



(12) 发明专利申请

(10) 申请公布号 CN 104567871 A

(43) 申请公布日 2015. 04. 29

(21) 申请号 201510016501. 3

(22) 申请日 2015. 01. 12

(71) 申请人 哈尔滨工程大学

地址 150001 黑龙江省哈尔滨市南岗区南通大街 145 号哈尔滨工程大学科技处知识产权办公室

(72) 发明人 黄玉 武立华 李德全

(51) Int. Cl.

G01C 21/08(2006. 01)

G01C 21/16(2006. 01)

G01C 21/20(2006. 01)

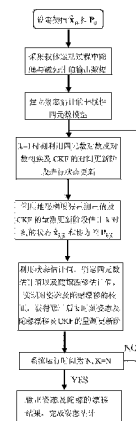
权利要求书4页 说明书11页 附图3页

(54) 发明名称

一种基于地磁梯度张量的四元数卡尔曼滤波姿态估计方法

(57) 摘要

本发明属于水下地磁辅助导航领域,具体涉及到一种基于地磁梯度张量的四元数卡尔曼滤波姿态估计方法。本发明包括:设定初始参数值;采集载体运动过程中陀螺及磁强计的输出数据作为量测量;测量地理系下地磁梯度张量;测量载体系下地磁梯度张量;进行状态更新;估计k时刻的状态;估计k时刻的状态。本发明提出的一种基于地磁梯度张量的 Cubature 卡尔曼滤波姿态估计方法对姿态角的估计精度比传统 Cubature 卡尔曼滤波算法高出数倍,而且通过三轴磁通门磁强计测量获取量测值  $y_k$  的方法具有价格低廉的潜在优势。



1. 一种基于地磁梯度张量的四元数卡尔曼滤波姿态估计方法,其特征在于,包括如下步骤:

(1) 设定初始参数值:

由惯性测量单元输出数据确定初始时刻系统状态值  $\hat{\mathbf{x}}_0$  和状态协方差  $P_0$ ;

(2) 采集载体运动过程中陀螺及磁强计的输出数据作为量测量;

(3) 测量地理系下地磁梯度张量  $G^n$ ;

根据惯性 / 地磁组合导航系统的指示位置,从预先存储的地磁梯度张量数据库中提取地理系下地磁梯度张量  $G^n$  的 5 个独立分量  $g_{xx}^n, g_{yy}^n, g_{yx}^n, g_{zy}^n$ , 和  $g_{zx}^n$

(4) 测量载体系下地磁梯度张量  $G^b$ ;

根据步骤 (2) 中磁强计的输出数据测量载体系下磁场分量  $h_1 \sim h_{10}$ , 计算载体系下地磁梯度张量  $G^b$  的 5 个分量;

$$\begin{cases} g_{xx}^b = \frac{h_4 - h_1}{L_x}, g_{yy}^b = \frac{h_9 - h_7}{L_y}, g_{yx}^b = \frac{h_5 - h_2}{L_x}; \\ g_{zy}^b = \frac{h_{10} - h_8}{L_y}, g_{zx}^b = \frac{h_6 - h_3}{L_x} \end{cases}$$

$L_x$  和  $L_y$  分别为  $x_b$  和  $y_b$  方向上梯度测量基线长;

(5)  $k-1$  时刻利用四元数对数反对数切换及 CKF 的时间更新阶段进行状态更新:

过程噪声和观测噪声都是加性的,状态空间形式的离散非线性系统为:

$$\mathbf{x}_k = f(\mathbf{x}_{k-1}) + \mathbf{w}_{k-1}$$

$$\mathbf{y}_k = h(\mathbf{x}_k) + \mathbf{v}_k$$

$\mathbf{x}_k \in R^n$  和  $\mathbf{y}_k \in R^m$  分别为状态向量和量测向量;  $f(\cdot)$  和  $h(\cdot)$  分别为系统非线性四元数状态方程量测方程;

姿态估计系统的非线性四元数状态方程:

单位四元数:

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} q_0 \\ \tilde{\mathbf{q}} \end{bmatrix}$$

载体姿态的单位四元数为  $\mathbf{q} = (q_0 \quad \tilde{\mathbf{q}})^T = (q_0 \quad q_1 \quad q_2 \quad q_3)^T$ , 载体坐标系中的角速度矢量为  $\boldsymbol{\omega}^b = (\omega_x^b \quad \omega_y^b \quad \omega_z^b)$ ,

$$\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{q} \otimes \begin{bmatrix} 0 \\ \boldsymbol{\omega}^b \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \boldsymbol{\Omega}^b \mathbf{q}$$

$$\text{其中, } \boldsymbol{\Omega}^b = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_x^b & -\omega_y^b & -\omega_z^b \\ \omega_x^b & 0 & \omega_z^b & -\omega_y^b \\ \omega_y^b & -\omega_z^b & 0 & \omega_x^b \\ \omega_z^b & \omega_y^b & -\omega_x^b & 0 \end{bmatrix}, \otimes \text{ 表示四元数乘运算;}$$

将陀螺测量坐标系与载体质心本体坐标系重合,陀螺角速度输出采用经典模型:

$$\begin{cases} \tilde{\omega}(t) = \omega(t) + \beta(t) + \eta_v(t) \\ \dot{\beta}(t) = \eta_u(t) \end{cases}$$

$\tilde{\omega}(t)$  为陀螺输出 ;  $\beta(t)$  为陀螺漂移 ;  $\eta_v(t)$  和  $\eta_u(t)$  分别为随机游走和漂移斜坡噪声 ; 选取单位四元数  $q(t)$  和陀螺漂移  $\beta(t)$  作为系统的状态向量 , 即  $X = [q(t)^T \ \beta(t)^T]^T$  代表系统的状态向量 ;

姿态估计系统的非线性四元数量测方程 ; 选择载体坐标系下的地磁梯度张量的 5 个独立分量作为观测量 ,  $G^b = C_n^b G^n (C_n^b)^T$  建立系统的观测方程为

$$y = \begin{bmatrix} g_{xx}^b \\ g_{yy}^b \\ g_{xy}^b \\ g_{yz}^b \\ g_{zx}^b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_{xx}^n T_{11}^2 + g_{yy}^n T_{21}^2 + 2g_{xy}^n T_{11}T_{21} + 2g_{yz}^n T_{21}T_{31} + 2g_{zx}^n T_{11}T_{31} - (g_{xx}^n + g_{yy}^n)T_{31}^2 \\ g_{xx}^n T_{12}^2 + g_{yy}^n T_{22}^2 + 2g_{xy}^n T_{12}T_{22} + 2g_{yz}^n T_{22}T_{32} + 2g_{zx}^n T_{12}T_{32} - (g_{xx}^n + g_{yy}^n)T_{32}^2 \\ g_{xx}^n T_{11}T_{12} + g_{yy}^n T_{21}T_{22} + g_{xy}^n (T_{12}T_{21} + T_{11}T_{22}) + g_{yz}^n (T_{22}T_{31} + T_{21}T_{32}) \\ + g_{zx}^n (T_{12}T_{31} + T_{11}T_{32}) - (g_{xx}^n + g_{yy}^n)T_{31}T_{32} \\ g_{xx}^n T_{12}T_{13} + g_{yy}^n T_{22}T_{23} + g_{xy}^n (T_{13}T_{22} + T_{12}T_{23}) + g_{yz}^n (T_{23}T_{32} + T_{22}T_{33}) \\ + g_{zx}^n (T_{13}T_{32} + T_{12}T_{33}) - (g_{xx}^n + g_{yy}^n)T_{32}T_{33} \\ g_{xx}^n T_{11}T_{13} + g_{yy}^n T_{21}T_{23} + g_{xy}^n (T_{11}T_{23} + T_{13}T_{21}) + g_{yz}^n (T_{23}T_{31} + T_{21}T_{33}) \\ + g_{zx}^n (T_{13}T_{31} + T_{11}T_{33}) - (g_{xx}^n + g_{yy}^n)T_{31}T_{33} \end{bmatrix} + v = h(X) + v$$

