Math. Ann. 185, 329—337 (1970)

Eine Bemerkung über Monaden und adjungierte Funktoren

Dieter Pumplün

S. Eilenberg und J. C. Moore einerseits und H. Kleisli andererseits haben unabhängig voneinander und auf verschiedene Art gezeigt, daß jede Monade in bekannter Weise durch ein Paar von adjungierten Funktoren induziert wird (vgl. [3] und [4]). Beide Beweise sind konstruktiv und jedes der beiden konstruierten Paare von adjungierten Funktoren ist durch eine universelle Eigenschaft ausgezeichnet. F. E. Linton (s. [5]) und J.-M. Maranda (s. [6]) haben diese universellen Eigenschaften genauer untersucht, indem sie Morphismen zwischen Monaden über einer festen Kategorie einführten.

Man kann die beiden Konstruktionen noch einfacher und durchsichtiger beschreiben, wenn man in natürlicher Weise die Kategorie $\mathscr{A}d$ der Paare adjungierter Funktoren, die Kategorie $\mathscr{M}$ der Monaden und die Kategorie $\mathscr{C}$ der Co-Monaden einführt. Es zeigt sich dann, daß sich die Konstruktion von S. Eilenberg und J. C. Moore, angewandt auf Co-Monaden, eindeutig zu einem covarianten Funktor $E:\mathscr{C}\to\mathscr{A}d_0$ fortsetzen läßt, der $\mathscr{C}$ als volle, co-reflexive Unterkategorie von $\mathscr{A}d_0$ darstellt. Die Konstruktion von H. Kleisli dagegen liefert eindeutig eine covariante Einbettung $K:\mathscr{M}\to\mathscr{A}d_0$ von $\mathscr{M}$ als volle, reflexive Unterkategorie von $\mathscr{A}d_0$. $\mathscr{A}d_0$ ist dabei eine sehr einfach zu beschreibende, objektgleiche Unterkategorie von $\mathscr{A}d$. $\mathscr{A}d$ und $\mathscr{A}d_0$ sind, wie aus der Definition ersichtlich, Bikategorien im Sinne von J. Bénabou (vgl. [1]), ja sogar 2-Kategorien.

Als Mengenlehre wird eine Theorie mit Grothendieck-Universen zugrundegelegt, z. B. die in [2] beschriebene. Bei der Definition der Kategorien $\mathscr{M}$, $\mathscr{C}$ und $\mathscr{A}d$ faßt man also im folgenden – ohne das jedesmal explizit zu betonen – jeweils die Morphismen von Monaden, Co-Monaden oder Adjunktionen, die in einem festen Universum liegen, zu der entsprechenden Kategorie zusammen.

Da wir es hier nur mit covarianten Funktoren zu tun haben, bezeichnen wir covariante Funktoren einfach als Funktoren. Für jede Kategorie $\mathscr{K}$ sei $\mathrm{Ob}\,\mathscr{K}$ die Klasse der Objekte von $\mathscr{K}$ und die Objekte und Identitäten von $\mathscr{K}$ werden identifiziert. Folglich schreibt man auch für den identischen Funktor auf einer Kategorie $\mathscr{K}$ einfach wieder $\mathscr{K}$ und für den identischen Morphismus von Funktoren auf einen Funktor F wieder F; Verwechslungen sind in keinem Fall zu befürchten. Morphismen von Funktoren werden mit kleinen griechischen Buchstaben bezeichnet. Sind $F_i:\mathscr{K}\to\mathscr{K}'$, $0\leqq i\leqq 2$, Funktoren und $\alpha_0:F_0\to F_1$, $\alpha_1:F_1\to F_2$, Morphismen von Funktoren, so sei $\alpha_1\alpha_0:F_0\to F_2$ das punktweise Produkt der Morphismen von Funktoren. Das Hintereinanderausführen von zwei Abbildungen wird wie üblich durch das Zeichen $\circ$ bezeichnet.

Man kann bekanntlich die einem Morphismus von Funktoren $\alpha: F_0 \to F_1$, $F_i: \mathscr{K} \to \mathscr{K}'$, $i=0,1$, zugrundeliegende Abbildung $\bar{\alpha}$: $\mathrm{Ob}\mathscr{K} \to \mathscr{K}'$ kanonisch zu einer Abbildung $\bar{\alpha}: \mathscr{K} \to \mathscr{K}'$ erweitern. Ist also noch ein zweiter Morphismus von Funktoren $\beta: G_0 \to G_1$, $G_i: \mathscr{K}' \to \mathscr{K}''$, $i=0,1$, gegeben, so induziert das Abbildungsprodukt $\bar{\beta} \circ \bar{\alpha}$ eindeutig einen Morphismus von Funktoren $\beta \circ \alpha: G_0 \circ F_0 \to G_1 \circ F_1$ mit $\overline{\beta \circ \alpha} = \bar{\beta} \circ \bar{\alpha}$. $\boldsymbol{Z}_2$ bezeichnet im folgenden die additiv geschriebene Gruppe der Ordnung 2.

(1) **Definition.** Ein Tripel $\boldsymbol{M} = (S, \pi, \varkappa)$ heißt bekanntlich eine Monade, wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

(M 1) $\mathscr{K}$ ist eine Kategorie und $S: \mathscr{K} \to \mathscr{K}$ ein Funktor.

