Scan
annotated and
corrected copy
add to A6330
A259100
A214824

fal wrote to K. about more terms & possible errors A6330

Discrete Mathematics 27 (1979) 279–295

SUR LES EXTENSIONS LINEAIRES D'UNE FAMILLE PARTICULIERE D'ORDRES PARTIELS

A259100
A259101
A214824

G. KREWERAS

Institut de Statistique, 4, place Jussieu, 75005 Paris, France

Received 10 October 1978

L'article définit les encoignures comme idéaux d'un demi-dièdre entier ordonné et indique un mode de dénombrement des extensions linéaires d'une encoignure donnée à l'aide d'une somme alternée de produits de nombres trinomiaux. Le résultat central constitue une généralisation substantielle de résultats antérieurs connus et est lui-même le point de départ de généralisations à certains ensembles ordonnés plus complexes.

Corners are defined as ideals of an ordered integer half-dihedron; the paper develops a method of enumeration of the linear extensions of a given corner by means of an alternating sum of products of trinomials. The main result substantially generalizes previously known results and is by itself the starting point of generalizations to some further ordered sets.

1. Definition et désignation des encoignures

Appelons "demi-dièdre entier ordonné" l'ensemble $\mathcal{D}$ formé de tous les points $M=(x, y, z)$ de $\mathbb{N}^3$ tels que $xy=0$, et convenons que $(x', y', z')\leqslant(x, y, z)$ si et seulement si l'on a à la fois $x'\leqslant x$, $y'\leqslant y$ et $z'\leqslant z$. Nous appellerons encoignure tout idéal fini de $\mathcal{D}$, c'est-à-dire toute partie finie E de $\mathcal{D}$ telle que

$$(M\in E \text{ et } M'\leqslant M)\Rightarrow M'\in E.$$

L'objet essentiel du présent travail est de donner un mode de calcul du nombre d'extensions linéaires d'une encoignure donnée.

Pour désigner une encoignure, nous utiliserons la notation $E=(h;\, X, Y)$, où h est un entier positif (sauf dans le cas trivial de l'encoignure vide, pour laquelle $h=0$) et X et Y sont deux suites de Young $X=(x_1\, x_2 \cdots x_h)$ et $Y=(y_1\, y_2 \cdots y_h)$, c'est-à-dire deux suites de h entiers telles que

$$x_1\geqslant x_2\geqslant\cdots\geqslant x_h\geqslant 0 \quad \text{et} \quad y_1\geqslant y_2\geqslant\cdots\geqslant y_h\geqslant 0.$$

L'encoignure $E=(h;\, X, Y)$ est alors un ensemble partiellement ordonné de cardinal

$$h+\sum_{i=1}^{h} x_i+\sum_{j=1}^{h} y_j=n;$$

n sera appelé le "volume" de l'encoignure E, h sa "hauteur".

Les éléments de E appartiennent aux $2h+1$ familles ci-après:

(1) la famille des h éléments $0^1\, 0^2 \cdots 0^h$ pour lesquels $x=y=0$, avec

$$0^1<0^2<\cdots<0^h.$$

(2) h familles d'éléments A_k^i, avec $i \in \{1, 2, \ldots, h\}$ et $k \in \{1, 2, \ldots, x_i\}$ pour lesquels $x = k$ et $y = 0$; on a

$$A_k^i \leqslant A_{k'}^{i'} \quad \Leftrightarrow \quad i \leqslant i' \quad \text{et} \quad k \leqslant k'.$$

(3) h familles d'éléments B_k^j, avec $j \in \{1, 2, \ldots, h\}$ et $k \in \{1, 2, \ldots, x_j\}$, pour lesquels $x = 0$ et $y = k$; on a

$$B_k^j \leqslant B_{k'}^{j'} \quad \Leftrightarrow \quad j \leqslant j' \quad \text{et} \quad k \leqslant k'.$$

De plus un élément A et un élément B quelconques sont incomparables et l'on a

$$0^i < A_k^{i'} \quad \Leftrightarrow \quad i \leqslant i',$$

$$0^j < B_k^{j'} \quad \Leftrightarrow \quad j \leqslant j'.$$

La Fig. 1 représente l'encoignure (4; 3220, 2100), de volume 14 ou plus exactement son "graphe de couverture".

Les encoignures sont des cas particuliers d'ensembles partiellement ordonnés de dimension 3 (sur la notion de dimension, cf. [2]), qui ont été considérés par plusieurs auteurs sous différents noms: partitions planes (cf. [5, 1]), solides normaux (cf. [4]). Nous avions en particulier, dans [4] réservé le nom d'encoignure au cas spécial où, avec les notations introduites ici, les termes des suites X et Y sont tous égaux à 1 ou à 0, et nous avions proposé le nom d' "encoignures généralisées" pour ce que nous appelons ici encoignures (tout court).

Le problème de la recherche du nombre d'extensions linéaires d'une partition

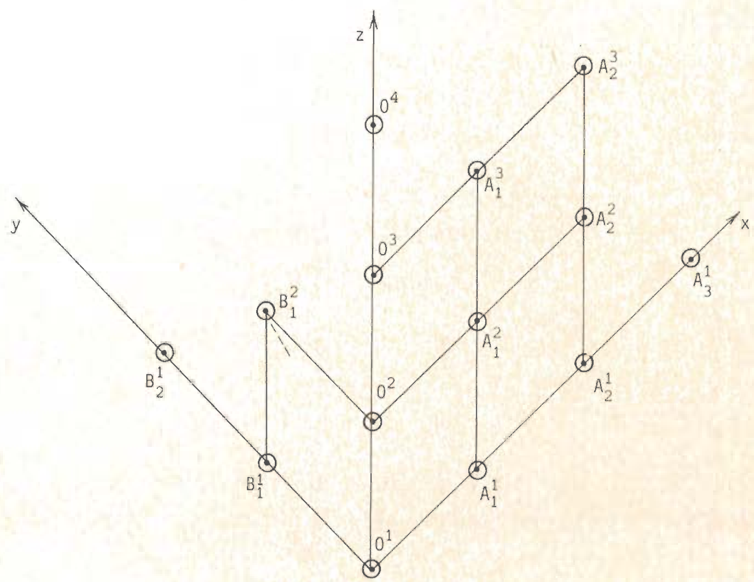

Fig. 1.

plane donnée, c'est-à-dire du nombre d'ordres totaux compatibles avec l'ordre partiel que définit cette partition plane, est considéré comme un problème spécialement difficile (cf. [7]).

