

4.1.3 Stationäre, kompressible, adiabate und reibungsfreie Strömungen in Rohren oder Kanälen mit veränderlichem Querschnitt

4.3.1 Düse und Diffusor in unter- und überschallschnellen Strömungen

Kontinuität

$$\frac{d\rho}{\rho} + \frac{dc}{c} + \frac{dA}{A} = 0$$

Impuls (reibungsfrei)

$$\rho c dc = -dp$$

oder, um zunächst dc/c zu eliminieren:

$$\frac{dc}{c} = -\frac{dp}{\rho c^2}$$

Verknüpfung von Kontinuitätsgleichung und Impulsgleichung liefert:

$$\frac{dA}{A} = \frac{dp}{\rho c^2} - \frac{d\rho}{\rho} = \frac{dp}{\rho c^2} \left(1 - \frac{c^2}{(dp/d\rho)} \right)$$

Oder wieder mit $\frac{dp}{\rho c^2} = -\frac{dc}{c}$

$$\frac{dA}{A} = -\frac{dc}{c} \left(1 - \frac{c^2}{(dp/d\rho)} \right)$$

In der Impulsgleichung ist bereits Reibungsfreiheit vorausgesetzt.

Wird außerdem der Strömung keine Wärme zu- oder abgeführt, dann verläuft die Zustandsänderung isentrop:

$$\left(\frac{dp}{d\rho} \right) \equiv \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_s = a^2$$

Wir erhalten für die **isentropen Düsenströmung**: $\frac{dA}{A} = -\frac{dc}{c} \left(1 - \frac{c^2}{a^2} \right)$

Die Mach-Zahl als Kennzahl zur Charakterisierung der Strömung

Mach-Zahl: $Ma = c / a$

Unterschall: $Ma < 1$

Überschall: $Ma > 1$

Schallnahe Strömung: $Ma \approx 1$

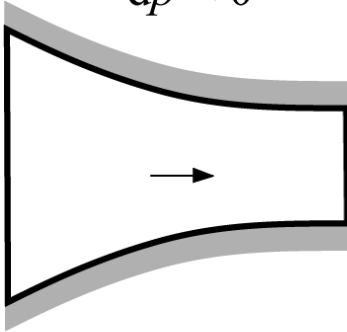
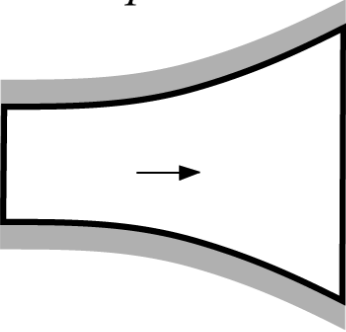
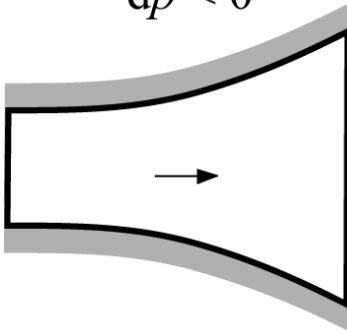
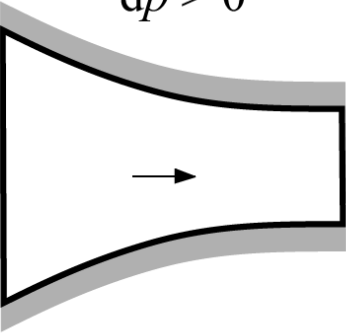
Zusammenhang zwischen Querschnitts- und Geschwindigkeits- und Druckänderung für **isentropen Düsenströmung**:

$$\frac{dA}{A} = -\frac{dc}{c} (1 - Ma^2) \quad \frac{dc}{c} = -\frac{dA}{A} \frac{1}{1 - Ma^2} \quad \frac{dp}{\rho c^2} = \frac{dA}{A} \frac{1}{1 - Ma^2}$$

Beziehungen:

$$\frac{dc}{c} = -\frac{dA}{A} \frac{1}{1 - \text{Ma}^2}$$

$$\frac{dp}{\rho c^2} = \frac{dA}{A} \frac{1}{1 - \text{Ma}^2}$$

	Düse , $dc > 0$	Diffusor , $dc < 0$
Unterschall $1 - \text{Ma}^2 > 0$	$dA < 0$ $dp < 0$ 	$dA > 0$ $dp > 0$ 
Überschall $1 - \text{Ma}^2 < 0$	$dA > 0$ $dp < 0$ 	$dA < 0$ $dp > 0$ 