(M 2) $\pi: S^2 \to S$, $S^2 := S \circ S$, und $\varkappa: \mathscr{K} \to S$ sind Morphismen von Funktoren und es gilt:

$$\pi(\pi \circ S) = \pi(S \circ \pi), \qquad \pi(\varkappa \circ S) = \pi(S \circ \varkappa) = S.$$

Sind $\boldsymbol{M}_i = (S_i, \varkappa_i, \pi_i)$, $S_i: \mathscr{K}_i \to \mathscr{K}_i$, $i \in \boldsymbol{Z}_2$ Monaden, dann nennt man ein Paar $\boldsymbol{d} = (V, \delta)$ einen Morphismus von Monaden von $\boldsymbol{M}_0$ nach $\boldsymbol{M}_1$ und schreibt $\boldsymbol{d}: \boldsymbol{M}_0 \to \boldsymbol{M}_1$, wenn gilt:

(MM 1) $V: \mathscr{K}_0 \to \mathscr{K}_1$ ist ein Funktor und $\delta: V \circ S_0 \to S_1 \circ V$ ist ein Morphismus von Funktoren.

(MM 2) $\varkappa_1 \circ V = \delta(V \circ \varkappa_0)$, $\delta(V \circ \pi_0) = (\pi_1 \circ V)(S_1 \circ \delta)(\delta \circ S_0)$.

Streng genommen ist ein Morphismus von Monaden von $\boldsymbol{M}_0$ nach $\boldsymbol{M}_1$ ein Quadrupel $(\boldsymbol{M}_1, V, \delta, \boldsymbol{M}_0)$, wobei V und δ die obigen Bedingungen erfüllen. Da Verwechslungen nicht zu befürchten sind, ziehen wir jedoch die einfachere Schreibweise (V, δ) vor. Sind $(V_0, \delta_0): \boldsymbol{M}_0 \to \boldsymbol{M}_1$, $(V_1, \delta_1): \boldsymbol{M}_1 \to \boldsymbol{M}_2$, Morphismen von Monaden, so definiert man ein Produkt durch

$$(V_1, \delta_1)(V_0, \delta_0) := (V_1 \circ V_0, (\delta_1 \circ V_0)(V_1 \circ \delta_0)).$$

Man verifiziert leicht, daß die Gesamtheit der Morphismen von Monaden (die in einem festen Universum liegen) zusammen mit diesem Produkt eine Kategorie $\mathscr{M}$, die Kategorie der Monaden, bildet. Die Objekte von $\mathscr{M}$ werden mit den Monaden identifiziert.

(2) **Definition.** Unter einer Adjunktion versteht man ein Quadrupel (F_0, F_1, μ_0, μ_1), für das gilt:

(A 1) $F_i: \mathscr{K}_i \to \mathscr{K}_{i+1}$, $i \in \boldsymbol{Z}_2$, ist ein Funktor.

(A 2) $\mu_0: F_0 \circ F_1 \to \mathscr{K}_1$ und $\mu_1: \mathscr{K}_0 \to F_1 \circ F_0$

sind Morphismen von Funktoren mit

$$(\mu_0 \circ F_0)(F_0 \circ \mu_1) = F_0 \quad \text{und} \quad (F_1 \circ \mu_0)(\mu_1 \circ F_1) = F_1.$$

Eine Adjunktion ist also ein Paar von adjungierten Funktoren zusammen mit den beiden Morphismen von Funktoren μ_0 und μ_1, vermöge derer die Funktoren adjungiert sind.

Es seien $\boldsymbol{F}=(F_0, F_1, \mu_0, \mu_1)$ und $\boldsymbol{F}'=(F'_0, F'_1, \mu'_0, \mu'_1)$ zwei Adjunktionen. Ein Quadrupel $\boldsymbol{v}=(V_0, V_1, v_0, v_1)$ heißt ein Morphismus von Adjunktionen von $\boldsymbol{F}$ nach $\boldsymbol{F}'$ und man schreibt $\boldsymbol{v}: \boldsymbol{F} \to \boldsymbol{F}'$, wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

(MA 1) $V_i: \mathscr{K}_i \to \mathscr{K}'_i$, $i \in \boldsymbol{Z}_2$, ist ein Funktor.

(MA 2) $v_i: V_{i+1} \circ F_i \to F'_i \circ V_i$, $i \in \boldsymbol{Z}_2$, ist ein Morphismus von Funktoren und es gilt

$$V_1 \circ \mu_0 = (\mu'_0 \circ V_1)(F'_0 \circ v_1)(v_0 \circ F_1),$$
$$\mu'_1 \circ V_0 = (F'_1 \circ v_0)(v_1 \circ F_0)(V_0 \circ \mu_1).$$