$G^n$  和  $G^b$  分别为地磁梯度张量在地理坐标系  $n$  系和载体坐标系  $b$  系下的表示 ,  $g_{xx}^b, g_{yy}^b, g_{xy}^b, g_{yz}^b$  和  $g_{zx}^b$  是  $G^b$  的 5 个独立分量 ,  $g_{xx}^n, g_{yy}^n, g_{xy}^n, g_{yz}^n$  和  $g_{zx}^n$  是  $G^n$  的 5 个独立分量 ,  $T_{ij} = T_{ij}(q_0, q_1, q_2, q_3)$  ,  $i = 1, 2, 3 ; j = 1, 2, 3$  为矩阵  $C_n^b$  的元素 , 且有

$$C_n^b = \begin{bmatrix} \cos \gamma \cos \psi + \sin \gamma \sin \psi \sin \theta & -\cos \gamma \sin \psi + \sin \gamma \cos \psi \sin \theta & -\sin \gamma \cos \theta \\ \sin \psi \cos \theta & \cos \psi \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \gamma \cos \psi - \cos \gamma \sin \psi \sin \theta & -\sin \gamma \sin \psi - \cos \gamma \cos \psi \sin \theta & \cos \gamma \cos \theta \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} q_0^2 + q_1^2 - q_2^2 - q_3^2 & 2(q_1 q_2 - q_0 q_3) & 2(q_1 q_3 + q_0 q_2) \\ 2(q_1 q_2 + q_0 q_3) & q_0^2 - q_1^2 + q_2^2 - q_3^2 & 2(q_2 q_3 - q_0 q_1) \\ 2(q_1 q_3 - q_0 q_2) & 2(q_2 q_3 + q_0 q_1) & q_0^2 - q_1^2 - q_2^2 + q_3^2 \end{bmatrix}$$

$h(X)$  是与状态有关的非线性函数 , 观测噪声向量  $v$  为协方差为  $R$  的零均值白噪声 ;

(5.1)  $k-1$  时刻利用四元数对数反对数切换的时间更新 ;

利用四元数对数反对数切换估计  $k-1$  时刻状态四元数  $q(t)$  部分的状态预测值和协方差 , 采用对数指数变换法计算  $k-1$  时刻状态估计值  $\hat{x}_{k-1}$  中的四元数  $q(t)$  部分的状态预测值和协方差 , 算法采用对数变换的 Cubature 卡尔曼滤波 ;

(5.1.1) 初始化 :  $q = q_0$  ;

(5.1.2) 主循环 : 对于  $i = 1, 2, \dots, 2n$  , 计算  $x_i = \log_q(q_i)$  , 令  $\bar{x} = \sum_{i=1}^{2n} w_i x_i$  ,  $q = \exp_q(\bar{x})$  ,

其中  $w_i$  为 CKF 中的加权系数 ;

(5.1.3) 如果  $\|\bar{x}\|$  足够小或超过最大迭代次数 , 终止循环 , 输出  $q$  , 否则 , 继续循环 ;

(5.1.4) 利用最后一次循环的  $x_i$  计算协方差矩阵  $\mathbf{P}_q = \sum_{i=1}^{2n} w_i \mathbf{x}_i \mathbf{x}_i^T$  ;

(5.2)  $k-1$  时刻利用 CKF 的时间更新 ;

利用标准 CKF 算法估计  $X_{i,k|k-1}$  中除四元数以外参量的均值, 即陀螺漂移部分的均值 ;

(5.3) 将步骤 (5.1) 利用 LTCKF 算法得到的四元数部分均值和步骤 (5.2) 利用 CKF 算法得到的陀螺漂移部分的均值组合在一起构成  $k$  时刻的状态  $\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}$ , 则  $k$  时刻状态协方差预测值  $\mathbf{P}_{k|k-1}$  为 :

$$\mathbf{P}_{k|k-1} = \sum_{k=1}^{2n} w_k \left\{ \left[ \mathbf{x}_{i,k|k-1} - \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} \right] \left[ \mathbf{x}_{i,k|k-1} - \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} \right]^T \right\} + \mathbf{Q}_{k-1}$$

其中  $w_k$  为系统噪声,  $\mathbf{Q}_{k-1}$  为系统噪声协方差 ;

(6) 利用地磁梯度张量测量值及 CKF 的量测更新阶段估计  $k$  时刻的状态  $\hat{\mathbf{x}}_{k|k}$  和协方差  $\mathbf{P}_{k|k}$  ;

根据步骤 5.3 得到的误差协方差  $\mathbf{P}_{k|k-1}$  按照 CKF 标准算法确定 Cubature 点集  $X_{i,k|k-1}$  ;

将得到的点集  $X_{i,k|k-1}$  通过与状态有关的非线性函数  $h(X_{i,k|k-1})$  传播 Cubature 点得到点集  $Y_{i,k|k-1}$  ;

$$Y_{i,k|k-1} = h(X_{i,k|k-1})$$

计算  $k$  时刻的量测预测值 :

$$\hat{\mathbf{y}}_{k|k-1} = \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^{2n} Y_{i,k|k-1}$$

计算自相关协方差矩阵  $\mathbf{P}_{yy,k|k-1}$  和互相关协方差矩阵  $\mathbf{P}_{xy,k|k-1}$  :

$$\mathbf{P}_{yy,k|k-1} = \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^{2n} Y_{i,k|k-1} Y_{i,k|k-1}^T - \hat{\mathbf{y}}_{k|k-1} \hat{\mathbf{y}}_{k|k-1}^T + \mathbf{R}_k$$

$$\mathbf{P}_{xy,k|k-1} = \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^{2n} X_{i,k|k-1} Y_{i,k|k-1}^T - \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} \hat{\mathbf{y}}_{k|k-1}^T$$

$\mathbf{R}_k$  是量测噪声协方差, 再根据自相关协方差矩阵  $\mathbf{P}_{yy,k|k-1}$  和互相关协方差矩阵  $\mathbf{P}_{xy,k|k-1}$  计算卡尔曼增益  $\mathbf{K}_k$  :

$$\mathbf{K}_k = \mathbf{P}_{xy,k|k-1} \mathbf{P}_{yy,k|k-1}^{-1}$$

利用  $k$  时刻通过步骤 (2) 的得到的新的量测值  $y_k$  对该时刻预测值  $\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}$  进行校正, 求出状态估计  $\hat{\mathbf{x}}_{k|k}$  和状态协方差矩阵  $\mathbf{P}_{k|k}$  :

$$\hat{\mathbf{x}}_{k|k} = \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} + \mathbf{K}_k (y_k - \hat{\mathbf{y}}_{k|k-1})$$

$$\mathbf{P}_{k|k} = \mathbf{P}_{k|k-1} - \mathbf{K}_k \mathbf{P}_{yy,k|k-1} \mathbf{K}_k^T$$

$k = k+1$ , 转至步骤 (5) ;

(7) 对姿态及陀螺漂移进行校正 :

利用状态估计值, 确定四元数估计值以及陀螺漂移估计值, 获得修正后  $k$  时刻姿态及陀螺漂移 ;

四元数估计值用  $\hat{q}_0$ ,  $\hat{q}_1$ ,  $\hat{q}_2$  和  $\hat{q}_3$  表示, 对 k 时刻姿态角进行修正:

$$\begin{cases} \hat{\gamma}_{\text{主}} = \arctan\left(-\frac{\hat{T}_{31}}{\hat{T}_{33}}\right) \\ \theta = \arcsin(\hat{T}_{32}) \\ \hat{\psi}_{\text{主}} = \arctan\left(\frac{\hat{T}_{12}}{\hat{T}_{22}}\right) \end{cases}$$

其中式中,  $\hat{\psi}$  为载体偏航角估计值,  $\theta$  为俯仰角估计值,  $\hat{\gamma}$  为横滚角估计值,  
 $\hat{T}_{ij} = \hat{T}_{ij}(\hat{q}_0, \hat{q}_1, \hat{q}_2, \hat{q}_3), i=1,2,3; j=1,2,3$ ;

(8) 姿态估计系统的运行时间为 N, 若  $k = N$  输出姿态及陀螺漂移结果, 若  $k < N$ , 重复步骤 (5)-(7), 直到姿态估计系统运行结束。

## 一种基于地磁梯度张量的四元数卡尔曼滤波姿态估计方法

### 技术领域

[0001] 本发明属于水下地磁辅助导航领域,具体涉及到一种基于地磁梯度张量的四元数卡尔曼滤波姿态估计方法。

### 背景技术

[0002] 姿态测量是现代导航、制导和控制等诸多领域的一个重要问题。目前,载体姿态确定的方法主要可以分为两大类,矢量确定法和状态估计法。矢量确定法是利用几何关系直接计算,当参考坐标系中的两个矢量准确已知的情况下,采用矢量匹配方法获得单次观测的最优解。但很小的水平基准误差就会带来很大的航向误差,无法利用系统动态信息和历史观测信息,不能通过滤波算法提高姿态估计的精度。另一方面,两个矢量准确已知也是很难做到的。这种方法在很大程度上受到观测矢量的精度限制,无法克服观测矢量的不确定性。状态估计法是通过建立动力学或者运动学模型,得到被估计量动态变化模型和测量模型,采用递推的方法计算估计姿态参数和误差参数。它是一种基于统计特性的方法,能够有效克服传感器误差项引起的参考矢量不确定性,得到统计意义上状态量的最优估计值,提高姿态确定的精度。此外该方法可结合载体动态信息和历史观测信息实现递推估计,在提高测量精度的同时还可同步估计姿态速率信息。常见的状态估计法有扩展卡尔曼滤波(EKF)和非线性卡尔曼滤波(UKF)、递推四元数估计(REQUEST)、扩展四元数估计(EQE)等,还有最小模型误差、自适应滤波、预测滤波和鲁棒滤波等用于估计姿态参数。EKF方法是基于对非线性方程的线性化,当系统具有强非线性时,线性化可能引起大的误差甚至造成滤波器的不稳定;UKF可以克服EKF的缺点,但对随机变量非线性变换后概率分布的逼近精度相对较低;REQUEST是一种类EKF方法,它在每一步中应用QUEST算法,可以得到比传统的EKF更高的精度,但却难于扩展估计其它参量,EQE结合了REQUEST和EKF的优点,但它同样不能避免线性化带来的问题。

