vander
LOUVAIN

LES TRIPLES

d'après le cours de questions
spéciales de mathématique de

J. BENABOU

Rapport n° 26, juillet 1972.
Séminaires de mathématique pure.

INSTITUT DE MATHÉMATIQUE PURE ET APPLIQUÉE
UNIVERSITÉ CATHOLIQUE DE LOUVAIN
Bâtiment Sc. I, Avenue Baudouin I^{er}, 1348 Louvain - La - Neuve

Le texte ci-après a été rédigé par Francis BORCEUX et Jacqueline DEWULF à partir de notes prises au cours oral du Professeur BENABOU. Ce texte n'a pas été relu par le Professeur BENABOU avant sa publication.

TABLE DES MATIERES.

CHAPITRE 1 :

Génération d'un triple.

§ 1 : Notion de triple.

Un monoïde peut se décrire comme étant un triplet (M, ε, μ) où

1) M est un ensemble

2) $\varepsilon : 1 \longrightarrow M$ est une application, appelée unité du monoïde

3) $\mu : M \times M \longrightarrow M$ est une application, appelée multiplication du monoïde

4) les deux diagrammes suivants commutent

$$\begin{tikzcd}
M = 1 \times M \arrow[r, "e \times M"] \arrow[d, phantom, sloped, "\cong"] \arrow[ddr, equal] & M \times M \arrow[dd, "\mu"] \\
1 \times M \arrow[d, "M \times e"'] & \\
M \times M \arrow[r, "\mu"'] & M
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
M \times M \times M \arrow[r, "M \times \mu"] \arrow[d, "\mu \times M"'] & M \times M \arrow[d, "\mu"] \\
M \times M \arrow[r, "\mu"'] & M
\end{tikzcd}$$

(axiomes du neutre) (axiome d'associativité).

Remplaçant l'ensemble M par un foncteur et les applications ε, μ par des transformations naturelles, nous obtenons la notion de triple :

<u>Définition 1</u>

Un triple est un triplet (T, ε, μ) *où*

1) $T : \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{X}$ *est un foncteur*

2) $\varepsilon : 1_{\mathcal{X}} \Longrightarrow T$ *est une transformation naturelle*

3) $\mu : T \circ T \Longrightarrow T$ *est une transformation naturelle*

4) *les deux diagrammes suivants commutent*

$$\begin{tikzcd} T \arrow[r, Rightarrow, "\varepsilon T"] \arrow[d, Rightarrow, "T\varepsilon"'] \arrow[dr, equal] & T \circ T \arrow[d, Rightarrow, "\mu"] \\ T \circ T \arrow[r, Rightarrow, "\mu"'] & T \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} T \circ T \circ T \arrow[r, Rightarrow, "T\mu"] \arrow[d, Rightarrow, "\mu T"'] & T \circ T \arrow[d, Rightarrow, "\mu"] \\ T \circ T \arrow[r, Rightarrow, "\mu"'] & T \end{tikzcd}$$

Par analogie avac l'exemple des monoïdes, μ est appelée "multiplication du triple" et ε "neutre du triple".

§ 2 : Triple engendré par une adjonction.

Soient F et U deux foncteurs tels que F soit adjoint à gauche de U . Ce fait peut s'exprimer par l'existence de deux transformations naturelles η et δ rendant commutatifs les deux diagrammes ci-dessous :

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{A} \arrow[d, shift left, "U"] \\ \mathfrak{X} \arrow[u, shift left, "F"] \end{tikzcd} \qquad \begin{array}{l} \varepsilon \; : \; 1_{\mathfrak{X}} \Longrightarrow UF \\[2ex] \delta \; : \; FU \Longrightarrow 1_{\mathfrak{A}} \end{array} \qquad \begin{tikzcd} & U \arrow[r, Rightarrow, "\varepsilon"] \arrow[dr, equal] & UFU \arrow[d, Rightarrow, "U\delta"] \\ F \arrow[d, Rightarrow, "F\epsilon"'] \arrow[dr, equal] & & U \\ FUF \arrow[r, Rightarrow, "\delta F"'] & F & \end{tikzcd}$$

$F \dashv U$

Nous définissons alors

1) $T = UF : \mathfrak{X} \longrightarrow \mathfrak{X}$

2) $\mu = U\delta F : T \circ T = UFUF \Longrightarrow F = T.$

Il est aisé de remarquer que le triplet (T, ε, μ) ainsi obtenu est un triple sur la catégorie $\mathfrak{X}$.

L'adjonction $(F, U, \varepsilon, \delta)$ déterminant entièrement le triple (T, ε, μ), on peut se poser la question de savoir si la réciproque est vraie : la connaissance du triple (T, ε, μ) permet-elle de reconstruire la situation initiale d'adjonction ? La réponse est négative comme le prouvent les exemples suivants : le triple identique sur la catégorie des ensembles peut bien sûr être obtenu à partir de l'adjonction triviale $(1_{Ens} \dashv 1_{Ens})$; il peut aussi être obtenu à partir de l'adjonction entre le foncteur d'oubli de Top vers Ens et le foncteur "topologie discrète" de Ens vers Top. Citons un autre exemple : le foncteur d'oubli de la catégorie des groupes vers celle des ensembles admet comme adjoint le foncteur "groupe libre" et il en est de même si on se restreint à la catégorie des groupes libres les deux situations d'adjonction engendrent le même triple sur Ens.

§ 3 : Catégorie de Kleisli d'un triple.

Si (T, ε, μ) est un triple sur une catégorie $\mathcal{X}$, il est toujours possible de le décrire comme le triple associé à une certaine situation d'adjonction. Il n'y a bien sûr pas unicité, comme le prouvent les remarques précédentes : nous allons en fait présenter deux solutions à ce problème, celle de Kleisli et celle d'Eilenberg - Moore, qui seront, en un sens à préciser, montrées être "les solutions extrémales".

Si (T, ε, μ) est un triple sur la catégorie $\mathcal{X}$, sa catégorie de Kleisli, notée $\mathcal{X}_T$, est définie comme suit

(1) les objets de $\mathcal{X}_T$ sont les objets de $\mathcal{X}$

(2) un morphisme de X vers Y dans $\mathcal{X}_T$ est un morphisme de $\mathcal{X}$ de la forme

$$X \longrightarrow TY$$

(3) l'identité sur l'objet X de $\mathcal{X}_T$ est le morphisme

$$\varepsilon_X : X \longrightarrow TX$$

(4) si $x : X \longrightarrow TY$ et $y : Y \longrightarrow TZ$ sont deux morphismes de $\mathcal{X}_T$, leur composé $y \circ x : X \longrightarrow TZ$ est défini par

$$X \xrightarrow{x} TY \xrightarrow{Ty} TTZ \xrightarrow{\mu Z} TZ \ .$$

Nous définissons un foncteur

$$F_T : \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{X}_T$$

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, squiggly] \arrow[d, "x"'] & X \arrow[d, "\varepsilon_Y \circ x"] \\ Y \arrow[r, squiggly] & Y \end{tikzcd}$$

et un autre foncteur

$$U_T : \mathcal{X}_T \longrightarrow \mathcal{X}$$

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, squiggly] \arrow[d, "x"'] & TX \arrow[d, "\mu_Y \circ Tx"] \\ Y \arrow[r, squiggly] & TY \end{tikzcd}$$

Le premier axiome des triples indique aussitôt que $T = U_T \circ F_T$. En outre, F_T est adjoint à gauche de U_T, les deux transformations naturelles décrivant cette adjonction étant les suivantes :

(1) $\varepsilon : 1_{\mathcal{X}} \Longrightarrow U_T\, F_T = T$

(2) $\delta : F_T\, U_T \Longrightarrow 1_{\mathcal{X}_T}$

$$\delta_T(X) = 1_{TX}.$$

C'est alors un calcul aisé de vérifier que l'adjonction $(F_T, U_T, \varepsilon, \delta_T)$ engendre le triple (T, ε, μ).