Eigentlich ist ein Morphismus von Adjunktionen ein Sechs-Tupel $(\boldsymbol{F}', V_0, V_1, v_0, v_1, \boldsymbol{F})$, welches die obigen Bedingungen erfüllt. Da Verwechslungen nicht zu befürchten sind, ziehen wir jedoch die hier eingeführte, bequemere Kennzeichnung der Morphismen als Quadrupel vor. Sind zwei Morphismen von Adjunktionen $(V_0, V_1, v_0, v_1): \boldsymbol{F} \to \boldsymbol{F}'$ und $(V'_0, V'_1, v'_0, v'_1): \boldsymbol{F}' \to \boldsymbol{F}''$ gegeben, so definiert man ein Produkt durch

$$(V'_0, V'_1, v'_0, v'_1)(V_0, V_1, v_0, v_1)$$
$$:= (V'_0 \circ V_0, V'_1 \circ V_1, (v'_0 \circ V_0)(V'_1 \circ v_0), (v'_1 \circ V_1)(V'_0 \circ v_1)).$$

Die Gesamtheit aller Morphismen von Adjunktionen bildet zusammen mit diesem Produkt eine Kategorie $\mathscr{A}d$, die Kategorie der Adjunktionen. Die Objekte von $\mathscr{A}d$ werden mit den Adjunktionen identifiziert. Sind $\boldsymbol{F}=(F_0, F_1, \mu_0, \mu_1)$ und $\boldsymbol{F}'=(F'_0, F'_1, \mu'_0, \mu'_1)$ zwei Objekte von $\mathscr{A}d$ und ist $\mathscr{K}_1=\mathscr{K}'_0$, wenn $F_i: \mathscr{K}_i \to \mathscr{K}_{i+1}$ und $F'_i: \mathscr{K}'_i \to \mathscr{K}'_{i+1}$ ist für $i \in \boldsymbol{Z}_2$, dann setzt man

$$\boldsymbol{F}' * \boldsymbol{F} := (F'_0 \circ F_0, F_1 \circ F'_1, \mu'_0(F'_0 \circ \mu_0 \circ F'_1), (F_1 \circ \mu'_1 \circ F_0)\mu_1).$$

Es ist $\boldsymbol{F}' * \boldsymbol{F} \in \operatorname{Ob} \mathscr{A}d$ und man hat damit auf $\operatorname{Ob} \mathscr{A}d$ eine partielle Komposition eingeführt, die sich in natürlicher Weise auf $\mathscr{A}d$ fortsetzen läßt. Man prüft leicht nach, daß $\mathscr{A}d$ zusammen mit diesem $*$-Produkt eine 2-Kategorie ist (vgl. [1]).

Mit $\mathscr{A}d_0$ bezeichnen wir die objektgleiche Unterkategorie von $\mathscr{A}d$, die aus den $(V_0, V_1, v_0, v_1) \in \mathscr{A}d$ besteht, für die in der Bezeichnungsweise von (2), (MA 2), $v_0 = V_1 \circ F_0 = F'_0 \circ V_0$ ist. $\mathscr{A}d_0$ ist zusammen mit der Beschränkung des $*$-Produkts auf $\mathscr{A}d_0$ wieder eine 2-Kategorie. $\mathscr{A}d_0$ ist die Kategorie, in die wir im folgenden die Kategorie der Monaden bzw. der Co-Monaden voll und reflexiv bzw. co-reflexiv einbetten werden.

(3) **Definition.** Für $\boldsymbol{F}=(F_0, F_1, \mu_0, \mu_1) \in \operatorname{Ob} \mathscr{A}d$ setzt man

$$D(\boldsymbol{F}) := (F_1 \circ F_0, F_1 \circ \mu_0 \circ F_0, \mu_1)$$

und für $\boldsymbol{v} := (V_0, V_1, v_0, v_1) \in \mathscr{A}d$

$$D(\boldsymbol{v}) := (V_0, (F'_1 \circ v_0)(v_1 \circ F_0)),$$

wenn $(V_0, V_1, v_0, v_1): (F_0, F_1, \mu_0, \mu_1) \to (F_0', F_1', \mu_0', \mu_1')$ ist. D erweist sich als Funktor, $D: \mathscr{Ad} \to \mathscr{M}$, und wir bezeichnen die Beschränkung von D auf $\mathscr{Ad}_0$ mit D_0, $D_0 := D/\mathscr{Ad}_0$.

Ehe wir den angekündigten Satz über die Einbettung von $\mathscr{M}$ in $\mathscr{Ad}_0$ als volle reflexive Einbettung beweisen können, müssen wir kurz an die Konstruktion von H. Kleisli erinnern. Diese Konstruktion wird im folgenden kurz skizziert; die Beweise für die hier aufgestellten Behauptungen findet man in [4].

(4) **Definition.** $M = (S, \pi, \varkappa)$ sei eine Monade mit $S: \mathscr{K}_0 \to \mathscr{K}_0$. Man setzt

$$\overline{\mathscr{K}}_1 := \{(B_0, f_0): B_0 \in \mathrm{Ob}\,\mathscr{K}_0, f_0 \in \mathscr{K}_0 \quad \text{und} \quad f_0: A_0 \to S(B_0)\}.$$

Auf $\overline{\mathscr{K}}_1$ erklärt man eine partielle Komposition folgendermaßen: Für $(C_0, g_0), (B_0, f_0) \in \overline{\mathscr{K}}_1$ sei $(C_0, g_0)(B_0, f_0)$ genau dann definiert, wenn der Bereich von g_0 B_0 ist, d. h. wenn $g_0: B_0 \to S(C_0)$. Ist $(C_0, g_0)(B_0, f_0)$ definiert, dann setze man

$$(C_0, g_0)(B_0, f_0) := (C_0, \pi(C_0)\, S(g_0)\, f_0).$$

Mit dieser Komposition wird $\overline{\mathscr{K}}_1$ zu einer Kategorie $\mathscr{K}_1$ und es ist

$$\mathrm{Ob}\,\mathscr{K}_1 = \{(A_0, \varkappa(A_0)): A_0 \in \mathrm{Ob}\,\mathscr{K}_0\}.$$