4.1.3.2 Lokale Zustandsgrößen einer isentropen Gasströmung aus dem Ruhezustand

Energiegleichung

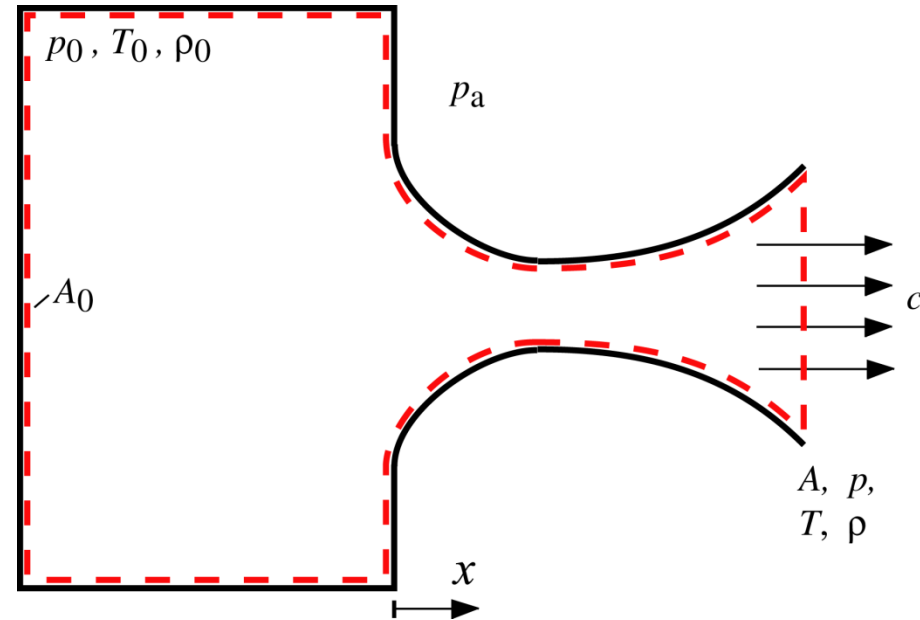
(adiabat, ohne techn. Arbeit):

$$h_0 = \text{const} = h + \frac{1}{2}c^2$$

Ideales Gas: $dh = c_p dT$, $c_p = \text{const}$

Mit $a^2 = \kappa RT$ und $\text{Ma} = \frac{c}{a}$ folgt:

$$\frac{T_0}{T} = 1 + \frac{\kappa - 1}{2} \text{Ma}^2$$



Reibungsfrei: Mit der Isentropenbeziehung $\frac{p}{\rho^\kappa} = \text{const}$ ergibt sich dann

$$\frac{p_0}{p} = \left(1 + \frac{\kappa - 1}{2} \text{Ma}^2\right)^{\frac{\kappa}{\kappa - 1}} \quad \text{und} \quad \frac{\rho_0}{\rho} = \left(1 + \frac{\kappa - 1}{2} \text{Ma}^2\right)^{\frac{1}{\kappa - 1}}$$

Impulsgleichung:

$$c \, dc = d \left(\frac{c^2}{2} \right) = -\frac{dp}{\rho}$$

Isentropenbeziehung:

