. Uzyskane rezultaty są znacząco różne od tych z przykładu 7.3, w niniejszym przykładzie dominuje membranowy stan wyężenia konstrukcji, stąd znikomy wpływ doboru typu i rzędu kwadratur, ujawniający się po przekroczeniu punktu granicznego.



Rys. 7.36 Wspornik ceowy. Wpływ doboru kwadratury całkowania po grubości na rozwiązanie nieliniowe.

Obwiednie wartości odkształceń w konstrukcji zostały zestawione na rys. 7.37. Zwraca uwagę ograniczenie wartości odkształceń $\bar{\varepsilon}^p$ do wartości 0,027 oraz przekroczenie wartości $\bar{\varepsilon}^p = 0,02$ po przejściu punktu granicznego. Można zatem stwierdzić, że analizowany przykład jest właściwy do testowania powłokowych zagadnień sprężysto-plastycznych w zakresie małych odkształceń. W zgodzie z teorią może być wyznaczona wartość obciążenia w punkcie granicznych i charakter ścieżki w początkowej fazie dalszego obciążania.



Rys. 7.37 Wspornik ceowy. Obwiednia wartości składowych odkształceń.

7.6 Panel płytowy w kształcie korytka

Zadanie zostało oryginalnie zaprezentowane w pracy CHRÓŚCIELEWSKI I IN. [2004]. Zrealizowano tam obliczenia w zakresie liniowym, prezentujące wpływ sposobu modelowania połączenia między płatami powłoki. W niniejszej pracy rozszerzono program badań o analizę geometrycznie i materiałowo nieliniową. Rozwiązania odniesienia dla analizy nieliniowej uzyskano w programie Abaqus.

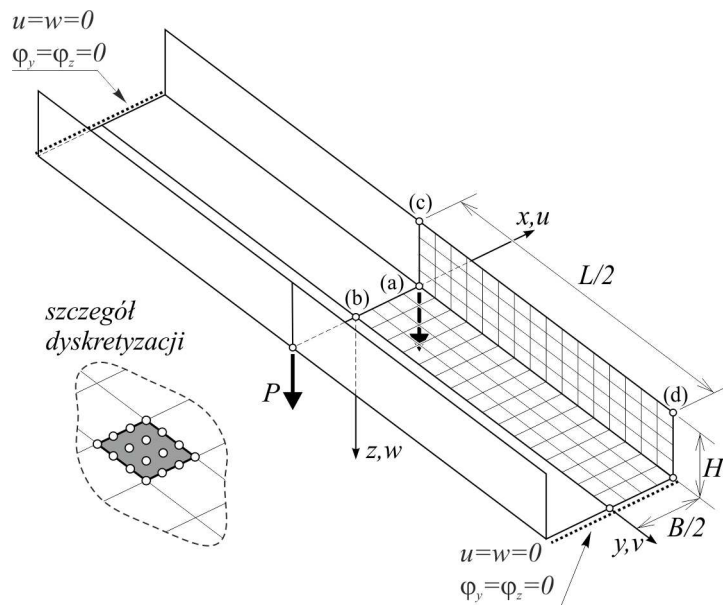
Geometrię i dyskretyzację zadania pokazuje rys. 7.38. Dane materiałowe to $E = 10^6$, $\nu = 0$, uzupełnione o wartość granicy plastyczności $\sigma_y = 2,5 \cdot 10^4$. Parametry ośrodka

Cosseratów podano w odniesieniu do modułu Kirchhoffa i grubości powłoki. Pozostałe dane liczbowe to $B=2$, $H=1$, $L=10$, $h_0=0,1$. Dyskretyzacja 1/4 układu (z wykorzystaniem podwójnej symetrii) opisana jest według schematu MxNeK, gdzie M oznacza łączną liczbę elementów na wysokości (wymiar H) i połowie szerokości panelu (wymiar $B/2$), N na połowie długości (wymiar $L/2$), K jest liczbą węzłów w elemencie lub typem elementu (Abaqus).

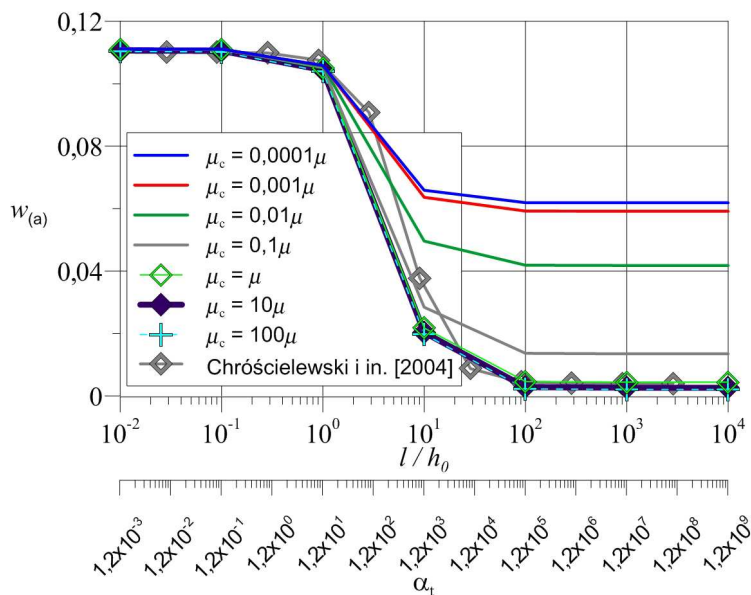
Wyniki analizy parametrycznej w zakresie liniowym pokazano na rys. 7.39 i rys. 7.40. Przyjęto dyskretyzację $8 \times 16 \times 16$. Korzystając z zależności (zob. rozdz. 5):

$$l = \frac{h}{2} \sqrt{\frac{\alpha_t}{3}} \Rightarrow \alpha_t = 12 \left(\frac{l}{h_0} \right)^2, \quad (7.8)$$

obok wyników autorskich pokazano wynik analizy ze względu na parametr α_t , pozyskany z CHRÓSCIELEWSKI I IN. [2004] (dyskretyzacja $6 \times 12 \times 9$). Uzyskano bardzo dobrą zgodność wyników, niewielkie różnice wynikają z odmiennych dyskretyzacji układu.



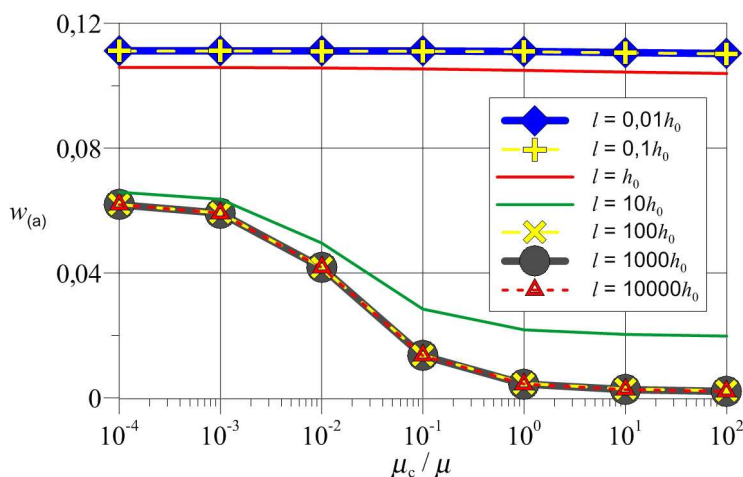
Rys. 7.38 Panel w kształcie korytka. Geometria i dyskretyzacja 1/4 zadania po uwzględnieniu symetrii układu.



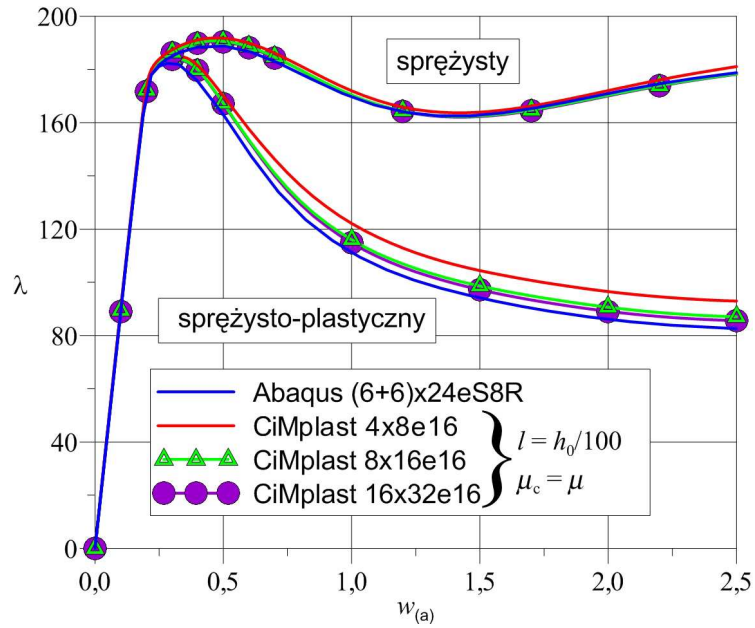
Rys. 7.39 Panel w kształcie korytka. Wpływ parametrów μ_c i l na rozwiązania liniowe, wyniki w dziedzinie l/h_0 .

W kolejnym badaniu, analizie nieliniowej geometrycznie z uwzględnieniem zakresu sprężystego oraz sprężysto-plastycznego, sprawdzono zbieżność podziału na podstawie uzyskanych ścieżek równowagi i punktów granicznych obciążenia. Wyniki zestawiono na rys. 7.41 oraz w tab. 7.7. Wobec braku rozwiązania odniesienia w literaturze, obliczenia porównawcze wykonano w programie Abaqus, otrzymano bardzo dobrą zgodność wyników.

W nieliniowej analizie parametrycznej ze względu na wartość l (rys. 7.42, tab. 7.8) uzyskano znaczący wzrost sztywności i wartości obciążenia granicznego wraz ze zwiększaniem wartości parametru. Charakter krzywych równowagi pozostaje podobny, z wyraźnym punktem granicznym.



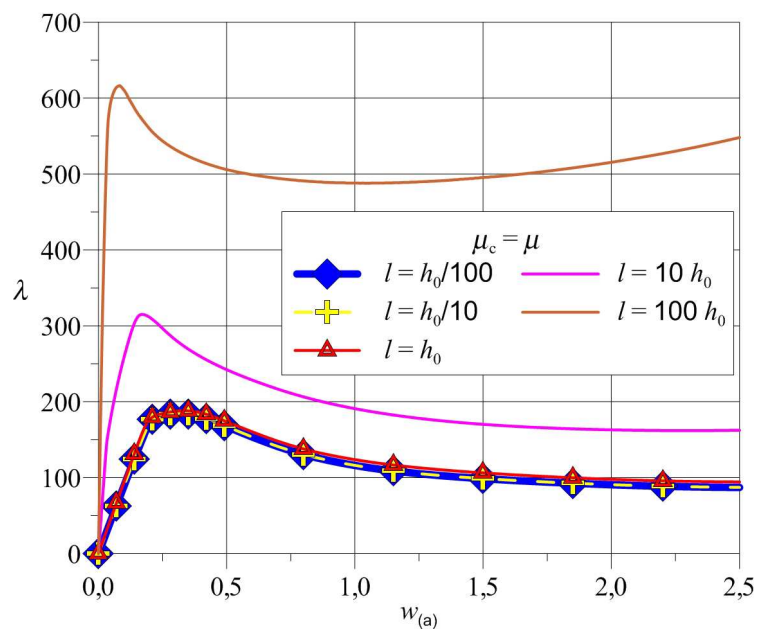
Rys. 7.40 Panel w kształcie korytka. Wpływ parametrów μ_c i l na rozwiązania liniowe, wyniki w dziedzinie μ_c/μ . Dyskretyzacja $8 \times 16e16$.