Für $f_0: A_0 \to B_0$ aus $\mathscr{K}_0$ setzt man

$$F_0(f_0) := (B_0, \varkappa(B_0)\, f_0)$$

und verifiziert leicht, daß $F_0: \mathscr{K}_0 \to \mathscr{K}_1$ ein Funktor ist. F_0 bildet $\mathrm{Ob}\,\mathscr{K}_0$ bijektiv auf $\mathrm{Ob}\,\mathscr{K}_1$ ab. Für $(B_0, f_0) \in \mathscr{K}_1$ sei

$$F_1(B_0, f_0) := \pi(B_0)\, S(f_0).$$

$F_1: \mathscr{K}_1 \to \mathscr{K}_0$ ist ein Funktor.

Setzt man für $(A_0, \varkappa(A_0)) \in \mathrm{Ob}\,\mathscr{K}_1$

$$\mu_0(A_0, \varkappa(A_0)) := (A_0, S(A_0))$$

und außerdem $\mu_1 := \varkappa$, so ist $(F_0, F_1, \mu_0, \mu_1) \in \mathrm{Ob}\,\mathscr{Ad}$ und es gilt $D(F_0, F_1, \mu_0, \mu_1) = \boldsymbol{M}$. Man definiert

$$K(\boldsymbol{M}) := (F_0, F_1, \mu_0, \mu_1)$$

und nennt $K(\boldsymbol{M})$ die Kleisli-Adjunktion der Monade $\boldsymbol{M}$.

Analog zu Theorem 1 in [6] zeigt man nun das

(5) **Lemma.** *Für jedes $\boldsymbol{M} \in \mathrm{Ob}\,\mathscr{M}$ gilt: Ist mit $\boldsymbol{F}' \in \mathrm{Ob}\,\mathscr{Ad}_0$ $\boldsymbol{d}: \boldsymbol{M} \to D_0(\boldsymbol{F}')$ ein Morphismus in $\mathscr{M}$, dann gibt es genau einen Morphismus $\boldsymbol{v}: K(\boldsymbol{M}) \to \boldsymbol{F}'$ aus $\mathscr{Ad}_0$ mit $D_0(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{d}$.*

Beweis. Da der Beweis nur eine einfache Verallgemeinerung des Beweises von Theorem 1 in [6] ist, begnügen wir uns damit, ihn nur anzudeuten. Man setzt $(F_0, F_1, \mu_0, \mu_1) := K(\boldsymbol{M})$, $(S, \pi, \varkappa) := \boldsymbol{M}$ $(S', \pi', \varkappa') := D_0(\boldsymbol{F}')$, $(F_0', F_1', \mu_0', \mu_1') := \boldsymbol{F}'$, $(V, \delta) := \boldsymbol{d}$ und $(V_0, V_1, v_0, v_1) := \boldsymbol{v}$.

Angenommen, es existiert ein $\boldsymbol{v}: K(\boldsymbol{M}) \to \boldsymbol{F}'$ mit $D_0(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{d}$, dann ist notwendig $v_0 = V_1 \circ F_0 = F_0' \circ V_0$, $V_0 = V$ und $v_1 \circ F_0 = \delta$. Da F_0 $\mathrm{Ob}\,\mathscr{K}_0$ bijektiv auf $\mathrm{Ob}\,\mathscr{K}_1$ abbildet, ist v_1 dadurch eindeutig bestimmt, und zwar ist für $(A_0, \varkappa(A_0)) \in \mathrm{Ob}\,\mathscr{K}_1$ $v_1(A_0, \varkappa(A_0)) = \delta(A_0)$. Eine leichte Rechnung zeigt ferner, daß für $f_1 = (B_0, f_0) \in \mathscr{K}_1$ notwendig

$$V_1(f_1) = \mu_0' \circ F_0' \circ V(B_0)\, F_0'(\delta(B_0)\ \ V(f_0))$$

ist. $\boldsymbol{v}$ ist also im Falle seiner Existenz eindeutig durch $\boldsymbol{d}$ und $\boldsymbol{F}'$ bestimmt. Definiert man die Komponenten von $\boldsymbol{v}$ durch diese Gleichungen, so verifiziert man ohne Schwierigkeiten, daß dadurch ein Morphismus $\boldsymbol{v}$ aus $\mathscr{Ad}_0$ gegeben ist, der die Behauptung des Lemmas erfüllt.