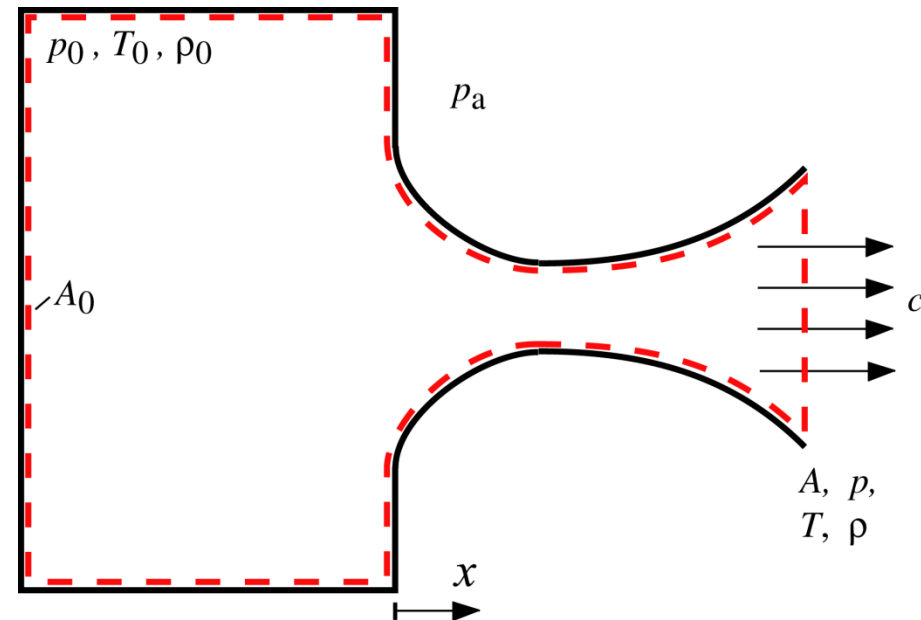
$$\frac{p}{\rho^\kappa} = \frac{p_0}{\rho_0^\kappa} \quad \rho = \rho_0 \left(\frac{p}{p_0} \right)^{\frac{1}{\kappa}}$$

Impulsgleichung integriert

$$\int_0^c d \left(\frac{c^2}{2} \right) = -\frac{1}{\rho_0} \int_{p_0}^p \left(\frac{p}{p_0} \right)^{-\frac{1}{\kappa}} dp$$

Isentrope Ausströmgeschwindigkeit:

$$\frac{c^2}{2} = -\frac{p_0^{1/\kappa}}{\rho_0} \frac{1}{1 - \frac{1}{\kappa}} \left[p^{1 - \frac{1}{\kappa}} \right]_{p_0}^p = \frac{\kappa}{\kappa - 1} \frac{p_0}{\rho_0} \left(1 - \underbrace{\left(\frac{p}{p_0} \right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}}}_{\frac{T}{T_0}} \right)$$



Maximale Austrittsgeschwindigkeit

Die im Ruhezustand gespeicherte thermische Energie kann rechnerisch vollständig in kinetische Energie umgesetzt werden, wenn Druck und Temperatur auf den Wert Null abgesenkt werden.

$$\lim_{p,T \rightarrow 0} c = c_{max} = \sqrt{2 \frac{\kappa}{\kappa - 1} \frac{p_0}{\rho_0}} = \sqrt{2 \frac{\kappa}{\kappa - 1} R T_0}$$

Dies entspricht dem Wert, den wir schon in Abschnitt 4.1 abgeleitet hatten.

Wir haben jetzt aber die notwendige Form der Düse geklärt, die erst die Voraussetzung schafft, sich diesem Wert zu nähern.

Es muss notwendig eine [konvergent/divergente Düse](#) sein.

Im Austritt herrscht in jedem Fall Überschall, wenn c_{\max} erreicht werden soll.

Da die Temperatur bei Erreichen dieser Geschwindigkeit auf den Wert Null abgesinkt, wird notwendigerweise auch die Schallgeschwindigkeit Null.

Damit geht aber die Machzahl gegen unendlich: $Ma \rightarrow \infty$

Nur eine **konvergent/divergente Düse** erlaubt die Grenzgeschwindigkeit zu erreichen.