[0003] 相比于磁场矢量测量,磁场梯度张量测量具有磁矢量测量的优势,但没有磁矢量测量对地磁场方向敏感的缺点,相比于磁异常测量,磁场梯度张量测量能够测量更多关于实测地点的信息,容易实现对测量数据的三维反演;磁场梯度张量作为观测量,根据载体姿态估计的过程方程和观测方程具有强非线性的特性,提出的一种新的四元数卡尔曼滤波(Cubature Kalman Filter:CKF)算法,算法本身内蕴了对四元数单位长度的限制,不再需要对四元数估计值进行归一化处理;在高维系统中,CKF(Cubature Kalman Filter)的估计精度优于UKF。

[0004] 本发明提出的一种基于磁场梯度张量测量的新的姿态测量优化递推估计算法思路新,未见文献报道。

### 发明内容

[0005] 本发明的目的在于提供一种能够提高估计精度的基于地磁梯度张量的四元数卡尔曼滤波姿态估计方法。

[0006] 本发明的目的是这样实现的：

[0007] (1) 设定初始参数值：

[0008] 由惯性测量单元输出数据确定初始时刻系统状态值  $\hat{\mathbf{x}}_0$  和状态协方差  $P_0$ ；

[0009] (2) 采集载体运动过程中陀螺及磁强计的输出数据作为量测量；

[0010] (3) 测量地理系下地磁梯度张量  $G^n$ ；

[0011] 根据惯性 / 地磁组合导航系统的指示位置，从预先存储的地磁梯度张量数据库中提取地理系下地磁梯度张量  $G^n$  的 5 个独立分量  $g_{xx}^n, g_{yy}^n, g_{yx}^n, g_{zy}^n$  和  $g_{zx}^n$

[0012] (4) 测量载体系下地磁梯度张量  $G^b$ ；

[0013] 根据步骤 (2) 中磁强计的输出数据测量载体系下磁场分量  $h_1 \sim h_{10}$ ，计算载体系下地磁梯度张量  $G^b$  的 5 个分量；

$$[0014] \quad \begin{cases} g_{xx}^b = \frac{h_4 - h_1}{L_x}, g_{yy}^b = \frac{h_9 - h_7}{L_y}, g_{yx}^b = \frac{h_5 - h_2}{L_x} ; \\ g_{zy}^b = \frac{h_{10} - h_8}{L_y}, g_{zx}^b = \frac{h_6 - h_3}{L_x} \end{cases}$$

[0015]  $L_x$  和  $L_y$  分别为  $x_b$  和  $y_b$  方向上梯度测量基线长；

[0016] (5)  $k-1$  时刻利用四元数对数反对数切换及 CKF 的时间更新阶段进行状态更新：

[0017] 过程噪声和观测噪声都是加性的，状态空间形式的离散非线性系统为：

$$[0018] \quad x_k = f(x_{k-1}) + w_{k-1}$$

$$[0019] \quad y_k = h(x_k) + v_k$$

[0020]  $x_k \in R^n$  和  $y_k \in R^m$  分别为状态向量和量测向量； $f(\cdot)$  和  $h(\cdot)$  分别为系统非线性四元数状态方程量测方程；

[0021] 姿态估计系统的非线性四元数状态方程：

[0022] 单位四元数：

$$[0023] \quad \mathbf{q} = \begin{bmatrix} q_0 \\ \tilde{\mathbf{q}} \end{bmatrix}$$

[0024] 载体姿态的单位四元数为  $\mathbf{q} = (q_0 \quad \tilde{\mathbf{q}})^T = (q_0 \quad q_1 \quad q_2 \quad q_3)^T$ ，载体坐标系中的角速度矢量为  $\boldsymbol{\omega}^b = (\omega_x^b \quad \omega_y^b \quad \omega_z^b)$ ，

$$[0025] \quad \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{q} \otimes \begin{bmatrix} 0 \\ \boldsymbol{\omega}^b \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \boldsymbol{\Omega}^b \mathbf{q}$$

$$[0026] \quad \text{其中, } \boldsymbol{\Omega}^b = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_x^b & -\omega_y^b & -\omega_z^b \\ \omega_x^b & 0 & \omega_z^b & -\omega_y^b \\ \omega_y^b & -\omega_z^b & 0 & \omega_x^b \\ \omega_z^b & \omega_y^b & -\omega_x^b & 0 \end{bmatrix}, \otimes \text{ 表示四元数乘运算；}$$

[0027] 将陀螺测量坐标系与载体质心本体坐标系重合，陀螺角速度输出采用经典模型：

$$[0028] \quad \begin{cases} \tilde{\boldsymbol{\omega}}(t) = \boldsymbol{\omega}(t) + \boldsymbol{\beta}(t) + \boldsymbol{\eta}_v(t) \\ \dot{\boldsymbol{\beta}}(t) = \boldsymbol{\eta}_u(t) \end{cases}$$

[0029]  $\hat{\mathbf{q}}(t)$  为陀螺输出 ;  $\beta(t)$  为陀螺漂移 ;  $\eta_v(t)$  和  $\eta_u(t)$  分别为随机游走和漂移斜坡噪声 ; 选取单位四元数  $q(t)$  和陀螺漂移  $\beta(t)$  作为系统的状态向量 , 即  $\mathbf{X} = [q(t)^T \ \beta(t)^T]^T$  代表系统的状态向量 ;

[0030] 姿态估计系统的非线性四元数量测方程 ; 选择载体坐标系下的地磁梯度张量的 5 个独立分量作为观测量 ,  $\mathbf{G}^b = \mathbf{C}_n^b \mathbf{G}^n (\mathbf{C}_n^b)^T$  建立系统的观测方程为 :

$$[0031] \quad \mathbf{y} = \begin{bmatrix} g_{xx}^b \\ g_{yy}^b \\ g_{xy}^b \\ g_{yz}^b \\ g_{zx}^b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_{xx}^n T_{11}^2 + g_{yy}^n T_{21}^2 + 2g_{xy}^n T_{11} T_{21} + 2g_{yz}^n T_{21} T_{31} + 2g_{zx}^n T_{11} T_{31} - (g_{xx}^n + g_{yy}^n) T_{31}^2 \\ g_{xx}^n T_{12}^2 + g_{yy}^n T_{22}^2 + 2g_{xy}^n T_{12} T_{22} + 2g_{yz}^n T_{22} T_{32} + 2g_{zx}^n T_{12} T_{32} - (g_{xx}^n + g_{yy}^n) T_{32}^2 \\ g_{xx}^n T_{11} T_{12} + g_{yy}^n T_{21} T_{22} + g_{xy}^n (T_{12} T_{21} + T_{11} T_{22}) + g_{yz}^n (T_{22} T_{31} + T_{21} T_{32}) \\ + g_{zx}^n (T_{12} T_{31} + T_{11} T_{32}) - (g_{xx}^n + g_{yy}^n) T_{31} T_{32} \\ g_{xx}^n T_{12} T_{13} + g_{yy}^n T_{22} T_{23} + g_{xy}^n (T_{13} T_{22} + T_{12} T_{23}) + g_{yz}^n (T_{23} T_{32} + T_{22} T_{33}) \\ + g_{zx}^n (T_{13} T_{32} + T_{12} T_{33}) - (g_{xx}^n + g_{yy}^n) T_{32} T_{33} \\ g_{xx}^n T_{11} T_{13} + g_{yy}^n T_{21} T_{23} + g_{xy}^n (T_{11} T_{23} + T_{13} T_{21}) + g_{yz}^n (T_{23} T_{31} + T_{21} T_{33}) \\ + g_{zx}^n (T_{13} T_{31} + T_{11} T_{33}) - (g_{xx}^n + g_{yy}^n) T_{31} T_{33} \end{bmatrix} + \mathbf{v} = \mathbf{h}(\mathbf{X}) + \mathbf{v}$$