Cependant, pour une classe particulière d'encoignures, le problème est tout à fait classique: il s'agit des encoignures $(h; X, 0)$ ou $(h; 0, Y)$. En effet l'encoignure $(h; X, 0)$ est entièrement défine par la suite de Young à h termes positifs de somme n,

$$(x_1+1, x_2+1, \ldots, x_h+1).$$

La solution, c'est-à-dire le nombre $\varphi(h; X, 0)$ d'ordres compatibles, est alors donnée par l'expression de Young [8],

$$(h; X, 0) = \frac{n! \prod_{1 \leq i < j \leq h} (x_i - x_j - i + j)}{(x_1+h)!\,(x_2+h-1)! \cdots (x_h+1)!}$$

ou par la célèbre règle des "longueurs d'équerre" de Frame–Robinson–Thrall [3].

2. Dénombrements des encoignures

Commençons, à titre un peu accessoire, par dénombrer les encoignures dont on se donne soit le volume n et la hauteur h, soit le volume n seul.

Il est bien connu que les suites de Young X n'ayant pas plus de h termes positifs et pour lesquelles $\sum x_i = a$ sont en nombre égal au coefficient de t^a dans le développement de la fonction génératrice

$$\omega_h(t) = \sum_{\lambda=1}^{h} (1-t^\lambda)^{-1}.$$

$\prod$

Si l'on s'impose, outre le nombre maximum h de termes non nuls de X et Y, non plus la somme a des termes x_i de X, mais la somme $n-h=a+b$ des termes x_i de X et des termes y_j de Y, on voit par convolution que le nombre e_n^h d'encoignures de volume n et de hauteur h est le coefficient de t^{n-h} dans $[\omega_h(t)]^2$, ou encore le coefficient de t^n dans $t^h[\omega_h(t)]^2$ Comme on a

h
e_h

$$\omega_h(t) = \omega_{h-1}(t)(1-t^h)^{-1},$$

on a

$$t^h[\omega_h(t)]^2 = t^{h-1}[\omega_{h-1}(t)]^2 \cdot (t + 2t^{h+1} + 3t^{2h+1} + 4t^{3h+1} + \cdots);$$

d'où il résulte que

$$e_n^h = e_{n-1}^{h-1} + 2e_{n-1-h}^{h-1} + 3e_{n-1-2h}^{h-1} + 4e_{n-1-3h}^{h-1} + \cdots,$$

la sommation se poursuivant tant que l'argument du bas demeure $\geq h-1$.

Bien entendu si $h=1$, le couple de suites (X, Y) réduites chacune à un seul

Corners

6330

terme est $(n-1, 0)$, *ou* $(n-2, 1), \ldots,$ ou $(0, n-1)$, d'où $e_n^1 = n$; on peut ainsi former de proche en proche les colonnes successives du Tableau 1.

new

A259100

Tableau 1

e_n^h	$h=0$	1	2	3	4	5	6	7	8	e_n
$n=0$	1									1
1	0	1								1
2	0	2	1							3
3	0	3	2	1						6
4	0	4	5	2	1					12
5	0	5	8	5	2	1				21
6	0	6	14	10	5	2	1			38
7	0	7	20	18	10	5	2	1		63
8	0	8	30	30	20	10	5	2	1	106

La somme e_n de la ligne n de ce tableau est le nombre total d'encoignures de volume n; sa fonction génératrice est

$$\sum_{n=0}^{+\infty} e_n t^n = \sum_{h=0}^{+\infty} t^h [\omega_h(t)]^2$$

On peut en outre observer que les fins de ligne se stabilisent pour $h \leq [\frac{1}{2}n]$; il est facile de montrer que les nombres 1 2 5 10 20 $\cdots$ qui apparaissent ainsi, et qui sont notamment mentionnés dans [6], ont pour fonction génératrice

$$\omega(t) = \prod_{\lambda=1}^{+\infty} (1-t^\lambda)^{-2}.$$

3. Remarques algébriques préliminaires

Avant d'indiquer la formule qui résume un mode de calcul possible du nombre $\varphi(h; X, Y)$ d'extensions linéaires d'une encoignure $E = (h; X, Y)$, quelques remarques algébriques nous sont nécessaires.

Considérons deux suites illimitées U et V de variables numériques et appelons U_h et V_h les suites finies obtenues en ne retenant de U et de V que les h premiers termes. Nous utiliserons aussi la notation $U_h - 1_i$ pour désigner la suite obtenue à partir de U_h en remplaçant u_i par $u_i - 1$ sans rien changer aux autres termes. Nous utiliserons en outre constamment la notation de Vandermonde $(u)_i = u(u-1)\cdots(u-i+1)$.

A titre abréviatif nous introduirons également les symboles

$$S_h = u_1 + u_2 + \cdots + u_h, \qquad T_h = v_1 + v_2 + \cdots + v_h,$$
$$F_h = S_h + T_h - h^2$$

et nous nous intéresserons à la suite des fractions rationnelles $R_0 R_1 R_2 \cdots R_h \cdots$

définies comme suit: $R_0 = 1$,

$$R_1(U_1, V_1) = \frac{u_1 v_1}{u_1 + v_1 - 1},$$

et plus généralement

$$R_h(U_h, V_h) = R_{h-1}(U_{h-1}, V_{h-1}) \cdot \frac{(u_h)_h (v_h)_h}{F_h}$$
$$= \frac{(u_1)_1(v_1)_1(u_2)_2(v_2)_2 \cdots (u_h)_h(v_h)_h}{F_1 F_2 \cdots F_h}. \tag{1}$$

Etablissons à leur sujet le lemme suivant:

$$\sum_{i=1}^{h} u_i R_h(U_h - 1_i, V_h) + \sum_{j=1}^{h} v_j R_h(U_h, V_h - 1_j) = (u_h)_h (v_h)_h R_{h-1}(U_{h-1}, V_{h-1})$$
$$= F_h R_h(U_h, V_h). \tag{2}$$

Ce lemme signifie, pour $h = 1$, que

$$u\frac{(u-1)v}{u+v-2} + v\frac{u(v-1)}{u+v-2} = uv,$$

ce qui se vérifie immédiatement. Nous le démontrerons par récurrence sur h, en le supposant établi jusqu'à $h-1$.