(6) **Satz.** *K läßt sich eindeutig zu einem Funktor fortsetzen, der $\mathscr{M}$ als volle, reflexive Unterkategorie von $\mathscr{Ad}_0$ mit der Reflexion D_0 darstellt.*

Beweis. Aus (5) folgt unmittelbar, daß sich K eindeutig zu einem Funktor fortsetzen läßt, den man wieder mit K bezeichnet und für den gilt $D_0 \circ K = \mathscr{M}$. K ist also eine Einbettung. Die in (5) festgestellte universelle Eigenschaft von K bedeutet ferner, daß (K, D_0) ein Paar von adjungierten Funktoren ist oder, anders ausgedrückt, daß mit geeigneten Morphismen von Funktoren λ_0 und λ_1 $(K, D_0, \lambda_0, \lambda_1)$ eine Adjunktion ist. Dabei ist $\lambda_1 = D_0 \circ K$. Auch λ_0 läßt sich mit Hilfe von (5) leicht berechnen. Ist $\boldsymbol{F}' = (F_0', F_1', \mu_0', \mu_1') \in \mathrm{Ob}\,\mathscr{Ad}_0$ und $(F_0, F_1, \mu_0, \mu_1) := K \circ D_0(\boldsymbol{F}')$, so ergibt sich

$$\lambda_0(\boldsymbol{F}') = (\mathscr{K}_0, V_1, F_0', F_1)\,,$$

wobei $F_0: \mathscr{K}_0 \to \mathscr{K}_1$ ist und V_1 durch

$$V_1(B_0, f_0) = \mu_0' \circ F_0'(B_0)\, F_0'(f_0)$$

für $(B_0, f_0) \in \mathscr{K}_1$ gegeben ist. Da λ_1 ein Isomorphismus von Funktoren ist, folgt aus einem bekannten Satz über adjungierte Funktoren, daß K voll ist. Damit ist die Satzbehauptung bewiesen.

Ehe wir uns der Konstruktion von S. Eilenberg und J. C. Moore zuwenden, führen wir zunächst die Kategorie $\mathscr{C}$ der Co-Monaden ein.

(7) **Definition.** Ein Tripel $\boldsymbol{C} = (T, \chi, \lambda)$ heißt eine Co-Monade, wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

(CM 1) $\mathscr{K}$ ist eine Kategorie und $T: \mathscr{K} \to \mathscr{K}$ ein Funktor.

(CM 2) $\chi: T \to T^2$, $T^2 := T \circ T$, und $\lambda: T \to \mathscr{K}$ sind Morphismen von Funktoren und es gilt:

$$(\chi \circ T)\,\chi = (T \circ \chi)\,\chi\,, \qquad (\lambda \circ T)\,\chi = (T \circ \lambda)\,\chi = T\,.$$

Sind $\boldsymbol{C}_i = (T_i, \chi_i, \lambda_i)$, $T_i: \mathscr{K}_i \to \mathscr{K}_i$, $i \in \boldsymbol{Z}_2$, Co-Monaden, dann nennt man ein Paar $\boldsymbol{d} = (V, \delta)$ einen Morphismus von Co-Monaden von $\boldsymbol{C}_0$ nach $\boldsymbol{C}_1$ und schreibt $\boldsymbol{d}: \boldsymbol{C}_0 \to \boldsymbol{C}_1$, wenn gilt:

(MCM 1) $V: \mathscr{K}_0 \to \mathscr{K}_1$ ist ein Funktor und $\delta: V \circ T_0 \to T_1 \circ V$ ist ein Morphismus von Funktoren.

(MCM 2) $V \circ \lambda_0 = (\lambda_1 \circ V)\,\delta$,

$$(\chi_1 \circ V)\,\delta = (T_1 \circ \delta)\,(\delta \circ T_0)\,(V \circ \chi_0)\,.$$

Streng genommen ist ein Morphismus von Co-Monaden von $\boldsymbol{C}_0$ nach $\boldsymbol{C}_1$ ein Quadrupel $(\boldsymbol{C}_1, V, \delta, \boldsymbol{C}_0)$. Da Verwechslungen nicht zu befürchten sind, ziehen wir jedoch auch hier die einfachere Schreibweise (V, δ) vor. Sind $(V_0, \delta_0): \boldsymbol{C}_0 \to \boldsymbol{C}_1$, $(V_1, \delta_1): \boldsymbol{C}_1 \to \boldsymbol{C}_2$, Morphismen von Co-Monaden, so definiert man ein Produkt durch

$$(V_1, \delta_1)\,(V_0, \delta_0) := (V_1 \circ V_0, (\delta_1 \circ V_0)\,(V_1 \circ \delta_0))\,.$$

Man verifiziert leicht, daß die Gesamtheit der Morphismen von Co-Monaden zusammen mit diesem Produkt eine Kategorie $\mathscr{C}$, die Kategorie der Co-Monaden bildet.