[0032]  $\mathbf{G}^n$  和  $\mathbf{G}^b$  分别为地磁梯度张量在地理坐标系  $n$  系和载体坐标系  $b$  系下的表示 ,  $g_{xx}^b, g_{yy}^b, g_{xy}^b, g_{yz}^b$  和  $g_{zx}^b$  是  $\mathbf{G}^b$  的 5 个独立分量 ,  $g_{xx}^n, g_{yy}^n, g_{xy}^n, g_{yz}^n$  和  $g_{zx}^n$  是  $\mathbf{G}^n$  的 5 个独立分量 ,  $T_{ij} = T_{ij}(q_0, q_1, q_2, q_3)$  ,  $i = 1, 2, 3 ; j = 1, 2, 3$  为矩阵  $\mathbf{C}_n^b$  的元素 , 且有

$$[0033] \quad \mathbf{C}_n^b = \begin{bmatrix} \cos \gamma \cos \psi + \sin \gamma \sin \psi \sin \theta & -\cos \gamma \sin \psi + \sin \gamma \cos \psi \sin \theta & -\sin \gamma \cos \theta \\ \sin \psi \cos \theta & \cos \psi \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \gamma \cos \psi - \cos \gamma \sin \psi \sin \theta & -\sin \gamma \sin \psi - \cos \gamma \cos \psi \sin \theta & \cos \gamma \cos \theta \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} q_0^2 + q_1^2 - q_2^2 - q_3^2 & 2(q_1 q_2 - q_0 q_3) & 2(q_1 q_3 + q_0 q_2) \\ 2(q_1 q_2 + q_0 q_3) & q_0^2 - q_1^2 + q_2^2 - q_3^2 & 2(q_2 q_3 - q_0 q_1) \\ 2(q_1 q_3 - q_0 q_2) & 2(q_2 q_3 + q_0 q_1) & q_0^2 - q_1^2 - q_2^2 + q_3^2 \end{bmatrix}$$

[0034]  $\mathbf{h}(\mathbf{X})$  是与状态有关的非线性函数 , 观测噪声向量  $\mathbf{v}$  为协方差为  $\mathbf{R}$  的零均值白噪声 ;

[0035] (5.1)  $k-1$  时刻利用四元数对数反对数切换的时间更新 ;

[0036] 利用四元数对数反对数切换估计  $k-1$  时刻状态四元数  $q(t)$  部分的状态预测值和协方差 , 采用对数指数变换法计算  $k-1$  时刻状态估计值  $\hat{\mathbf{x}}_{k-1}$  中的四元数  $q(t)$  部分的状态预测值和协方差 , 算法采用对数变换的 Cubature 卡尔曼滤波 ;

[0037] (5.1.1) 初始化 :  $\mathbf{q} = \mathbf{q}_0$  ;

[0038] (5.1.2) 主循环 : 对于  $i = 1, 2, \dots, 2n$  , 计算  $x_i = \log_q(q_i)$  , 令

$$\bar{\mathbf{x}} = \sum_{i=1}^{2n} w_i \mathbf{x}_i, \quad \mathbf{q} = \exp_q(\bar{\mathbf{x}}), \quad \text{其中 } w_i \text{ 为 CKF 中的加权系数 ;}$$

[0039] (5.1.3) 如果  $\|\bar{\mathbf{x}}\|$  足够小或超过最大迭代次数 , 终止循环 , 输出  $\mathbf{q}$  , 否则 , 继续循环 ;

[0040] (5.1.4) 利用最后一次循环的  $x_i$  计算协方差矩阵  $\mathbf{P}_q = \sum_{i=1}^{2n} w_i \mathbf{x}_i \mathbf{x}_i^T$  。

[0041] (5.2)  $k-1$  时刻利用 CKF 的时间更新 ;



[0042] 利用标准 CKF 算法估计  $X_{i,k|k-1}$  中除四元数以外参量的均值,即陀螺漂移部分的均值;

[0043] (5.3) 将步骤 (5.1) 利用 LTCKF 算法得到的四元数部分均值和步骤 (5.2) 利用 CKF 算法得到的陀螺漂移部分的均值组合在一起构成 k 时刻的状态  $\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}$ , 则 k 时刻状态协方差预测值  $P_{k|k-1}$  为:

$$[0044] \quad P_{k|k-1} = \sum_{k=1}^{2n} w_k \left\{ \left[ \mathbf{x}_{i,k|k-1} - \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} \right] \left[ \mathbf{x}_{i,k|k-1} - \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} \right]^T \right\} + \mathbf{Q}_{k-1}$$

[0045] 其中  $w_k$  为系统噪声,  $\mathbf{Q}_{k-1}$  为系统噪声协方差;

[0046] (6) 利用地磁梯度张量测量值及 CKF 的量测更新阶段估计 k 时刻的状态  $\hat{\mathbf{x}}_{k|k}$  和协方差  $P_{k|k}$ ;

[0047] 根据步骤 5.3 得到的误差协方差  $P_{k|k-1}$  按照 CKF 标准算法确定 Cubature 点集  $X_{i,k|k-1}$ ;

[0048] 将得到的点集  $X_{i,k|k-1}$  通过与状态有关的非线性函数  $h(X_{i,k|k-1})$  传播 Cubature 点得到点集  $Y_{i,k|k-1}$ ;

$$[0049] \quad Y_{i,k|k-1} = h(X_{i,k|k-1})$$

[0050] 计算 k 时刻的量测预测值:

$$[0051] \quad \hat{\mathbf{y}}_{k|k-1} = \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^{2n} Y_{i,k|k-1}$$

[0052] 计算自相关协方差矩阵  $P_{yy,k|k-1}$  和互相关协方差矩阵  $P_{xy,k|k-1}$ :

$$[0053] \quad P_{yy,k|k-1} = \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^{2n} Y_{i,k|k-1} Y_{i,k|k-1}^T - \hat{\mathbf{y}}_{k|k-1} \hat{\mathbf{y}}_{k|k-1}^T + \mathbf{R}_k$$

$$[0054] \quad P_{xy,k|k-1} = \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^{2n} X_{i,k|k-1} Y_{i,k|k-1}^T - \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} \hat{\mathbf{y}}_{k|k-1}^T$$

[0055]  $\mathbf{R}_k$  是量测噪声协方差, 再根据自相关协方差矩阵  $P_{yy,k|k-1}$  和互相关协方差矩阵  $P_{xy,k|k-1}$  计算卡尔曼增益  $\mathbf{K}_k$ :

$$[0056] \quad \mathbf{K}_k = P_{xy,k|k-1} P_{yy,k|k-1}^{-1}$$

[0057] 利用 k 时刻通过步骤 (2) 的得到的新的量测值  $y_k$  对该时刻预测值  $\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}$  进行校正, 求出状态估计  $\hat{\mathbf{x}}_{k|k}$  和状态协方差矩阵  $P_{k|k}$ :

$$[0058] \quad \hat{\mathbf{x}}_{k|k} = \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} + \mathbf{K}_k (y_k - \hat{\mathbf{y}}_{k|k-1})$$

$$[0059] \quad P_{k|k} = P_{k|k-1} - \mathbf{K}_k P_{yy,k|k-1} \mathbf{K}_k^T$$

[0060]  $k = k+1$ , 转至步骤 (5);

[0061] (7) 对姿态及陀螺漂移进行校正:

[0062] 利用状态估计值, 确定四元数估计值以及陀螺漂移估计值, 获得修正后 k 时刻姿态及陀螺漂移;

[0063] 四元数估计值用  $\hat{q}_0$ ,  $\hat{q}_1$ ,  $\hat{q}_2$  和  $\hat{q}_3$  表示, 对 k 时刻姿态角进行修正:

[0064]

$$\begin{cases} \hat{\gamma}_{\text{主}} = \arctan\left(\frac{\hat{T}_{31}}{\hat{T}_{33}}\right) \\ \theta = \arcsin(\hat{T}_{32}) \\ \hat{\psi}_{\text{主}} = \arctan\left(\frac{\hat{T}_{12}}{\hat{T}_{22}}\right) \end{cases}$$

[0065] 其中式中,  $\hat{\psi}$  为载体偏航角估计值,  $\theta$  为俯仰角估计值,  $\hat{\gamma}$  为横滚角估计值,

$$\hat{T}_{ij} = \hat{T}_{ij}(\hat{q}_0, \hat{q}_1, \hat{q}_2, \hat{q}_3), i=1,2,3; j=1,2,3;$$