Rys. 7.41 Panel w kształcie korytka. Ścieżki równowagi w analizie nieliniowej.

Tab. 7.7 Panel w kształcie korytka. Wartości mnożnika obciążeń w punkcie granicznym – zbieżność dyskretyzacji MES.

materiał	dyskretyzacja	λ_{gr}
sprężysty	4x8e16	191,86
	8x16e16	190,73
	16x32e16	190,42
plastyczny	4x8e16	185,16
	8x16e16	184,16
	16x32e16	183,79

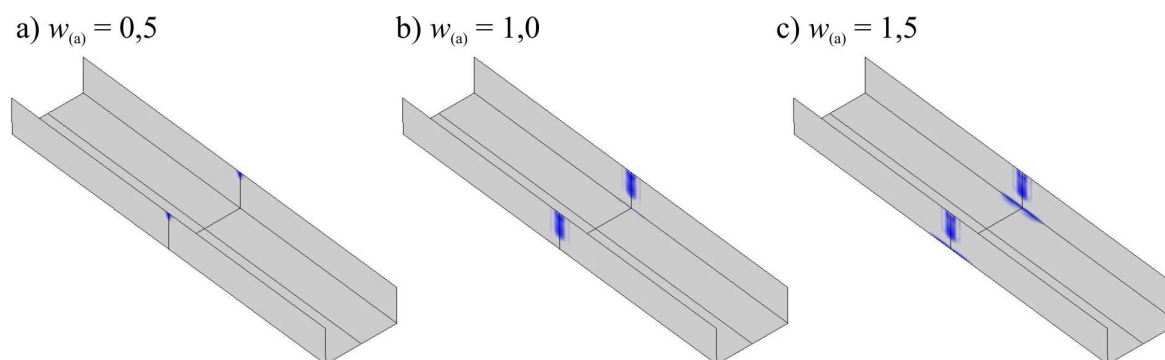


Rys. 7.42 Panel w kształcie korytka. Wpływ parametru l na wyniki analizy nieliniowej. Dyskretyzacja 8x16e16.

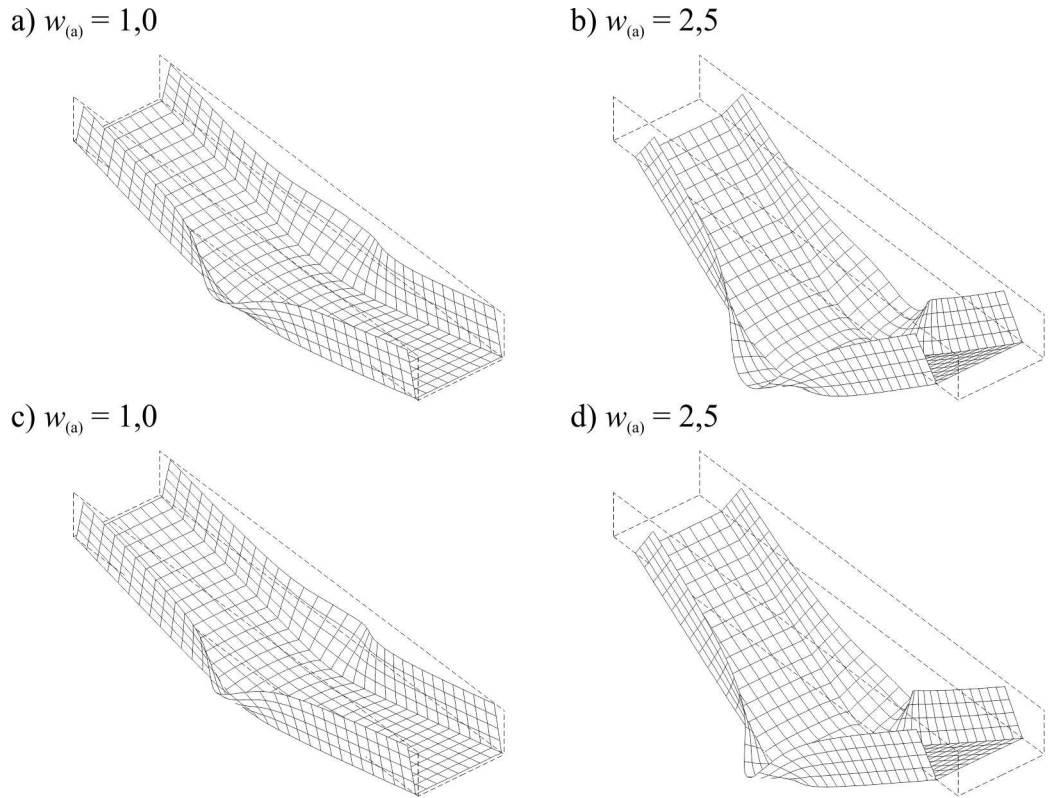
Tab. 7.8 Panel w kształcie korytka. Wartości mnożnika obciążeń w punkcie granicznym – wpływ parametru l (dyskretyzacja $8 \times 16 \times 16$).

materiał	dług. char	λ_{gr}
plastyczny	$l = h_0/100$	184,16
	$l = h_0/10$	184,21
	$l = h_0$	188,07
	$l = 10 h_0$	315,03
	$l = 100 h_0$	616,32

Na rys. 7.44 zestawiono postacie deformacji konstrukcji, w zakresie sprężystym i sprężysto-plastycznym, dla różnych wartości przemieszczenia kontrolnego. Charakterystyczna dla zadania jest strefa zginana w płacie pionowym, o większej krzywiznie w przypadku plastycznym. To właśnie w tej strefie oraz w rejonie połączenia płyt zachodzi plastyczne płynięcie konstrukcji (rys. 7.43). Wykształca się przegub plastyczny z wyboczeniem plastycznym ścinany.

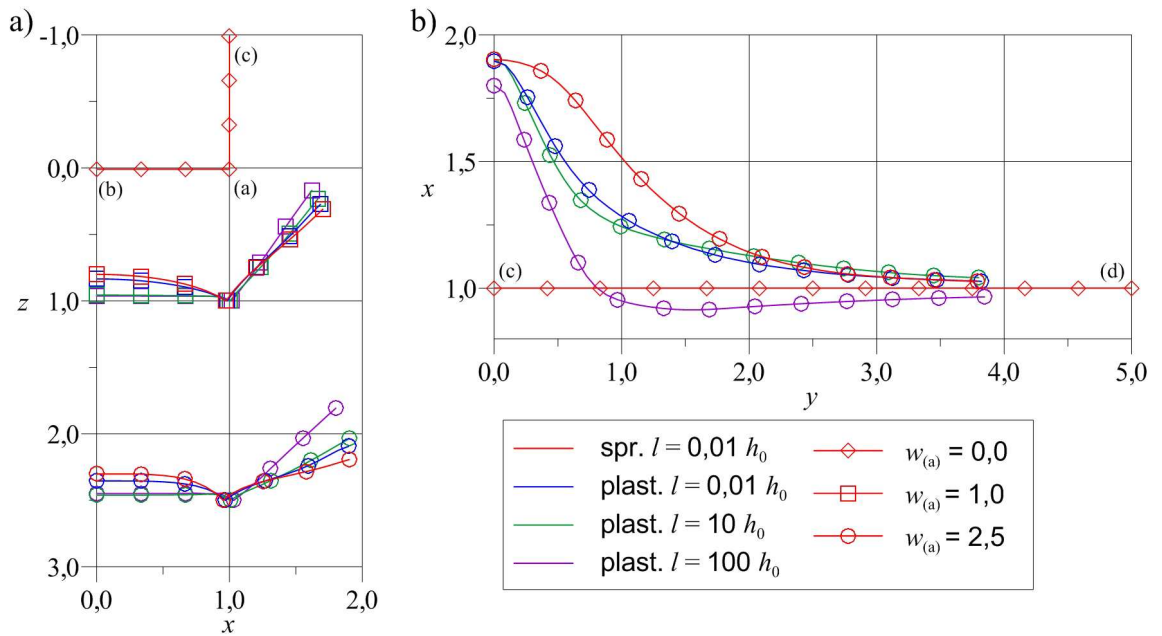


Rys. 7.43 Panel w kształcie korytka. Rozwój stref uplastycznienia, mapy efektywnych odkształceń plastycznych $\bar{\epsilon}^p$ a) $\bar{\epsilon}^p \leq 0,005$ b) $\bar{\epsilon}^p \leq 0,015$ c) $\bar{\epsilon}^p \leq 0,022$.



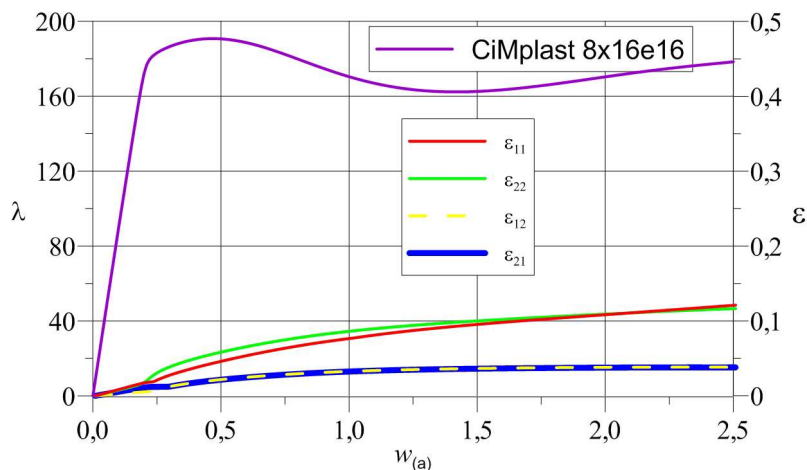
Rys. 7.44 Panel w kształcie korytka. Postać deformacji a), b) materiał sprężysty c), d) materiał plastyczny.

Na rys. 7.45 pokazano deformację charakterystycznych krawędzi zadania w zależności od wartości przemieszczenia kontrolnego i dla różnych wartości parametru l .

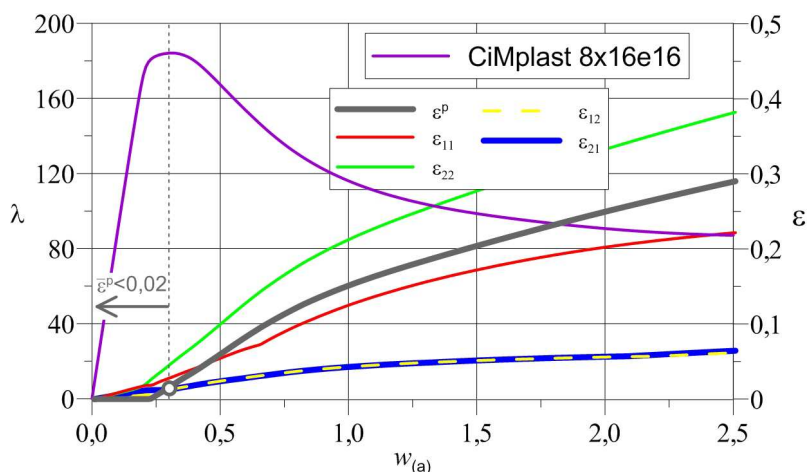


Rys. 7.45 Panel w kształcie korytka. Deformacje charakterystycznych krawędzi a) krawędź (b)-(a)-(c) b) krawędź (c)-(d)

Obwiednie wartości składowych odkształcenia zestawiono na rys. 7.46 i rys. 7.47. Obok wyniku dla analizy sprężysto-plastycznej dla porównania pokazano wyniki z analizy sprężystej. Zauważalny jest wyraźny wzrost wartości odkształceń w analizie plastycznej w stosunku do analizy sprężystej, co związane jest z zjawiskiem płynięcia materiału.