Pour calculer le premier membre de (2), nous calculerons séparément, dans chacune des deux sommes de h termes, la somme des $h-1$ premiers termes et le dernier terme. Par suite de (1) et compte tenu de la définition de F_h, on a

$$\sum_{i=1}^{h-1} u_i R_h(U_h - 1_i, V_h) = \frac{(u_h)_h (v_h)_h}{F_h - 1} \sum_{i=1}^{h-1} u_i R_{h-1}(U_{h-1} - 1_i, V_{h-1})$$

et

$$\sum_{j=1}^{h-1} v_j R_h(U_h, V_h - 1_j) = \frac{(u_h)_h (v_h)_h}{F_h - 1} \sum_{j=1}^{h-1} v_j R_{h-1}(U_{h-1}, V_{h-1} - 1_j).$$

En additionnant membre à membre et en tenant compte de l'hypothèse de récurrence, on trouve

$$\sum_{i=1}^{h-1} u_i R_h(U_h - 1_i, V_h) + \sum_{j=1}^{h-1} v_j R_h(U_h, V_h - 1_j) =$$
$$= \frac{(u_h)_h (v_h)_h}{F_h - 1} \cdot (u_{h-1})_{h-1} (v_{h-1})_{h-1} R_{h-2}(U_{h-2}, V_{h-2})$$
$$= \frac{(u_h)_h (v_h)_h}{F_h - 1} \cdot R_{h-1}(U_{h-1}, V_{h-1}) \cdot F_{h-1}. \tag{3}$$

Les termes du premier membre de (2) qui restent à ajouter sont

$$u_hR_h(U_h-1_h,\ V_h)+v_hR_h(U_h,\ V_h-1_h)=$$
$$=R_{h-1}(U_{h-1},\ V_{h-1})\cdot\frac{u_h(u_h-1)_h(v_h)_h+v_h(u_h)(v_h-1)_h}{F_h-1}.$$

Le numérateur de cette dernière fraction peut s'écrire $(u_h)_h(v_h)_h(u_h-h+v_h-h)$; on a donc

$$u_hR_h(U_h-1_h,\ V_h)+v_hR_h(U_h,\ V_h-1_h)=$$
$$=\frac{(u_h)_h(v_h)_h}{F_h-1}\cdot R_{h-1}(U_{h-1},\ V_{h-1})\cdot(u_h+v_h-2h). \tag{4}$$

La somme des expressions (3) et (4) fait ainsi intervenir, aux facteurs communs près, la somme

$$F_{h-1}+(u_h+v_h-2h)=S_{h-1}+T_{h-1}-(h-1)^2+u_k+v_h-2h$$
$$=S_h+T_h-h^2-1=F_h-1.$$

qui est précisément le dénominateur commun de (3) et (4). Le premier membre de (2) est donc finalement égal à $(u_h)_h(v_h)_h\cdot R_{h-1}(U_{h-1},\ V_{h-1})$, ce qui achève d'établir le lemme (2).

Notons que ce lemme n'est pas applicable avec des données numériques pour lesquelles certains des dénominateurs s'annulent ce qui arrive par exemple dans le cas particulier où $u_1=v_1=1$. En effet $R_h(U_h-1_1,\ V_h)$ et $R_h(U_h,\ V_h-1_1)$ n'ont alors pas de sens.

Cependant la somme

$$\theta(U_h,\ V_h)=u_1R_h(U_h-1_1,\ V_h)+v_1R_h(U_h,\ V_h-1_1)$$

conserve un sens, et l'on vérifie facilement qu'elle peut se mettre sous la forme

$$\theta(U_h,V_h)=u_1v_1u_2v_2\cdots u_hv_h\cdot\frac{(u_2-1)_1(v_2-1)_1\cdots(u_h-1)_{h-1}(v_h-1)_{h-1}}{(F_2-1)(F_3-1)\cdots(F_h-1)}, \tag{5}$$

qui nous sera utile par la suite. Dans ce cas le lemme (2) prendra la forme

$$\sum_{i=2}^{h}u_iR_h(U_h-1_i,V_h)+\sum_{j=2}^{h}v_jR_h(U_h,\ V_h-1_j)=F_hR_h(U_h,\ V_h)-\theta(U_h,\ V_h). \tag{6}$$

4. Le treillis des encoignures

L'ensemble de toutes les encoignures, comme tout ensemble formé par les idéaux d'un ordre partiel donné, forme un treillis $\mathbb{E}$ ordonné par inclusion, qui a pour élément minimal l'encoignure vide 0. Nous dirons que, dans $\mathbb{E}$, E' est antécédent de E (E' ant. E) si $E' \subset E$ et si le volume de E dépasse d'une unité celui de E'. Le langage employé est le même que dans le treillis de Young [4].

Pour énumérer toutes les encoignures E' antécédentes d'une encoignure donnée $E=(h; X, Y)$, il faut considérer deux cas.

1er cas. $x_h+y_h>0$. La liste des E' s'obtient en juxtaposant la liste des $(h; X', Y)$ pour lesquelles X' est une suite de Young antécédente de X et la liste des $(h; X, Y')$ pour lesquelles Y' est une suite de Young antécédente de Y.

2ème cas. $x_h=y_h=0$. Il faut dans ce cas compléter la liste décrite ci-dessus par l'encoignure supplémentaire $(h-1; X, Y)$, étant entendu que X désigne indifféremment l'une ou l'autre des suites de Young $(x_1 \cdots x_{h-1}\, 0)$ ou $(x_1 \cdots x_{h-1})$, et de même pour Y.

Pour une encoignure donnée E, de volume n, il est clair que le nombre $\varphi(E)$ d'extensions linéaires de E n'est autre que le nombre de manières de numéroter de 1 à n les éléments de E en respectant l'ordre partiel interne de E. Le numéro n ne peut alors être attribué qu'à l'un des éléments maximaux de E, c'est-à-dire à l'un de ceux dont la suppression transforme E en l'un de ses antécédents E'. Il en résulte que

$$\varphi(E)=\sum_{E' \text{ ant. } E} \varphi(E'), \tag{7}$$

ce qui exprime aussi que $\varphi(E)$ est le nombre de cheminements de 0 à E dans $\mathbb{E}$.