[0066] (8) 姿态估计系统的运行时间为 N, 若  $k = N$  输出姿态及陀螺漂移结果, 若  $k < N$ , 重复步骤 (5)-(7), 直到姿态估计系统运行结束。

[0067] 本发明的有益效果在于: 本发明提出的一种基于地磁梯度张量的 Cubature 卡尔曼滤波姿态估计方法对姿态角的估计精度比传统 Cubature 卡尔曼滤波算法高出数倍, 而且通过三轴磁通门磁强计测量获取量测值  $y_k$  的方法具有价格低廉的潜在优势。

### 附图说明

[0068] 图 1 是算法流程图;

[0069] 图 2 是地磁梯度张量测量配置图;

[0070] 图 3 是偏航角误差滤波算法对应的欧拉角误差曲线;

[0071] 图 4 是俯仰角误差滤波算法对应的欧拉角误差曲线;

[0072] 图 5 是横滚角误差滤波算法对应的欧拉角误差曲线。

### 具体实施方式

[0073] 下面结合附图对本发明做进一步描述:

[0074] 图 1 给出了本发明的具体流程图。下面结合附图对本发明的具体实施方式进行详细描述:

[0075] 设过程噪声和观测噪声都是加性的, 状态空间形式的离散非线性系统为

$$[0076] \quad x_k = f(x_{k-1}) + w_{k-1} \quad (1)$$

$$[0077] \quad y_k = h(x_k) + v_k \quad (2)$$

[0078] 式中,  $x_k \in R^n$  和  $y_k \in R^m$  分别为状态向量和量测向量;  $f(\cdot)$  和  $h(\cdot)$  为系统非线性状态方程和量测方程; 过程噪声  $w_k$  和量测噪声  $v_k$  为互不相关的高斯白噪声, 且均值和协方差矩阵分别为:

$$[0079] \quad \begin{cases} E[w_k] = 0, E[w_k w_j^T] = Q \delta_{kj} \\ E[v_k] = 0, E[v_k v_j^T] = R \delta_{kj} \end{cases} \quad (3)$$

[0080] 其中  $\delta_{kj}$  为 Kronecker-delta 函数,  $Q$  是非负定对称矩阵,  $R$  是正定对称矩阵。

[0081] 载体姿态估计的状态方程和量测方程具有强非线性的特性, 线性化可能引起大的误差甚至造成滤波器的不稳定。提出了一种新的基于地磁梯度张量的四元数 Cubature 卡尔曼滤波算法, 其具体流程如下:

[0082] 步骤 1、设定初始参数值

[0083] 由惯性测量单元输出数据确定初始时刻系统状态值  $\hat{\mathbf{x}}_0$  和状态协方差  $P_0$ 。

[0084] 步骤 2、采集载体运动过程中陀螺及磁强计的输出数据作为量测量

[0085] 步骤 3、建立姿态估计的非线性四元数模型

[0086] 步骤 3.1 建立姿态估计系统的非线性四元数状态方程单位四元数

$$[0087] \quad \mathbf{q} = \begin{bmatrix} q_0 \\ \tilde{\mathbf{q}} \end{bmatrix} \quad (4)$$

[0088] 设表示载体姿态的单位四元数为  $q = (q_0 \quad \tilde{\mathbf{q}})^T = (q_0 \quad q_1 \quad q_2 \quad q_3)^T$ ，载体坐标系中的角速度矢量为  $\omega^b = (\omega_x^b \quad \omega_y^b \quad \omega_z^b)$ ，则有

$$[0089] \quad \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{q} \otimes \begin{bmatrix} 0 \\ \omega^b \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \Omega^b \mathbf{q} \quad (5)$$

$$[0090] \quad \text{其中, } \Omega^b = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_x^b & -\omega_y^b & -\omega_z^b \\ \omega_x^b & 0 & \omega_z^b & -\omega_y^b \\ \omega_y^b & -\omega_z^b & 0 & \omega_x^b \\ \omega_z^b & \omega_y^b & -\omega_x^b & 0 \end{bmatrix}, \otimes \text{ 表示四元数乘运算。}$$

[0091] 为简单起见,假设陀螺测量坐标系与载体质心本体坐标系重合,陀螺角速度输出采用经典模型:

$$[0092] \quad \begin{cases} \tilde{\omega}(t) = \omega(t) + \beta(t) + \eta_v(t) \\ \dot{\beta}(t) = \eta_u(t) \end{cases} \quad (6)$$

[0093] 式中,  $\tilde{\omega}(t)$  为陀螺输出;  $\beta(t)$  为陀螺漂移;  $\eta_v(t)$  和  $\eta_u(t)$  分别为随机游走和漂移斜坡噪声。

[0094] 选取单位四元数  $q(t)$  和陀螺漂移  $\beta(t)$  作为系统的状态向量,即  $X = [q(t)^T \beta(t)^T]^T$  代表系统的状态向量。

[0095] 由方程 (5) 和 (6) 建立载体姿态估计系统的非线性四元数状态方程

[0096] 步骤 3.2 建立姿态估计系统的非线性四元数量测方程

[0097] 选择载体坐标系下的地磁梯度张量的 5 个独立分量作为观测量,由式

$$\mathbf{G}^b = \mathbf{C}_n^b \mathbf{G}^n (\mathbf{C}_n^b)^T \text{ 建立系统的观测方程为}$$

[0098]

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} g_{xx}^b \\ g_{yy}^b \\ g_{xy}^b \\ g_{yz}^b \\ g_{zx}^b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_{xx}^n T_{11}^2 + g_{yy}^n T_{21}^2 + 2g_{xy}^n T_{11}T_{21} + 2g_{yz}^n T_{21}T_{31} + 2g_{zx}^n T_{11}T_{31} - (g_{xx}^n + g_{yy}^n)T_{31}^2 \\ g_{xx}^n T_{12}^2 + g_{yy}^n T_{22}^2 + 2g_{xy}^n T_{12}T_{22} + 2g_{yz}^n T_{22}T_{32} + 2g_{zx}^n T_{12}T_{32} - (g_{xx}^n + g_{yy}^n)T_{32}^2 \\ g_{xx}^n T_{11}T_{12} + g_{yy}^n T_{21}T_{22} + g_{xy}^n (T_{12}T_{21} + T_{11}T_{22}) + g_{yz}^n (T_{22}T_{31} + T_{21}T_{32}) \\ + g_{zx}^n (T_{12}T_{31} + T_{11}T_{32}) - (g_{xx}^n + g_{yy}^n)T_{31}T_{32} \\ g_{xx}^n T_{12}T_{13} + g_{yy}^n T_{22}T_{23} + g_{xy}^n (T_{13}T_{22} + T_{12}T_{23}) + g_{yz}^n (T_{23}T_{32} + T_{22}T_{33}) \\ + g_{zx}^n (T_{13}T_{32} + T_{12}T_{33}) - (g_{xx}^n + g_{yy}^n)T_{32}T_{33} \\ g_{xx}^n T_{11}T_{13} + g_{yy}^n T_{21}T_{23} + g_{xy}^n (T_{11}T_{23} + T_{13}T_{21}) + g_{yz}^n (T_{23}T_{31} + T_{21}T_{33}) \\ + g_{zx}^n (T_{13}T_{31} + T_{11}T_{33}) - (g_{xx}^n + g_{yy}^n)T_{31}T_{33} \end{bmatrix} + \mathbf{v} = h(\mathbf{X}) + \mathbf{v} \quad (7)$$

[0099]  $G^n$ 和  $G^b$ 分别为地磁梯度张量在地理坐标系  $n$ 系和载体坐标系  $b$ 系下的表示,  $g_{xx}^b, g_{yy}^b, g_{yx}^b, g_{zy}^b$ ,和  $g_{zx}^b$ 是  $G^b$ 的 5 个独立分量,  $g_{xx}^n, g_{yy}^n, g_{yx}^n, g_{zy}^n$ ,和  $g_{zx}^n$ 是  $G^n$ 的 5 个独立分量。  $T_{ij} = T_{ij}(q_0, q_1, q_2, q_3)$ ,  $i = 1, 2, 3; j = 1, 2, 3$ 为矩阵  $C_b^n$ 的元素,且有

$$C_b^n = \begin{bmatrix} \cos \gamma \cos \psi + \sin \gamma \sin \psi \sin \theta & -\cos \gamma \sin \psi + \sin \gamma \cos \psi \sin \theta & -\sin \gamma \cos \theta \\ \sin \psi \cos \theta & \cos \psi \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \gamma \cos \psi - \cos \gamma \sin \psi \sin \theta & -\sin \gamma \sin \psi - \cos \gamma \cos \psi \sin \theta & \cos \gamma \cos \theta \end{bmatrix} \quad (8)$$

$$= \begin{bmatrix} q_0^2 + q_1^2 - q_2^2 - q_3^2 & 2(q_1q_2 - q_0q_3) & 2(q_1q_3 + q_0q_2) \\ 2(q_1q_2 + q_0q_3) & q_0^2 - q_1^2 + q_2^2 - q_3^2 & 2(q_2q_3 - q_0q_1) \\ 2(q_1q_3 - q_0q_2) & 2(q_2q_3 + q_0q_1) & q_0^2 - q_1^2 - q_2^2 + q_3^2 \end{bmatrix}$$