Le théorème suivant va indiquer en quel sens la catégorie de Kleisli peut être considérée comme la solution minimale dans le problème de la génération du triple.

Théorème 1

Soient (T, ε, μ) *un triple sur* $\mathscr{X}$ *et* $(F, U, \varepsilon, \delta)$

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{X}_T \arrow[rr, "\Phi"] \arrow[dr, shift left, "U_T"] & & \mathscr{A} \arrow[dl, shift left, "U"] \\
& \mathscr{X} \arrow[ul, shift left, "F_T"] \arrow[ur, shift left, "F"] &
\end{tikzcd}
\qquad F \dashv U$$

une adjonction engendrant ce triple.
Il existe un unique foncteur $\Phi : \mathscr{X}_T \longrightarrow \mathscr{A}$ *tel que*

$$\begin{cases} U \circ \Phi = U_T \\ \Phi \circ F_T = F \\ \Phi * \delta_T = \delta * \Phi \end{cases}$$

Si X est un objet de $\mathscr{X}_T$, on a nécessairement

$$\Phi(X) = (\Phi \circ F_T)(X) = F(X).$$

Si $x : X \longrightarrow Y$ est un morphisme de $\mathscr{X}_T$, on a nécessairement

$$\begin{aligned}
\Phi(x) &= \Phi(x) \circ \delta_{FX} \circ F\varepsilon_X \\
&= \Phi(x) \circ \delta_{\Phi X} \circ F\varepsilon_X \\
&= \Phi(x) \circ \Phi(\delta_X^T) \circ F\varepsilon_X \\
&= \Phi(\delta_Y^T) \circ (\Phi \circ F^T \circ U^T)(x) \circ F\varepsilon_X \\
&= \delta_{\Phi(Y)} \circ (F \circ U^T)(x) \circ F\varepsilon_X
\end{aligned}$$

$$= \delta_{FY} \circ F(\mu_Y \circ Tx) \circ F\varepsilon_X$$

$$= \delta_{FY} \circ F(\mu_Y \circ \varepsilon_{TY} \circ x)$$

$$= \delta_{FY} \circ Fx.$$

Citons trois exemples de catégories de Kleisli

(1) le foncteur $T : Ens \longrightarrow Ens$ défini par

$T(X) = X \amalg \{*\}$ et $T(x) = x \amalg 1_{\{*\}}$ s'agence

de manière évidente en un triple ; comme il existe une bijection entre les applications de X vers TY et les fonctions de X vers Y, la catégorie de Kleisli de ce triple est la catégorie des fonctions.

(2) le foncteur $T : Ens \longrightarrow Ens$ défini par $TX = \mathcal{P}(X)$ (ensemble des parties de X) devient un triple si l'on prend pour unité la fonction "singleton" et pour multiplication la fonction "union" ; comme il existe une bijection entre les applications de X vers $\mathcal{P}(Y)$ et les relations de X vers Y, la catégorie de Kleisli de ce triple est la catégorie des relations.

(3) Notons (T, ε, μ) le triple engendré par l'adjonction entre le foncteur d'oubli de la catégorie des groupes vers celle des ensembles et le foncteur groupe libre. La catégorie de Kleisli correspondante est celle des groupes libres. En effet, il y a une correspondance biunivoque entre les ensembles et les groupes libres, un groupe libre étant identifié à son système fondamental de générateurs. De plus, si LA et LB sont les groupes libres engendrés par

les ensembles A et B, un homomorphisme de LA vers LB est déterminé entièrement par son image sur les générateurs fondamentaux de LA, d'où la bijection entre les homomorphismes de LA vers LB et les applications de A vers LB.

§ 4 : Catégorie d'Eilenberg - Moore d'un triple.

Si (T, ε, μ) est un triple sur la catégorie $\mathcal{X}$, sa catégorie d'Eilenberg - Moore, notée $\mathcal{X}^T$, est définie comme suit :

(1) les objets sont les couples (X, ξ) où X est un objet de $\mathcal{X}$ et $\xi : TX \longrightarrow X$ un morphisme de $\mathcal{X}$ rendant commutatifs les deux diagrammes suivants :

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\varepsilon_X"] \arrow[dr, equal] & TX \arrow[d, "\xi"] \\ & X \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} TTX \arrow[r, "\mu_X"] \arrow[d, "T\xi"'] & TX \arrow[d, "\xi"] \\ TX \arrow[r, "\xi"'] & X \end{tikzcd}$$

(2) un morphisme $f : (X, \xi) \longrightarrow (X', \xi')$ est un morphisme $f : X \longrightarrow X'$ de $\mathcal{X}$ rendant commutatif le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd} TX \arrow[r, "Tf"] \arrow[d, "\xi"'] & TX' \arrow[d, "\xi'"] \\ X \arrow[r, "f"'] & X' \end{tikzcd}$$

Un objet (X, ξ) de la catégorie $\mathcal{X}^T$ est appelé "algèbre sur le triple T", ξ étant la flèche structurelle de cette algèbre.

Nous définissons un foncteur

$$F^T : \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{X}^T$$

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, squiggly] \arrow[d, "f"'] & (TX, \mu_X) \arrow[d, "Tf"] \\ Y \arrow[r, squiggly] & (TY, \mu_Y) \end{tikzcd}$$

et un autre foncteur

$$U^T : \mathcal{X}^T \longrightarrow \mathcal{X}$$

$$\begin{tikzcd} (X, \xi) \arrow[r, squiggly] \arrow[d, "f"'] & X \arrow[d, "f"] \\ (X', \xi') \arrow[r, squiggly] & X' \end{tikzcd}$$

Il est immédiat que $T = U^T \circ F^T$. En outre, F^T est adjoint à gauche de U^T, les deux transformations naturelles décrivant cette adjonction étant les suivantes :

(1) $\varepsilon : 1_{\mathcal{X}} \Longrightarrow U^T \circ F^T = T$

(2) $\delta^T : F^T \circ U^T \Longrightarrow 1_{\mathcal{X}^T}$

$$\delta^T_{(X, \xi)} = \xi.$$

C'est alors un calcul aisé de vérifier que l'adjonction $(F^T, U^T, \varepsilon, \delta^T)$ engendre le triple (T, ε, μ).