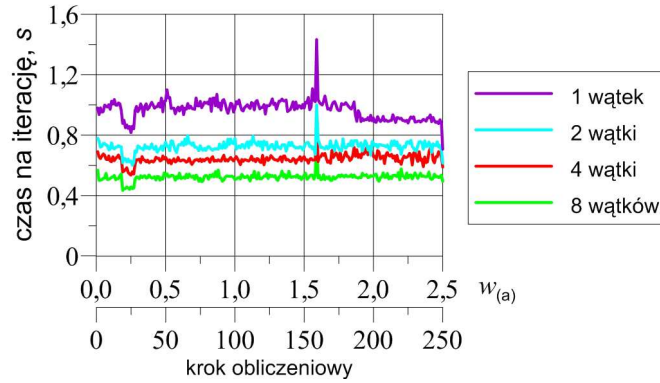


Rys. 7.46 Panel w kształcie korytka. Obwiednia wartości składowych odkształcenia, analiza sprężysta.



Rys. 7.47 Panel w kształcie korytka. Obwiednia wartości składowych odkształcenia, analiza sprężysto-plastyczna.

Na rys. 7.48 pokazano średnie czasy obliczeń 1 iteracji równowagi przy zaangażowaniu różnej liczby wątków. Na podstawie tych danych zostaną obliczone przyspieszenia $S(p)$, a uzyskany wynik zostanie porównany z przewidywaną wartością wynikającą z prawa Amdahla (zob. równanie 6.4).



Rys. 7.48 Panel w kształcie korytka. Czasy trwania obliczeń pojedynczej iteracji dla różnej liczby wątków.

Dla każdej iteracji przeprowadzono obliczenia według następującego schematu. Uzyskane czasy obliczeń zestawiono w tab. 7.9. W tab. 7.9 wyróżniono czas potrzebny na formułowanie macierzy elementowych i rozwiązywanie układu równań, ponieważ te fragmenty obliczeń zostały zrealizowane ze zrównolegleniem.

Tab. 7.9 Panel w kształcie korytka. Czasy obliczeń uzyskane w pojedynczej iteracji.

liczba aktywnych wątków	czas, s			
	całkowity	formułowanie macierzy elementowych	rozwiązywanie układu równań	pozostałe obliczenia (realizowane sekwencyjnie)
$p = 1$	$t_{iter}^{p=1} = 0,469$	$t_{elem}^{p=1} = 0,313$	$t_{uklad}^{p=1} = 0,087$	$t_{sekw}^{p=1} = 0,069$
$p = 2$	$t_{iter}^{p=2} = 0,370$	$t_{elem}^{p=2} = 0,146$	$t_{uklad}^{p=2} = 0,161$	$t_{sekw}^{p=2} = 0,063$
$p = 4$	$t_{iter}^{p=4} = 0,231$	$t_{elem}^{p=4} = 0,098$	$t_{uklad}^{p=4} = 0,064$	$t_{sekw}^{p=4} = 0,069$
$p = 8$	$t_{iter}^{p=8} = 0,207$	$t_{elem}^{p=8} = 0,086$	$t_{uklad}^{p=8} = 0,055$	$t_{sekw}^{p=8} = 0,066$

Na podstawie uzyskanych czasów obliczony jest współczynnik f (zob. rys. 6.3), określający jaki fragment programu nie jest zrównoleglony. Jest zatem

$$f = t_{sekw}^{p=1} / t_{iter}^{p=1} = 0,069 / 0,469 = 0,147, \quad (7.9)$$

co oznacza, że praca sekwencyjna zajmuje ok. 15% czasu wykonania programu, na czas wykonania reszty obliczeń ma wpływ liczba włączonych do współpracy wątków.

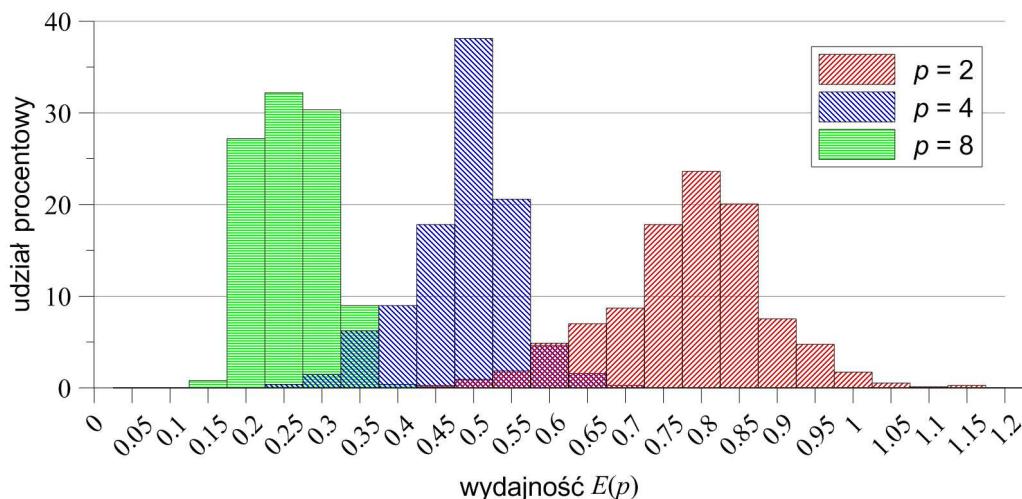
Korzystając ze wzorów (6.1), (6.4) i (6.2) można obliczyć odpowiednio: przyspieszenie rzeczywiste $S_{obl}(p)$, przyspieszenie zgodnie z prawem Amdahla $S_{Amd}(p)$, wydajność obliczeń zrównoleglonych $E_{obl}(p)$. Wyniki zestawiono w tab. 7.10.

Tab. 7.10 Panel w kształcie korytka. Przyspieszenia i wydajność obliczeń zrównoleglonych.

liczba aktywnych wątków	$S_{obl}(p)$	$S_{Amd}(p)$	$E_{obl}(p)$
	$S_{obl}(p) = t_{iter}^{p=1} / t_{iter}^p$	$S_{Amd}(p) = \frac{p}{1 + f(p-1)}$	$E_{obl}(p) = S_{obl}(p) / p$
$p = 2$	$S_{obl}(2) = 1,268$	$S_{Amd}(2) = 1,744$	$E_{obl}(2) = 0,634$
$p = 4$	$S_{obl}(4) = 2,030$	$S_{Amd}(4) = 2,776$	$E_{obl}(4) = 0,508$
$p = 8$	$S_{obl}(8) = 2,266$	$S_{Amd}(8) = 3,943$	$E_{obl}(8) = 0,283$

Zgodnie z oczekiwaniami, przewidziane przez prawo Amdahla przyspieszenie jest większe niż uzyskane. Włączenie do pracy $p = 8$ wątków obliczeniowych nie przynosi dużych korzyści w stosunku do pracy przy $p = 4$ - wzrost przyspieszenia wyniósł 11,6%, podczas gdy przejście z $p = 2$ na $p = 4$ daje zysk 60,1%. Powyższe obliczenia zostały zaprezentowane dla 1 wybranej iteracji. Ze względu na złożony sposób pracy komputera, przy wielu iteracjach mogą pojawiać się znaczne różnice w uzyskanych wynikach. Na rys. 7.49 pokazano histogram wydajności $E_{obl}(p)$ uzyskanych dla $n = 758$ iteracji (analiza sprężysto-plastyczna zadania). Uzyskane średnie wartości to: $E_{obl}^{sr.}(2) = 0,760$, $E_{obl}^{sr.}(4) = 0,461$, $E_{obl}^{sr.}(8) = 0,238$. Dla $p = 2$ uzyskano wyniki dla których $E_{obl}(2) \geq 1,0$. Szczegółowa analiza czasów pozwala na stwierdzenie, że nie jest to przypadek superliniowego przyspieszenia, lecz pewna niestabilność procesora przy 1 pracującym wątku.

Uzyskane rezultaty pozwalają na stwierdzenie, że w przypadku programu autorskiego uzasadnione jest uruchamianie obliczeń przy użyciu $p = 4$ wątków obliczeniowych, ze względu na znaczną oszczędność czasu i dobre wykorzystanie zasobów. Warto jednak zauważyć, że zawsze korzystniejsze jest uruchomienie 2 zadań obliczeniowych równocześnie z przypisaniem każdemu z nich po 2 wątki obliczeniowe, niż uruchomienie jednego po drugim 2 zadań z obliczeniami 4-wątkowymi w przypadku każdego z nich.



Rys. 7.49 Panel w kształcie korytka. Histogram wydajności $E_{obl}(p)$ osiąganey dla różnej liczby wątków.

8. PODSUMOWANIE

Poniższy rozdział stanowi podsumowanie pracy. Celem pracy było zaimplementowanie sprężysto-plastycznego prawa konstytutywnego formalizmie 6-parametrowej nieliniowej teorii powłok. Dodatkowym aspektem pracy było rozpatrzenie pewnych metod zwiększenia efektywności obliczeń numerycznych w programach z rodziny CAM. Sformułowana teoria oraz zrealizowane badania numeryczne wykazują zasadność przyjętej na wstępie tezy.

8.1 Oryginalne aspekty pracy

W pracy zrealizowano oryginalne badania nad sformułowaniem i zaimplementowaniem sprężysto-plastycznego prawa konstytutywnego dla 6-parametrowej nieliniowej teorii powłok. Na poziomie warstwy zakładany jest płaski stanu naprężenia ośrodka Cosseratów. Klasyczne wyrażenia całkowite na siły przekrojowe w powłoce zostały uzupełnione o wyrażenie związane z tzw. 6. stopniem swobody, tzw. owinięciem. Poprzeczne siły zostały potraktowane jako w pełni sprężyste.

Przewodnim celem pracy było sformułowanie sprężysto-plastycznego prawa konstytutywnego. Warto jednak zauważyć że praca prezentuje oryginalne równanie w zakresie sprężystym, które zostały zestawione i porównane z dotychczas zaproponowanymi dla rozpatrywanej teorii powłok.

Autor podjął udaną próbę dostosowania programu obliczeniowego do zrealizowania obliczeń wielowątkowych i zbadał wynikające stąd korzyści. Stanowi to oryginalny wkład w rozwój narzędzi obliczeniowych zespołu badawczego, którego członkiem jest Autor.

Zrealizowane w pracy przykłady numeryczne częściowo stanowią powtórzenie rozwiązań z literatury, częściowo zaś są twórczym wkładem Autora w tworzenie zasobu wyników odniesienia, w szczególności wskazując analizę sprężysto-plastyczną powłoki wielopłatowej (rozdz. 7.6) oraz wyznaczenie punktów bifurkacji powłok cylindrycznych (rozdz. 7.3 i 7.4).

