1 Grundlagen

1.1 Gleichungen

Zusammenhänge zwischen Größen werden in Wirtschaft, Technik und Naturwissenschaft oft in Form von Gleichungen beschrieben. Eine Gleichung verknüpft eine Variable mit Zahlen und/oder Parametern. **Parameter** sind Platzhalter und werden als bekannt angesehen. Werte der **Variablen**, die die Gleichung erfüllen, heißen Lösungen der Gleichung.

In der Mathematik werden Variablen meist mit den hinteren Buchstaben des Alphabets bezeichnet und Parameter mit den vorderen. In den Anwendungsgebieten sind die Buchstaben für häufig vorkommende Größen meist durch Konvention festgelegt (Gewinn: G, Kosten: K, Masse: m, Geschwindigkeit: v, Strom: I, Spannung: U, usw.), so dass hier vor der Auflösung einer Gleichung immer festgelegt werden muss, welche Größe die Variable ist und welche Größen Parameter sind.

Beispiele: 1.) $x^5 - x^3 + a x^2 + 8 = 0$ (x: Variable, a: Parameter)

2.) $\frac{U_a}{R_L} = \beta \cdot (U_e - U_a - U_{th})^2$ (U_a: Variable, Rest: Parameter)

Unter einer **analytischen Lösung** versteht man eine allgemeine Umformung der Gleichung, sodass die Variable alleine auf einer Gleichungsseite steht. Eine analytische Lösung ist nur bei speziellen Gleichungen möglich.

Die 1. Beispielgleichung besitzt für allgemeine Werte des Parameters a keine analytische Lösung. Für $a = -8$ ist dagegen eine analytische Lösung durch folgende Umformung möglich:

$$x^5 - x^3 - 8x^2 + 8 = 0 \Rightarrow (x^3 - 8) \cdot (x^2 - 1) =$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x^3 - 8 = 0 \Rightarrow x^3 = 8 \Rightarrow x_1 = 2 \\ \vee \; x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x_{2/3} = \pm 1 \end{cases}$$

oder

Analytische Lösungen können von Hand oder mit einem Computer Algebra System (CAS) berechnet werden.

Unter einer **numerischen Lösung** versteht man einen Zahlenwert, der die Gleichung näherungsweise erfüllt, wenn er für die Variable eingesetzt wird. Wenn überhaupt eine Lösung existiert, ist eine numerische Lösung immer möglich, wenn entweder keine Parameter vorhanden sind oder für die Parameter Zahlenwerte eingesetzt werden. Eine numerische Lösung besitzt nur eine begrenzte Genauigkeit.

Für $a = 1$ besitzt die 1. Beispielgleichung nur eine reelle Näherungslösung:

$$x_1 \approx -1{,}750256846$$

Numerische Lösungen können mit z.B. mit dem Newtonverfahren berechnet werden. Auch eine grafische Lösung ist möglich.

Lineare Gleichungen

Eine Gleichung ist linear, wenn die Variable nur in der ersten Potenz vorkommt und nicht innerhalb von Funktionen steht. Eine lineare Gleichung kann durch Sammeln aller Ausdrücke mit der Variablen und Ausklammern der Variable immer auf folgende Form gebracht werden:

$$ax + b = 0$$

x: Variable
a, b: Ausdrücke mit Parametern und/oder Zahlen
($a \neq 0$, da sonst keine Gleichung)

Allgemeine Lösung: $ax = -b \Rightarrow x = -\frac{b}{a}$

Lineare Gleichungen sind analytisch immer lösbar.

Beispiele:

1.) $13x - 18 = -x + 6 \Rightarrow 4x = 24 \Rightarrow x = \frac{24}{4} = 6$

2.) $ax + 3b = 2cx + d \Rightarrow ax - 2cx = d - 3b$

$\Rightarrow x(a - 2c) = d - 3b \Rightarrow x = \frac{d-3b}{a-2c}$

3.) Newton'sche Bewegungsgleichung für eine Masse m, auf die eine Kraft F einwirkt. Gesucht: Beschleunigung a der Masse

$F = m \cdot a \Rightarrow a = \frac{F}{m}$

4.) Maschengleichung bei einer Spannungsquelle mit fester Spannung U, an der zwei Widerstände mit den Werten R_1 und R_2 in Reihenschaltung angeschlossen sind. Gesucht ist der Strom I, der fließt.