Le théorème suivant va indiquer en quel sens la catégorie d'Eilenberg - Moore peut être considérée comme la solution maximale dans le problème de la génération du triple.

<u>Théorème 2</u>

Soient (T, ε, μ) *un triple sur* $\mathcal{X}$ *et* $(F, U, \varepsilon, \delta)$

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{A} \arrow[rr, "\Psi"] \arrow[dr, shift left, "U"] & & \mathcal{X}^T \arrow[dl, shift left, "U^T"] \\
& \mathcal{X} \arrow[ul, shift left, "F"] \arrow[ur, shift left, "F^T"] &
\end{tikzcd} \qquad F \dashv U$$

une adjonction engendrant ce triple.
Il existe un unique foncteur $\Psi : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{X}^T$ *tel que*

$$\begin{cases} U^T \circ \Psi = U \\ \Psi \circ F = F^T \\ \Psi * \delta = \delta^T * \Psi \end{cases}$$

La condition $U^T \circ \Psi = U$ indique que

(1) si a est un morphisme de $\mathcal{A}$, $\Psi(a) = U a$.

(2) si A est un objet de $\mathcal{A}$, $\Psi(A)$ est de la forme (UA, ξ) ; mais comme

$$\xi = \delta^T_{\Psi(A)} = \Psi(\delta_A) = U\,\delta_A$$

vu la troisième condition sur Ψ, on doit nécessairement poser :

$$\Psi(A) = (U\,A, U\,\delta_A).$$

Donnons deux exemples de catégories d'Eilenberg - Moore.

(1) Reprenant l'exemple du triple (T, ε, δ) : $Ens \longrightarrow Ens$ décrit à partir de $T(X) = X \amalg \{*\}$, une algèbre est un couple (X, ξ) où $\xi = X \amalg \{*\} \longrightarrow X$ est telle que sa restriction à X est l'identité ; ξ est donc entièrement définie par la donnée de $\xi(*)$ d'où une algèbre sur ce triple est un couple (X, x) où X est un ensemble et x un élément de X. Il est aisé alors de remarquer que la catégorie d'Eilenberg - Moore correspondante est celle des ensembles pointés.

(2) Soit A un anneau commutatif avec élément unité ; notons Mod (A) la catégorie des A-modules et Ab celle des groupes abéliens. Le foncteur d'oubli de Mod (A) vers Ab admet comme adjoint à gauche le foncteur $A \underset{\mathbb{Z}}{\otimes} -$. Cherchons à caractériser les algèbres sur le triple correspondant. Une algèbre est un couple (X, ξ) où X est un groupe abélien et $\xi : A \underset{\mathbb{Z}}{\otimes} X \longrightarrow X$ un homomorphisme de groupes abéliens ; si l'on considère $\xi(a \otimes x)$ comme la multiplication de a et x, les deux axiomes des algèbres expriment que X muni de cette multiplication est un A-module. On déduit aisément de ces considérations que la catégorie d'Eilenberg - Moore correspondante n'est autre que Mod (A).

Le théorème 3 précise le rapport existant entre les catégories de Kleisli et d'Eilenberg - Moore d'un triple.

Théorème 3

Soit (T, ε, μ) *un triple sur* $\mathfrak{X}$.
La catégorie de Kleisli $\mathfrak{X}_T$ *de ce triple est équivalente à la sous-catégorie pleine de la catégorie d'Eilenberg - Moore, ayant pour objets les objets libres.*

Les théorèmes 2 et 3 fournissent deux factorisations

$$\Phi,\ \Psi : \mathfrak{X}_T \rightrightarrows \mathfrak{X}^T.$$

En fait $\Phi = \Psi$ car

$$\Phi(X) = F^T(X) = (TX,\ \mu_X) = (U_T X, U\delta_T(X)) = \Psi(X)$$

$$\Phi(x) = \delta^T_{F^T Y} \circ F^T(x) = \mu_Y \circ T(x) = U_T(x) = \Psi(x).$$

Nous noterons $J \equiv \Phi = \Psi : \mathfrak{X}_T \longrightarrow \mathfrak{X}^T$.

(1) J est fidèle.
Soient $x, x' : X \longrightarrow Y$ deux morphismes de $\mathfrak{X}_T$ tels que

$$\Phi(x) = \Phi(x')\ ;$$

on a donc

$$\mu_Y \circ T(x) = \mu_Y \circ T(x')$$

et a fortiori

$$\mu_Y \circ T(x) \circ \varepsilon_X = \mu_Y \circ T(x') \circ \varepsilon_X.$$

La naturalité de ε et le premier axiome des triples indiquent alors que

$$x = \mu_Y \circ \varepsilon_{TY} \circ x = \mu_Y \circ T(x) \circ \varepsilon_X$$

$$= \mu_Y \circ T(x') \circ \varepsilon_X = \mu_Y \circ \varepsilon_{TY} \circ x' = x'$$

(2) J est plein.

Si $f : JX = (TX, \mu_X) \longrightarrow JY = (TY, \mu_Y)$ est un morphisme de $\mathfrak{X}^T$,

$$f = J(f \circ \varepsilon_X)$$

(3) $J(X) = J(Y) \Longrightarrow X = Y$.

Si $(TX, \mu_X) = (TY, \mu_Y)$, les isomorphismes entre X et Y dans $\mathfrak{X}_T$ sont décrits par

$$\begin{cases} X \xrightarrow{\varepsilon_X} TX = TY \\ Y \xrightarrow{\varepsilon_Y} TY = TX \end{cases}$$

(4) On appelle objet libre de $\mathfrak{X}^T$ un objet appartenant à l'image de F^T. Il s'ensuit que le théorème est démontré.

Terminons ce paragraphe en décrivant quelques propriétés importantes du foncteur U^T.

<u>P1 : U^T est fidèle</u>

<u>P2 : U^T commute aux limites à gauche</u>

car il admet un adjoint à gauche F^T.

P3 : $\mathcal{U}^T$ crée les limites à gauche

Explicitons cette propriété P3.

Un foncteur $\mathcal{U} : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{X}$ est dit créer les limites à gauche si pour tout foncteur $D : \mathcal{J} \longrightarrow \mathcal{A}$ tel que $\mathcal{U}D$ admette une limite à gauche $(L, (p_i)_{i \in |\mathcal{J}|})$, il existe un et un seul couple $(M, (q_i)_{i \in |\mathcal{J}|})$ qui soit tel que $\mathcal{U}M = L$ et $\mathcal{U}q_i = p_i$ pour tout objet i de $\mathcal{J}$ si en outre ce couple est limite à gauche de D.
Montrons que $\mathcal{U}^T$ vérifie cette propriété.
Soit $D : \mathcal{J} \longrightarrow \mathcal{X}^T$ un foncteur tel que $\mathcal{U}^T \circ D$ admette une limite à gauche $(L, (p_i)_{i \in |\mathcal{J}|})$. Notons $(X_i, \xi_i) \equiv D(i)$ pour tout objet i de $\mathcal{J}$. La famille $(\xi_i \circ Tp_i)_{i \in |\mathcal{J}|}$ de morphismes de $\mathcal{X}$ se factorise de manière unique à travers la limite L en un

$$\begin{tikzcd}
TL \arrow[rr, "\xi"] \arrow[dr, "Tp_i"'] & & L \arrow[dd] \\
& TX_i \arrow[dr, "\xi_i"'] & \\
& & X_i
\end{tikzcd}$$

morphisme ξ qui est tel que (L, ξ) soit une algèbre. Le couple $((L, \xi), (p_i)_{i \in |\mathcal{J}|})$ est la limite cherchée du foncteur D.