Zebrane w dysertacji wyniki badań zostały częściowo opublikowane w pracach Autora oraz zespołu. W pracy BURZYŃSKI [2013a] rozpatrywany jest płaski ośrodek (PSO) sprężysto-plastyczny typu Cosseratów, zaprezentowano przykłady wykorzystania w analizie rozwoju stref lokalizacji w ośrodku gruntowym. Zbadana została zbieżność rozwiązań numerycznych ze względu na dyskretyzację MES. Badania te kontynuowano w pracy BURZYŃSKI [2013b], rozszerzając je o przypadek PSN. W pracach BURZYŃSKI I IN. [2014b,c] analizowane są powłoki w zakresie sprężysto-plastycznym, z użyciem formalizmu pokazanego w rozprawie. Szczegółową analizę sprężystego prawa konstytutywnego wynikającego z założeń poczynionych w niniejszej pracy, zestawiono w pracach BURZYŃSKI I IN. [2014a,d].

8.2 Wnioski z pracy

Przyjęte w pracy założenia, w szczególności wykorzystanie teorii ścinania pierwszego rzędu do wyznaczenia rozkładu odkształceń na grubości powłoki, może ograniczać zakres

stosowalności opracowanego narzędzia analizy powłok. Zrealizowane przykłady numeryczne pokazują, że w rozpatrywanym powszechnie w literaturze obszarze różnorodności geometrii i wartości przemieszczeń powłok, program obliczeniowy daje rezultaty odpowiadające rozwiązaniom odniesienia.

Relacja konstytutywna dla sił przekrojowych uzyskiwana jest z wykorzystaniem całkowania numerycznego. Sprawdzono różne typy (Gaussa, Lobatto) i rzędy kwadratur numerycznych (3, 5, 7). W zadaniu wykazującym dominującą rolę sił membranowych dobre rezultaty osiągnięto dla kwadratur o rzędzie ≥ 5 , niezależnie od ich typu. Konstrukcja, w której dominuje zginanie, okazała się wrażliwsza na tę zmienność. Wynik zgodny z rozwiązaniem odniesienia uzyskano tylko dla 7-punktowej kwadratury Gaussa.

W pracy podjęto dyskusję wpływu dodatkowych współczynników materiałowych ośrodka Cosseratów (l i μ_c) na sztywność konstrukcji powłokowych w zakresie linowym oraz obciążenia graniczne w analizie sprężysto-plastycznej. Uzyskane rezultaty pozwalają stwierdzić, że w zakresie $l/h_0 \leq 1$ sztywność ustrojów jest zbliżona do sztywności uzyskanych w powłokach z klasycznym kontinuum. Wpływ μ_c ujawnia się przy $l/h_0 \geq 10$ i dotyczy przykładów, gdzie obciążenie powoduje dominujący stan ścinania membranowego.

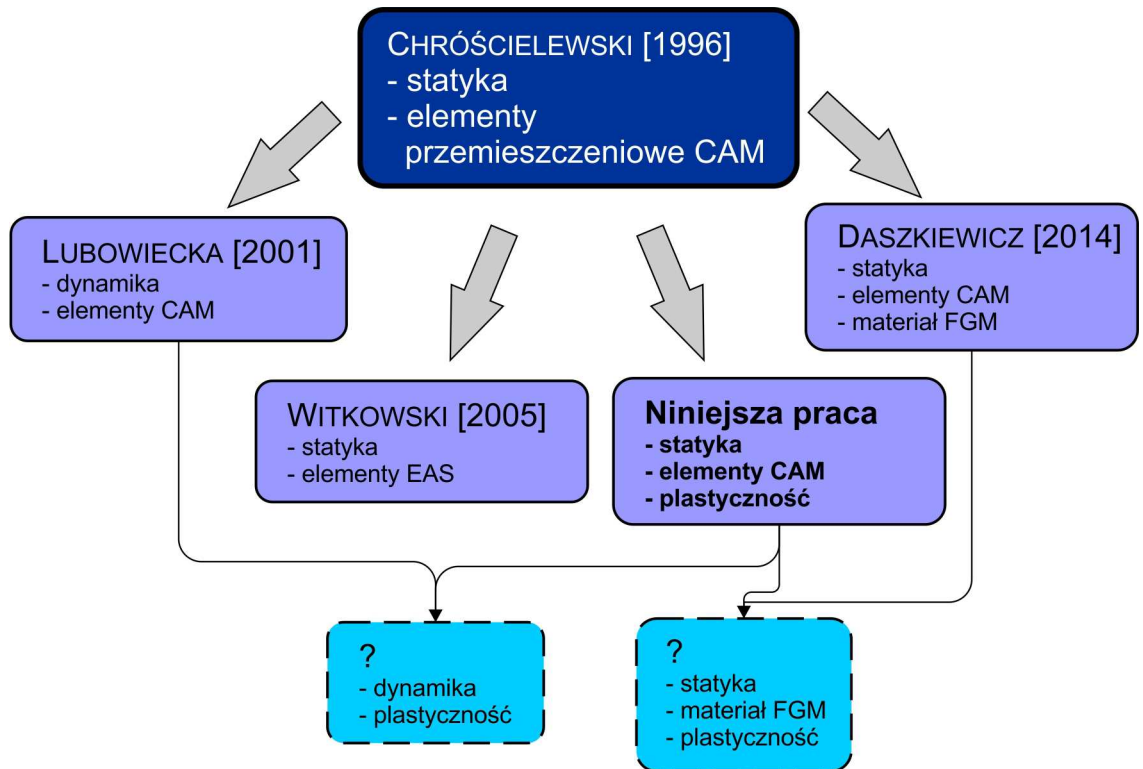
Zaimplementowane w autorskim programie CiMplast rozwiązania poprawiające efektywność obliczeń spełniły pokładaną w nich rolę. Zrównoleglenie części obliczeń daje zauważalne zyski w skróceniu czasu ich trwania. Zainstalowany oryginalnie w programie solver układu równań był jednym z „wąskich gardeł” obliczeń, ograniczając maksymalny rozmiar zadania (liczbę stopni swobody) oraz znacząco wydłużając czas obliczeń w przypadku problemów wielopłatowych (generujących duże szerokości półpasma). Zastosowanie solverów z bibliotek HSL i PARDISO zniosło wymienione ograniczenia, czas rozwiązywania układu równań uległ kilkudziesięciokrotnej redukcji, nie stwierdzono też znaczącego wydłużenia czasu obliczeń przy symulacji nieregularności numeracji węzłów i elementów w generowanej dyskretyzacji.

8.3 Kierunki dalszych badań

Niniejsza praca stanowi rozszerzenie dotychczas prowadzonych w zespole badań nad nieliniową 6-parametrową teorią powłok. Na rys. 8.1 przedstawiono schematycznie zakres wybranych spośród dotychczas prowadzonych badań (w ramach prac doktorskich współpracowników Autora), pokazując wzajemne relacje i możliwe kierunki dalszych prac.

Wskazano 2 możliwe kierunki badań. Pierwszy z nich to włączenie równań sprężysto-plastycznych do problemów dynamiki (zob. też LUBOWIECKA, CHRÓSCIELEWSKI [2002]). Drugi kierunek jest związany z analizą powłok zbudowanych z materiałów o zmiennych właściwościach (ang. *functionally graded materials*, FGM). W pracy MAO I IN. [2013] można znaleźć badania doświadczalne i numeryczne wspornika płytowego wykonanego z materiału FGM w zakresie sprężysto-plastycznym. Pewne wstępne badania nad wykorzystaniem materiałów FGM pokazano w pracy DASZKIEWICZ [2014].

Inspirację do dalszego rozwoju przedstawionej w dysertacji koncepcji można też czerpać z prac spoza zespołu. Możliwe jest rozszerzenie modelu materiałowych o zachowanie lepkosprężyste lub sprężystolepkoplastyczne (zob. np. KŁOSOWSKI, WOŹNICA [2007]). Program autorski może być dostosowany do badania konstrukcji z losowym rozkładem imperfekcji geometrycznych i ich wpływu na nośność (zob. np. BIELEWICZ I IN. [1994], GOŁOTA I IN. [2011]).



Rys. 8.1 Wybrane kierunki rozwoju nieliniowej 6-parametrowej teorii powłok.

8.4 Podziękowania

Badania zawarte w niniejszej pracy zostały częściowo sfinansowane z krajowych projektów badawczych:

- Projekt badawczy Ministerstwa Nauki i Szkolnictwa Wyższego Nr N N506 254237, „Nieliniowa teoria i analiza deformacji i stateczności warstwowych powłok kompozytowych metodą elementów skończonych”, w latach 2009-2012;
- Projekt badawczy Narodowego Centrum Nauki Nr N N506 254237 „Powierzchniowe krzywe osobliwe w wypadkowej termodynamice powłok”, realizowany i planowany na lata 2013-16.

W tym miejscu pragnę podziękować wszystkim osobom zaangażowanym w powstanie niniejszej dysertacji.

Doktorowi Wojciechowi Witkowskiemu i Profesorowi Jackowi Chróścielewskiemu za wieloletnią owocną współpracę, przekazaną wiedzę, wnikliwość, a także cierpliwość i wyrozumiałość oraz motywację do podejmowania wyzwań.

Karolowi Daszkiewiczowi za konstruktywne uwagi krytyczne na etapie przygotowania pracy.

Moim Najbliższym, Annie i Agacie, za pomoc i nieskończoną cierpliwość w trakcie przygotowań i redakcji rozprawy.

9. DODATKI

A. Opis obrotów

Dodatek jest poświęcony opisowi relacji dotyczących ogólnie rozumianych obrotów. Zostały zestawione podstawowe informacje, których rozwinięcie można znaleźć m.in. w pracach CHRÓŚCIELEWSKI [1996], WIŚNIEWSKI [1997], CHRÓŚCIELEWSKI I IN. [2004] i cytowanej tam literaturze

A.1 Tensor ortogonalny

Def. tensora ortogonalnego. W wektorowej przestrzeni Euklidesowej E^3 tensor Q taki że:

$$(Qa) \cdot (Qb) = a \cdot b = b \cdot a, \quad a, b \in E^3, \quad Q \in E^3 \otimes E^3 \quad (A.1)$$

nazywany jest tensorem ortogonalnym.

Własności tensora ortogonalnego:

1. tensor jest ortogonalny wtedy i tylko wtedy gdy $Q^T Q = I \Rightarrow Q^{-1} = Q^T$,
 $Q Q^T = Q Q^{-1} = Q^{-1} Q = Q^T Q = I$, gdzie Q^T oznacza tensor transponowany;
2. $\det Q = 1$

A.2 Tensor skośnie symetryczny

Tensor spełniający warunek:

$$W^T = -W, \quad W \in E^3 \otimes E^3 \quad (A.2)$$

jest nazywany tensorem skośnie symetrycznym. Można wykazać następującą własność tensora skośnie symetrycznego: $a \cdot (Wb) = 0$, $a, b \in E^3$.

A.3 Obrót właściwy, grupa obrotów SO(3)

Każde ortogonalne przekształcenie liniowe

$$a = Qa, \quad a, a \in E^3, \quad (A.3)$$

trójwymiarowej euklidesowej przestrzeni wektorowej E^3 na siebie $Q: E^3 \rightarrow E^3$ nazywane jest obrotem właściwym (tensorem obrotu, macierzą obrotu).

Własności obrotu właściwego:

1. zachowuje długość wektora i kąt między wektorami;
2. zachowuje skrętność układu;
3. zachowuje iloczynny skalarne $(Qa \cdot Qb = a \cdot b = b \cdot a)$ i wektorowe
 $((Qa \times Qb) \times Qc = (a \times b) \times c)$, gdzie $\forall a, b, c \in E^3$.