La relation (7) permet de calculer de proche en proche les $\varphi(E)$ de toutes les encoignures de volume n si l'on a préalablement calculé ceux de toutes les encoignures de volume $n-1$. Ce que nous donnerons ci-après, c'est une formule de calcul "direct" de $\varphi(E)$, c'est-à-dire qui ne nécessite pas la connaissance préalable des $\varphi(E')$.

5. Calcul direct de $\varphi(h; X, Y)$

Appelons I et J deux éléments quelconques de l'ensemble $\mathcal{S}$ des $h!$ permutations de $(1, 2, \ldots, h)$:

$$I=(i_1\, i_2 \cdots i_h), \qquad J=(j_1\, j_2 \cdots j_h),$$

et définissons $p(I, J)$ comme égal à 1 ou à -1 suivant que I ou J sont ou non de même parité.

Introduisons en outre la notation abréviative

$$F_k(I,J)=\sum_{\lambda=1}^{k} (x_{i_\lambda}-i_\lambda+y_{j_\lambda}-j_\lambda)+k(2h-k+2).$$

En particulier on vérifie aisément que $F_h(I, J)=n$ quel que soit le couple de permutations (I, J).

Nous allons montrer que l'on a alors

$$\varphi(h; X, Y) =$$

$$= \frac{n!}{\prod_{k=1}^{h} (x_k + h - k - 1)!\,(y_k + h - k - 1)!}$$

$$\cdot \sum_{(I,J)\in(\mathcal{S}_h)^2} p(I, J) \underline{\prod_{k=1}^{h} \frac{(x_{i_k} + h - i_k + 1)_k (y_{j_k} + h - j_k + 1)_k}{F_k(I, J)}}. \tag{8}$$

Remarquons d'abord, pour cela, qu'il s'agit d'une somme alternée de $(h!)^2$ termes, dont certains sont éventuellement nuls. Si l'on fixe provisoirement I et J, on peut poser, pour alléger l'écriture,

$$\begin{aligned} &a_k^I = x_{i_k} + h - i_k + 1, \qquad b_k^J = y_{j_k} + h - j_k + 1, \qquad k \in \{1, 2, \ldots, h\},\\ &(a_1^I\, a_2^I \cdots a_h^I) = A^I, \qquad (b_1^J\, b_2^J \cdots b_h^J) = B^J. \end{aligned} \tag{9}$$

Il sera également commode d'*omettre* les indices supérieurs I ou J chaque fois que I ou J désigne la permutation "retournée"

$$(h, h-1, \ldots, 2, 1);$$

d'où

$$a_1 = x_h + 1, \qquad a_2 = x_{h-1} + 2, \qquad \ldots, \qquad a_h = x_1 + h$$

et

$$b_1 = y_h + 1, \qquad b_2 = y_{h-1} + 2, \qquad \ldots, \qquad b_h = y_1 + h,$$

et par conséquent, puisque X et Y sont des suites de Young,

$$0 < a_1 < a_2 < \cdots < a_h \quad \text{et} \quad 0 < b_1 < b_2 < \cdots < b_h.$$

Notons que la donnée du couple de suites (A, B) suffit à décrire l'encoignure $(h; X, Y)$.

Cela dit, le numérateur du produit souligné au second membre de (8) peut s'écrire, en vertu de (9),

$$(a_1^I)_1 (b_1^J)_1 (a_2^I)_2 (b_2^J)_2 \cdots (a_h^I)_h (b_h^J)_h,$$

et le facteur général du dénominateur peut s'écrire, toujours en vertu de (9),

$$\begin{aligned} F_k(I, J) &= a_1^I + b_1^J - (2h+2) + \cdots + a_k^I + b_k^J - (2h+2) + k(2h - k + 2)\\ &= a_1^I + \cdots + a_k^I + b_1^J + \cdots + b_k^J - k^2. \end{aligned}$$

Il en résulte que le produit souligné n'est autre que $R_h(A^I, B^J)$, valeur prise par la fraction rationnelle définie en (1) (Section 3) pour $U_h = A^I$ et $V_h = B^J$.

Nous poserons

$$\mathcal{R}_h(A, B) = \sum_{(I,J)\in(\mathcal{S}_h)^2} p(I, J) R_h(A^I, B^J), \tag{10}$$

ce qui permet d'écrire (8) sous la forme équivalente

$$\varphi(h; X, Y) = \frac{n!}{a_1!\, b_1!\, a_2!\, b_2! \cdots a_h!\, b_h!} \mathcal{R}_h(A, B) \tag{11}$$

Il reste à démontrer cette formule, ce que nous ferons par récurrence sur le volume n, après avoir constaté qu'elle est trivialement vraie pour $n = 1$.

6. Justification de la formule (11)

Pour passer de l'encoignure $E = (h; X, Y)$ à une de ses antécédentes E', il est *suffisant* de diminuer d'une unité l'un des entiers x_i ou y_j, et cela est même *nécessaire* si l'une au moins des suites de Young X et Y se compose de h entiers positifs.

Supposons d'abord qu'il en soit bien ainsi pour E, ce qui revient à supposer que $x_h + y_h > 0$ ou $a_1 + b_1 > 2$. Nous avons dit "l'un" des entiers, et non pas "l'un quelconque"; en effet $X' = X - 1_i$ n'est une suite de Young antécédente de X que si, dans X, on a soit $x_i > x_{i+1}$, soit $i = h$ et $x_h > 0$.

Mais si $x_i = x_{i+1}$, cela veut dire, par suite de (9), que dans la suite $A^I = (a_1^I\, a_2^I \cdots a_h^I)$ il existe deux entiers consécutifs, et cela quel que soit $I \in \mathcal{S}_h$, donc notamment que dans A on a, $a_k = a_{k-1} + 1$. Et si $x_h = 0$, cela veut dire que $a_1 = 1$.

Il en résulte que, chaque fois que l'on passera d'un couple de suites (A, B) décrivant une encoignure E au couple (A', B') formé en diminuant d'une unité *l'un quelconque* des termes de A ou de B, on obtiendra soit un couple (A', B') décrivant une encoignure E' antécédente de E, soit un couple (A', B') tel que $\mathcal{R}(A', B') = 0$. En effet $\mathcal{R}(A', B')$, qui est, par suite de (10), une fraction rationnelle symétrique gauche des h variables A' et des h variables B', s'annule si $a_k - 1 = a_{k-1}$, ou si $b_k - 1 = b_{k-1}$, et s'annule aussi si $a_1 - 1$ ou $b_1 - 1$ devient nul (car dans ce cas chacun des R_h dont il est la somme alternée s'annule par suite de la définition (1) de R_h).