$U - R_1 I - R_2 I = 0$

$\Rightarrow R_1 I + R_2 I = U$

$\Rightarrow I(R_1 + R_2) = U$

$\Rightarrow I = \frac{U}{R_1 + R_2}$

Quadratische Gleichungen

Bei einer quadratischen Gleichung kommt die Variable nur in der ersten und zweiten Potenz vor und steht nicht innerhalb von Funktionen.
Eine quadratische Gleichung kann durch Sammeln aller Ausdrücke mit der Variablen in der gleichen Potenz und Ausklammern der Variablen immer auf folgende Form gebracht werden:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

x: Variable
a, b, c: Ausdrücke mit Parametern und/oder Zahlen
($a \neq 0$, da sonst keine quadratische Gleichung)

Diese Gleichung kann allgemein gelöst werden:

$$x_{1/2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Wegen der Wurzel hängt das Lösungsverhalten der Gleichung vom Ausdruck unter der Wurzel, der sog. Diskriminante D ab mit $D = b^2 - 4ac$:

$D > 0$ Es existieren zwei reelle Lösungen der Gleichung
$D = 0$ Es existiert eine reelle (doppelte) Lösung
$D > 0$ Es existieren keine reellen Lösungen (nur zwei komplexe Lösungen)

Bei wirtschaftlichen und technisch-naturwissenschaftlichen Problemen wird häufig eine der beiden reellen Lösungen durch allgemeine Eigenschaften der Variablen ausgeschlossen. So können z.B. Stückzahlen, Widerstandswerte und Massen nicht negativ sein.

Beispiele:

1.) $-2x^2 - 4x + 6 = 0$

$$\Rightarrow x_{1/2} = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4\cdot(-2)\cdot 6}}{2\cdot(-2)} = \frac{4 \pm 8}{-4} = -(1 \pm 2)$$

$$\Rightarrow x_1 = -3 \; ; \; x_2 = 1$$

2.) Maschengleichung bei einer Spannungsquelle mit fester Spannung U, an der zwei Widerstände in Reihenschaltung angeschlossen sind. Ein Widerstand hat den festen Wert R_2, der andere hat einen stromabhängigen Wert $r_0 + r_1 \cdot I$. Gesucht ist der Strom I, der fließt

$$U - (r_0 + r_1 J)\cdot J - R_2 J = 0$$

$$\Rightarrow -r_1 J^2 - (r_0 + R_2) J + U = 0$$

$$\Rightarrow J_{1/2} = \frac{(r_0 + R_2) \pm \sqrt{(r_0 + R_2)^2 + 4 r_1 U}}{-2 r_1}$$

Da sich bei einem positiven Spannungswert U in diesem Fall ein positiver Strom ergeben muss, scheidet die Lösung mit dem Pluszeichen vor der Wurzel aus physikalischen Gründen aus.

Algebraische Gleichungen höheren Grades

Eine algebraische Gleichung n-ten Grades lässt sich allgemein in die Form bringen:

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_k x^k + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0$$

x: Variable
a_k: Ausdrücke mit Parametern und/oder Zahlen mit $k = 1, 2, \ldots n$
($a_k \neq 0$, da sonst keine Gleichung n-ten Grades)

Eine algebraische Gleichung n-ten Grades besitzt höchstens n reelle Lösungen, eine algebraische Gleichung ungeraden Grades besitzt mindestens eine reelle Lösung.

Für Gleichungen dritten und vierten Grades existieren zwar allgemeine Lösungsformeln, diese sind aber so kompliziert, dass sie in der Praxis kaum verwendet werden.

Bei Gleichungen, bei denen ein Produkt gleich 0 gesetzt wird, erhält man die Lösungen, indem man die einzelnen Faktoren gleich 0 setzt und diese Gleichungen löst:

$$f_1(x) \cdot f_2(x) \cdot \ldots \cdot f_n(x) = 0 \Rightarrow f_1(x) = 0 \vee f_2(x) = 0 \vee \ldots \vee f_n(x) = 0$$

Wenn eine Lösung x_1 einer algebraischen Gleichung bekannt ist, kann der Grad der algebraischen Gleichung deshalb durch Polynomdivision um 1 verringert werden:

$$\left(a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + \cdots + a_1 \cdot x + a_0\right) : \left(x - x_1\right) = b_{n-1} \cdot x^{n-1} + \cdots + b_1 \cdot x + b_0$$

$$a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + \cdots + a_1 \cdot x + a_0 = 0 \Leftrightarrow \left(b_{n-1} \cdot x^{n-1} + \cdots + b_1 \cdot x + b_0\right) \cdot \left(x - x_1\right) = 0$$