Pod pojęciem trójwymiarowej grupy obrotów $SO(3)$ rozumie się grupę obrotów właściwych, ograniczonych i nieosobliwych, zdefiniowaną jako

$$SO(3) = \{ Q: E^3 \rightarrow E^3 \mid Q^T Q = Q Q^T = I, \det Q = +1 \}. \quad (A.4)$$

A.4 Tw. Eulera o obrotach

Tw. Każdy obrót wokół punktu jest równoważny pewnemu obrotowi wokół osi. Wynika stąd, że dla każdego przekształcenia (A.3) można wskazać określające je oś obrotu (wektor \mathbf{e}) i kąt obrotu w .

A.5 Mały obrót, przestrzeń styczna do grupy obrotów

Grupa obrotów $SO(3)$ ma swoją interpretację geometryczną w postaci zakrzywionej hiperpowierzchni, której punkty są skończonymi obrotami. Wyróżnić można przestrzenie styczne do $SO(3)$ w punkcie $\mathbf{Q} = \mathbf{1}$. Te przestrzenie są przestrzeniami liniowymi tensorów skośnie symetrycznych

$$so(3) = \{ \mathbf{W} : E^3 \rightarrow E^3 \mid \mathbf{W}^T = -\mathbf{W} \}. \quad (\text{A.5})$$

Każdy element $so(3)$ interpretuje się jako infinitezymalny obrót.

A.6 Parametryzacja grupy obrotów

Parametryzacja grupy obrotów polega na wprowadzeniu odwzorowania:

$$SO(3) \rightarrow R^n, \quad \mathbf{Q} = \mathbf{Q}(q_i), \quad \mathbf{Q} \in SO(3), \quad q_i \in R^n. \quad (\text{A.6})$$

W pracy w celu opisu obrotów lokalnie wykorzystywana jest tzw. parametryzacja kanoniczna. Istnieją inne sposoby parametryzacji, ich opisy można odszukać m.in. w pracach PIETRASZKIEWICZ, BADUR [1983], LUBOWIECKA [2001], WITKOWSKI [2005], KREJA [2007], SADŁOWSKI [2007], MIŚKIEWICZ [2010].

Poniżej zostanie przedstawiony opis parametryzacji kanonicznej. Wykorzystany zostanie absolutnie zbieżny szereg potęgowy

$$\exp \mathbf{A} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mathbf{A}^n}{n!} = \mathbf{1} + \mathbf{A} + \frac{1}{2} \mathbf{A}^2 + \dots, \quad (\text{A.7})$$

gdzie \mathbf{A} jest dowolnym tensorem. Wykorzystując implikację

$$\mathbf{A} \equiv \mathbf{W} \in so(3) \Rightarrow \exp \mathbf{W} \in SO(3) \quad (\text{A.8})$$

oraz przyjmując na podstawie tw. Eulera że $\mathbf{W} = w \operatorname{ad}(\mathbf{e})^1$ ($\|\mathbf{e}\| = 1$) otrzymujemy

$$\mathbf{Q} = \exp \mathbf{W} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mathbf{W}^n}{n!} = \mathbf{1} + \mathbf{W} + \frac{1}{2} \mathbf{W}^2 + \dots \quad (\text{A.9})$$

¹ operator „ad” zdefiniowany jest jako (w zapisie macierzowym):

$$[\mathbf{W}_{ij}] = \begin{bmatrix} 0 & -w_3 & w_2 \\ w_3 & 0 & -w_1 \\ -w_2 & w_1 & 0 \end{bmatrix}, \quad [w_i] = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix}, \quad [\mathbf{W}_{ij}] = \operatorname{ad}([w_i]).$$

Wykorzystując fakt, że każdy tensor spełnia swoje równanie charakterystyczne (tw. Cayley’a–Hamiltona, zob. np. CHADWICK [1999]) oraz równanie charakterystyczne dla tensora skośnie symetrycznego

$$f(\lambda) = \lambda^3 + w^2\lambda = 0, \quad (\text{A.10})$$

otrzymuje się

$$\mathbf{W}^3 + w^2\mathbf{W} = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{W}^3 = -w^2\mathbf{W}. \quad (\text{A.11})$$

Wykorzystanie rozwinięcia funkcji trygonometrycznych $\sin(w)$ i $\cos(w)$, pozwala na uproszczenie nieskończonego szeregu potęgowego (A.9) do postaci

$$\mathbf{Q} = \mathbf{1} + a\mathbf{W} + b\mathbf{W}^2, \quad (\text{A.12})$$

gdzie:

$$\mathbf{W} = \text{ad}(\mathbf{w}) \in \text{so}(3), \quad a = \frac{\sin w}{w}, \quad b = \frac{1 - \cos w}{w^2}. \quad (\text{A.13})$$

Równanie (A.12) przedstawia tzw. reprezentację kanoniczną tensora obrotu. Z równania (A.12) można wyznaczyć kąt obrotu w oraz wektor obrotu \mathbf{w} jako funkcje \mathbf{Q} , wykorzystując ślad tensora \mathbf{Q} i różnicę $\mathbf{Q} - \mathbf{Q}^T$, a następnie rozwiązując poniższe równania:

$$\cos w = \frac{1}{2}(\text{tr}\mathbf{Q} - 1), \quad \Rightarrow \quad w = \arccos\left(\frac{1}{2}(\text{tr}\mathbf{Q} - 1)\right), \quad (\text{A.14})$$

$$2 \sin w \text{ad}(\mathbf{w}) = \mathbf{Q} - \mathbf{Q}^T \quad \Rightarrow \quad \mathbf{w} = \frac{1}{2 \sin w} \text{ad}^{-1}(\mathbf{Q} - \mathbf{Q}^T). \quad (\text{A.15})$$

Własność (A.8) pozwala na zapis każdego tensora z otoczenia $\mathbf{Q} \in \text{SO}(3)$ jako złożenie (tensorów):

- a) obrotów w reprezentacji przestrzennej $(\exp \mathbf{W})\mathbf{Q}$ (lewa transformacja)
 - b) lub obrotów w reprezentacji materialnej $\mathbf{Q}(\exp \mathbf{W})$ (prawa transformacja),
- gdzie $\mathbf{W}, \mathbf{W} \in \text{so}(3)$.

B. Geometria powierzchni

Podstawowe informacje dotyczące geometrii powierzchni zaczerpnięto z prac PIETRASZKIEWICZ [1977], LEWIŃSKI, TELEGA [2000] i KONOPIŃSKA, PIETRASZKIEWICZ [2007]. Niech dowolny punkt $\mathbf{x} \in B$ będzie sparametryzowany współrzędnymi $(\xi^\alpha, \xi) \equiv (\xi^i)$, $\alpha = 1, 2$, $i = 1, 2, 3$, gdzie ξ jest współrzędną wzdłuż wersora \mathbf{t} , taką że $\xi = 0$ na M , zaś ξ^α są współrzędnymi na M . Definiuje się:

$$\mathbf{t}_\alpha = \mathbf{P} \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \xi^\alpha} \equiv \mathbf{P} \mathbf{x}_{,\alpha}, \quad \mathbf{t}_{\alpha\beta} = \mathbf{t}_\alpha \cdot \mathbf{t}_\beta, \quad t = \det(t_{\alpha\beta}), \quad (\text{B.1})$$

$$\mathbf{t}^\beta \cdot \mathbf{t}_\alpha = \delta_\alpha^\beta, \quad \mathbf{t}^{\alpha\beta} = \mathbf{t}^\alpha \cdot \mathbf{t}^\beta, \quad \epsilon^{\alpha\beta} = \sqrt{a} e_{\alpha\beta}, \quad (\text{B.2})$$

gdzie t_α i t^β są odpowiednio kowariantnym i kontrawariantnymi wektorami bazowymi, $t_{\alpha\beta}$ i $t^{\alpha\beta}$ kowariantnym i kontrawariantnymi składowymi tensora metrycznego, P jest operatorem projekcji, zaś δ_α^β jest symbolem Kroneckera. Przez $e_{\alpha\beta}$ oznaczono symbol permutacyjny, taki że $e_{11} = e_{22} = 0$ i $e_{12} = e_{21} = 1$. Jednostkowy wektor normalny n definiowany jest jako

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{t}_1 \times \mathbf{t}_2}{\|\mathbf{t}_1 \times \mathbf{t}_2\|}. \quad (\text{B.3})$$

Wykorzystując n można zapisać składowe kowariantne tensora krzywizny:

$$b_{\alpha\beta} = -\mathbf{n}_{,\alpha} \cdot \mathbf{t}_\beta = -\mathbf{n}_{,\beta} \cdot \mathbf{t}_\alpha = -\mathbf{n} \cdot \mathbf{t}_{\alpha,\beta}, \quad b = \det(b_{\alpha\beta}) \quad (\text{B.4})$$

Ma on dwa niezmienniki:

$$K = b/t, \quad H = \frac{1}{2} t^{\alpha\beta} b_{\alpha\beta}, \quad (\text{B.5})$$

nazywane, odpowiednio, krzywizną Gaussa i średnią. Pochodną wektora n po współrzędnych powierzchniowych zapisuje się wykorzystując wzór Weingartena:

$$\mathbf{t}_{3,\alpha} = -b_\alpha^\lambda \mathbf{t}_\lambda, \quad b_\alpha^\lambda = t^{\lambda\beta} b_{\alpha\beta}. \quad (\text{B.6})$$

Tensor metryczny służy do mierzenia odległości, kątów i pól na powierzchni powłoki. Znając tensor krzywizny można określić krzywizny i skręcenia krzywych na powierzchni powłoki. Istotną rolę w geometrii powierzchni grają twierdzenia Codazzi – mówią one o tym, że składowe $t_{\alpha\beta}$ i $b_{\alpha\beta}$ nie mogą być przyjęte dowolnie, lecz są od siebie zależne. Twierdzenie wybrane Gaussa mówi natomiast o tym, że krzywizna jest niezmiennikiem przekształceń zachowujących odległości na danej powierzchni. Wynika z tego m.in. brak możliwości przekształcenia sfery w płaszczyznę (np. kuli ziemskiej w mapę) z dokładnym odwzorowaniem odległości.

C. Całkowanie numeryczne

Problem całkowania numerycznego funkcji $f(x)$ w przedziale $[a, b]$ można ogólnie zapisać jako (zob. np. KINCAID, CHENEY [2006])

$$\int_a^b f(x)w(x)dx \approx \sum_{i=0}^n A_i f(x_i), \quad (\text{C.1})$$

gdzie $w(x)$ jest ustaloną funkcją wagową przyjmującą wartości dodatnie. Przez x_i i A_i oznaczono odpowiednio węzły i współczynniki (wagi) kwadratury.