Par hypothèse de récurrence, le calcul de $\varphi(h, X, Y)$ peut alors se conduire en remplaçant le second membre de (7) par

$$\frac{(n-1)!}{a_1!\, b_1! \cdots a_h!\, b_h!} \left[\sum_{i=1}^{h} a_i \mathcal{R}_h(A - 1_i, B) + \sum_{j=1}^{h} b_j \mathcal{R}_h(A, B - 1_j) \right]. \tag{12}$$

Mais tout $\mathcal{R}_h$ est, en vertu de (10), la somme alternée de $(h!)^2$ termes dont *chacun* peut être traité par le lemme (2). On obtient ainsi

$$\sum_{E' \text{ ant. } E} \varphi(E') = \frac{(n-1)!}{a_1!\, b_1! \cdots a_h!\, b_h!} \sum_{(I, J) \in (\mathcal{S}_h)^2} p(I, J) F_h R_h(A^I, B^J);$$

compte tenu du fait que $F_h = n$ quels que soient I et J, et de la définition (10) de $\mathcal{R}_h(A, B)$, on trouve bien ainsi le second membre de la formule (11), qui est donc établie sous la seule réserve que x_h et y_h ne soient pas tous deux nuls.

Reste à traiter le cas où $x_h = y_h = 0$ ou $a_1 = b_1 = 1$. Deux choses sont changées:

(1) les antécédents de $E = (h; X, Y)$ ne sont plus tous de la forme $(h; X', Y)$ ou $(h; X, Y')$; il y a un antécédent de plus, à savoir $E'_0 = (h-1; X, Y)$ (cf. Section 4).

(2) le lemme (2) n'est applicable que sous la forme (6).

La somme des $\varphi(h; X', Y)$ pour X' ant. X et des $\varphi(h; X, Y')$ pour Y' ant. Y continue d'être donnée par une expression analogue à (12), mais avec un i et un j qu'il suffit de faire varier de 2 à h:

$$\sum_{X' \text{ ant. } X} \varphi(h; X', Y) + \sum_{Y' \text{ ant. } Y} \varphi(h; X, Y') =$$

$$= \frac{(n-1)!}{a_1!\, b_1! \cdots a_h!\, b_h!} \left[\sum_{i=2}^{h} a_i \mathcal{R}_h(A - 1_i, B) + \sum_{j=2}^{h} b_j \mathcal{R}_h(A, B - 1_j) \right]. \tag{13}$$

Si l'on applique cette fois la forme (6) du lemme (2), le crochet ci-dessus devient égal à

$$\sum_{(I,J)} p(I, J)[nR_h(A^I, B^J) - \theta(A^I, B^J)] = n\mathcal{R}(A, B) - \sum_{(I,J)} p(I, J)\theta(A^I, B^J).$$

Quant á la somme alternée des $\theta(A^I, B^J)$, elle peut se calculer en remontant à la définition (5). En effet (5) peut s'écrire, comme on s'en assure aisément,

$$\theta(U_h, V_h) = u_1 v_1 \cdots u_h v_h R_{h-1}(U'_{h-1}, V'_{h-1})$$

où

$$U'_{h-1} = (u_2 - 1, u_3 - 1, \ldots, u_h - 1) \quad \text{et} \quad V'_{h-1} = (v_2 - 1, v_3 - 1, \ldots, v_h - 1).$$

$\theta(A^I, B^J)$ est nul pour tous les couples (I, J) tels que $i_1 \neq h$ ou $j_1 \neq h$; donc seules vont intervenir dans la somme alternée les permutations $I = hI'$ et $J = hJ'$, avec I' et J' appartenant à $\mathcal{S}_{h-1}$, On peut de ce fait écrire

$$\sum_{(I,J) \in (\mathcal{S}_h)^2} p(I, J)\theta(A^I, B^J) = a_1 b_1 \cdots a_h b_h \mathcal{R}_{h-1}(A', B'),$$

où

$$A' = (a_2 - 1, a_3 - 1, \ldots, a_h - 1) \quad \text{et} \quad B' = (b_2 - 1, b_3 - 1, \ldots, b_h - 1).$$

Finalement (13) prend, après ouverture du crochet, la forme

$$\sum_{X' \text{ ant. } X} \varphi(h; X', Y) + \sum_{Y' \text{ ant. } Y} \varphi(h; X, Y') =$$

$$= \frac{n!\, \mathcal{R}_h(A, B)}{a_1!\, b_1! \cdots a_h!\, b_h!} - \frac{(n-1)!\, \mathcal{R}_{h-1}(A', B')}{(a_2 - 1)! \cdots (b_h - 1)!}.$$

Mais la fraction qui se retranche au second membre ci-dessus n'est autre, par hypothèse de récurrence, que $\varphi(h-1; X, Y) = \varphi(E'_0)$; en la faisant repasser à gauche on retombe bien sur la formule (11), qui est ainsi démontrée dans tous les cas.

7. Exemple de calcul

Soit à calculer le φ de l'encoignure de la Fig. 1, c'est-à-dire $\varphi(4;\, 3220;\, 2100)$. On calcule immédiatement

$$A=(1\,4\,5\,7) \quad \text{et} \quad B=(1\,2\,4\,6),$$

A^I et B^J sont les permutations respectives. Il y a en principe $(h!)^2=576$ termes à calculer pour trouver $\mathcal{R}_4(A, B)$, mais seules donnent des $R_h(A^I, B^J)$ non nuls les permutations de A qui majorent $(1\,2\,3\,4)$ et les permutations de B qui majorent $(1\,2\,3\,4)$; il n'y a donc que $2!\,3!=12$ termes utiles. (Le fait est général: si X et Y ont respectivement α et β termes positifs, il n'y a que $\alpha!\beta!$ termes utiles sur les $(h!)^2$ termes).