$\Rightarrow$ Die übrigen Lösungen ergeben sich aus $b_{n-1} \cdot x^{n-1} + \cdots + b_1 \cdot x + b_0 = 0$

Wenn eine Lösung durch Probieren gefunden werden kann, erhält man durch Polynomdivision die reduzierte Gleichung und möglicherweise daraus auch die weiteren Lösungen.

Beispiel: $x_3 - 3x^2 - 61x + 63 = 0$

Erratene Lösung: $x_1 = 1$

Polynomdivision:

$$
\begin{array}{l}
(x^3 - 3x^2 - 61x + 63) : (x - 1) = x^2 - 2x - 63 \\
\underline{-(x^3 - x^2)} \\
\quad -2x^2 - 61x + 63 \\
\quad \underline{-(-2x^2 + 2x)} \\
\qquad -63x + 63 \\
\qquad \underline{-(-63x + 63)} \\
\qquad\qquad 0
\end{array}
$$

Restliche Lösungen aus $x^2 - 2x - 63 = 0$

$\Rightarrow x_2 = -7 \; ; \; x_3 = 9$

Spezialfälle:

- Gleichung dritter Ordnung, bei der das konstante Glied fehlt:

$$ax^3 + bx^2 + cx = 0$$
$$\Rightarrow x\,(ax^2 + bx + c) = 0$$
$$\Rightarrow x_1 = 0 \quad \vee \quad ax^2 + bx + c = 0 \Rightarrow x_{2/3} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

- Gleichung vierter Ordnung, bei der das konstante Glied fehlt:

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx = 0$$
$$\Rightarrow x\,(ax^3 + bx^2 + cx + d) = 0 \qquad \Rightarrow x_1 = 0$$

Die übrigen Lösungen ergeben sich aus $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$

- Gleichung vierter Ordnung, bei der die Variable nur in der vierten und zweiten Potenz vorkommt (Biquadratische Gleichung):

$$ax^4 + bx^2 + c = 0$$

Die Substitution $x^2 = z$ liefert $az^2 + bz + c = 0$

$$\Rightarrow z_{1/2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Rücksubstitution $x = \pm\sqrt{z}$ liefert

$$x_{1/2} = \pm\sqrt{z_1} \; ; \quad x_{3/4} = \pm\sqrt{z_2}$$

Der Typ einer Gleichung hängt in der Regel davon ab, nach welcher Variablen aufgelöst wird.

Beispiel: $ab^4c + b^2c^3d - d^2 + 1 = 0$

Auflösung nach a: lineare Gleichung

Auflösung nach b: Gleichung 4. Grades ; biquadratisch

Auflösung nach c: Gleichung 3. Grades ;

Auflösung nach d: quadratische Gleichung

Gebrochen rationale Gleichungen

Durch Multiplikation mit dem Hauptnenner können gebrochen rationale Gleichungen in algebraische Gleichungen umgeformt und in den oben beschriebenen Fällen allgemein gelöst werden.
Beispiel:

$$\frac{a}{x+2} + \frac{b}{x} = 0 \qquad (\text{mit Variable } x \in \mathbb{R}\setminus\{0;-2\};\ \text{Parameter } a,b \in \mathbb{R})$$

$$\frac{ax + b(x+2)}{(x+2)\cdot x} = 0 \qquad |\cdot x\cdot(x+2)$$

$$ax + b(x+2) = 0$$

$$ax + bx + 2b = 0$$

$$x(a+b) = -2b$$

$$x = \frac{-2b}{a+b} \qquad (\text{Reelle Lösungen, wenn } a \neq -b)$$

Wurzelgleichungen

Wurzelgleichungen können durch Isolieren der Wurzel auf einer Gleichungsseite und Quadrieren in algebraische Gleichungen umgeformt werden. Da durch das Quadrieren zusätzliche Lösungen erzeugt werden können, müssen alle Lösungen durch Einsetzen in die Ausgangsgleichung verifiziert werden.

