ALGÈBRE. — *Monades et descente.* Note (*) de MM. **Jean Benabou** et **Jacques Roubaud**, transmise par M. Henri Cartan.

Au moyen de la théorie des catégories, on interprète les « données de descente » de manière simple et naturelle comme des « algèbres sur une monade ». Ceci permet de reconnaître, dans des situations très générales, si un morphisme est de descente ou de descente effective.

1. Bifibrations de Chevalley et Descente. — Dans ce qui suit $P : \mathbf{M} \to \mathbf{A}$ désigne un foncteur bifibrant (1). Si A est un objet de $\mathbf{A}$, on note $\mathbf{M}(A)$ la fibre au-dessus de A. On suppose que dans $\mathbf{A}$ les produits fibrés existent.

1.1. *Monade associée à une flèche.* — Soit $a : A_1 \to A_0$ une flèche de $\mathbf{A}$. On note

$$a^* : \ \mathbf{M}(A_0) \to \mathbf{M}(A_1) \quad [\text{resp. } a_* : \mathbf{M}(A_1) \to \mathbf{M}(A_0)]$$

le foncteur image réciproque (resp. image directe) et

$$\eta^a : \ 1_{\mathbf{M}(A_1)} \to a^* a_* ; \qquad \varepsilon^a : \ a_* a^* \to 1_{\mathbf{M}(A_0)}$$

les transformations naturelles canoniques qui font de a_* un adjoint à gauche de a^*. Cette adjonction définit (2) sur $\mathbf{M}(A_1)$ la monade $\mathbf{T}^a = (T^a, \mu^a, \eta^a)$, où

$$T^a = a^* a_* : \ \mathbf{M}(A_1) \to \mathbf{M}(A_1) \qquad \text{et} \qquad \mu^a = a^* \varepsilon^a a_* : , \ T^a \circ T^a \to T^a.$$

On désigne par $\mathbf{M}^a$ la catégorie $\mathbf{M}(A_1)^{(\mathbf{T}^a)}$ des algèbres sur la monade $\mathbf{T}^a$, par $U^{\mathbf{T}^a} : \mathbf{M}^a \to \mathbf{M}(A_1)$ et $\Phi^a : \mathbf{M}(A_0) \to \mathbf{M}^a$ les foncteurs canoniques.

1.2. *Propriété de Chevalley* (3). — On dit que P est un *foncteur de Chevalley* si la propriété (C) suivante est satisfaite :

(C) Pour tout diagramme commutatif de $\mathbf{M}$

$$\begin{tikzcd} M'_0 \arrow[d, "k_0"'] & M'_1 \arrow[l, "\chi'"] \arrow[d, "k_1"] \\ M_0 & M_1 \arrow[l, "\chi"] \end{tikzcd}$$

dont l'image par P est un carré cartésien de $\mathbf{A}$, si χ et χ' sont cartésiennes et k_0 est cocartésienne, k_1 est cocartésienne.

1.3. *Caractérisation des données de descente.* — Dans tout ce qui suit $P : \mathbf{M} \to \mathbf{A}$ est un foncteur de Chevalley.

Soit $a : A_1 \to A_0$ une flèche de $\mathbf{A}$; notons A_2 le produit fibré $A_1 \times_{A_0} A_1$ et a_1 et a_2 les « projections » canoniques de A_2 dans A_1. La propriété (C) permet de définir, pour tout objet M_1 de $\mathbf{M}(A_1)$ une bijection canonique « naturelle » en M_1, de $\mathrm{Hom}_{\mathbf{M}(A_2)}(a_1^*(M_1), a_2^*(M_1))$ sur $\mathrm{Hom}_{\mathbf{M}(A_1)}(T^a(M_1), M_1)$, notée $\varphi \mapsto K^a(\varphi)$.

LEMME. — *Une flèche* $\varphi : a_1^*(M_1) \to a_2^*(M_1)$ *telle que* $P(\varphi) = 1_{A_1}$ *est une donnée de descente si et seulement si* $K^a(\varphi)$ *est une algèbre sur la monade* $\mathbf{T}^a$.

Notons $\mathbf{D}(a)$ la catégorie des données de descente relatives à a,

$$\Psi^a : \mathbf{M}(A_0) \to \mathbf{D}(a) \quad \text{et} \quad U^a : \mathbf{D}(a) \to \mathbf{M}(A_1)$$

les foncteurs canoniques.

THÉORÈME. — *La correspondance* $\varphi \mapsto K^a(\varphi)$ *induit une équivalence de catégories* $K^a : \mathbf{D}(a) \to \mathbf{M}^a$ *rendant commutatif le diagramme*

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{M}(A_0) \arrow[r, "\Psi^a"] \arrow[dr, "\Phi^a"'] & \mathbf{D}(a) \arrow[r, "U^a"] \arrow[d, "K"] & \mathbf{M}(A_1) \\
 & \mathbf{M}^a \arrow[ur, "U^{\mathbf{T}^a}"'] &
\end{tikzcd}$$

PROPOSITION 1. — *La correspondance* $\varphi \mapsto K^a(\varphi)$ *est universelle.*