W niniejszej pracy całkowanie wyrażeń na macierze elementowe oraz na siły przekrojowe realizowane jest za pomocą kwadratur Gaussa-Legendre'a oraz Lobatto. Dla ich

uzyskania zakłada się $w(x)=1$ w (C.1) oraz normuje przedział całkowania przez zmianę zmiennej x na

$$y = \frac{1}{b-a}(2x-a-b). \quad (\text{C.2})$$

Wartości x_i i A_i uzyskiwane są na podstawie rozwiązania równania różniczkowego Legendre'a (zob. np. KORN, KORN [2000])

$$(1-x^2) \frac{d^2 y}{dx^2} - 2x \frac{dy}{dx} + n(n+1)y = 0. \quad (\text{C.3})$$

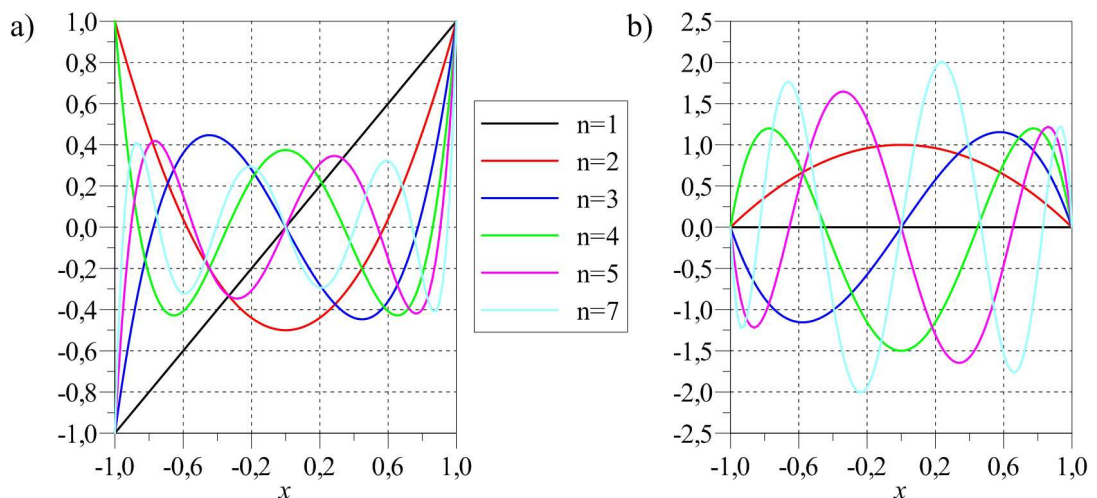
Rozwiązaniami równania (C.3) są wielomiany

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2-1)^n. \quad (\text{C.4})$$

W tab. 9.1 zestawiono wielomiany, których miejsca zerowe wyznaczają węzły kwadratury oraz wyrażenie na wagi. Wykresy wielomianów o rzędach $n=1,2,3,4$ (niezbędnych przy formułowaniu macierzy elementowych – zob. rozdz. 5) oraz $n=5,7$ (użytych przy całkowych wyrażeniach na siły przekrojowe – zob. rozdz. 5) zestawiono na rys. 9.1.

Tab. 9.1 Wielomiany i wagi dla różnych kwadratur całkowania numerycznego.

kwadratura	wielomiany	wagi
Gaussa-Legendre'a	$P_n(x)$	$A_i = \frac{2}{(1-x_i^2) \left(\frac{d}{dx} P_n(x_i) \right)^2}$
Lobatto	$(1-x^2) \frac{d}{dx} P_{n-1}(x)$	$A_i = \frac{2}{n(n-1) (P_{n-1}(x_i))^2}$



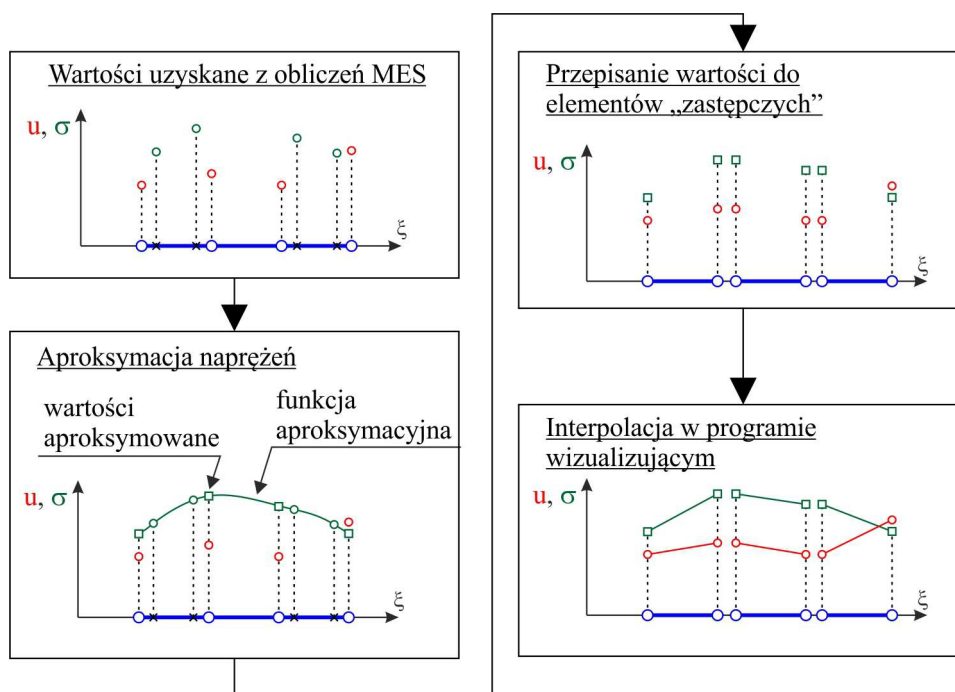
Rys. 9.1 Wielomiany interpolacyjne a) kwadratura Gaussa- Legendre'a b) kwadratura Lobatto.

D. Program PLST2GID

Program PLST2GID został stworzony w celu prezentacji przemieszczeń, a także pól naprężenia i odkształcenia uzyskanych w analizach numerycznych. Autorski program obliczeniowy CiMplast generuje wyniki w postaci plików tekstowych. Autor dysponuje komercyjnym programem GiD v.11 umożliwiającym graficzną prezentację wyników. Głównym problemem w komunikacji między programami jest to, że w programie autorskim używane są 16-węzłowe elementy skończone, podczas gdy program GiD oferuje wizualizację wyników dla elementów 4- i 9-węzłowe. Zaszła zatem konieczność opracowania algorytmu transformującego uzyskane wyniki. Zrealizowano go w następujących punktach:

1. aproksymacja wyników naprężeń i odkształceń z punktów całkowania do węzłów elementu skończonego – z wykorzystaniem funkcji kształtu;
2. podział elementu skończonego „wyjściowego” 16-węzłowego na 9 4-węzłowych elementów „zastępczych” (do generacji grafiki w programie GiD);
3. przepisanie wartości „wyjściowych”: przemieszczeń węzłowych oraz aproksymowanych naprężeń i odkształceń do węzłów elementów „zastępczych”;
4. w programie wizualizującym wyniki wartości są interpolowane liniowo wewnątrz elementów „zastępczych”.

Przez punkty całkowania rozumie się punkty całkowania na powierzchni elementu (bez uwzględniania całkowania po grubości). Algorytm przedstawiono schematycznie na rys. 9.2 dla 4-węzłowego elementu 1-wymiarowego (bez straty ogólności rozważań). Sposób transformacji wyników dla odkształceń jest identyczny jak dla naprężeń, stąd na rysunku przedstawiono tylko wartości naprężeń.



Rys. 9.2 Algorytm transformacji wartości przemieszczeń i naprężeń.

Dalsze rozważania zostaną zapisane również dla elementu 1-wymiarowego. Formalnie ekstrapolację wyników z punktów całkowania do węzłów elementu można zapisać wykorzystując zasadę interpolacji funkcji wektorowej \tilde{z}

$$\tilde{z}(\xi) = \sum_{a=1}^{n_w} L_a(\xi) z_a, \quad (\text{D.1})$$

gdzie z_a oznacza wartość w a -tym węźle elementu, $L_a(\xi)$ jest wartością funkcji kształtu w punkcie o współrzędnej ξ związaną z a -tym węźłem, zaś $\tilde{z}(\xi)$ jest interpolowaną wartością funkcji w punkcie o współrzędnej ξ . Liczba węzłów elementu oznaczona jest przez n_w . Jeśli przyjmiemy, że punkty całkowania mają współrzędne $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots, \xi_{n_w}$ i jest ich tyle samo co węzłów elementu, to wykorzystując (D.1) można zapisać układ równań:

$$\begin{Bmatrix} \tilde{z}(\xi_1) \\ \tilde{z}(\xi_2) \\ \vdots \\ \tilde{z}(\xi_{n_w}) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} L_1(\xi_1) & L_2(\xi_1) & \cdots & L_{n_w}(\xi_1) \\ L_1(\xi_2) & L_2(\xi_2) & \cdots & L_{n_w}(\xi_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ L_1(\xi_{n_w}) & L_2(\xi_{n_w}) & \cdots & L_{n_w}(\xi_{n_w}) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_{n_w} \end{Bmatrix}. \quad (\text{D.2})$$

Zadanie postawione jest odwrotnie niż w typowym algorytmie MES – należy rozwiązać układ równań w celu znalezienia wartości z_a .

Głównym ograniczeniem opracowanego programu jest brak możliwości zastosowania do elementów, w których liczba węzłów nie jest równa liczbie punktów całkowania na powierzchni (elementy o zredukowanym całkowaniu). Poza tym, wizualizacja deformacji geometrii realizowana jest tylko na podstawie translacyjnych stopni swobody, bez uwzględnienia obrotów. W programie nie przewidziano możliwości uśredniania wartości w węzłach, gdzie spotykają się elementy.

10. Literatura

1. ABRAMOVITZ M., STEGUN I.A. [1970]: *Handbook of mathematical functions with formulas, graphs, and mathematical tables*. United States Department Of Commerce, National Bureau Of Standards.
2. ALTENBACH J., ALTENBACH H., EREMEYEV V. [2010]: On generalized Cosserat-type theories of plates and shells: a short review and bibliography. *Arch. Appl. Mech.*, **80**, 73–92.
3. ARTIOLI E., AURICCHIO F., BEIRÃO DA VEIGA L. [2006]: A novel “optimal” exponential-based integration algorithm for von-Mises plasticity with linear hardening: Theoretical analysis on yield consistency, accuracy, convergence and numerical investigations. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **67(4)**, 449–498.
4. BADUR J. [1984]: *Nieliniowa analiza powłok sprężystych według teorii drugiego przybliżenia do energii odkształcenia*. Rozprawa doktorska, Instytut Maszyn Przepływowych Polskiej Akademii Nauk, Gdańsk.
5. BADUR J. [2005]: *Pięć wykładów ze współczesnej termomechaniki płynów*. Wydanie drugie uzupełnione.
www.imp.gda.pl/fileadmin/doc/o2/z3/publications/2005_piecwykladow.pdf
6. BADUR J. [2009]: *Rozwój pojęcia energii*. Instytut Maszyn Przepływowych PAN, Gdańsk.
7. BANK L.C., BIENIEK M.P. [1988]: Stress-resultant plasticity theories for composite laminated plates. *International Journal of Plasticity*, **4**, 317–333.
8. BAŞAR Y., KRÄTZIG W. [2000]: *Theory of shell structures*. VD, Düsseldorf.
9. BATHE K.J. [1982]: *Finite element procedures in engineering analysis*. Prentice-Hall, New Jersey.
10. BELYTSCHKO T., BAZANT Z., HYUN Y-W., CHANG T-P. [1986]: Strain-softening materials and finite-element solutions. *Computers and Structures*, **23**, 163–180.
11. BELYTSCHKO T., LIU W.K., MORAN B. [2003]: *Nonlinear Finite Elements for Continua and Structures*. John Wiley & Sons.
12. BESDO D. [1974]: Ein Beitrag zur nichtlinearen Theorie des Cosserat-Kontinuums, *Acta Mechanica*, **20**, 105–131.
13. BETSCH, P., STEIN, E.. [1999]: Numerical implementation of multiplicative elasto-plasticity into assumed strain elements with application to shells at large strains. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **179(3-4)**, 215–245.
14. BIELEWICZ E., GÓRSKI J., SCHMIDT R., WALUKIEWICZ H. [1994]: Random fields in the limit analysis of elastic-plastic shell structures. *Computers & Structures*, **51(3)**, 267–275.
15. BOBIŃSKI J. [2006]: *Implementacja i przykłady zastosowań nieliniowych modeli betonu z nielokalnym osłabieniem*. Rozprawa doktorska, Polit. Gdańska, Wdz. Inżynierii Lądowej i Środowiska.
16. BRHUNS O.T. [2014]: The Prandtl-Reuss equations revisited. *ZAMM*, **94(3)**, 187–202.