Beispiel:

$$\sqrt{x+1} - bx + 1 = 0 \qquad |\text{ Wurzel isolieren}$$

$$\sqrt{x+1} = bx - 1 \qquad |\ ^2 \quad \text{nicht-äquivalente Umformung} \Rightarrow \text{Kontrolle notwendig!}$$

$$\left(\sqrt{x+1}\right)^2 = (bx-1)^2$$

$$x + 1 = b^2x^2 - 2bx + 1$$

$$b^2x^2 - 2bx - x = 0$$

$$x(b^2x - 2b - 1) = 0$$

$$\Rightarrow x_1 = 0 \quad \vee \quad b^2x - 2b - 1 = 0$$

$$\Rightarrow x = \frac{2b+1}{b^2}$$

Kontrolle durch Einsetzen der Lösung(en) in die Ausgangsgleichung:

- für $x_1 = 0 \Rightarrow \sqrt{0+1} - b\cdot 0 + 1 = 0 \Rightarrow 2 \neq 0$ ↯ $x_1 = 0$ ist keine Lösung
- für $x_2 = \frac{2b+1}{b^2} \Rightarrow \sqrt{\frac{2b+1}{b^2} + 1} - b\cdot\frac{2b+1}{b^2} + 1 = 0$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{b^2+2b+1}}{b} - \frac{2b+1}{b} + \frac{b}{b} = 0 \Rightarrow \frac{(b+1) - (2b+1) + b}{b} = 0 \Rightarrow 0 = 0 \checkmark$$

$\Rightarrow x_2$ ist Lösung

Betragsgleichungen

Der Betrag einer Zahl oder eines Ausdruckes a ist definiert als $|a| = \begin{cases} a, & \text{für } a \geq 0 \\ -a, & \text{für } a < 0 \end{cases}$

Beispiele: $|5| = 5$; $|-5| = -(-5) = 5$

$$|x-1| = \begin{cases} x-1 & \text{für } x-1 \geq 0 \text{ bzw. } x \geq 1 \\ -(x-1) & \text{für } x-1 < 0 \text{ bzw. } x < 1 \end{cases}$$

Bei einer Betragsgleichung ersetzt man deshalb die Beträge jeweils durch Plus- bzw. Minusklammern und löst die Gleichungen, die sich aus allen möglichen Kombinationen ergeben, mit Hilfe einer Fallunterscheidung. Da das Vorzeichen der Klammer nach der Definition aber von Bedingungen abhängt, muss überprüft werden, ob die jeweilige Lösung im entsprechenden Fall-Bereich liegt.
Alternativ können die Lösungen auch durch Einsetzen in die Betragsgleichung verifiziert werden.

Beispiel: $|x^2 - 2| = x$

- Fall 1: für $x^2 - 2 \geq 0$, d.h. $x^2 \geq 2 \Rightarrow \underbrace{x \leq -\sqrt{2} \vee x \geq \sqrt{2}}$

  ↑ vgl.!

  $\Rightarrow x^2 - 2 = x \Rightarrow x^2 - x - 2 = 0$

  $\Rightarrow x_{1/2} = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2)}}{2 \cdot 1} = \frac{1 \pm 3}{2} \Rightarrow x_1 = 2 ; x_2 = -1$

  x_1: ✓ im Bereich; x_2: ↯ nicht im Bereich

- Fall 2: für $x^2 - 2 < 0$, d.h. $-\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2}$

  vgl.

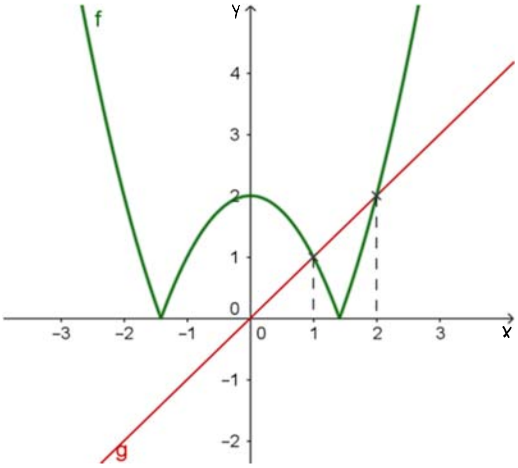
  $\Rightarrow -(x^2 - 2) = x \Rightarrow +x^2 + x - 2 = 0$