Comme $\mathcal{R}_4(A, B)$ est une somme de 12 fractions, il vaut mieux, pour n'avoir à manier que des entiers, distribuer sur chacune de ces fractions le facteur initial de la formule (11), qui est ici

$$\frac{14!}{1!\,4!\,5!\,7!\;\;1!\,2!\,4!\,6!}.$$

Par exemple le terme correspondant à $A^I=(1\,7\,4\,5)$ et $B^J=(1\,2\,6\,4)$ donnera ainsi, après simplification et regroupement des facteurs,

$$-\frac{(0)_0}{0!\,0!}\cdot\frac{(6)_5}{5!\,0!}\cdot\frac{(11)_4}{1!\,3!}\cdot\frac{(13)_1}{1!\,0!},$$

ce qui équivaut au produit des quatres trinomiaux

$$-\binom{0}{0\,0\,0}\binom{6}{5\,0\,1}\binom{11}{1\,3\,7}\binom{13}{1\,0\,12}=-1\cdot 6\cdot 1320\cdot 13.$$

Remarquons (il est facile de s'assurer qu'il en est toujours ainsi) que la suite des *premiers* arguments du bas $(0\,5\,1\,1)$ est la différence terme à terme $A^I-(1\,2\,3\,4)$ et que la suite des *deuxièmes* arguments du bas $(0\,0\,3\,0)$ est la différence terme à

Tableau 2

	1246 (0012)	1234 (0030)
1457 (0223)	$+\overline{\lvert 0\,0\,0\rvert}\,\overline{\lvert 2\,1\,0\rvert}\,\overline{\lvert 2\,1\,4\rvert}\,\overline{\lvert 3\,2\,8\rvert}$	$-\overline{\lvert 0\,0\,0\rvert}\,\overline{\lvert 2\,0\,1\rvert}\,\overline{\lvert 2\,3\,4\rvert}\,\overline{\lvert 3\,0\,10\rvert}$
1475 (0241)	$-\overline{\lvert 0\,0\,0\rvert}\,\overline{\lvert 2\,0\,1\rvert}\,\overline{\lvert 4\,1\,4\rvert}\,\overline{\lvert 1\,2\,10\rvert}$	$+\overline{\lvert 0\,0\,0\rvert}\,\overline{\lvert 2\,0\,1\rvert}\,\overline{\lvert 4\,3\,4\rvert}\,\overline{\lvert 1\,0\,12\rvert}$
1547 (0313)	$-\overline{\lvert 0\,0\,0\rvert}\,\overline{\lvert 3\,0\,1\rvert}\,\overline{\lvert 1\,1\,5\rvert}\,\overline{\lvert 3\,2\,8\rvert}$	$+\overline{\lvert 0\,0\,0\rvert}\,\overline{\lvert 3\,0\,1\rvert}\,\overline{\lvert 1\,3\,5\rvert}\,\overline{\lvert 3\,0\,10\rvert}$
1574 (0340)	$+\overline{\lvert 0\,0\,0\rvert}\,\overline{\lvert 3\,0\,1\rvert}\,\overline{\lvert 4\,1\,5\rvert}\,\overline{\lvert 0\,2\,11\rvert}$	$-\overline{\lvert 0\,0\,0\rvert}\,\overline{\lvert 3\,0\,1\rvert}\,\overline{\lvert 4\,3\,5\rvert}\,\overline{\lvert 0\,0\,13\rvert}$
1745 (0511)	$+\overline{\lvert 0\,0\,0\rvert}\,\overline{\lvert 5\,0\,1\rvert}\,\overline{\lvert 1\,1\,7\rvert}\,\overline{\lvert 1\,2\,10\rvert}$	$-\overline{\lvert 0\,0\,0\rvert}\,\overline{\lvert 5\,0\,1\rvert}\,\overline{\lvert 1\,3\,7\rvert}\,\overline{\lvert 1\,0\,12\rvert}$
1754 (0520)	$-\overline{\lvert 0\,0\,0\rvert}\,\overline{\lvert 5\,0\,1\rvert}\,\overline{\lvert 2\,1\,7\rvert}\,\overline{\lvert 0\,2\,11\rvert}$	$+\overline{\lvert 0\,0\,0\rvert}\,\overline{\lvert 5\,0\,1\rvert}\,\overline{\lvert 2\,3\,7\rvert}\,\overline{\lvert 0\,0\,13\rvert}$

terme $B^J-(1\,2\,3\,4)$. Quant aux *troisièmes* (ici 0 1 7 12), ils se déterminent, après le premier qui est toujours nul, par le fait que chacun est la somme, augmentée de 1, des trois arguments du bas de son prédécesseur.

Si l'on adopte l'écriture trinomiale "condensée"

$$\binom{x+y+z}{x\quad y\quad z}=\overline{|\,x\;y\;x\,|},$$

on forme facilement le Tableau 2, ce qui donne numériquement (on a omis ci-après le premier facteur, égal ici à 1 pour toutes les cases):

$$\begin{array}{rrrrrr}
+3\cdot & 105\cdot & 12870 & -3\cdot & 1260\cdot & 286\\
-3\cdot & 630\cdot & 858 & +3\cdot & 11550\cdot & 13\\
-4\cdot & 42\cdot & 12870 & +4\cdot & 504\cdot & 286\\
+4\cdot & 1260\cdot & 78 & -4\cdot & 27720\cdot & 1\\
+6\cdot & 72\cdot & 858 & -6\cdot & 1320\cdot & 13\\
-6\cdot & 360\cdot & 78 & +6\cdot & 7920\cdot & 1=645192.
\end{array}$$

Il y a donc 645 192 extensions linéaires de l'encoignure (4; 3220, 2100).

8. Cas particuliers

(1) *Cas où* $Y=0$. On a alors $B=(1\,2\cdots h)$, et la formule (11) se réduit à

$$\varphi(h;X,0)=\frac{n!}{a_1!\,a_2!\cdots a_h!}\times\sum{}'\frac{(a_1)_1\,(a_2)_2\cdots(a_h)_h}{a_1(a_1+a_2-1)\cdots(a_1+a_2+\cdots+a_h-\frac{1}{2}h(h-1))},$$

où Σ' désigne la somme alternée des $h!$ termes obtenue en permutant de toutes les façons possibles la suite $A=(a_1\,a_2\cdots a_h)$. Cette somme Σ' de $h!$ fractions rationnelles est en réalité égale au polynôme de Vandermonde $\prod_{1\le i<j\le h}(a_j-a_i)$; on peut le montrer par récurrence sur h (c'est un petit exercice de calcul dont nous laissons le soin au lecteur). Il en résulte que l'on retombe sur la formule de Young rappelée au Section 1.