[0101]  $h(X)$ 是与状态有关的非线性函数,观测噪声向量  $\mathbf{v}$ 为协方差为  $R$ 的零均值白噪声。

[0102] 步骤 4 测量地理系下地磁梯度张量  $G^n$

[0103] 根据惯性 / 地磁组合导航系统的指示位置,从预先存储的地磁梯度张量数据库中提取地理系下地磁梯度张量  $G^n$ 的 5 个独立分量  $g_{xx}^n, g_{yy}^n, g_{yx}^n, g_{zy}^n$ ,和  $g_{zx}^n$

[0104] 步骤 5 测量载体系下地磁梯度张量  $G^b$

[0105] 根据步骤 2 中磁强计 (配置方式如图 2 所示) 的输出数据测量载体系下磁场分量  $h_1 \sim h_{10}$ ,按 (9) 式计算载体系下地磁梯度张量  $G^b$ 的 5 个分量;

$$\begin{cases} g_{xx}^b = \frac{h_4 - h_1}{L_x}, g_{yy}^b = \frac{h_9 - h_7}{L_y}, g_{yx}^b = \frac{h_5 - h_2}{L_x} \\ g_{xy}^b = \frac{h_{10} - h_8}{L_y}, g_{zx}^b = \frac{h_6 - h_3}{L_x} \end{cases} \quad (9)$$

[0107]  $L_x$ 和  $L_y$ 分别为  $x_b$ 和  $y_b$ 方向上梯度测量基线长。

[0108] 步骤  $6k-1$ 时刻利用四元数对数反对数切换及 CKF 的时间更新阶段进行状态更新

[0109] 步骤  $6.1k-1$ 时刻利用四元数对数反对数切换的时间更新

[0110] 利用四元数对数反对数切换估计  $k-1$ 时刻状态四元数  $q(t)$  部分的状态预测值和协方差。

[0111] 本发明采用如下对数指数变换法计算  $k-1$ 时刻状态估计值  $\hat{\mathbf{x}}_{k-1}$ 中的四元数  $q(t)$  部分的状态预测值和协方差,算法定义为对数变换的 Cubature 卡尔曼滤波 (LTCKF),具体描述如下:

[0112] 为叙述方便,对于  $s, q \in H_1, u \in R^3$ ,定义如下变换

$$[0113] \quad \log q \equiv \alpha n = u \quad (10)$$

$$[0114] \quad \exp(\mathbf{u}) = \exp(\alpha \mathbf{n}) = \begin{bmatrix} \cos(\alpha/2) \\ \mathbf{n} \sin(\alpha/2) \end{bmatrix} = \mathbf{q} \quad (11)$$

[0115] 记

$$[0116] \quad \log_q(\mathbf{s}) = \log(\mathbf{s} \otimes \mathbf{q}^{-1}) \quad (12)$$

$$[0117] \quad \exp_q(\mathbf{u}) = \exp(\mathbf{u}) \otimes \mathbf{q} \quad (13)$$

[0118] 对  $k-1$  时刻状态估计  $\hat{\mathbf{x}}_{k-1|k-1}$  中的四元数部分利用 (10) 定义的对数函数变换为  $\mathbb{R}^3$  中的向量后与其他状态组成新的  $\hat{\mathbf{x}}_{k-1|k-1}^*$ 。根据乔里斯基因子  $S_{k-1|k-1}$  和  $\hat{\mathbf{x}}_{k-1|k-1}^*$  按公式 (14) 计算确定 Cubature 点集  $\mathbf{X}_{i,k|k-1}^*$ 。

$$[0119] \quad \mathbf{X}_{i,k-1|k-1}^* = S_{k-1|k-1} \xi_i + \hat{\mathbf{x}}_{k-1|k-1}^* \quad (14)$$

[0120]  $\xi_i = \sqrt{\frac{2(n-1)}{2}} [1]$  记  $(n-1)$  维单位列向量  $\mathbf{e} = [1, 0, 0, \dots, 0]^T$ , 符号  $[1]$  表示对  $\mathbf{e}$  的元素进行全排列和改变元素符号产生的点集, 称为完整全对称点集,  $[1]_i$  表示点集  $[1]$  中的第  $i$  个点。

[0121] 将点集  $\mathbf{X}_{i,k-1|k-1}^*$  中对应于四元数的部分利用公式 (11) 变换为四元数后构成  $x_{k-1}$ , 将  $x_{k-1}$  与  $\mathbf{X}_{i,k-1|k-1}^*$  中与陀螺漂移  $\beta(t)$  对应的部分构成新的  $X_{i,k-1|k-1}$ , 然后通过系统的状态方程  $f(X_{i,k-1|k-1})$  根据公式 (15) 传播 Cubature 点得到点集  $X_{i,k|k-1}$ 。

$$[0122] \quad X_{i,k|k-1} = f(X_{i,k-1|k-1}) \quad (15)$$

[0123] 对于  $X_{i,k|k-1}$  中的四元数部分, 利用公式 (10) ~ (13) 计算其加权均值, 即均值  $q$  和协方差矩阵  $P_q$ :

[0124] 具体算法如下:

[0125] ①初始化:  $q = q_0$ ;

[0126] ②主循环: 对于  $i = 1, 2, \dots, 2n$ , 计算  $x_i = \log_q(q_i)$ , 令  $\bar{\mathbf{x}} = \sum_{i=1}^{2n} w_i \mathbf{x}_i$ ,  $\mathbf{q} = \exp_q(\bar{\mathbf{x}})$ ,

其中  $w_i$  为 CKF 中的加权系数;

[0127] ③如果  $\|\bar{\mathbf{x}}\|$  足够小或超过最大迭代次数, 终止循环, 输出  $q$ , 否则, 继续循环。

[0128] ④利用最后一次循环的  $x_i$  计算协方差矩阵  $\mathbf{P}_q = \sum_{i=1}^{2n} w_i \mathbf{x}_i \mathbf{x}_i^T$ 。

[0129] 步骤 6.2  $k-1$  时刻利用 CKF 的时间更新

[0130] 利用标准 CKF 算法估计  $X_{i,k|k-1}$  中除四元数以外参量的均值, 即陀螺漂移部分的均值。

[0131] 步骤 6.3 将步骤 6.1 利用 LTCKF 算法得到的四元数部分均值和步骤 6.2 利用 CKF 算法得到的陀螺漂移部分的均值组合在一起构成  $k$  时刻的状态  $\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}$ , 则  $k$  时刻状态协方差预测值  $P_{k|k-1}$  按下式计算:

$$[0132] \quad \mathbf{P}_{k|k-1} = \sum_{k=1}^{2n} w_k \left\{ \left[ \mathbf{x}_{i,k|k-1} - \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} \right] \left[ \mathbf{x}_{i,k|k-1} - \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} \right]^T \right\} + \mathbf{Q}_{k-1} \quad (16)$$

[0133] 其中  $w_k$  为系统噪声,  $\mathbf{Q}_{k-1}$  为系统噪声协方差。

[0134] 完成时间更新。

[0135] 步骤 7 利用地磁梯度张量测量值及 CKF 的量测更新阶段估计  $k$  时刻的状态  $\hat{\mathbf{x}}_{k|k}$  和协方差  $\mathbf{P}_{k|k}$

[0136] 根据步骤 6.3 得到的误差协方差  $\mathbf{P}_{k|k-1}$  按照 CKF 标准算法确定 Cubature 点集  $X_{i,k|k-1}$ 。

$$[0137] \quad \mathbf{P}_{k|k-1} = \mathbf{S}_{k|k-1} \mathbf{S}_{k|k-1}^T \quad (17)$$

$$[0138] \quad \mathbf{X}_{i,k-1|k-1} = \mathbf{S}_{k|k-1} \boldsymbol{\xi}_i + \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} \quad (18)$$

[0139] 将得到的点集  $X_{i,k|k-1}$  通过步骤 3.2 获得的与状态有关的非线性函数  $h(X_{i,k|k-1})$  传播 Cubature 点得到点集  $Y_{i,k|k-1}$ 。

$$[0140] \quad Y_{i,k|k-1} = h(X_{i,k|k-1}) \quad (19)$$

[0141] 将  $Y_{i,k|k-1}$  代入公式 (20) 计算  $k$  时刻的量测预测值

$$[0142] \quad \hat{\mathbf{y}}_{k|k-1} = \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^{2n} Y_{i,k|k-1} \quad (20)$$