  $\Rightarrow x_{3/4} = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2)}}{2 \cdot 1} = \frac{-1 \pm 3}{2} \Rightarrow x_3 = 1 ; x_4 = -2$

  x_3: ✓ im Bereich; x_4: ↯ nicht im Bereich

$\Rightarrow$ Lösung: $x_1 = 2$ und $x_3 = 1$ sind Lösungen

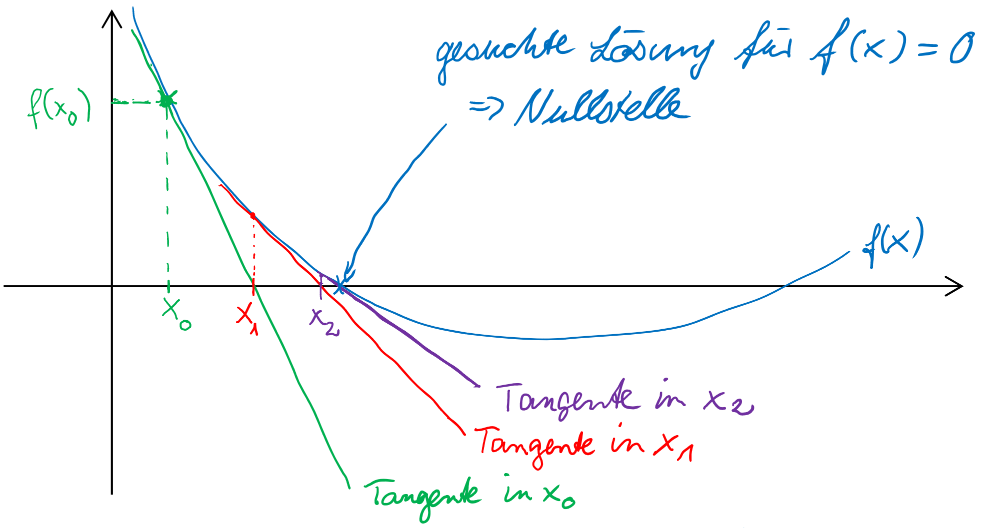
Ohne Parameter ist eine grafische Lösung am einfachsten.



Die Lösungen entsprechen den Schnittpunkten der Funktion $f(x) = |x^2 - 2|$ mit der Funktion $g(x) = x$.

Numerische Lösung einer Gleichung mit dem Newton-Verfahren

Gleichungen ohne Parameter bzw. mit Zahlenwerten für die Parameter können numerisch gelöst werden. Das am häufigsten verwendete Verfahren ist das sogenannte Newton-Verfahren.
Die Gleichung wird auf die Form $f(x) = 0$ gebracht.



875

Dann wird die Funktion $f(x)$ in einem Startwert x_0 durch ihre Tangente ersetzt:
(Anmerkung: Die Ableitung $f'(x)$ und das Aufstellen von Tangentengleichungen wird ausführlich in Kapitel 4 besprochen)

Berechnung der Tangentengleichung:

Punkt-Steigungs-Form: $\frac{y - y_0}{x - x_0} = m$ mit $m = f'(x_0)$: Steigung
$y = f(x_0)$

$$\Rightarrow \frac{y - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) \Rightarrow y - f(x_0) = f'(x_0) \cdot (x - x_0)$$

$$\Rightarrow y = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)$$ Gleichung der Tangente in x_0

Diese lineare Gleichung liefert eine verbesserte Lösung: x_1
Anschaulich ist dies der Schnittpunkt der Tangente mit der x-Achse.

$$f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0) = 0$$

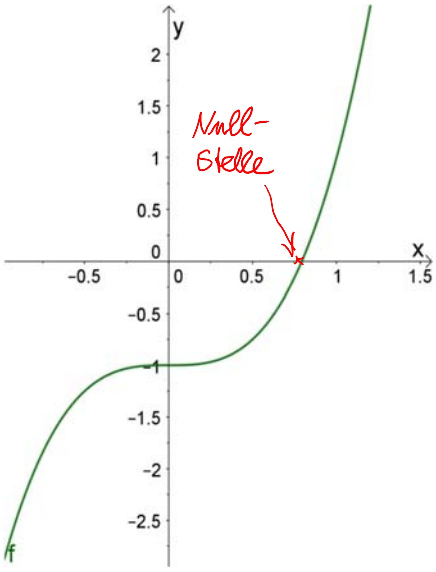
$$\Rightarrow x - x_0 = -\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

$$\Rightarrow x = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \mathrel{\hat{=}} x_1$$