17. BURZYŃSKI S. [2013a]: O zbieżności rozwiązań w nieliniowym mikropolarnym ośrodku sprężysto-plastycznym - zastosowanie elementów skończonych wyższego rzędu. *Inżynieria Morska i Geotechnika*, **2**, 125-134.
18. BURZYŃSKI S. [2013b]: Wybrane problemy plastyczności w płaskim ośrodku mikropolarnym. *Aktualne badania i analizy z inżynierii lądowej: prace naukowe doktorantów*, ed. pod red. J. Bzówka. Gliwice: Wydaw. Politechniki Śląskiej, 589-596.
19. BURZYŃSKI S., CHRÓŚCIELEWSKI J., WITKOWSKI W. [2014a]: Geometrically nonlinear FEM analysis of 6-parameter resultant shell theory based on 2-D Cosserat constitutive model. *ZAMM* (praca złożona do druku).
20. BURZYŃSKI S., CHRÓŚCIELEWSKI J., WITKOWSKI W. [2014b]: Elastoplastic law of Cosserat type in shell theory with drilling rotation. *Mathematics and Mechanics of Solids* (praca złożona do druku).
21. BURZYŃSKI S., CHRÓŚCIELEWSKI J., WITKOWSKI W. [2014c]: Elastoplastic material law in 6-parameter nonlinear shell theory. *Shell Structures: Theory and Applications, Vol 3*, ed. W. Pietraszkiewicz, J. Górski, London: CRC Press, 377-380.
22. BURZYŃSKI S., CHRÓŚCIELEWSKI J., WITKOWSKI W. [2014d]: Some aspects of buckling in geometrically and materially nonlinear cylindrical shells. *SOLMECH 2014*, Zakopane (praca złożona do druku).
23. BURZYŃSKI W. [1928] *Studium nad hipotezami wyężenia*. Akademia Nauk Technicznych: Lwów. W: Włodzimierz Burzyński. *Dzieła wybrane*. Red. Szewalski R., Wyd. Naukowe PWN, Warszawa, 1982.
24. BURZYŃSKI W. [1929]: Teoretyczne podstawy hipotez wyężenia. *Czasopismo Techniczne*: Lwów. W: Włodzimierz Burzyński. *Dzieła wybrane*. Red. Szewalski R., Wyd. Naukowe PWN, Warszawa, 1982.
25. BUTCHER J.C. [2008]: *Numerical Methods for Ordinary Differential Equations*. John Wiley & Sons, New York.
26. CALLADINE C.R. [1983]: *Theory of Shell Structures*. Cambridge University Press, Cambridge, London, New York, New Rochelle, Melbourne, Sydney.
27. CHADWICK P. [1999]: *Continuum Mechanics. Concise Theory and Problems*. Dover Publications, Inc.
28. CHRÓŚCIELEWSKI J. [1996]: Rodzina elementów skończonych klasy C^0 w nieliniowej sześcioparametrowej teorii powłok, *Zeszyty Naukowe Politechniki Gdańskiej*, Nr 540, *Budownictwo Lądowe*, **LIII**, 1-291.
29. CHRÓŚCIELEWSKI J., KREJA I., SABIK A., WITKOWSKI W. [2011]: Modeling of composite shells in 6-parameter nonlinear theory with drilling degree of freedom, *Mechanics of Advanced Materials and Structures*, **18**, 403-419.
30. CHRÓŚCIELEWSKI J., MAKOWSKI J., PIETRASZKIEWICZ W. [2000]: Large overall motion of flexible branched shell structures, In: Ambrosio JAC, Kleiber M. (eds), *Computational Aspects of Nonlinear Structural Systems with Large Rigid Body Motion*, NATO ARW, Pułtusk (Poland), July 2-7, IDMEC Lisboa, 201-218.
31. CHRÓŚCIELEWSKI J., MAKOWSKI J., PIETRASZKIEWICZ W. [2002]: Non-linear dynamics of flexible shell structures. *Comp. Assisted Mech. Engng Sci.*, **9**, 341-357.

32. CHRÓŚCIELEWSKI J., MAKOWSKI J., PIETRASZKIEWICZ W. [2004] *Statyka i dynamika powłok wielo-płatowych: Nieliniowa teoria i metoda elementów skończonych*. „Biblioteka Mechaniki Stosowanej”, IPPT PAN, Warszawa.
33. CHRÓŚCIELEWSKI J., MAKOWSKI J., SMOLEŃSKI W. [1993]: On the interpolation in the $SO(3)$ rotation group. W: *Proc. XI Polish Conference on Computer Methods in Mechanics*. Kielce, Vol. I, 187-194.
34. CHRÓŚCIELEWSKI J., MAKOWSKI J., STUMPF H. [1992]: Genuinely resultant shell finite elements accounting for geometric and material non-linearity. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **35**, 63-94.
35. CHRÓŚCIELEWSKI J., PIETRASZKIEWICZ W., WITKOWSKI W. [2010]: On shear factors in the non-linear theory of elastic shells. *International Journal of Solids and Structures*, **47**, 3537-3545.
36. CHRÓŚCIELEWSKI J., WITKOWSKI W. [2006]: Four-node semi-EAS element in six-field nonlinear theory of shells. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **68**, 1137–1179.
37. CRISFIELD M.A. [1996]: *Non-Linear Finite Element Analysis of Solids and Structures. Essentials*. John Wiley & Sons, Ltd.
38. DASZKIEWICZ K. [2014]: Analiza nieliniowa powłok z materiałów gradientowych w ośrodku mikropolarnym. *Wiedza i eksperymenty w budownictwie: prace naukowe doktorantów*, ed. pod red. J. Bzówka. Gliwice: Wydaw. Politechniki Śląskiej, 765-772.
39. DE BORST R. [1991]: Simulation of strain localization: a reappraisal of the Cosserat continuum. *Engineering Computations*, **8**, 317-332.
40. DE BORST R. [1993]: A generalization of J_2 -flow theory for polar continua. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **103**, 347-362.
41. DE BORST R., CRISFIELD M.A., REMMERS J.J.C., VERHOOSSEL C.V. [2012]: *Nonlinear Finite Element Analysis of Solids and Structures*. John Wiley & Sons.
42. DE SOUZA NETO E.A., PERIC D., OWEN D.R.J. [2008]: *Computational Methods for Plasticity: Theory and Applications*. John Wiley & Sons.
43. DRUCKER D.C. [1959]: *A definition of stable inelastic material. Technical Report N. 2*. Division of Engineering, Brown University, Providence, Rhode Island.
44. DUJC, J., BRANK, B. [2012]: Stress resultant plasticity for shells revisited. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **247-248**, 146–165.
45. DYSZLEWICZ J. [2004]: *Micropolar theory of plasticity*. Springer, Berlin, Heidelberg.
46. EBERLEIN R., WRIGGERS P. [1999]: Finite element concepts for finite elastoplastic strains and isotropic stress response in shells: theoretical and computational analysis. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **171**, 243-279.
47. EBRAHIMIAN B., NOORZAD A., ALSALEH M.I. [2012]: Modeling shear localization along granular soil–structure interfaces using elasto-plastic Cosserat continuum. *International Journal of Solids and Structures*, **49(2)**, 257-278.
48. ERINGEN A.C., SUHUBI E.S. [1964]: Non linear theory of microelastic solids I & II. *International Journal of Engineering Science*, **2**, 189–203, 389–404.

49. ERICKSEN J.L., TRUESDELL C.A. [1958]: Exact theory of stress and strain in rods and shells. *Arch. Rational Mech. Anal.*, **1**, 295–308.
50. FOREST S., SIEVERT R. [2003]: Elastoviscoplastic constitutive frameworks for generalized continua. *Acta Mechanica*, **160**, 71–111.
51. GOŁOTA M., WINKELMANN K., GÓRSKI J., MIKULSKI T. [2011]: Wpływ wstępnych imperfekcji geometrycznych na nośność silosu obciążonego podciśnieniem i wiatrem. *Inżynieria i Środowisko*, **2**, 113–117.
52. GRAMA A., GUPTA A., KARYPIS G., KUMAR V. [2003]: *Introduction to Parallel Computing, Second Edition*. Addison Wesley.
53. GRINCHENKO V. T., ULITKO A.F. [1970]: An exact solution of the Kirsch problem. *Soviet Applied Mechanics*, **6(5)**, 455–461.
54. HILL R. [1950]: *The mathematical theory of plasticity*. Oxford university press.
55. HOLZAPFEL G. [2001]: *Nonlinear solid mechanics. A continuum approach for engineering*. John Wiley & Sons, Ltd.
56. HUBER M.T. [1904]: *Właściwa praca odkształcenia jako miara wyężenia materiału. Przyczynek do podstaw teorii wytrzymałości*. Towarzystwo Politechniczne, Lwów.
57. HUGHES T.J.R. [2000]: *The Finite Element Method. Linear Static and Dynamic Finite Element Analysis*. Dover Publications, Mineola, New York.
58. IORDACHE M.M., WILLAM K. [1998]: Localized failure analysis in elastoplastic Cosserat continua. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **151(3-4)**, 559–586.
59. JEONG J., RAMEZANI H., MÜNCH I., NEFF P. [2009]: A numerical study for linear isotropic Cosserat elasticity with conformally invariant curvature. *ZAMM*, **89(7)**, 552–569.
60. JEMIELITA G. [1991]: *Meandry teorii płyt*. Wydawnictwa Politechniki Warszawskiej, Warszawa.
61. JONES R.M. [2009]: *Deformation Theory of Plasticity*. Bull Ridge Corporation.
62. KHAN A.S., HUANG S. [1995]: *Continuum theory of plasticity*. John Wiley & Sons.
63. KHOEI A.R., GHAREHBAGHI S.A., TABARRAIE A.R., RIAHI A. [2007]: Error estimation, adaptivity and data transfer in enriched plasticity continua to analysis of shear band localization. *Applied Mathematical Modelling*, **31**, 983–1000.
64. KHOEI A.R., KARIMI K. [2008]: An enriched-FEM model for simulation of localization phenomenon in Cosserat continuum theory. *Computational Materials Science*, **44**, 733–749.
65. KHOEI A.R., YADEGARI S., ANAHID M. [2006] Three-dimensional modeling of strain localization in Cosserat continuum theory. *International Journal of Civil Engineering*, **4(3)**, 176–191.
66. KINCAID D., CHENEY W. [2006]: *Analiza numeryczna*. Wydawnictwa Naukowo-Techniczne, Warszawa.
67. KLEIBER M. [1985]: *Metoda Elementów Skończonych w nieliniowej mechanice kontinuum*. Wyd. Naukowe PWN, Warszawa, Poznań.
68. KLEIBER M. [1989]: *Wprowadzenie do Metody Elementów Skończonych*. Wyd. Naukowe PWN, Warszawa, Poznań.