(2) *Cas où* $h=1$ (Fig. 2).

$X=(x)$ et $Y=(y)$

$A=(1,2,3,\ldots,h-1,h+x)$, $\quad B=(1,2,3,\ldots,h-1,h+y)$,

$n=h+x+y$.

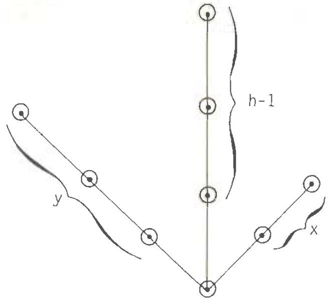

Fig. 2.

La formule (11) donne, après simplification, le terme unique

$$\frac{n!}{(h+y)!\,(h+y)!}\cdot\frac{(h+x)_h(h+y)_h}{1\cdot 2\cdot \cdots \cdot (h-1)\cdot(x+y+h)}=\frac{(n-1)!}{x!\,y!\,(h-1)!},$$

nombre trinomial que la Fig. 2 rend évident.

(3) *Cas où* $h=2$, *avec* $X=(xx)$ *et* $Y=(yy)$ (Fig. 3). On a

$$A=(x+1,\,x+2)\quad\text{et}\quad B=(y+1,\,y+2).$$

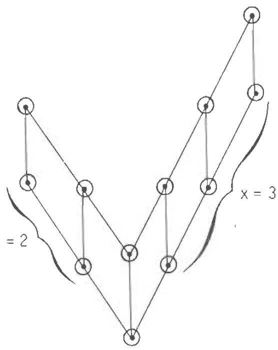

Fig. 3.

La formule (11) donne quatre termes, qui, après réduction au même dénominateur, permettent d'écrire

$$\varphi(2;xx,yy)=\frac{2(2x+2y+1)!\,(x^2+3xy+y^2+4x+4y+3)}{x!\,(x+1)!\,y!\,(y+1)!\,(x+y+1)(x+y+2)(x+y+3)}.$$

Tableau 3

	y = 0	1	2	3	4	5
x = 0	1	2	5	14	42	132
1	2	16	91	456	2145	
2	5	91	936	7425		
3	14	456	7425			
4	42	2145				
5	132					

A108
A214824
new

Δ = A259101

Le Tableau 3 donne les valeurs numériques correspondant à $x+y \leq 5$. L'encoignure de la Fig. 3 a 7425 extensions linéaires.

(4) *Cas où* $X = Y = 1^h$ $(n = 3h)$. Ce cas a été traité dans [4] par une méthode particulière, assez compliquée; le résultat était, avec les notations employées ici

$$\varphi(h; 1^h, 1^h) = \frac{4^h \cdot (3h)!}{(h+1)!\,(2h+1)!} \tag{14}$$

La comparaison avec la formule (11) donnera ici une identité intéressante.

Comme $A = B = (2, 3, \ldots, h+1)$, les permutations utiles de A seront celles qui majorent $(1, 2, \ldots, h)$. Il est facile de voir que leur nombre est 2^{h-1}; de même pour B, ce qui réduit à 4^{h-1} (au lieu de $(h!)^2$) le nombre de termes utiles de la formule (11).

Une manière simple de faire correspondre de manière biunivoque les permutations utiles de A aux parties d'un ensemble de cardinal $h-1$ est la suivante. On fait une "coupure" sur certains des $h-1$ couples d'emplacements consécutifs (exemple pour $h=6$:−−|−|−−−); dans chacune des tranches ainsi obtenues on inscrit en premier la longueur de la tranche et partout ailleurs 0 (ici 201300, "suite standard") et l'on ajoute terme à terme $(1\,2 \cdots h)$ ce qui donne ici 324756. On obtient ainsi, comme on s'en assure facilement, une fois et une seule, chacune des permutations utiles.

Si $(\alpha_1\,\alpha_2 \cdots \alpha_h)$ et $(\beta_1\,\beta_2 \cdots \beta_h)$ sont deux suites standard quelconques, le calcul de φ par la formule (11) se ramène à la somme alternée de 4^{h-1} produits de trinomiaux tels que

$$\binom{F_1 - 1}{\alpha_1\,\beta_1\,0}\binom{F_2 - 1}{\alpha_2\,\beta_2\,F_1} \cdots \binom{F_h - 1}{\alpha_h\,\beta_h\,F_{h-1}} = T_1\,T_2 \cdots T_h$$

où les $F_1\,F_2 \cdots F_h$ sont déterminés de proche en proche par la condition $F_k - 1 = \alpha_k + \beta_k + F_{k-1}$; le signe à retenir pour chaque produit dépend, on s'en assure facilement, de la parité du nombre total de termes nuls dans $(\alpha_1 \cdots \alpha_h)$ et $(\beta_1 \cdots \beta_h)$.

L'identité obtenue par comparaison avec (14) est

$$\sum_{\substack{(\alpha_1 \cdots \alpha_h)\\(\beta_1 \cdots \beta_h)}} T_1\,T_2 \cdots T_h = \frac{4^h (3h)!}{(h+1)!\,(2h+1)!}, \tag{15}$$

où le premier membre est la somme alternée des produits de trinomiaux obtenus à partir des 4^{h-1} couples de "suites standard." Il serait intéressant de trouver une démonstration directe de cette identité (15).

9. Généralisation

Le demi-dièdre entier $\mathcal{D}$ considéré au Section 1 peut être appelé $\mathcal{D}_2$ si l'on appelle $\mathcal{D}_d$ l'ensemble des points $(x_1\, x_2 \cdots x_d)$ de $\mathbb{N}^{d+1}$ tels que

$$(s-x_1)(s-x_2)\cdots(s-x_d)=0,$$

s désignant la somme $x_1+x_2+\cdots+x_d$, et si l'on ordonne $\mathcal{D}_d$ par comparaison coordonnée à coordonnée. Il est alors naturel d'appeler d-encoignure tout idéal de cardinal fini n de $\mathcal{D}_d$; une d-encoignure est un ensemble partiellement ordonné de dimension $d+1$. On peut la noter

$$E=(h;X^1\,X^2,\ldots,X^d),$$

où chacun des X^δ est une suite de Young $(x_1^\delta\, x_2^\delta \cdots x_h^\delta)$ ayant au plus h termes positifs.