Diese Lösung kann weiter verbessert werden, indem das Verfahren solange wiederholt wird, bis die gewünschte Genauigkeit erreicht ist:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Beispiel: Gesucht ist die Nullstelle der Funktion $f(x) = x^5 + x^3 - 1$



$f'(x) = 5x^4 + 3x^2$

Startwert: z.B. $x_0 = 1$

$f(x_0 = 1) = 1^5 + 1^3 - 1 = 1$

$f'(x_0 = 1) = 5 \cdot 1^4 + 3 \cdot 1^2 = 8$

Verbesserter Wert: $x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$

$\Rightarrow x_1 = 1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8} = 0{,}875$

Weitere Verbesserung durch Iteration:

$\Rightarrow x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = 0{,}875 - \frac{0{,}1828}{5{,}2278}$

$\Rightarrow x_2 = 0{,}8400$

Weitere Iterationen liefern folgende verbesserte Werte:

n	x_n	x_{n+1}
0	1	0.875
1	0.875	0.8400270863
2	0.8400270863	0.8376303777
3	0.8376303777	0.837619775
4	0.837619775	0.8376197748

Für die Anwendung des Newton-Verfahrens sind oft viele numerische Berechnungen nötig um eine zufriedenstellende Genauigkeit der Lösung zu erhalten. Von Hand kann daher die Berechnung sehr mühsam sein.

Die Verwendung von Computer oder Taschenrechner zur schnellen Bearbeitung bietet sich an.
Das Newton-Verfahren wird in sehr vielen Taschenrechnern zur Nullstellenberechnung verwendet, da es sehr schnell konvergiert.

1.2 Ungleichungen

Allgemeine Lösungen von Ungleichungen können im Prinzip genauso ermittelt werden wie die Lösungen von Gleichungen. Allerdings muss beachtet werden, dass sich bei der Multiplikation und Division einer Ungleichung mit einer negativen Zahl das Ungleich-Zeichen umdreht. Da dies meist zu mehreren Fallunterscheidungen führt, ist folgendes Verfahren meist einfacher:

Die Ungleichung wird auf die Form gebracht: $f(x) > 0$ oder $f(x) < 0$

Das Ungleich-Zeichen wird durch ein Gleich-Zeichen ersetzt: $f(x) = 0$

Die Lösungen der Gleichung werden ermittelt und zusammen mit evtl. Definitionslücken sortiert: $x_1 < x_2 < \cdots x_n$

In jedem Intervall wird für einen geeigneten Wert überprüft, ob die Funktion $f(x)$ positiv oder negativ ist und das Intervall somit zur Lösungsmenge gehört oder nicht

Ungleichungen ohne Parameter werden am einfachsten grafisch gelöst.
Ungleichungen mit Parametern können nur von Hand oder mit einem Computer Algebra System (CAS) gelöst werden.

Beispiel 1: $-2x^2 - 4x + 6 < 0$

von Hand: Lösung der zugehörigen Gleichung:

$-2x^2 - 4x + 6 = 0 \Rightarrow x_1 = -3;\ x_2 = 1$

Funktion hat keine Definitionslücken; $\mathbb{D} = \mathbb{R}$

$\Rightarrow$ Drei Intervalle   I [II] III -3 1

Überprüfen der Funktion in den einzelnen Intervallen:

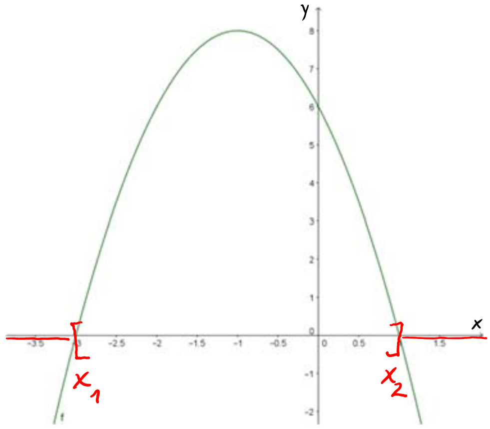
z.B. I: $x = -5 \Rightarrow f(-5) = -24 < 0$ ✓