69. KLEIBER M. [1995]: *Komputerowe Metody Mechaniki Ciał Stałych*. Wyd. Naukowe PWN, Warszawa.
70. KŁOSOWSKI P., WOŹNICA K. [2007]: *Nieliniowe lepkoplastyczne prawa konstytutywne w wybranych zastosowaniach analizy konstrukcji*. Wyd. Polit. Gdańskiej, Gdańsk.
71. KONOPIŃSKA V., PIETRASZKIEWICZ W. [2007]: Exact resultant equilibrium conditions in the non-linear theory of branching and self-intersecting shells. *International Journal of Solids and Structures*, **44(1)**, 352–369.
72. KORN G.A., KORN T.M. [2000]: *Mathematical handbook for scientists and engineers. Definitions, theorems and formulas for reference and review*. Dover Publications, Inc.: Mineola, New York.
73. KRÄTZIG W.B., OÑATE E. [1990]: *Computational Mechanics of Nonlinear Response of Shells*. Springer: Berlin, Heidelberg.
74. KREJA I. [2007]: *Geometrically Non-Linear Analysis of Layered Composite Plates and Shells*. Seria Monografie nr 83, Gdańsk, Wyd. Polit. Gdańskiej, Gdańsk.
75. KREJA I., SCHMIDT R. [2006]: Large rotations in first-order shear deformation FE analysis of laminated shells. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, **41**, 101-123.
76. KRIEG R., KRIEG D. [1977]: Accuracies of numerical solution methods for the elastic-perfectly plastic model. *Journal of Pressure Vessel Technology*, **99(4)**, 510-515.
77. LEWIŃSKI T., TELEGA J.J. [2000]: *Plates, Laminates and Shells. Asymptotic Analysis and Homogenization*. World Scientific: Singapore, New Jersey, London, Hong Kong.
78. LIPPMANN H. [1969]: Eine Cosserat-Theorie des plastischen Fliessens. *Acta Mechanica*, **8**, 255-284.
79. LUBLINER J. [2006] *Plasticity Theory*. University of California at Berkeley.
80. LUBOWIECKA, I. [2001]: *Całkowanie nieliniowych dynamicznych równań ruchu w mechanice konstrukcji. Dynamika powłok sprężystych*. Rozprawa doktorska, Polit. Gdańska, Wyd. Inżynierii Lądowej i Środowiska.
81. LUBOWIECKA I., CHRÓSCIELEWSKI J. [2002]: On dynamics of flexible branched shell structures undergoing large overall motion using finite elements. *Computers & Structures*, **80**, 2002.
82. ŁUKASIEWICZ S. [1976]: *Obciążenia skupione w płytach, tarczach i powłokach*. Wyd. Naukowe PWN, Warszawa.
83. MAO Y.Q., AI S.G., FANG D.N., FU Y.M., CHEN C.P. [2013]: Elasto-plastic analysis of micro FGM beam basing on mechanism-based strain gradient plasticity theory. *Composite Structures*, **101**, 168-179.
84. MARSDEN J.E., HUGHES T.J.R. [1983]: *Mathematical foundations of elasticity*. Dover Publications, Inc, New York
85. MINDLIN R.D. [1964]: Micro-structure in linear elasticity. *Arch. Rational Mech. Anal.*, **16**, 51–78.
86. MIŚKIEWICZ M. [2010]: *Nieliniowa analiza stanów przedawaryjnych konstrukcji prętowo – ciągnowych w ujęciu metody elementów skończonych*. Rozprawa doktorska, Polit. Gdańska, Wyd. Inżynierii Lądowej i Środowiska.

87. NAKAMURA S., BENEDICT R., LAKES R.S. [1984]: Finite element method for orthotropic micropolar elasticity. *International Journal of Engineering Science*, **22**, 319–330.
88. NAYAK G.C., ZIENKIEWICZ O.C. [1972]: Elasto-plastic stress analysis. A generalization for various constitutive relations including strain softening. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **5**, 113-115.
89. NEFF P. [2008]: Relations of constants for isotropic linear Cosserat elasticity. https://www.uni-due.de/~hm0014/Cosserat_files/web_coss_relations.pdf
90. NOLL W. [1958]: A mathematical theory of the mechanical behaviour of continuous media. *Arch. Rational Mech. Anal.*, **2**, 197–226.
91. NOWACKI W. [1971]: *Teoria niesymetrycznej sprężystości*. IPPT PAN, Warszawa.
92. OLESIAK Z.S., ENGEL Z.W. [2010]: *Maksymilian Tytus Huber. Biografia i reprinty dzieł naukowych*. Wydawnictwo Instytutu Technologii Eksploatacji, Radom.
93. OLSZAK W., PERZYNA P., OLESIAK Z.S. [1965]: *Teoria plastyczności*. Wyd. Naukowe PWN, Warszawa.
94. PAPANICOLOPULOS S.A., VEVEAKIS E. [2011]: Sliding and rolling dissipation in Cosserat plasticity. *Granular Matter*, **13**, 197–204.
95. PERZYNA P. [1978]: *Termodynamika materiałów niesprężystych*. Wyd. Naukowe PWN, Warszawa.
96. PIETRASZKIEWICZ W. [1977]: *Introduction to the Non-Linear Theory of Shells*. Mitt. Institut für Mechanik, 10, Ruhr-Universität Bochum.
97. PIETRASZKIEWICZ W. [2001]: *Teorie nieliniowe powłok*, rozdział w WOŹNIAK CZ. [2001]: *Mechanika techniczna. Tom VII: Mechanika sprężystych płyt i powłok*. Wyd. Naukowe PWN, Warszawa
98. PIETRASZKIEWICZ W., BADUR J. [1983]: Finite rotations in the description of continuum deformation. *International Journal of Engineering Science*, **21**, 1097-1115.
99. PIETRASZKIEWICZ W., EREMEYEV V.A. [2009]: On natural strain measures of the non-linear micropolar continuum. *International Journal of Solids and Structures*, **46**, 774–787.
100. PIETRASZKIEWICZ W., GÓRSKI J. (ed.). [2014]: *Shell Structures: Theory and Application*. CRC Press.
101. RAMM E., MATZENMILLER A. [1987]: Computational aspects of elasto-plasticity in shell analysis, W: *Computational Plasticity* pod red. Owen D.R.J., Hinton E., Onate E., Pineridge Press, Swansea, 711-735.
102. RAMM E., STEGMÜLLER H. [1982]: The Displacement Finite Element Method in Nonlinear Buckling Analysis of Shells. W: *Buckling of Shells*, pod red. Ramm E., Proceedings of a State-of-the-Art Colloquium, Springer, Berlin, Heidelberg, New York.
103. RAMM E., WALL, W. A. [2004]: Shell structures — a sensitive interrelation between physics and numerics. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **427**, 381–427.
104. REDDY J.N. [1997]: *Mechanics of Laminated Composite Plates: Theory and Analysis*. CRC Press: Boca Raton, FL.

105. ROEHL D., RAMM E. [1996]: Large elasto-plastic finite element analysis of solids and shells with the enhanced assumed strain concept. *International Journal of Solids and Structures*, **33(20)**, 3215-3237.
106. RYMARZ [1993]: *Mechanika ośrodków ciągłych*. Wyd. Naukowe PWN: Warszawa.
107. SABIK A. [2012]: *Analiza stateczności powłok warstwowych obciążonych termicznie*. Wydawnictwo PG: Gdańsk.
108. SADŁOWSKI P. [2007]: *Parametryzacja rotacji i algorytmy rozwiązywania równań dynamiki z rotacyjnymi stopniami swobody*. Rozprawa doktorska, IPPT PAN.
109. SAWCZUK A. [1967] On yielding of Cosserat Continua. *Archiwum Mechaniki Stosowanej*, **3(19)**, 471-480.
110. SIMO J., HUGHES T.J.R. [1998]: *Computational Inelasticity*. Springer: New York.
111. SIMO J., TAYLOR R. [1986]: A return mapping algorithm for plane stress elastoplasticity. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **22**, 649-670.
112. SKRZYPEK J. [1986]: *Plastyczność i pełzanie*. Wyd. Naukowe PWN, Warszawa.
113. SZYMKIEWICZ R. [2012]: *Metody numeryczne w inżynierii wodnej*. Wydawnictwo Politechniki Gdańskiej, Gdańsk.
114. TAN X. G., VU-QUOC L. [2005]: Efficient and accurate multilayer solid-shell element: non-linear materials at finite strain. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **63(15)**, 2124–2170.
115. TEJCHMAN J., WU W. [1993]: Numerical study on patterning of shear bands in a Cosserat continuum. *Acta Mechanica*, **99**, 61-74.
116. TIMOSHENKO S., GOODIER J.N. [1968]: *Teoria Sprężystości*. Wydawnictwo Arkady.
117. WĄGROWSKA M. [1984]: Osiowo symetryczne zagadnienia mikropolarnej teorii plastyczności. *Mechanika teoretyczna i stosowana*, 3-4(22), 595-612.
118. WANG C.C. [1967]: On the geometric structures of simple bodies, a mathematical foundation for the theory of continuous distributions of dislocations, *Arch. Rational Mech. Anal.*, **27**, 33-94.
119. WASZCZYŹYŃ Z., CICHONŃ CZ., RADWAŃSKA M. [1990]: *Metoda elementów skończonych w stateczności konstrukcji*. Arkady: Warszawa.
120. WASZCZYŹYŃ Z. [1995]: Zagadnienia stateczności i metody rozwiązywania nieliniowych problemów MES., rozdział w: Kleiber M. [1995]: *Mechanika techniczna. Tom XI: Komputerowe metody mechaniki ciał stałych*. PWN: Warszawa.
121. WILKINS M. [1963]: Calculation of Elastic-Plastic Flow. *University of California*.
122. WIŚNIEWSKI K. [1997]: *Finite rotations of shells and beams extended equations and numerical models*. IPPT PAN: Warszawa.
123. WIŚNIEWSKI K. [2010]: *Finite Rotation Shells. Basic Equations and Finite Elements for Reissner Kinematics*. CIMNE, Springer.
124. WIŚNIEWSKI, K., TURSKA, E. [2012]: Four-node mixed Hu–Washizu shell element with drilling rotation. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **90(4)**, 506–536.

125. WITKOWSKI W. [2005]: *Efektywny 4-węzłowy element skończony o wzbogaconym polu odkształceń w nieliniowej 6-parametrowej teorii powłok*. Rozprawa doktorska, Polit. Gdańska, Wydz. Inżynierii Lądowej i Środowiska.
126. WITKOWSKI W. [2011]: *Synteza sformułowania nieliniowej mechaniki powłok podlegających skończonym obrotom w ujęciu MES*. Politechnika Gdańska, Gdańsk.
127. WOŹNIAK CZ. [1966]: *Nieliniowa teoria powłok*. Wyd. Naukowe PWN: Warszawa.
128. XIKUI LI, HONGXIANG TANG [2005]: A consistent return mapping algorithm for pressure-dependent elastoplastic Cosserat continua and modelling of strain localisation. *Computers and Structures*, **83**, 1–10.
129. YU M.H. [2002]: Advances in strength theories. *Applied Mechanics Reviews*, **55(3)**, 169-218.
130. ZIENKIEWICZ O.C. [1972]: *Metoda Elementów Skończonych*. Arkady, Warszawa.