P4 : $\mathcal{U}^T$ crée les limites à droite préservées par T

Soit $D : \mathcal{J} \longrightarrow \mathcal{X}^T$ un foncteur tel que $\mathcal{U}^T \circ D$ admette une limite à droite $(L, (s_i)_{i \in |\mathcal{J}|})$ préservée par T. Notons toujours $(X_i, \xi_i) \equiv D(i)$. La famille $(s_i \circ \xi_i)_{i \in I}$ de morphismes de $\mathcal{X}$ se factorise de manière unique à travers la limite à droite $(TL, (Ts_i)_{i \in |\mathcal{J}|})$ en un morphisme ξ

$$\begin{tikzcd}
TL \arrow[rr, "\xi"] & & L \\
& X_i \arrow[ur, "s_i"'] & \\
TX_i \arrow[uu, "Ts_i"] \arrow[ur, "\xi_i"'] & &
\end{tikzcd}$$

qui est tel que (L, ξ) soit une algèbre. Le couple $((L, \xi), (s_i)_{i\in|\mathcal{J}|})$ est la limite cherchée du foncteur D.

CHAPITRE 2 :

Les catégories algébriques.

§ 1 : Le critère de Beck.

<u>Définition 2</u>

> *Si* (T, ε, μ) *est un triple sur* $\mathcal{X}$, *une catégorie* $\mathcal{A}$ *est dite algébrique sur ce triple si elle est équivalente à la catégorie* $\mathcal{X}^T$ *d'Eilenberg - Moore de ce triple.*

Les propriétés P1 à P4 du foncteur U^T, jointes à la connaissance de la catégorie $\mathcal{X}$, permettent donc de déduire aussitôt des propriétés de toute catégorie algébrique $\mathcal{A}$, notamment en ce qui concerne l'existence de limites.

Le but du présent paragraphe est d'établir un critère, dû à Beck, permettant de décider si une catégorie $\mathcal{A}$ est algébrique par rapport à un triple donné.

<u>Définition 3</u>

> *Soit* $(F, U, \varepsilon, \delta)$ *une situation d'adjonction.*

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A} \arrow[d, shift left, "U"] \\ \mathcal{X} \arrow[u, shift left, "F"] \end{tikzcd}$$

$$F \dashv U$$

$$\varepsilon : 1_{\mathcal{X}} \Longrightarrow UF$$

$$\delta : FU \Longrightarrow 1_{\mathcal{A}}$$

Le diagramme ci-dessous

$$F\,U\,F\,U\,A \underset{\delta_{FUA}}{\overset{FU\,\delta_A}{\rightrightarrows}} F\,U\,A \xrightarrow{\delta_A} A$$

est appelé présentation canonique de l'objet A *de* $\mathcal{A}$ *.*
On a bien entendu

$$\delta_A \circ F\,U\,\varepsilon_A = \delta_A \circ \delta_{FUA}$$

vu la naturalité de δ.

En reprenant l'exemple déjà cité de la catégorie des groupes, on remarque que c'est précisément au moyen de ce diagramme que l'on montre que tout groupe A est quotient d'un groupe libre.

<u>Proposition 1</u>

Soit la situation suivante :

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A}' \arrow[rr, "\Psi"] \arrow[dr, shift left, "U'"] & & \mathcal{A} \arrow[dl, shift left, "U"] \\ & \mathcal{X} \arrow[ul, shift left, "F'"] \arrow[ur, shift left, "F"] & \end{tikzcd} \qquad \begin{array}{c} F' \dashv U' \\ \\ F \dashv U \end{array}$$

où $(F', U', \varepsilon', \delta')$ *et* $(F, U, \varepsilon, \delta)$ *sont deux adjonctions et* Ψ un foncteur.
Il existe une bijection du type

$$\mathrm{Nat}\,(U', U \circ \Psi) \simeq \mathrm{Nat}\,(F, \Psi \circ F')$$

Si $\eta : \mathcal{U}' \Longrightarrow \mathcal{U} \circ \Psi$ est une transformation naturelle, on lui fait correspondre

$$(\delta \Psi F') \circ (F \eta F') \circ (F \varepsilon')$$

et si $\eta' : F \Longrightarrow \Psi \circ F'$ en est une autre, on lui associe

$$(\mathcal{U} \Psi \delta') \circ (\mathcal{U} \eta' \mathcal{U}') \circ (\varepsilon\, \mathcal{U}')$$

<u>Proposition 2</u>

Soit la situation suivante

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{A}' \arrow[rr, "\Psi"] \arrow[dr, shift left, "\mathcal{U}'"] & & \mathcal{A} \arrow[dl, shift left, "\mathcal{U}"] \\
& \mathcal{X} \arrow[ul, shift left, "F'"] \arrow[ur, shift left, "F"] &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{array}{l} F' \dashv \mathcal{U}' \\ \\ F \dashv \mathcal{U} \end{array}$$

où $(F', \mathcal{U}', \varepsilon', \delta')$ *et* $(F, \mathcal{U}, \varepsilon, \delta)$ *sont deux adjonctions et* Ψ *un foncteur tel que*

$$\begin{cases} F = \Psi \circ F' \\ \mathcal{U}' = \mathcal{U} \circ \Psi \\ \Psi * \delta' = \delta * \Psi \end{cases}$$

Dès lors le foncteur Ψ *transforme la présentation canonique d'un objet* A *de* $\mathcal{A}'$ *en la présentation canonique de l'objet* ΨA *de* $\mathcal{A}$.

La démonstration est un simple calcul de routine.
On remarquera en outre que

(1) $U'F' = U\Psi F' = UF$

(2) $U\delta F = U\delta\Psi F' = U\Psi\delta F' = U'\delta F'$

d'où les deux adjonctions engendrent le même triple sur $\mathfrak{X}$ dès que $\varepsilon = \varepsilon'$.

Définition 4

Soit $D : \mathfrak{I} \longrightarrow \mathfrak{A}$ *un foncteur.*
Ce foncteur est dit admettre une limite à droite absolue s'il admet une limite à droite qui soit préservée par tout foncteur de source $\mathfrak{A}$.