II: $x = 0 \Rightarrow f(0) = 6 > 0$ ↯

III: $x = 2 \Rightarrow (2) = -10 < 0$ ✓

$\Rightarrow$ Die Ungleichung ist nur in den Bereichen I und III erfüllt

$\Rightarrow \mathbb{L} = \{x \mid x < -3 \vee 1 < x\}$ oder $\mathbb{L} =]-\infty; -3[\cup]1; \infty[$



graphische Lösung:

Nullstellen: $x_1 = -3;\ x_2 = 1$

$\Rightarrow \mathbb{L} =]-\infty; -3[\cup]1; \infty[$

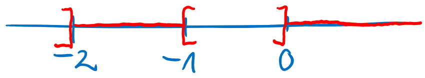
Beispiel 2: $\frac{1}{x+2} > -\frac{1}{x}$ $\quad x \neq -2;\ x \neq 0$

von Hand: zugehörige Gleichung: $\frac{1}{x+2} = -\frac{1}{x} \quad | \cdot (x+2) \cdot x$

$$x = -(x+2)$$
$$2x = -2$$
$$x = -1$$

Definitionslücken: $x = -2$; $x = 0 \Rightarrow \mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{-2; 0\}$

Untersuchung der vier Bereiche; Einsetzen geeigneter Funktionswerte



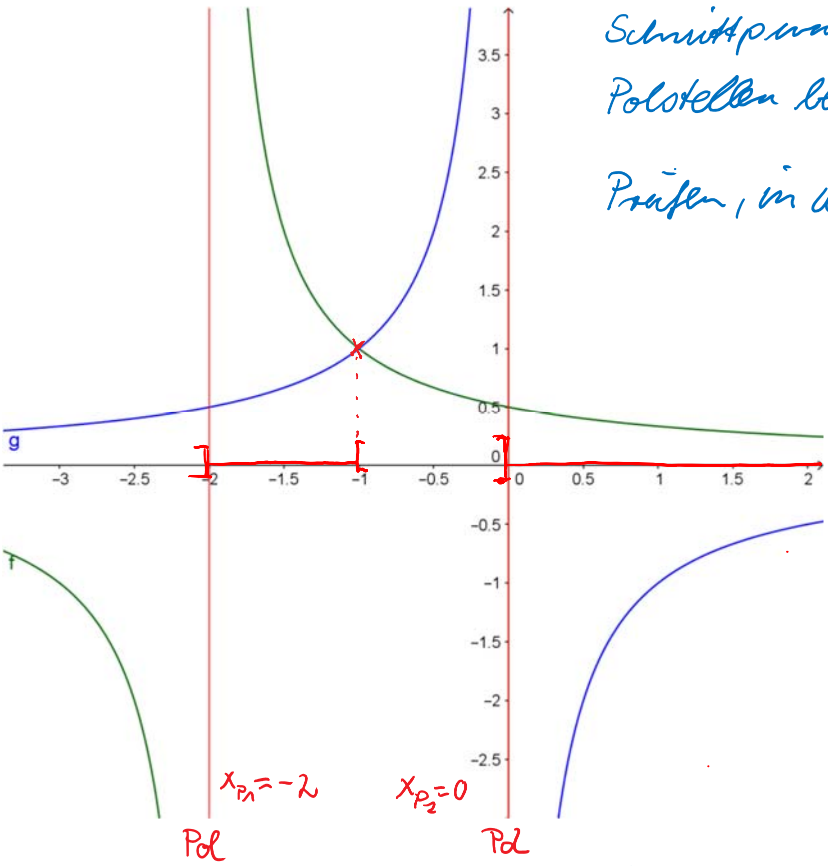
$\Rightarrow \mathbb{L} = \{x \mid -2 < x < -1 \ \vee \ 0 < x\}$

graphisch: rechte und linke Seite der Ungleichung als Funktion darstellen: $f(x) = \frac{1}{x+2}$; $g(x) = -\frac{1}{x}$

Schnittpunkte bestimmen $\Rightarrow x_S = -1$

Polstellen bestimmen $\Rightarrow x_{P_1} = -2$; $x_{P_2} = 0$

Prüfen, in welchem Bereich $f(x) > g(x)$



alternativ könnte auch die Ungleichung umgeformt werden: $\frac{1}{x+2} + \frac{1}{x} > 0$; die linke Seite gezeichnet werden und überprüft werden, wo die Funktion Werte größer als Null annimmt.