Tous les calculs relatifs aux 2-encoignures (encoignures proprement dites) se généralisent dans leur principe aux d-encoignures, moyennant des alourdissements d'écriture qui font que le détail n'en sera pas présenté ici. Par exemple le nombre total de d-encoignures de cardinal n aura pour fonction génératrice

$$\sum_{h=0}^{+\infty} t^h[\omega_h(t)]^d.$$

En ce qui concerne le nombre d'extensions linéaires, la clef du calcul réside dans un lemme analogue à (2), qui concerne non plus deux suites U et V, mais d suites $U^1, U^2,\ldots,U^d$. On définit $R_h(U^1,\ldots,U^d)$ par

$$R_h(U^1,\ldots,U^d)=\prod_{k=1}^{h}\frac{(u_k^1)_k(u_k^2)_k\cdots(u_k^d)_k}{F_1F_2\cdots F_k},$$

avec

$$F_k=\sum_{\substack{1\le\lambda\le k\\1\le\delta\le d}} u_\lambda^\delta-\tfrac{1}{2}k(k+1)\,(d+k),$$

ce qui donne au lemme (2) la forme généralisée

$$\sum_{\substack{1\le i\le h\\1\le\delta\le d}} u_i^\delta R_h(\cdots,U_h^\delta-1,\cdots)=F_hR_h(U_h^1,\cdots U_h^d),$$

et éventuellement, si $u_1^1=u_1^2=\cdots=u_1^d=1$, une forme analogue à (6).

On décrit la d-encoignure par d suites telles que

$$A^\delta=(a_1^\delta,a_2^\delta,\ldots,a_h^\delta)\quad(\delta=1,2,\ldots,d),$$

définies par

$$a_1^\delta=x_h^\delta+1,\qquad a_2^\delta=x_{h-1}^\delta+2,\quad\ldots,\quad a_h^\delta=x_1^\delta+h,$$

moyennant quoi la formule (11) qui donne le nombre d'extensions linéaires devient

$$\varphi(h;X^1,\ldots,X^d)=\frac{n!}{\prod\limits_{\substack{1\le i\le h\\1\le\delta\le d}} a_i^\delta!}\,\mathcal{R}_h(A^1,\ldots,A^d);$$

$\mathcal{R}_h$ désigne, comme en (10), une somme alternée de $(h!)^d$ termes, chacun d'eux étant une fonction de d suites dont la δ-ième est une permutation arbitraire de A^δ.

Dans les cas numériques il sera commode d'utiliser, comme pour les encoignures proprement dites ($d=2$), une somme alternée de produits de h multinomiaux, qui seront ici des $(d+1)$-nomiaux.

Le mode de calcul ainsi généralisé peut être illustré par un cas spécialement simple: celui où $h=2$ et où $X^\delta=(11)$ quel que soit δ, avec $n=2d+2$. On a alors toujours $A^\delta=(23)$.

Calculons un R_h correspondant à s remplacements de (23) par (32) (ce qui est possible de $\binom{d}{s}$ manières et donne chaque fois le signe $(-1)^s$); on trouve

$$R_h=\frac{(3\cdot 2)^s\cdot(2\cdot 1\cdot 3\cdot 2)^{d-s}}{(d+s+1)(2d+2)},$$

d'où

$$\frac{(2d+2)!}{(2!)^d(3!)^d}R_h=\frac{(2d+1)!}{2^s(d+s+1)}$$

et par conséquent

$$\varphi=(2d+1)!\sum_{s=0}^{d}\frac{(-1)^s\binom{d}{s}}{2^s(d+s+1)}. \tag{16}$$

Cette dernière expression se simplifie encore grâce à l'identité

$$\sum_{s=0}^{d}(-1)^s 2^{d-s}\binom{2d+1}{d-s}\binom{d+s}{s}=2^{2d},$$

dont le premier membre est le coefficient de t^d dans le développement du produit $(1+2t)^{2d+1}(1+t)^{-d-1}$, comme on le voit par convolution; or il suffit de développer binomialement le premier facteur mis sous la forme $[(1+t)+t]^{2d+1}$ pour s'assurer que ce coefficient est

$$\binom{2d+1}{0}+\binom{2d+1}{1}+\cdots+\binom{2d+1}{d}=\tfrac{1}{2}2^{2d+1}=2^{2d}.$$

En appliquant cela à (16), on trouve finalement

$$\varphi(2;\underbrace{1^2,1^2,\ldots,1^2}_{d\text{ suites}})=2^d(d!)^2.$$

En faisant $d=2$, on retrouve, comme il se doit, la même valeur numérique, à savoir 16, qu'en faisant $h=2$ dans la formule (14).

Ceci pourrait laisser croire que pour la d-encoignure $(h;1^h,1^h,\ldots,1^h)\varphi$ a une expression monôme générale assez simple, puisqu'il en est ainsi pour $h=1$ ou 2 et d quelconque de même que pour $d=1$ ou 2 et h quelconque. Malheureusement le calcul général montre que $\varphi(3;1^3,1^3,1^3)=24444$, qui fait apparaître un facteur premier 97 incompatible avec toute formule monôme simple.

References

[1] G.E. Andrews, Plane partitions, Math. Res. Center Madison (1975) 2–32.

[2] B. Dushnik and E.W. Miller, Partially ordered sets, Amer. J. Math. 63 (1941) 600–610.

[3] J.S. Frame, G. de B. Robinson and R.M. Thrall, The hook graphs of the symmetric group, Canad. J. of Math. 6 (1954) 316–323.

[4] G. Kreweras, Sur une classe de problèmes de dénombrement liés au treillis des partitions des entiers, Cahiers du B.U.R.O. (1965) 71–101.

[5] P.A. Mac-Mahon, Combinatory Analysis (Cambridge, 1915–16; réimpr. Chelsea, New York, 1960).

[6] N.J.A. Sloane, A handbook of Integer Sequences, (Academic Press, New York, 1973) 526 pp.

[7] R.P. Stanley, Theory and application of plane partitions, Studies in Appl. Math. 3 (1971) 260–276.

[8] A. Young, On quantitative substitutional analysis, Proc. London Math. Soc. 34 (1902) 361–397.