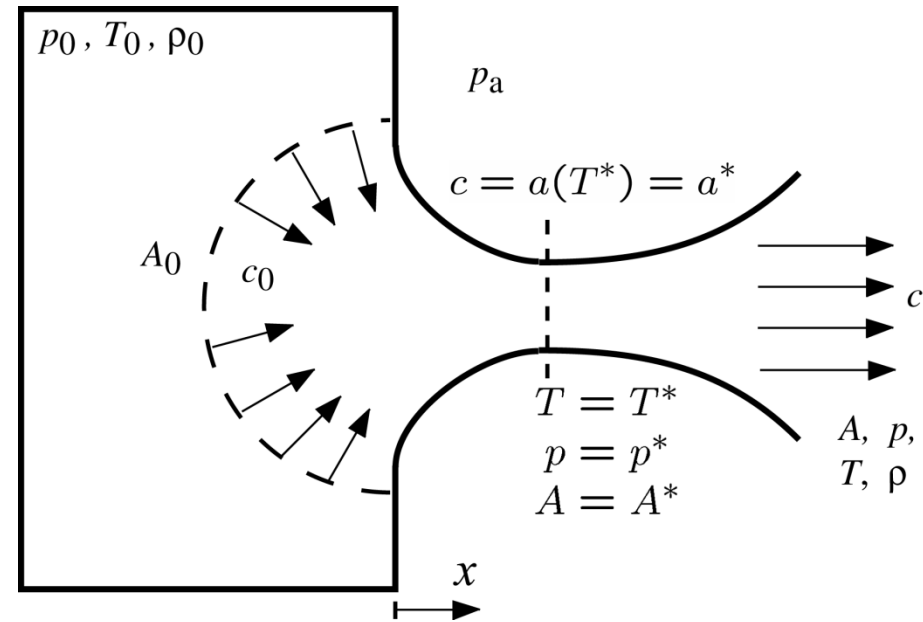
Bem.: Technisch ist dies neben dem unvermeidlichen Einfluss der Reibung auch wegen des damit unendlichen Düsenquerschnitts nicht erreichbar. Außerdem beweist die Thermodynamik, dass der absolute Nullpunkt durch keine Maßnahme erreicht werden kann (← 3. Hauptsatz der Thermodynamik).

Kritische Größen bei $Ma=1$, Index *:

$$p^*, T^*, \rho^*, a^*, A^*$$

$$\frac{T_0}{T^*} = \left[1 + \frac{\kappa - 1}{2} \right] = \left[\frac{\kappa + 1}{2} \right]$$

$$\frac{p_0}{p^*} = \left[\frac{\kappa + 1}{2} \right]^{\frac{\kappa}{\kappa - 1}}, \quad \frac{\rho_0}{\rho^*} = \left[\frac{\kappa + 1}{2} \right]^{\frac{1}{\kappa - 1}}$$



Zahlenwerte für Luft ($\kappa = 1,4$):

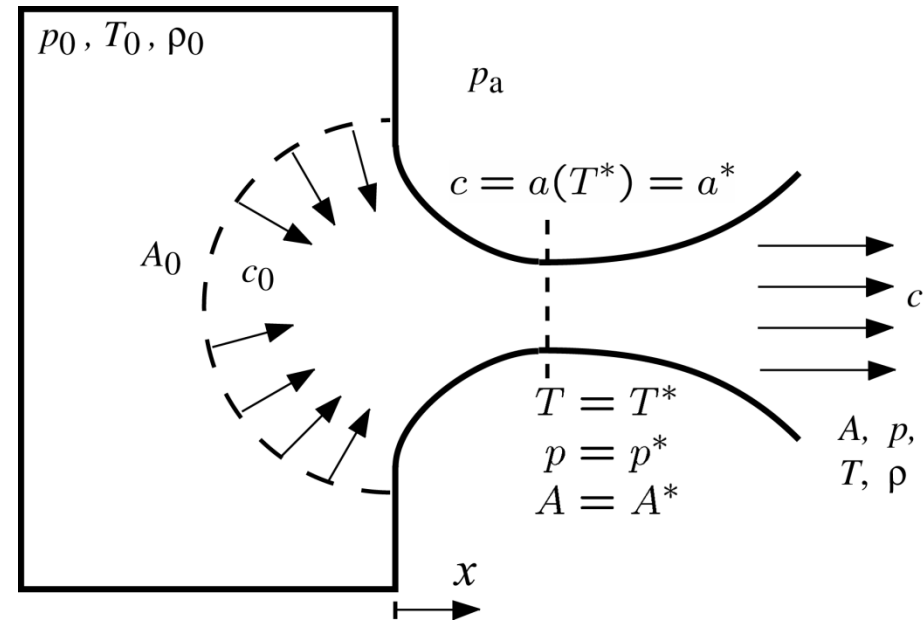
$$\frac{p_0}{p^*} = 1,89, \quad \frac{T_0}{T^*} = 1,2, \quad \frac{\rho_0}{\rho^*} = 1,58$$