Hier ist noch eine Bemerkung zur Definition der Kategorien $\mathscr{M}$ und $\mathscr{C}$ am Platze. Man kann noch auf eine andere Art eine Kategorie von Monaden einführen. Dann definiert man für zwei Monaden $\boldsymbol{M}_0$ und $\boldsymbol{M}_1$ einen Morphismus $\boldsymbol{d}: \boldsymbol{M}_0 \to \boldsymbol{M}_1$ abweichend von (1), (MM 1) und (MM 2), als ein Paar $\boldsymbol{d} = (V, \delta)$, wobei $V: \mathscr{K}_0 \to \mathscr{K}_1$ wieder ein Funktor ist und $\delta: S_1 \circ V \to V \circ S_0$ ein Morphismus von Funktoren, der zusammen mit V die Gleichungen $V \circ \varkappa_0 = \delta(\varkappa_1 \circ V)$ und $\delta(\pi_1 \circ V) = (V \circ \pi_0)\,(\delta \circ S_0)\,(S_1 \circ \delta)$ erfüllt. Man erklärt dann wieder auf kanonische Weise ein Produkt von solchen Morphismen und erhält so eine Kategorie $\mathscr{M}_1$, welche die gleichen Objekte wie $\mathscr{M}$ hat. Ganz entsprechend kann man auch eine zweite Kategorie $\mathscr{C}_1$ von Co-Monaden einführen, indem man in (7) für den Morphismus von Funktoren δ $\delta: T_1 \circ V \to V \circ T_0$ und die sich daraus ergebenden Gleichungen verlangt. Während bekanntlich die Begriffe Monade und Co-Monade dual zueinander sind, ist es wichtig, hier zu bemerken, daß $\mathscr{M}$ weder zu $\mathscr{C}$ noch zu $\mathscr{C}_1$ dual ist; Entsprechendes gilt für $\mathscr{M}_1$. Es gibt jedoch einen anderen Zusammenhang, und zwar ist $\mathscr{M}$ isomorph zu $\mathscr{C}_1$ und $\mathscr{M}_1$ isomorph zu $\mathscr{C}$. Um das einzusehen, setzt man für $(V, \delta) \in \mathscr{M}$ $\Omega(V, \delta) := (\omega_1 \circ V \circ \omega_0^{-1}, \omega_1 \circ \delta \circ \omega_0^{-1})$, wobei ω_i hier den üblichen contravarianten bijektiven Funktor bezeichnet, der die Kategorie $\mathscr{K}_i$, $i \in \boldsymbol{Z}_2$, auf ihre duale abbildet. Ω ist dann ein bijektiver, covarianter Funktor von $\mathscr{M}$ auf $\mathscr{C}_1$. Die Isomorphie von $\mathscr{M}_1$ zu $\mathscr{C}$ zeigt man entsprechend.

Auch bei der Definition von $\mathscr{A}d$ (vgl. (2)) hat man noch eine andere Möglichkeit. Man kann bei der Definition eines Morphismus $(V_0, V_1, v_0, v_1): (F_0, F_1, \mu_0, \mu_1) \to (F_0', F_1', \mu_0', \mu_1')$ statt (MA 2) verlangen, daß $v_i: F_i' \circ V_i \to V_{i+1} \circ F_i$ für $i \in \boldsymbol{Z}_2$ ist. Die beiden Gleichungen in (MA 2) sind dann entsprechend zu ändern. Auf diese Weise erhält man mit einer sich aus dieser Definition zwangsläufig ergebenden Produktdefinition eine Kategorie $\mathscr{A}d^*$. Im Gegensatz zu der Situation bei den Monaden bzw. Co-Monaden erhält man so jedoch nichts Neues, denn $\mathscr{A}d$ und $\mathscr{A}d^*$ sind isomorph. Für $(V_0, V_1, v_0, v_1) \in \mathscr{A}d$ setzt man mit den Bezeichnungen von (2) und den oben eingeführten ω_i $\Omega(V_0, V_1, v_0, v_1) := (\omega_1' \circ V_1 \circ \omega_1^{-1}, \omega_0' \circ V_0 \circ \omega_0^{-1}, \omega_0' \circ v_1 \circ \omega_1^{-1}, \omega_1' \circ v_0 \circ \omega_0^{-1})$. Ω erweist sich als bijektiver covarianter Funktor.

Wir skizzieren im folgenden die Konstruktion von S. Eilenberg und J. C. Moore für Co-Monaden. Die Beweise für die dabei aufgestellten Behauptungen findet man in [3]. Im Gegensatz zu [3] wird diese Konstruktion hier für Co-Monaden und nicht für Monaden angegeben, weil man nur so eine Einbettung von $\mathscr{C}$ als volle, co-reflexive Unterkategorie von $\mathscr{Ad}_0$ erhält, die man dann mit der Einbettung K von H. Kleisli vergleichen kann. Nimmt man die in [3] angegebene, zu dieser Konstruktion duale Konstruktion für Monaden, so erhält man eine Einbettung von $\mathscr{M}_1$ in eine von $\mathscr{Ad}_0$ verschiedene Unterkategorie von $\mathscr{Ad}$.

Zunächst bringen wir, analog zu (3), die Definition eines Funktors von $\mathscr{Ad}$ nach $\mathscr{C}$.

(8) **Definition.** Für $\boldsymbol{F} = (F_0, F_1, \mu_0, \mu_1) \in \operatorname{Ob} \mathscr{Ad}$ setzt man

$$D^*(\boldsymbol{F}) := (F_0 \circ F_1, F_0 \circ \mu_1 \circ F_1, \mu_0)$$

und für einen Morphismus $\boldsymbol{v}: \boldsymbol{F} \to \boldsymbol{F}'$ aus $\mathscr{Ad}$, $\boldsymbol{v} = (V_0, V_1, v_0, v_1)$, $\boldsymbol{F} = (F_0, F_1, \mu_0, \mu_1)$, $\boldsymbol{F}' = (F_0', F_1', \mu_0', \mu_1')$,

$$D^*(\boldsymbol{v}) := (V_1, (F_0' \circ v_1)(v_0 \circ F_1)).$$

Man verifiziert leicht, daß damit ein covarianter Funktor $D^*: \mathscr{Ad} \to \mathscr{C}$ definiert ist und setzt noch, analog zu (3), $D_0^* := D^*/\mathscr{Ad}_0$.