[0143] 将以上得到的结果分别代入公式 (21) 和 (22) 计算自相关协方差矩阵  $\mathbf{P}_{yy,k|k-1}$  和互相关协方差矩阵  $\mathbf{P}_{xy,k|k-1}$

$$[0144] \quad \mathbf{P}_{yy,k|k-1} = \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^{2n} Y_{i,k|k-1} Y_{i,k|k-1}^T - \hat{\mathbf{y}}_{k|k-1} \hat{\mathbf{y}}_{k|k-1}^T + \mathbf{R}_k \quad (21)$$

$$[0145] \quad \mathbf{P}_{xy,k|k-1} = \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^{2n} X_{i,k|k-1} Y_{i,k|k-1}^T - \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} \hat{\mathbf{y}}_{k|k-1}^T \quad (22)$$

[0146]  $\mathbf{R}_k$  是量测噪声协方差。再根据自相关协方差矩阵  $\mathbf{P}_{yy,k|k-1}$  和互相关协方差矩阵  $\mathbf{P}_{xy,k|k-1}$  计算卡尔曼增益  $\mathbf{K}_k$

$$[0147] \quad \mathbf{K}_k = \mathbf{P}_{xy,k|k-1} \mathbf{P}_{yy,k|k-1}^{-1} \quad (23)$$

[0148] 利用  $k$  时刻通过步骤 2 的得到的新的量测值  $y_k$  对该时刻预测值  $\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}$  进行校正, 即根据公式 (24) 和 (25) 求出状态估计  $\hat{\mathbf{x}}_{k|k}$  和状态协方差矩阵  $\mathbf{P}_{k|k}$ 。

$$[0149] \quad \hat{\mathbf{x}}_{k|k} = \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} + \mathbf{K}_k (y_k - \hat{\mathbf{y}}_{k|k-1}) \quad (24)$$

$$[0150] \quad \mathbf{P}_{k|k} = \mathbf{P}_{k|k-1} - \mathbf{K}_k \mathbf{P}_{yy,k|k-1} \mathbf{K}_k^T \quad (25)$$

[0151]  $k = k+1$ , 转至步骤 6。

[0152] 步骤 8 对姿态及陀螺漂移进行校正

[0153] 利用状态估计值, 确定四元数估计值及陀螺漂移估计值, 获得修正后  $k$  时刻姿态及陀螺漂移。

[0154] 四元数估计值用  $\hat{q}_0$ ,  $\hat{q}_1$ ,  $\hat{q}_2$  和  $\hat{q}_3$  表示, 根据下式对  $k$  时刻姿态角进行修正。

[0155]

$$\begin{cases} \hat{\gamma}_{\pm} = \arctan\left(-\frac{\hat{T}_{31}}{\hat{T}_{33}}\right) \\ \theta = \arcsin(\hat{T}_{32}) \\ \hat{\psi}_{\pm} = \arctan\left(\frac{\hat{T}_{12}}{\hat{T}_{22}}\right) \end{cases} \quad (26)$$

[0156] 其中式中,  $\hat{\psi}$  为载体偏航角估计值,  $\theta$  为俯仰角估计值,  $\hat{\gamma}$  为横滚角估计值。

$$\hat{T}_{ij} = \hat{T}_{ij}(\hat{q}_0, \hat{q}_1, \hat{q}_2, \hat{q}_3), i=1,2,3; j=1,2,3。$$

[0157] 步骤9 姿态估计系统的运行时间为 N, 若  $k = N$  输出姿态及陀螺漂移结果, 若  $k < N$ , 重复步骤 6-8, 直到姿态估计系统运行结束。

[0158] 分别采用扩展卡尔曼滤波 (EKF)、CKF 和 LTCKF 算法同步处理完全相同的仿真数据, 初始状态值及其协方差也完全相同, 滤波估计结果如图 3、4、5 所示, 图 3、4 和 5 分别表示的是每一步估计值对应的偏航角、俯仰角和横滚角误差。从图 3、4、5 可以看出, 对数变换的 Cubature 卡尔曼滤波算法对姿态角的估计精度比 Cubature 卡尔曼滤波算法高出数倍, 而 Cubature 卡尔曼滤波算法对姿态角的估计精度比 EKF 算法也高出数倍。这是因为姿态估计系统的状态方程及观测方程均具有强的非线性, EKF 算法存在较大的线性化误差, 而 Cubature 卡尔曼滤波算法是一种非线性滤波, 避免了线性化带来的误差及滤波器的不稳定。另一方面, Cubature 卡尔曼滤波算法存在四元数加权均值规范化问题及四元数协方差计算奇异性问题, 而对数变换的 Cubature 卡尔曼滤波算法 (LTCKF) 采用了四元数对数与指数函数进行四元数的均值和方差计算, 因此在理论上严格保证了四元数估计值具有单位长度, 避免了四元数非归一化带来的计算误差。

[0159] 本发明的有益效果通过下面仿真实验进行说明

[0160] 采用欧拉角设定载体的角运动分别为：

$$[0161] \begin{cases} \psi = \frac{\pi}{3} \sin\left(\frac{\pi}{30}t\right) \\ \theta = \frac{\pi}{8} \sin\left(\frac{\pi}{10}t + \frac{\pi}{4}\right) \\ \gamma = \frac{\pi}{4} \sin\left(\frac{\pi}{15}t + \frac{\pi}{2}\right) \end{cases} \quad (15)$$

[0162] 式中,  $\psi$  为偏航角,  $\theta$  为俯仰角,  $\gamma$  为横滚角。

[0163] 仍用一个磁偶极子模型模拟地磁异常, 磁偶极子磁矩分量分别为  $m_x = 10^9 \text{A} \cdot \text{m}^2$ ,  $m_y = 2 \times 10^8 \text{A} \cdot \text{m}^2$  和  $m_z = 10^8 \text{A} \cdot \text{m}^2$ , 地磁梯度测量装置相对于磁偶极子的位置分量分别为  $x = 100\text{m}$ ,  $y = 50\text{m}$  和  $z = 20\text{m}$ , 磁场梯度测量基线长  $\Delta x = \Delta y = 1\text{m}$ , 磁场梯度张量测量精度设为  $5\text{nT/m}$ 。仿真时间为  $180\text{s}$ , 采样频率为  $100\text{Hz}$ 。随机游走方差  $\sigma_v = 0.03^\circ / \text{s}$ , 漂移斜坡噪声方差  $\sigma_u = 0.003^\circ / \text{s}$ 。分别采用扩展卡尔曼滤波 (EKF)、CKF 和 LTCKF 算法同步处理完全相同的仿真数据, 初始状态值及其协方差也完全相同, 为了便于进一步比较, 将估计误差的标准差进行了统计运算, 如表 1 所示。

[0164] 表 1 欧拉角估计误差标准差

[0165]

误差项	$\delta\psi(o)$	$\delta\theta(o)$	$\delta\gamma(o)$
EKF	0.40091	1.06594	1.02563
CKF	0.06749	0.18922	0.16639
LTCKF	0.02266	0.05741	0.05355

[0166] 从表 1 可以看出,对数变换的 Cubature 卡尔曼滤波算法对姿态角的估计精度比 Cubature 卡尔曼滤波算法高出数倍,而 Cubature 卡尔曼滤波算法对姿态角的估计精度比 EKF 算法也高出数倍。这是因为姿态估计系统的状态方程及观测方程均具有强的非线性, EKF 算法存在较大的线性化误差,而 Cubature 卡尔曼滤波算法是一种非线性滤波,避免了线性化带来的误差及滤波器的不稳定。另一方面, Cubature 卡尔曼滤波算法存在四元数加权均值规范化问题及四元数协方差计算奇异性问题,而对数变换的 Cubature 卡尔曼滤波算法 (LTCKF) 采用了四元数对数与指数函数进行四元数的均值和方差计算,因此在理论上严格保证了四元数估计值具有单位长度,避免了四元数非归一化带来的计算误差。



