22 (1915)

décomposition. On aura donc parmi les combinaisons $\alpha = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ à retenir seulement les valeurs $\alpha = 0, 1, 2$, ce qui fournit les trois décompositions obtenues par M. E.-N. Barisien et qui *sont les seules*. Car si l'on a

$$(a^2 + b^2)^5 = P^2 + Q^2,$$

cela équivaut à

$$(a + ib)^5 (a - ib)^5 = (P + iQ)(P - iQ),$$

ce qui prouve que $P + iQ$ est une combinaison de la forme

$$(a + ib)^\alpha (a - ib)^{5-\alpha}$$

considérée au début.

La généralisation de la méthode est évidente.

Si l'on prend

$$(a^2 + b^2)^m = (a + ib)^m (a - ib)^m = P^2 + Q^2,$$

$P + iQ$ sera de la forme

$$(a + ib)^\alpha (a - ib)^{m-\alpha}$$

où $0 \leqq \alpha \leqq m$; α et $m - \alpha$ donnent la même décomposition. Si $m = 2k - 1$ est impair, on pourra décomposer en une somme de deux carrés de k manières, et encore de k manières si m est pair et égal à $2k$.

Si l'on pose

$$(a + ib)^\alpha (a - ib)^\beta = P_{\alpha\beta} + iQ_{\alpha\beta},$$

on a

$$(a - ib)^\alpha (a + ib)^\beta = P_{\alpha\beta} - iQ_{\alpha\beta} = P_{\beta\alpha} + iQ_{\beta\alpha},$$

d'où

$$P_{\alpha\beta} = P_{\beta\alpha}, \qquad Q_{\alpha\beta} = -Q_{\beta\alpha}.$$

En faisant le produit de deux combinaisons de la forme ci-dessus, on trouve les formules de récurrence

$$P_{\alpha+\alpha',\beta+\beta'} = P_{\alpha\beta} P_{\alpha'\beta'} - Q_{\alpha\beta} Q_{\alpha'\beta'},$$
$$Q_{\alpha+\alpha',\beta+\beta'} = P_{\alpha\beta} Q_{\alpha'\beta'} + Q_{\alpha\beta} P_{\alpha'\beta'};$$

on peut généraliser en considérant des expressions de la forme

$$(a + ib)^\alpha (a - ib)^\beta (a' + ib')^{\alpha'} (a' - ib')^{\beta'} \ldots$$

G. Kœnigs.

Autre réponse de M. L. Bastien, conçue au point de vue arithmétique et qui paraîtra ultérieurement.

#4500

4500. (**1915**, 100) (T. Ono). — *Équation indéterminée* (**1915**, 239). — On démontre aisément que toute solution de l'équation

$$\boxed{\frac{x(x+1)}{2} = \frac{y(y+1)}{3}}$$

peut être obtenue en prenant pour x, y les valeurs suivantes

$$x = 2\lambda\mu + 6\mu^2, \qquad y = 3\lambda\mu + 6\mu^2,$$

où λ, μ vérifient l'équation

$$\text{(A)} \qquad \lambda^2 - 6\mu^2 = 1;$$

outre la solution évidente $\lambda = 1$, $\mu = 0$, cette équation (A) en admet encore d'autres comme

$$\lambda = 5, \quad \mu = 2; \quad \lambda = 49, \quad \mu = 20; \quad \ldots.$$

Si (λ_0, μ_0), (λ, μ) sont deux solutions de (A), on en obtient une autre par les formules

$$(1) \qquad \begin{cases} \lambda_1 + \mu_1\sqrt{6} = (\lambda_0 + \mu_0\sqrt{6})(\lambda + \mu\sqrt{6}), \\ \lambda_1 - \mu_1\sqrt{6} = (\lambda_0 - \mu_0\sqrt{6})(\lambda - \mu\sqrt{6}), \end{cases}$$

ou encore

$$\lambda_1 = \lambda_0\lambda + 6\mu_0\mu, \qquad \mu_1 = \mu_0\lambda + \lambda_0\mu.$$

Nous disons que la solution (λ_1, μ_1) est le produit des deux solutions (λ_0, μ_0), (λ, μ).

Ces deux dernières solutions interviennent symétriquement dans la formation de la troisième.

En particulier, les puissances successives d'une solution sont encore des solutions. Par exemple,

$$(\lambda, \mu)^2 = (\lambda^2 + 6\mu, 2\lambda\mu),$$
$$(\lambda, \mu)^3 = (\lambda^3 + 18\lambda\mu^2, 3\lambda^2\mu + 6\mu^3).$$

Si l'on pose

$$P_n + \sqrt{6}Q_n = (\lambda + \sqrt{6}\mu)^n,$$

P_n, Q_n sont des polynomes en λ, μ homogènes d'ordre n, à coefficients entiers, et $\lambda = P_n$, $\mu = Q_n$ sont des solutions de (A). On peut donc en multipliant entre elles les solutions, et, même, plusieurs fois les mêmes, obtenir des solutions nouvelles en nombre indéfini. D'où aussi de nouvelles solutions en nombre indéfini pour l'équation du début.