Berechnung des **kritischen Querschnittes A^*** mit Massenerhaltung:

$$\rho c A = \rho^* a^* A^*$$

Bezogene Größen:

$$\frac{A}{A^*} = \frac{\rho^* a^*}{\rho c} = \frac{\rho^* a^*}{\rho a \text{Ma}} = \frac{1}{\text{Ma}} \frac{\rho^*}{\rho} \sqrt{\frac{T^*}{T}}$$



Es ergibt sich:

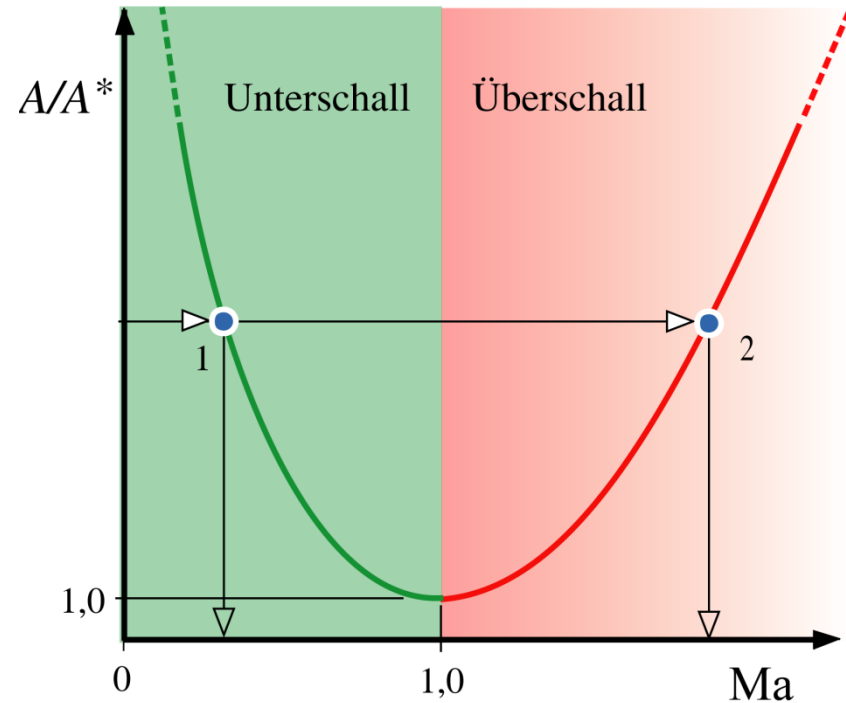
$$\begin{aligned} \frac{A}{A^*} &= \frac{1}{\text{Ma}} \frac{\rho^*}{\rho_0} \frac{\rho_0}{\rho} \sqrt{\frac{T^*/T_0}{T/T_0}} = \frac{1}{\text{Ma}} \frac{\left[1 + \frac{\kappa-1}{2} \text{Ma}^2\right]^{\frac{1}{\kappa-1}}}{\left[\frac{\kappa+1}{2}\right]^{\frac{1}{\kappa-1}}} \left[\frac{1 + \frac{\kappa-1}{2} \text{Ma}^2}{\frac{\kappa+1}{2}}\right]^{\frac{1}{2}} \\ &= \frac{1}{\text{Ma}} \left[\frac{1 + \frac{\kappa-1}{2} \text{Ma}^2}{\frac{\kappa+1}{2}}\right]^{\frac{\kappa+1}{2(\kappa-1)}} \end{aligned}$$

Grafische Darstellung

$$\frac{A}{A^*} = \frac{1}{\text{Ma}} \left[\frac{1 + \frac{\kappa-1}{2} \text{Ma}^2}{\frac{\kappa+1}{2}} \right]^{\frac{\kappa+1}{2(\kappa-1)}}$$

Im engsten Querschnitt A^* einer durchströmten Lavaldüse möge die Schallgeschwindigkeit auftreten.

Dann gibt es zwei Lösungen 1 und 2 mit $\text{Ma} < 1$ und $\text{Ma} > 1$ für jede andere Querschnittsfläche $A > A^*$.



Zu jeder Düse gibt es einen solchen Querschnitt A^* , zumindest als fiktiven Querschnitt.

Tritt im engsten Querschnitt die Schallgeschwindigkeit auf, so nimmt der Massenstrom den in für diese Düse bei gegebenem Ruhezustand maximal möglichen Wert an.

