22 '15

I. L'équation (A) se réduit à

(3) $$3z^2 - 2u^2 = 1$$

avec

$$u = 2y + 1,$$

et alors

$$x = \frac{-1 \pm z}{2}.$$

L'équation (3) a pour solutions A072256, A138288

$$z, \quad 1, \quad 9, \quad 89, \quad 881, \quad \ldots,$$
$$u, \quad 1, \quad 11, \quad 109, \quad 1079, \quad \ldots,$$

avec la relation

$$t_{n+1} = 10 t_n - t_{n-1}.$$ A054320

On en déduira les solutions de l'équation (1) ou (2) :

A105038 → $x, \quad 0, \quad 4, \quad 44, \quad 440, \quad \ldots,$ ~~A352181~~

A087125 → $y, \quad 0, \quad 5, \quad 54, \quad 539, \quad \ldots$

et ces nombres augmentés de 1 et affectés du signe — :

A054318 → $-x, \quad 1, \quad 5, \quad 45, \quad 441, \quad \ldots,$

A253475 → $-y, \quad 1, \quad 6, \quad 55, \quad 540, \quad \ldots.$

II. L'équation (B) peut s'écrire

$$6x^2 + 6x + 1 - u^2 = 0.$$

Écrivant que le discriminant est un carré v^2, on aura

$$6u^2 + 3 = v^2,$$

ce qui suggère de prendre $v = 3z$, d'où

$$3z^2 - 2u^2 = 1.$$

On retrouve (comme c'était à prévoir) l'équation (3).

Note. — Le problème 4500 peut s'énoncer de quelques autres façons.

1° Trouver les nombres triangulaires dont la moitié est le tiers d'un autre nombre triangulaire.

L'équation (1) revient en effet à

$$\frac{\Delta}{2} = \frac{\Delta'}{3}.$$

Ce sont donc les nombres triangulaires

$$10, \quad 990, \quad 97020, \quad \ldots,$$ A200993

dont les moitiés

$$5, \quad 495, \quad 48510, \quad \ldots,$$ A352181

multipliées par 3, donnent les triangulaires

$$15, \quad 1485, \quad 145530, \quad \ldots,$$ A200994.

ou bien

$$\frac{5.6}{2}, \quad \frac{54.55}{2}, \quad \frac{539.540}{2}, \quad \ldots.$$

2° Trouver les nombres à la fois doubles et triples d'un triangulaire.

L'équation (1) exprime en effet la relation

$$3\Delta = 2\Delta',$$

c'est-à-dire la suite des nombres

$$30, \quad 2970, \quad 291060, \quad \ldots,$$ A352182.

qui sont les doubles des nombres triangulaires 15, ..., et les triples des triangulaires 10, ... indiqués ci dessus.

3° Trouver les nombres à la fois sommes de deux carrés consécutifs et de trois carrés consécutifs (question 1318, *N. A.*, 1879, p. 528, résolue 1880, p. 524-526).

4° Pour une autre étude de l'équation (3), *voir* question 1335 (*N. A.*, 1879, p. 479, résolue 1881, p. 425-427).

5° Pour d'autres corrélations, voir *S. Œ.*, 1911, p. 72, 108, 143, et 1914, p. 19.

H. Brocard.

Autres réponses de M. A. Gérardin qui ramène l'équation (1) à

$$\frac{8}{3} y(y+1) = u^2 - 1$$

et y suppose tour à tour $y = 3z$ et $y = 3z - 1$, et de MM. L. Bastien, R. Bouttard et Worms qui indiquent les formules

$$x_n = 10 x_{n-1} - x_{n-2} + 4, \qquad y_n = 10 y_{n-1} - y_{n-2} + 4,$$

avec

$$x = 4, 44, \ldots,$$
$$y = 5, 54, \ldots.$$

Voici un résumé de la réponse de M. Worms : il ramène la solution