(9) **Definition.** $\boldsymbol{C} = (T, \chi, \lambda)$ sei eine Co-Monade mit $T: \mathscr{K}_1 \to \mathscr{K}_1$. Man setzt

$$\begin{aligned} \overline{\mathscr{K}}_0 := \{(b_1, f_1, a_1) : b_1, f_1, a_1 \in \mathscr{K}_1 \quad &\text{mit} \quad f_1 : A_1 \to B_1, a_1 : A_1 \to T(A_1), \\ b_1 : B_1 \to T(B_1) \quad &\text{und es gilt:} \quad \lambda(A_1)\, a_1 = A_1, \lambda(B_1)\, b_1 = B_1, \\ T(a_1)\, a_1 = \chi(A_1)\, a_1,\ &T(b_1)\, b_1 = \chi(B_1)\, b_1, b_1 f_1 = T(f_1)\, a_1\}. \end{aligned}$$

Auf $\overline{\mathscr{K}}_0$ wird eine partielle Komposition folgendermaßen erklärt: Für (c_1, g_1, d_1), $(b_1, f_1, a_1) \in \overline{\mathscr{K}}_0$ sei $(c_1, g_1, d_1)(b_1, f_1, a_1)$ genau dann definiert, wenn $d_1 = b_1$ ist. Man setzt

$$(c_1, g_1, b_1)(b_1, f_1, a_1) := (c_1, g_1 f_1, a_1)$$

und hat $(c_1, g_1 f_1, a_1) \in \overline{\mathscr{K}}_0$. Mit dieser Komposition wird $\overline{\mathscr{K}}_0$ zu einer Kategorie $\mathscr{K}_0$ und es ist

$$\operatorname{Ob} \mathscr{K}_0 = \{(a_1, A_1, a_1) : (a_1, A_1, a_1) \in \overline{\mathscr{K}}_0, A_1 \in \operatorname{Ob} \mathscr{K}_1\}.$$

Für $f_1 : A_1 \to B_1$ aus $\mathscr{K}_1$ sei

$$F_1(f_1) := (\chi(B_1), T(f_1), \chi(A_1)).$$

$F_1 : \mathscr{K}_1 \to \mathscr{K}_0$ ist offenbar ein Funktor. Der treue Funktor $F_0 : \mathscr{K}_0 \to \mathscr{K}_1$ wird definiert, indem man für $(b_1, f_1, a_1) \in \mathscr{K}_0$ setzt

$$F_0(b_1, f_1, a_1) := f_1.$$

Der Morphismus von Funktoren $\mu_1 : \mathscr{K}_0 \to F_1 \circ F_0$ ist für $(a_1, A_1, a_1) \in \operatorname{Ob} \mathscr{K}_0$ durch $\mu_1(a_1, A_1, a_1) := (\chi(A_1), a_1, a_1)$ gegeben, während man $\mu_0 : F_0 \circ F_1 \to \mathscr{K}_1$

durch $\mu_0 := \lambda$ einführt. Eine einfache Rechnung zeigt, daß $(F_0, F_1, \mu_0, \mu_1) \in \mathrm{Ob}\,\mathscr{A}d$ ist und $D^*(F_0, F_1, \mu_0, \mu_1) = \boldsymbol{C}$ ist. Man führt daher die Bezeichnung

$$E(\boldsymbol{C}) := (F_0, F_1, \mu_0, \mu_1)$$

ein und nennt $E(\boldsymbol{C})$ die Eilenberg-Moore-Adjunktion der Co-Monade $\boldsymbol{C}$.

Analog zu Theorem 2 in [6] zeigt man das

(10) **Lemma.** *Für jedes $\boldsymbol{C} \in \mathrm{Ob}\,\mathscr{C}$ gilt: Ist mit $\boldsymbol{F}' \in \mathrm{Ob}\,\mathscr{A}d_0$ $\boldsymbol{d} : D_0^*(\boldsymbol{F}') \to \boldsymbol{C}$ ein Morphismus in $\mathscr{C}$, dann gibt es genau einen Morphismus $\boldsymbol{v} : \boldsymbol{F}' \to E(\boldsymbol{C})$ in $\mathscr{A}d_0$ mit $D_0^*(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{d}$.*

Beweis. Auch hier beschränken wir uns auf eine Beweisskizze, da der Beweis nur eine einfache Verallgemeinerung des Beweises von Theorem 2 in [6] ist. Man setzt $(F_0, F_1, \mu_0, \mu_1) := E(\boldsymbol{C})$, $(T, \chi, \lambda) := \boldsymbol{C}$, $(T', \chi', \lambda') := D_0^*(\boldsymbol{F}')$, $(F_0', F_1', \mu_0', \mu_1') := \boldsymbol{F}'$, $(V, \delta) := \boldsymbol{d}$ und $(V_0, V_1, v_0, v_1) := \boldsymbol{v}$.