Proposition 3

Soit le diagramme suivant dans une catégorie $\mathfrak{X}$:

$$A_2 \underset{d_1}{\overset{d_0}{\rightrightarrows}} A_1 \xrightarrow{e} A_0 .$$

Les conditions suivantes sont équivalentes

(1) *e est le coégalisateur de* d_0 *et* d_1

(2) *il existe deux morphismes*

$$s : A_0 \longrightarrow A_1$$

$$t : A_1 \longrightarrow A_2$$

vérifiant les quatre égalités suivantes

$$e \circ d_0 = e \circ d_1$$

$$e \circ s = 1_{A_0}$$

$$d_0 \circ t = 1_{A_1}$$

$$d_1 \circ t = s \circ e$$

On trouvera la démonstration de ce résultat dans [47]. Dans la suite de ce texte, nous utiliserons uniquement l'implication (2) $\Longrightarrow$ (1) dont la démonstration est aisée

a) $e \circ d_0 = e \circ d_1$

b) si $x \circ d_0 = x \circ d_1$, la factorisation cherchée est $x \circ s$

c) cette factorisation est unique car si x' en est une autre :

$$x' = x' \circ e \circ s = x \circ s.$$

Le caractère équationnel de cette situation de coégalisateur implique qu'elle est préservée par tout foncteur.

Citons deux exemples de coégalisateurs absolus déjà rencontrés dans ce texte :

(1) Soit $(F, U, \varepsilon, \delta)$ une situation d'adjonction :

$$\mathcal{Q} \underset{U}{\overset{F}{\rightleftarrows}} \mathcal{X} ; \quad F \dashv U .$$

L'image par U de la présentation canonique d'un objet A de $\mathcal{A}$ est un diagramme de coégalisateur absolu :

$$\begin{tikzcd}
UFUFUA \arrow[r, shift left, "U\delta_{FUA}"] \arrow[r, shift right, "UFU\delta_A"'] & UFUA \arrow[l, bend left=40, "\varepsilon_{UFUA}"] \arrow[r, "U\delta_A"] & UA \arrow[l, bend left=40, "\varepsilon_{UA}"]
\end{tikzcd}$$

(2) Soit (T, ε, μ) un triple sur X.

Tout algèbre (X, ξ) sur ce triple admet une présentation canonique et le diagramme correspondant est un diagramme de coégalisateur absolu :

$$\begin{tikzcd}
(TTX, \mu_{TX}) \arrow[r, shift left, "\mu_X"] \arrow[r, shift right, "T\xi"'] & (TX, \mu_X) \arrow[l, bend left=40, "\varepsilon_{TX}"] \arrow[r, "\xi"] & (X, \xi) \arrow[l, bend left=40, "\varepsilon_X"]
\end{tikzcd}$$

<u>Proposition 4</u>

Soient $(F, U, \varepsilon, \delta)$ *et* $(F', U', \varepsilon, \delta')$ *deux situations d'adjonction engendrant le même triple* (T, ε, μ) *sur* $\mathcal{X}$.

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{A}' \arrow[rr, "\Psi"] \arrow[dr, shift left, "\Psi'"] & & \mathcal{A} \arrow[dl, shift left, "U"] \\
& \mathcal{X} \arrow[ul, shift left, "F'"] \arrow[ur, shift left, "F"] &
\end{tikzcd}$$

Si U *crée les coégalisateurs des couples de flèches de* $\mathcal{A}$ *dont les projections par* U *admettent un coégalisateur absolu, alors il existe un unique foncteur*
$\Psi : \mathcal{A}' \longrightarrow \mathcal{A}$ *tel que*

$$\begin{cases} \mathcal{U} \circ \Psi = \mathcal{U}' \\ \Psi \circ F' = F \\ \Psi * \delta' = \delta * \Psi \end{cases}$$

Pour tout objet X de $\mathfrak{X}$ nous sommes forcés de définir :

$$\Psi(F'X) = FX.$$

Soit alors un objet queconque A de $\mathfrak{A}'$; il admet une présentation canonique

$$F'\,\mathcal{U}'\,F'\,\mathcal{U}'\,A \underset{\delta'_{F'\mathcal{U}'A}}{\overset{F'\mathcal{U}'\delta'_A}{\rightrightarrows}} F'\,\mathcal{U}'\,A \xrightarrow{\delta'_A} A.$$

Si le foncteur Ψ existe, il transforme cette présentation canonique en la présentation canonique de l'objet $\Psi(A)$, en vertu de la proposition 2. Mais alors la projection par $\mathcal{U}$ de la présentation canonique de ΨA coïncide avec la projection par $\mathcal{U}'$ de la présentation canonique de A, et nous savons que celle-ci admet un coégalisateur absolu (premier exemple) qui se relève donc le long de $\mathcal{U}$ en l'objet $\Psi(A)$, d'où l'unicité de $\Psi(A)$.

Ce raisonnement nous oblige à poser la définition suivante : si A est un objet de $\mathfrak{A}'$, considérons les deux morphismes $F\,\mathcal{U}'\,\delta'_A$ et $\delta_{F\,\mathcal{U}'A}$ de $\mathfrak{A}$ qui se projettent selon $\mathcal{U}$ en les deux morphismes $\mathcal{U}'\,F'\,\mathcal{U}'\,\delta'_A$ et $\mathcal{U}'\,\delta'_{F'\mathcal{U}'A}$ de $\mathfrak{X}$, puisque les deux adjonctions engendrent le même triple ; nous savons que ces deux morphismes de $\mathcal{X}$ admettent $U'\,\delta'_A$ comme coégalisateur absolu et donc, vu l'hypothèse sur U, ce coégalisateur absolu se relève de manière unique selon U en un objet $\Psi(A)$, coégalisateur de $F\,U'\,\delta'_A$ et $\delta_{F\,U'\,A}$

$$\begin{tikzcd}
F\,U'\,F'\,U'\,A \arrow[d, equal] \arrow[dr, "F\,U'\,\delta'_A"] & & \\
F\,U\,F\,U'\,A \arrow[r, "\delta_{F\,U'\,A}"'] & F\,U'\,A \arrow[r, "\gamma_A"] & \Psi(A)
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}[column sep=large]
U'\,F'\,U'\,F'\,U'\,A \arrow[r, shift left, "U'F'U'\,\delta'_A"] \arrow[r, shift right, "U'\,\delta'_{F'\,U'\,A}"'] & U'\,F'\,U'\,A \arrow[r, "{U'\,\delta'_A \;=\; U\,\gamma_A}"] & U'\,A = U\,\Psi A
\end{tikzcd}$$

Si maintenant $x : X \longrightarrow X'$ est un morphisme de $\mathcal{X}$, nous sommes forcés de définir

$$\Psi(F'x) = Fx.$$

Soit alors $a : A \longrightarrow A'$ un morphisme de $\mathcal{Q}'$.

$$\begin{tikzcd}[column sep=large, row sep=huge]
F\,U'\,F'\,U'\,A \arrow[r, shift left, "F\,U'\,\delta'_A"] \arrow[r, shift right, "\delta_{F\,U'\,A}"'] \arrow[d, "F\,U'\,F'\,U'\,a"'] & F\,U'\,A \arrow[r, "\gamma_A"] \arrow[d, dashed, "F\,U'\,a"] & \Psi A \arrow[d, "\Psi(a)"] \\
F\,U'\,F'\,U'\,A' \arrow[r, shift left, "F\,U'\,\delta'_{A'}"] \arrow[r, shift right, "\delta_{F\,U'\,A'}"'] & F\,U'\,A' \arrow[r, "\gamma_{A'}"'] & \Psi A'
\end{tikzcd}$$