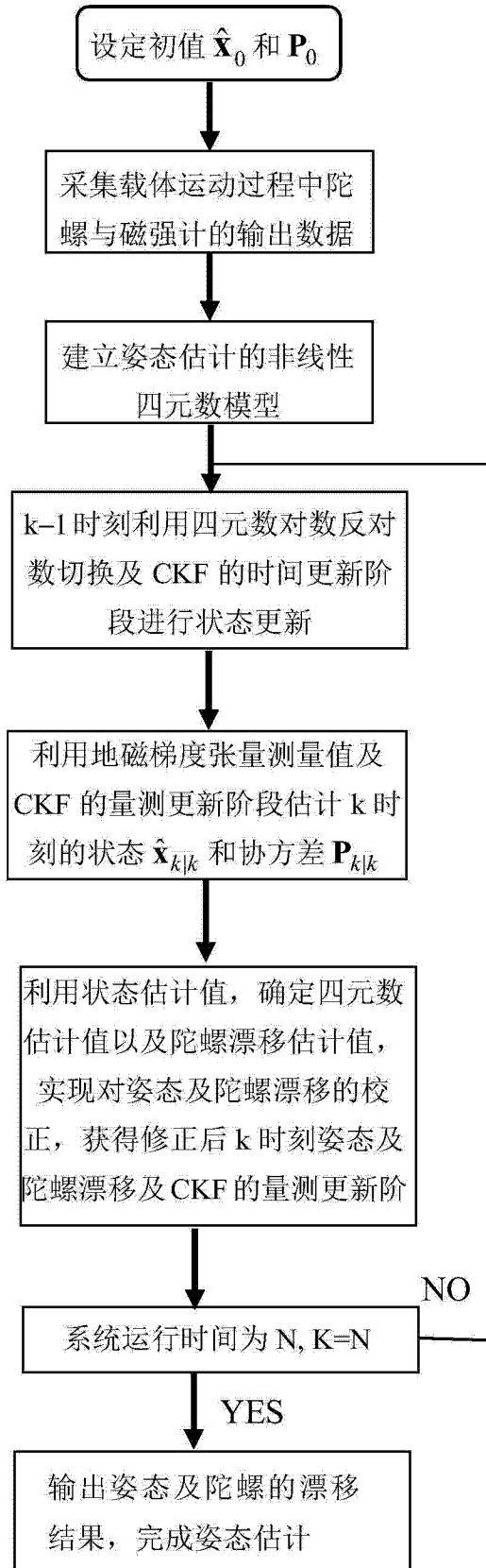


图 1

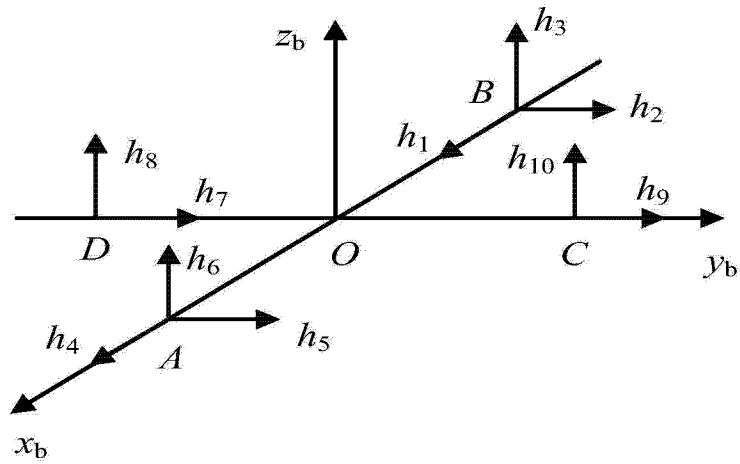


图 2

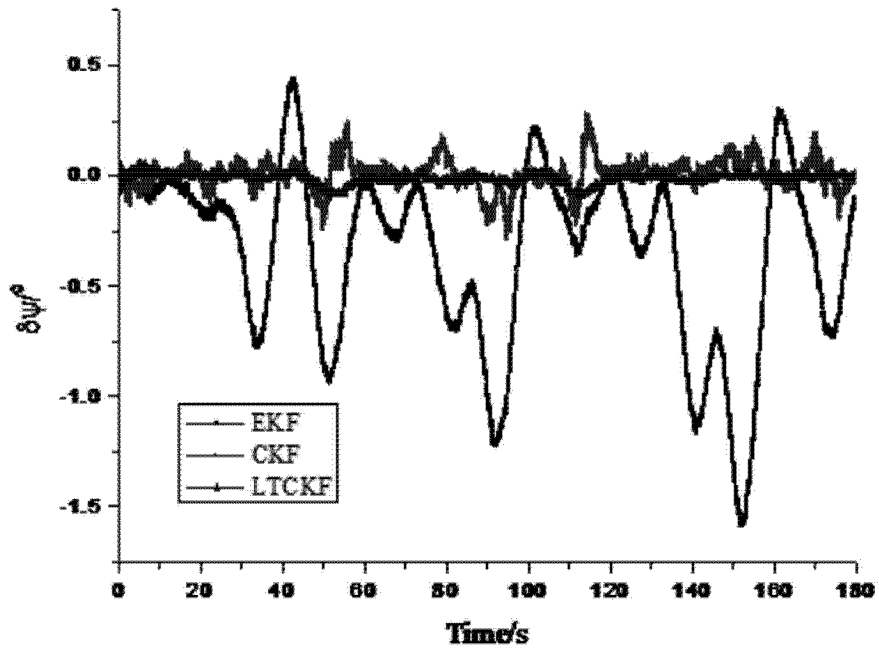


图 3

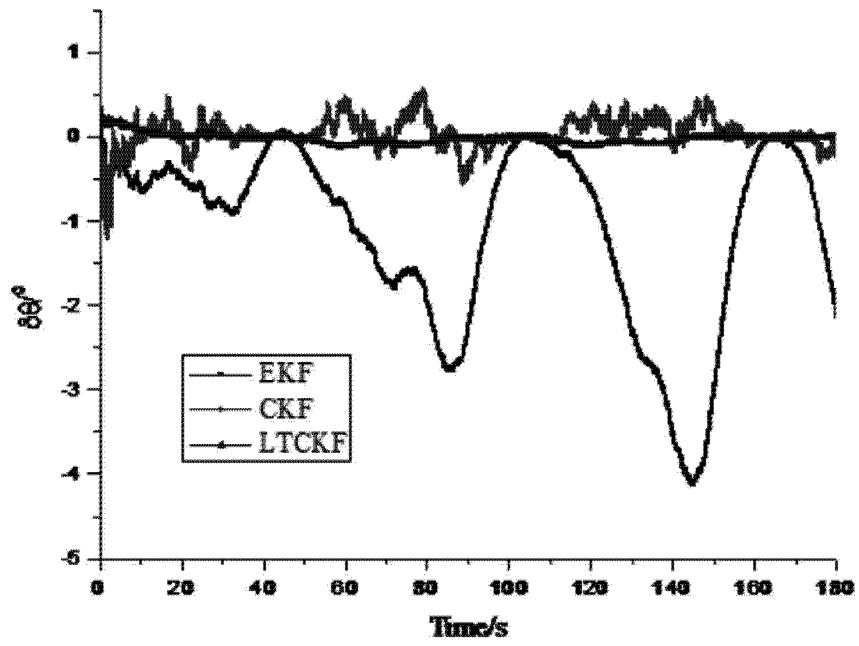


图 4

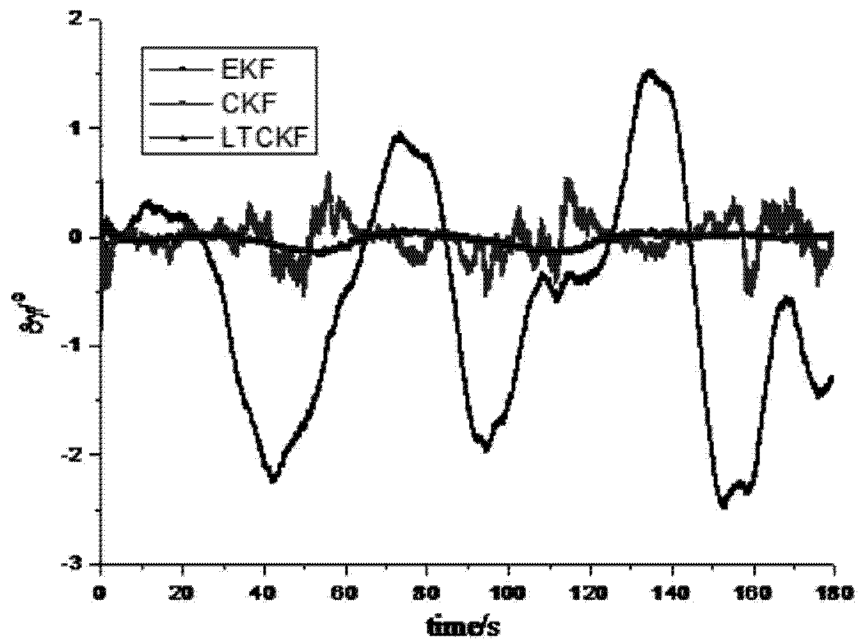


图 5