De façon précise, soit $b_0 : A'_0 \to A_0$ une flèche de $\mathbf{A}$. Par changement de base on obtient un diagramme dans $\mathbf{A}$

$$\begin{tikzcd}
A_0 & A_1 \arrow[l, "a"'] & A_2 = A_1 \times_{A_0} A_1 \arrow[l, shift right, "a_1"'] \arrow[l, shift left, "a_2"] \\
A'_0 \arrow[u, "b_0"] & A'_1 \arrow[l, "a'"'] \arrow[u, "b_1"] & A'_2 = A'_1 \times_{A'_0} A'_1 \arrow[l, shift right, "a'_1"'] \arrow[l, shift left, "a'_2"] \arrow[u, "b_2"]
\end{tikzcd}$$

Si M_1 est un objet de $\mathbf{M}(A_1)$ et $\varphi : a_1^*(M_1) \to a_2^*(M_1)$ une flèche de $\mathbf{M}(A_2)$, on a

$$K^{a'}(b_2^*(\varphi)) = b_1^*(K^a(\varphi)).$$

Si on prend en particulier $A'_0 = A_1$ et $b_0 = a$, on sait que si φ est une donnée de descente, $b_2^*(\varphi)$ est une donnée de descente effective. La réciproque est vraie, car on déduit du théorème et de la proposition :

COROLLAIRE. — *Une flèche* $\varphi : a_1^*(M_1) \to a_2^*(M_1) \in \mathbf{M}(A_2)$ *est une donnée de descente si et seulement si son image réciproque* $b_2^*(\varphi)$ *par le changement de base canonique* $b_0 = a : A'_0 = A_1 \to A$ *est une donnée de descente effective.*

Ce corollaire permet de se passer dans la suite d'utiliser la « condition des cocycles ».

2. PREMIÈRES APPLICATIONS. — Compte tenu du théorème précédent, le critère de Beck [2] permet de donner des conditions nécessaires et suffisantes pour que le foncteur Ψ^a soit fidèle, pleinement fidèle, ou une équivalence de catégories en termes de commutation et réflexion de certains conoyaux par le foncteur image réciproque a^*. Donnons quelques applications.

PROPOSITION 2. — *Si dans* $\mathbf{M}(A_0)$ *les conoyaux de couples de flèches existent, le foncteur* Ψ^a *a un adjoint à gauche.*

PROPOSITION 3. — *Pour que* Ψ^a *soit fidèle il faut et suffit que* a^* *le soit.*

PROPOSITION 4. — *Si a^* reflète les conoyaux, Ψ^a est pleinement fidèle.* En particulier, si toutes les fibres de **M** sont abéliennes, on a

$$\Psi^a \text{ fidèle} \Leftrightarrow \Psi^a \text{ pleinement fidèle} \Leftrightarrow a^* \text{ fidèle}.$$

DÉFINITION. — On dit qu'une flèche $a : A_1 \to A_0$ est *fidèlement plate* si le foncteur a^* commute avec les conoyaux et reflète les isomorphismes.

PROPOSITION 5. — *Si $a : A_1 \to A_0$ est fidèlement plate, et si dans $\mathbf{M}(A_0)$ les conoyaux existent, Ψ^a est une équivalence de catégories.*

3. PREMIERS EXEMPLES DE FONCTEURS DE CHEVALLEY.

3.1. Si on prend pour **A** la duale de la catégorie des anneaux commutatifs, pour **M** la duale de la catégorie des modules sur les anneaux commutatifs variables, le foncteur évident $P : \mathbf{M} \to \mathbf{A}$ est de Chevalley.

3.2. Si **A** est une catégorie à produits fibrés et $\mathbf{M} = \mathbf{F}l(\mathbf{A})$ la catégorie des flèches de **A**, le foncteur « but » : $\mathbf{M} \to \mathbf{A}$ est de Chevalley.

3.3. Si $P : \mathbf{M} \to \mathbf{A}$ et $Q : \mathbf{N} \to \mathbf{M}$ sont de Chevalley, leur composé $P \circ Q$ est de Chevalley.

3.4. Si $P : \mathbf{M} \to \mathbf{A}$ est de Chevalley et **I** une catégorie quelconque le foncteur $P^{\mathbf{I}} : \mathbf{M}^{\mathbf{I}} \to \mathbf{A}^{\mathbf{I}}$ est de Chevalley.

3.5. Si dans un diagramme cartésien de catégories :

$$\begin{tikzcd} \mathbf{M} \arrow[d, "P"'] & f^*(\mathbf{M}) \arrow[l, "g"'] \arrow[d, "f^*(P)"] \\ \mathbf{A} & \mathbf{X} \arrow[l, "f"] \end{tikzcd}$$

la catégorie **X** a des produits fibrés, le foncteur f commute aux produits fibrés, et le foncteur P est de Chevalley, alors $f^*(P)$ est de Chevalley.

Dans une publication ultérieure, nous donnerons d'autres exemples de catégories de Chevalley ainsi que des critères plus précis permettant de reconnaître si Ψ^a est fidèle, pleinement fidèle ou une équivalence de catégories lorsque les fibres de **M** sont des catégories algébriques (des catégories de modules, par exemple).

(*) Séance du 5 janvier 1970.

(1) A. GROTHENDIECK, *Catégories fibrées et descente* (Séminaire Bourbaki, 1959).

(2) LINTON, *Applied Functorial semantics*. II, Springer lecture Notes n° 80, 1969.

(3) CHEVALLEY, *Séminaire sur la descente* 1964-1965 (non publié).

(J. B. : 65, *rue d'Hauteville*, 75-*Paris*, 10e;
J. R. : 56, *rue Notre-Dame-de-Lorette*, 75-*Paris*, 9e.)