Si le foncteur Ψ existe, $\gamma_A = \Psi(\delta'_A)$ puisque ces deux morphismes se projettent par $\mathcal{U}$ sur le morphisme $\mathcal{U}'\,\delta'_A$. Comme

$$\delta'_{A'} \circ F'\,\mathcal{U}'\,a = a \circ \delta'_A ,$$

$\Psi(a)$ doit rendre comme commutatif le carré de droite dans le diagramme précédent, d'où l'unicité de $\Psi(a)$ puisque γ_A est un épimorphisme. Par ailleurs $(\gamma_{A'} \circ F\,\mathcal{U}'\,a)$ égalisant $F\,\mathcal{U}'\,\delta'_A$ et $\delta_{F\mathcal{U}',A'}$, la factorisation $\Psi(a)$ cherchée existe bien.

<u>Théorème 4</u> (critère de Beck).

Soit $(F, \mathcal{U}, \varepsilon, \delta)$ *une adjonction.*

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A} \arrow[d, shift left, "\mathcal{U}"] \\ \mathcal{X} \arrow[u, shift left, "F"] \end{tikzcd} \qquad\qquad F \dashv \mathcal{U}$$

La condition nécessaire et suffisante pour que $\mathcal{A}$ *soit isomorphe à la catégorie d'Eilenberg - Moore du triple engendré par cette adjonction est que le foncteur* $\mathcal{U}$ *crée les coégalisateurs des couples de flèches de* $\mathcal{A}$ *dont les projections par* $\mathcal{U}$ *admettent un coégalisateur absolu dans* $\mathcal{X}$ *.*

La condition est nécessaire en vertu de la propriété P4 de la catégorie $\mathcal{X}^T$ d'Eilenberg - Moore du triple correspondant.

La condition est suffisante en vertu de la proposition 4 qui fournit deux foncteurs

$$\Psi_1 : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{X}^T$$

$$\Psi_2 : \mathcal{X}^T \longrightarrow \mathcal{A},$$

ces deux foncteurs étant des isomorphismes réciproques en vertu toujours de cette même proposition 4.

§ 2 : Exemples de catégories algébriques.

(1) : Les catégories algébriques au sens de Lawvere

Soient $\mathcal{T}$ une théorie algébrique au sens de Lawvere et $\mathcal{A}$ la catégorie algébrique associée. Nous noterons $(F, U, \varepsilon, \delta)$ l'adjonction entre le foncteur d'oubli U et le foncteur "structure libre" F.

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A} \arrow[d, shift left, "U"] \\ \mathrm{Ens} \arrow[u, shift left, "F"] \end{tikzcd} \qquad\qquad F \dashv U$$

Pour prouver que $\mathcal{A}$ est la catégorie d'Eilenberg - Moore associée à l'adjonction, utilisons le critère de Beck.

Soient $\phi, \psi : A \rightrightarrows B$ deux morphismes de $\mathcal{A}$ tels que $U(\phi)$ et $U(\psi)$ admettent un coégalisateur absolu dans Ens, noté (Q, q).

Notons $t^\circ, t^1, \dots, t^n, \dots$ les objets de $\mathcal{T}$ et soit $\omega : t^n \longrightarrow t^1$ une opération ; il faut définir

$$Q(\omega) : Q^n \equiv Q(t^n) \longrightarrow Q \equiv Q(t^1)$$

$$\begin{tikzcd}
A(t^n) \arrow[r, shift left, "\phi(t^n)"] \arrow[r, shift right, "\psi(t^n)"'] \arrow[dd, "A(\omega)"'] & B(t^n) \arrow[rr, "q^n"] \arrow[dr, "\pi(t^n)"] \arrow[dd, "B(\omega)"] & & Q^n \arrow[dl, "p^n"'] \arrow[dd, "Q(\omega)"] \\
& & P(t^n) \arrow[dd, "P(\omega)"] & \\
A(t^1) \arrow[r, shift left, "\phi(t^1)"] \arrow[r, shift right, "\psi(t^1)"'] & B(t^1) \arrow[rr, "q"] \arrow[dr, "\pi(t^1)"'] & & Q \arrow[dl, "p"] \\
& & P(t^1) &
\end{tikzcd}$$

Mais q^n est le conoyau de $\phi(t^n)$ et $\psi(t^n)$ car le foncteur "puissance n" commute avec le conoyau absolu q. Dès lors, $q \circ B(\omega)$ égalisant $\phi(t^n)$ et $\psi(t^n)$, nous obtenons l'unique factorisation $Q(\omega)$ cherchée.

Nous avons donc déjà obtenu un foncteur Q objet de $\mathcal{Q}$ et une transformation naturelle $q \equiv (q^i)_{i \in \mathbb{N}}$ égalisant ϕ et ψ. Si maintenant π est un autre morphisme de $\mathcal{Q}$ égalisant ϕ et ψ, il existe dans Ens une unique application p telle que $p \circ q = \pi(t^1)$ et donc $p^i \circ q^i = \pi(t^i)$ pour tout entier i. Le fait que $p \equiv (p_i)_{i \in \mathbb{N}}$ ainsi obtenue soit une transformation naturelle résulte du fait que chaque q^i est un épimorphisme, en tant que conoyau.

Finalement, $\mathcal{Q}$ est bien isomorphe à la catégorie d'Eilenberg - Moore associée à l'adjonction.

(2) : <u>Généralisation de l'exemple précédent</u>

Soient $\mathcal{C}$ une catégorie avec produits finis et $\mathcal{T}$ une théorie algébrique au sens de Lawvere. Notons Alg $(\mathcal{T}, \mathcal{C})$ la sous-catégorie pleine de Nat $(\mathcal{T}, \mathcal{C})$ ayant pour objets les foncteurs commutant aux produits. Il existe un foncteur d'oubli évident

$$\mathcal{U} : \text{Alg}\,(\mathcal{T}, \mathcal{C}) \longrightarrow \mathcal{C}$$

qui est l'évaluation au point t^1. Si ce foncteur admet un adjoint à gauche, la catégorie Alg $(\mathcal{T}, \mathcal{C})$ est algébrique sur le triple correspondant.