Angenommen, es existiert ein $\boldsymbol{v}$ mit den in der Behauptung angeführten Eigenschaften, dann ist notwendig $V_1 = V$, $v_0 = V_1 \circ F_0' = F_0 \circ V_0$ und $F_0 \circ v_1 = \delta$. Für den Funktor $V_0 : \mathscr{K}_0' \to \mathscr{K}_0$ ergibt sich nach einiger Rechnung, daß für $f_0' : A_0' \to B_0'$ aus $\mathscr{K}_0'$

$$V_0(f_0') = (\delta \circ F_0'(B_0')\, V \circ F_0' \circ \mu_1'(B_0'),\, V \circ F_0'(f_0'),\, \delta \circ F_0'(A_0')\, V \circ F_0' \circ \mu_1'(A_0'))$$

sein muß. V_0 ist eindeutig bestimmt, da F_0 treu ist. Außerdem gilt für $A_1' \in \mathrm{Ob}\,\mathscr{K}_1'$ notwendig

$$v_1(A_1') = (\chi \circ V(A_1'),\, \delta(A_1'),\, \delta \circ F_0' \circ F_1'(A_1')\, V \circ F_0' \circ \mu_1' \circ F_1'(A_1')).$$

Auch hierbei wird wesentlich benutzt, daß F_0 nach (9) treu ist. $\boldsymbol{v}$ ist also im Falle seiner Existenz eindeutig bestimmt.

Definiert man umgekehrt die Komponenten von $\boldsymbol{v} = (V_0, V_1, v_0, v_1)$ durch die obigen Gleichungen, so zeigt eine leichte Rechnung, daß $\boldsymbol{v}$ die Behauptung des Lemmas erfüllt.

(11) **Satz.** *E läßt sich eindeutig zu einem Funktor fortsetzen, der $\mathscr{C}$ als volle, co-reflexive Unterkategorie von $\mathscr{A}d_0$ mit Co-Reflexion D_0^* darstellt.*

Beweis. Aus der in (10) festgestellten universellen Eigenschaft von E folgt unmittelbar, daß sich E eindeutig zu einem Funktor fortsetzen läßt, den wir wieder mit E bezeichnen und für den gilt $D_0^* \circ E = \mathscr{C}$. E ist folglich eine Einbettung von $\mathscr{C}$ in $\mathscr{A}d_0$. Ferner ergibt sich aus dieser universellen Eigenschaft, daß (D_0^*, E) ein Paar von adjungierten Funktoren ist oder, anders ausgedrückt, daß $(D_0^*, E, \lambda_0, \lambda_1)$ eine Adjunktion ist, wobei $\lambda_0 = D^* \circ E$ ist und λ_1 eindeutig bestimmt ist. Im Hinblick auf (10) ist $\lambda_1 : \mathscr{A}d_0 \to E \circ D_0^*$ eindeutig dadurch bestimmt, daß für jedes $\boldsymbol{F}' = (F_0', F_1', \mu_0', \mu_1') \in \mathrm{Ob}\,\mathscr{A}d_0$ $D_0^*(\lambda_1(\boldsymbol{F}')) = D_0^*(\boldsymbol{F}')$ ist. Explizit ergibt sich daraus leicht, daß

$$\lambda_1(\boldsymbol{F}') = (V_0, \mathscr{K}_1', F_0', F_1)$$

ist, wobei $(F_0, F_1, \mu_0, \mu_1) = E \circ D_0^*(F')$ ist, $F_i' : \mathscr{K}_i' \to \mathscr{K}_{i+1}'$, $i \in \boldsymbol{Z}_2$, und für $f_0' : A_0' \to B_0'$ aus $\mathscr{K}_0'$

$$V_0(f_0') = (F_0' \circ \mu_1'(B_0'), F_0'(f_0'), F_0' \circ \mu_1'(A_0'))$$

zu setzen ist.

Da λ_0 ein Isomorphismus von Funktoren ist, folgt ferner unmittelbar, daß E ein voller Funktor ist, womit der Satz bewiesen ist.

Man sieht jetzt deutlich, worin sich die Konstruktionen von S. Eilenberg-J. C. Moore und H. Kleisli auch abstrakt unterscheiden. Offensichtlich sind nach dem Vorausgegangenen die Funktoren E und K bzw. die durch sie vermittelten Darstellungen auch nicht in irgendeiner Weise dual.

Literatur

1. Bénabou, J.: Introduction to bicategories. Lecture Notes in Mathematics **47**, 1—77, Berlin-Heidelberg-New York: Springer 1967.
2. da Costa, N.: On two systems of set theory. Nederl. Akad. Wet. Proc., series A, **68**, 95—98 (1965).
3. Eilenberg, S., Moore, J. C.: Adjoint functors and triples. Illinois J. Math. **9**, 381—398 (1965).
4. Kleisli, H.: Every standard construction is induced by a pair of adjoint functors. Proc. Am. Math. Soc. **16**, 544—546 (1965).
5. Linton, F. E.: Triples versus theories. Notices Am. Math. Soc. **13**, 227 (1966).
6. Maranda, J.-M.: On fundamental constructions and adjoint functors. Canad. Math. Bull. **9**, 581—591 (1966).

Dozent Dr. D. Pumplün
II. Mathematisches Institut der Universität
4400 Münster (Westf.), Schloßplatz 2

(Eingegangen am 16. Oktober 1969)