(3) : La catégorie des espaces compacts

Soient $\mathcal{K}$ la catégorie des espaces compacts séparés et Ens celle des ensembles. Notons $\mathcal{U}$ le foncteur d'oubli de $\mathcal{K}$ vers Ens et F le foncteur associant à l'ensemble X le compactifié de Stone - Chěch de X considéré comme espace topologique discret. On sait que F est adjoint à gauche de $\mathcal{U}$: vérifions, au moyen du critère de Beck, que $\mathcal{K}$ est algébrique sur le triple correspondant.

$$\begin{tikzcd} \mathcal{K} \arrow[d, shift left, "\mathcal{U}"] \\ \mathrm{Ens} \arrow[u, shift left, "F"] \end{tikzcd} \qquad\qquad F \dashv \mathcal{U}$$

Rappelons tout d'abord qu'une topologie sur un ensemble X est entièrement déterminé par la donnée de son application de fermeture

$$\mathcal{P}(X) \longrightarrow \mathcal{P}(X)$$

$$A \rightsquigarrow \bar{A}.$$

Soient alors f_1 et f_2 deux applications continues entre les compacts K_1 et K_2, telles que $\mathcal{U}f_1$ et $\mathcal{U}f_2$ admettent un coé-

$$\begin{tikzcd} K_1 \arrow[r, shift left, "f_1"] \arrow[r, shift right, "f_2"'] & K_2 \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} \mathcal{U}K_1 \arrow[r, shift left, "\mathcal{U}f_1"] \arrow[r, shift right, "\mathcal{U}f_2"'] & \mathcal{U}K_2 \arrow[r, "q"] & Q \end{tikzcd}$$

galisateur absolu Q dans Ens. Considérons alors la situation suivante, où τ_1 et τ_2 représentent les opérations de fermeture sur K_1 et K_2.

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{P}(\cup K_1) \arrow[r, shift left, "\mathcal{P}(\cup f_1)"] \arrow[r, shift right, "\mathcal{P}(\cup f_2)"'] \arrow[d, "\tau_1"'] & \mathcal{P}(\cup K_2) \arrow[r, "\mathcal{P}(q)"] \arrow[d, "\tau_2"'] & \mathcal{P}(Q) \arrow[d, "\tau"'] \\
\mathcal{P}(\cup K_1) \arrow[r, shift left, "\mathcal{P}(\cup f_1)"] \arrow[r, shift right, "\mathcal{P}(\cup f_2)"'] & \mathcal{P}(\cup K_2) \arrow[r, "\mathcal{P}(q)"'] & \mathcal{P}(Q)
\end{tikzcd}$$

$\mathcal{P}(q)$ est le conoyau absolu de $\mathcal{P}(\cup f_1)$ et $\mathcal{P}(\cup f_2)$ car q est le conoyau absolu de $\cup f_1$ et $\cup_2$; en outre, les deux carrés de gauche commutent, c'est-à-dire

$$\mathcal{P}(\cup f_i) \circ \tau_1 = \tau_2 \circ \mathcal{P}(\cup f_i)$$

car f_i étant continue entre deux compacts, est fermée :

$$f_i(\bar{A}) = \overline{f_i(A)}.$$

Dès lors, $\mathcal{P}(q) \circ \tau_2$ égalisant $\mathcal{P}(\cup f_1)$ et $\mathcal{P}(\cup f_2)$, il existe une unique application τ telle que

$$\tau \circ \mathcal{P}(q) = \mathcal{P}(q) \circ \tau_2 .$$

Soit P une partie de Q telle que $\tau(P) = P$; alors

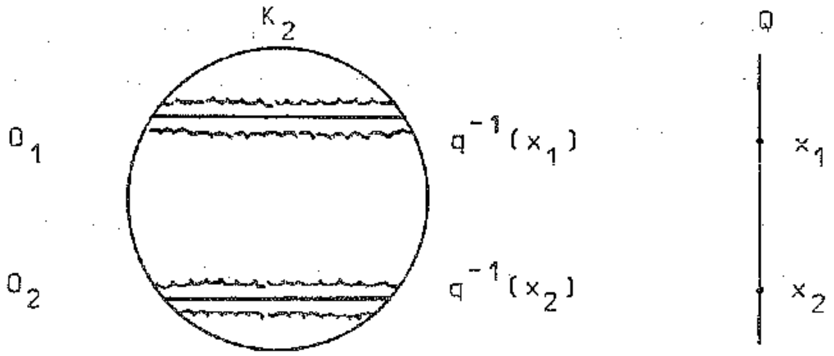
$$P = \tau(P) = (\tau \circ \mathcal{P}(q))(q^{-1}(P))$$

$$= (\mathcal{P}(q) \circ \tau_2)(q^{-1}(P)) = q\,(\overline{q^{-1}(P)})$$

et donc $\overline{q^{-1}(P)} \subseteq q^{-1}(P)$, c'est-à-dire que $\overline{q^{-1}(P)} = q^{-1}(P)$.

Il suit aisément de cette remarque que τ est une opération de fermeture sur Q et que q est continue et fermée pour les deux topologies associées à τ_2 et τ.

En remarquant que l'espace topologique (Q, τ) ainsi construit est de manière évidente le coégalisateur de f_1 et f_2 dans la catégorie des espaces topologiques, il ne nous reste plus qu'à vérifier que (Q, τ) est en fait un compact. Mais (Q, τ) est l'image continue par la surjection q du compact K_2, donc (Q, τ) est quasi-compact. Il faut encore prouver que (Q, τ) est séparé. Soient x_1 et x_2 deux points distincts de Q ; x_i est image d'un point de K_2 par la surjection fermée q, donc $\{x_i\}$ est un fermé de Q. Dès lors $q^{-1}(x_1)$ et $q^{-1}(x_2)$ sont deux fermés disjoints de K_2, donc ils sont contenus dans deux ouverts O_1 et O_2 disjoints.



Les ouverts O_1 et O_2 étant disjoints, leurs complémentaires sont fermés et recouvrent K_2 ; dès lors, les deux fermés $q(\complement O_1)$ et $q(\complement O_2)$ recouvrent Q et leurs complémentaires sont deux ouverts disjoints séparant x_1 et x_2.

(Q, τ) est donc bien un compact et par le critère de Beck, a été montrée être algébrique.

BIBLIOGRAPHIE.

[1] H. APPELGATE and M. TIERNEY - On triples and categorical homology theory ; E.T.H. Zürich (1966/67) ; Springer ; Berlin ; 156-244.

[2] - Model induced adjoint functors ; Cahiers topo. géom. diff., 11 (1969) ; 1-21.

[3] - Iterated cotriples ; Lect. Notes Math. ; 137 ; (1970) ; 56-100.

[4] - Categories with models. Sem. on tiples and categorical homology theory ; Lect. Notes Math. ; 80 ; (1966/67) ; 156-245.

[5] M. BARR - Composite cotriples and derived functors ; Seminar on triples and categorical homology theory ; Lect. Notes Math. ; 80 ; (1966/67) ; 336-357.

[6] - Shulka cohomology and triples ; J. Algebra 5 ; (1967) ; 222-231 et 6 ; (1967) ; 411-412.

[7] - Coalgebras in a category of algebras ; Category theory, homology theory and their applications, I ; Lect. Notes Math. ; 86 ; (1969) ; 1-12.

[8] - Coequalizers and free triples ; Math. Z. ; 116 ; (1970) ; 307-322.

[9] M. BARR and J. BECK - Homology and standard constructions ; Seminar on triples and categorical homology theory Lect. Notes Math., 80 ; (1966/67) ; 245-336.

[10] - Acyclic models and triples ; Proc. conf. cat. alg (La Jolla - 1965) ; Springer ; New York ; (1966).

[11] J. BECK - On H-spaces and infinite loop-spaces ; Battelle Institute Conference ; Lect. Notes in Math. ; 99 ; (1969) ; 139-154.

[12] - Triples, algebras and cohomology Dissertation (1967), Columbia University.

[13] - The tripleableness theorem. Manuscript.

[14] - Distributive Laws ; Sem. on triples and categorical homology theory ; (ETH - Zürich ; 1966/67) ; Springer ; Berlin ; (1969).

[15] E. BURRONI - Structures discrètes et triples ; C.R. Acad. Sc. Paris, Série A ; 271, nos 4 et 5 ; (1970) ; 217-221.

[16] L. COPPEY - Factorisations d'un cotriple ; C.R. Acad. Sc. Paris, Série A ; 271, n° 3, (1970) ; 130-134.

[17] - Morphismes et comorphismes de cotriples ; C.R. Acad. Sc. Paris, Série A ; 271, nos 4 et 5 ; (1970) ; 231-235.

[18] R. DAVIS - Component functors ; Proc. Am. Math. Soc., 24 ; (1970) ; 396-400.

[19] - Equational Systems of functors ; Reports of the Midwest Category Seminar ; Springer ; Berlin ; (1967) ; 92-109.

[20] - Universal coalgebra and categories of transition systems ; Math. Systems theory, 4 (1970) ; 91-95.

[21] - Semi-adjoint functors and quintuples ; Proc. Am. Math. Soc., 27 (1971) ; 477-482.

[22] J. DUSKIN - Variations on Beck's tripleability criterion ; Reports of the Midwest Category Seminar III ; Lect. Notes Math., 106, (1969) ; 74-130.

[23] S. EILENBERG and J.C. MOORE - Adjoint functors and triples ; Illinois J. of Math. ; V-9 (1965) ; 381-398.

[24] S. FAKIR - Monade idempotente associée à une monade ; C.R. Acad. Sc. Paris, Série A, 270 (1970) ; 99-101.

[25] A. FREI et J. MAC DONALD - Coalgèbres dans les catégories d'algèbres et structures induites par un triple ; C.R. Acad. Sc. Paris, Série A ; 267 (1969) ; 81-84.

[26] A. FREI - Some remarks on triples ; Math. Z. ; 109, n° 4, (1969) ; 269-272.

[27] P.J. HUBER - Standard constructions in Abelian Categories ; Math. Ann., 146 (1962), 321-325.

[28] - Homotopy theory in general categories ; Math. Ann., 144 (1961) ; 361-385.

[29] H. KLEISLI - Comparaison de la résolution simpliciale à la bra-résolution ; Séminaire de Math. Sup., n° 10 (été 1964) - "Catégories non abéliennes" - Presses Universitaires de Montreal ; 95-109.

[30] - Homotopy theory in Abelian Categories ; Canad. J. Math. ; 14 (1962) ; 139-169.

[31] - Every standard construction is induced by a pair of adjoint functors ; Proc. Amer. Math. Soc. ; 16 (1965) ; 544-546.

[32] - Modèles acycliques et classes projectives. C.R. Acad. Sc. Paris, Série A ; 266 (1968) ; 1220-1222.

[33] A. KOCK - Limit Monads in Categories ; Aarhus Universitet Math. Preprint ; (1967/68) ; n° 6.

[34] - Closed categories generated by commutative monads ; Aarhus Universitet Math. Preprint ; (1967/68) ; n° 13.

[35] F.W. LAWVERE - Ordinal Sums and equational doctrines ; Sem. on triples and categorical homology theory ; (ETH ; Zürich 1966/67) ; Lect. Notes Math. ; 80 Springer, Berlin ; (1969) ; 141-155.

[36] F.E.J. LINTON - An outline of functorial semantics ; Sem. on triples and categorical homology theory ; (ETH - Zürich 1966/67) ; Lect. Notes Math. ; 80, Springer, Berlin, (1969) ; 7-52.

[37] - Coequalizers in categories of algebras ; Sem. on triples and categorical homology theory (ETH - Zürich, 1966/67) ; Lect. Notes Math. ; 80 Springer, Berlin, (1969) ; 75-90.

[38] - Applied Functorial Sematics I ; Annali di Matematica.

[39] - Applied Functorial Sematics II ; Sem. on triples and categorical homology theory (ETH - Zürich 1966/67) ; Lect. Notes Math. ; 80 ; Springer, Berlin, (1969) ; 53-74.

[40] - Some aspects of equational categories ; Proc. conf. on cat. alg. (La Jolla - 1965) ; Springer (1966) ; 84-94.

[41] - Autonomous equational categories ; J. Math. Mech. 15 (1966) ; 637-642.

[42] E.G. MANES - Minimal Subalgebras for dynamic triples ; Battelle Institute conference ; Lect. Notes Math 99 (1969) ; 419-448.

[43] - A triple miscellany : some aspects of the theory of algebras over a triple ; Dissertation, Wesleyan University, Middletown (1967).

[44] - A triple theoretic construction of compact algebras ; Sem. on triples and categorical homology theory ; Lect. Notes Math. ; 80 (1966/67) ; 91-118.

[45] J.M. MARANDA - Constructions fondamentales de degré supérieur ; J. Reine Angew. Math. ; 243 (1970) ; 1-16.

[46] - Sur les propriétés universelles des foncteurs adjoints ; Studies on Abelian Groups (Symposium Montpellier, 1967) ; Springer, Berlin, (1968) ; 267-286.

[47] R. PARE - Absolute coequalizers ; Category theory, Homology theory and their applications I ; Lect. Notes Math. ; 86 (1969) ; 132-145.

[48] - Absolute colimits ; J. Algebra, 19, n° 1, (1971).

[49] D. PUMPLÜN - Eine Bemerkung über Monaden adjungierte Funktoren ; Math. Ann., 185 (1970) ; 329-337.

[50] D. SCHUMACHER - Minimale und Maximale Tripelerzeugeude und eine Bemerkung zur Tripelbarheit ; Arch. Math., (Basel) 20 (1969) ; 356-364.

[51] N. SHIMADA, H. UEHARA, F. BRENNEMAN and A. IWAI - Triple cohomology of algebras and two term extensions ; Publ. res.Inst. Math. Sc., 5 (1969) ; 267-285.

[52] H. UEHARA and F. BRENNEMAN - On a cotriple homology in a fibred category ; Publ. res. Inst. Math. Sc., Ser. A, 4 (1968/69) ; 13-38.

[53] F. ULMER - Kan Extensions, cotriple and André (co)homology ; Battelle Institute Conference : Lect. Notes Math., 92 (1969) ; 278-308.

[54] - On cotriples and André (co)homology, their relationship with classical homological algebra ; Sem. on triples and categorical homology theory ; Lect. Notes Math., 80 (1966/67) ; 376-398.

[55] R. VASQUEZ - GARCIA - The category of the triples in a category (Spanish) ; An. Inst. Univ. Noc. Autonoma, Mexico, 5, (1965) ; 21-34.