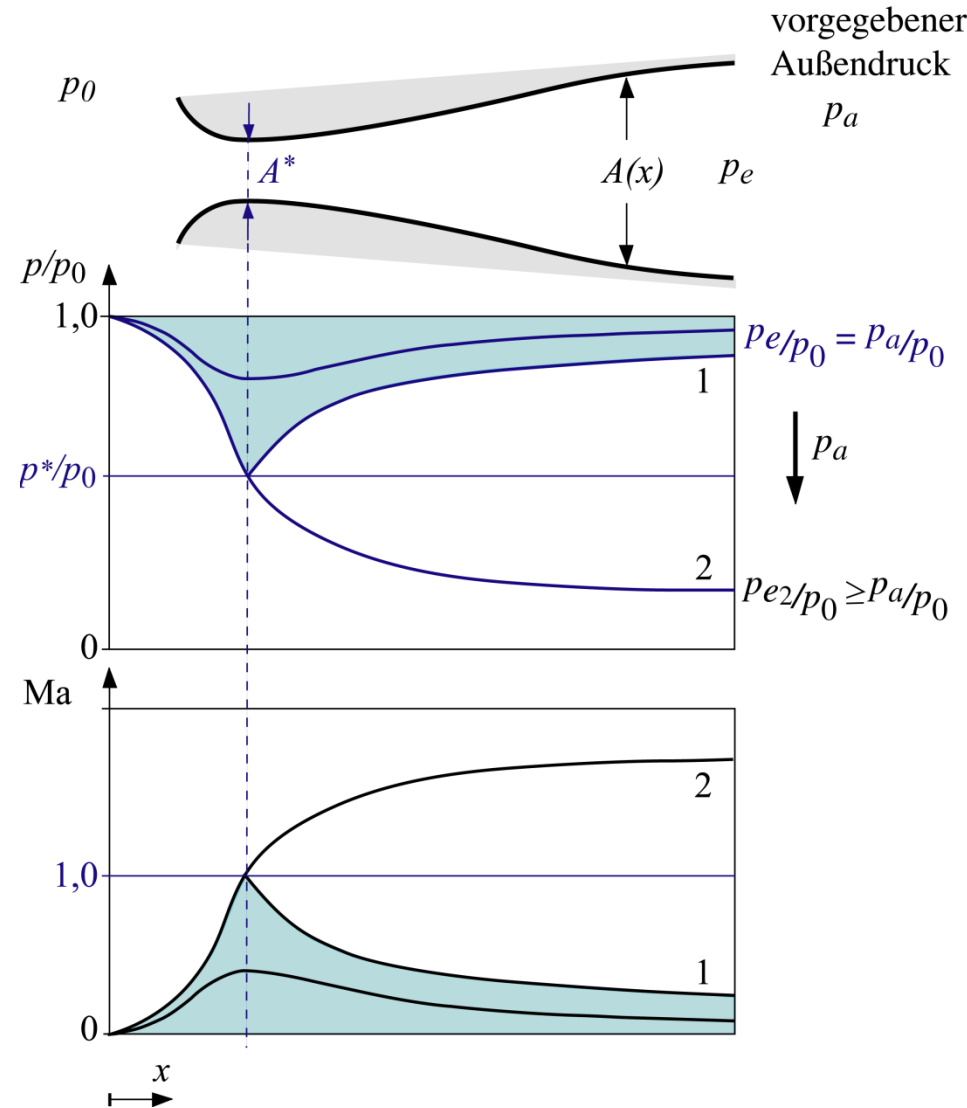
Diskussion der isentropen Strömungsvorgänge in einer Laval-Düse

Druckverhältnis p/p_0 und Machzahl Ma in Abhängigkeit von Düsenkontur und Umgebungsdruckverhältnis p_a/p_0 .

Reine Unterschallströmung:

In Abhängigkeit von p_a/p_0 sind alle Zustände im blau hinterlegten Bereich erreichbar.

Fällt p_a/p_0 auf p_a/p_0 wird die Grenzkurve 1 erreicht. Dann liegen im engsten Wuerschnitt die kritische Zustände vor: $Ma(A^*)=1$



Diskussion der isentropen Strömungsvorgänge in einer Laval-Düse (kont.)

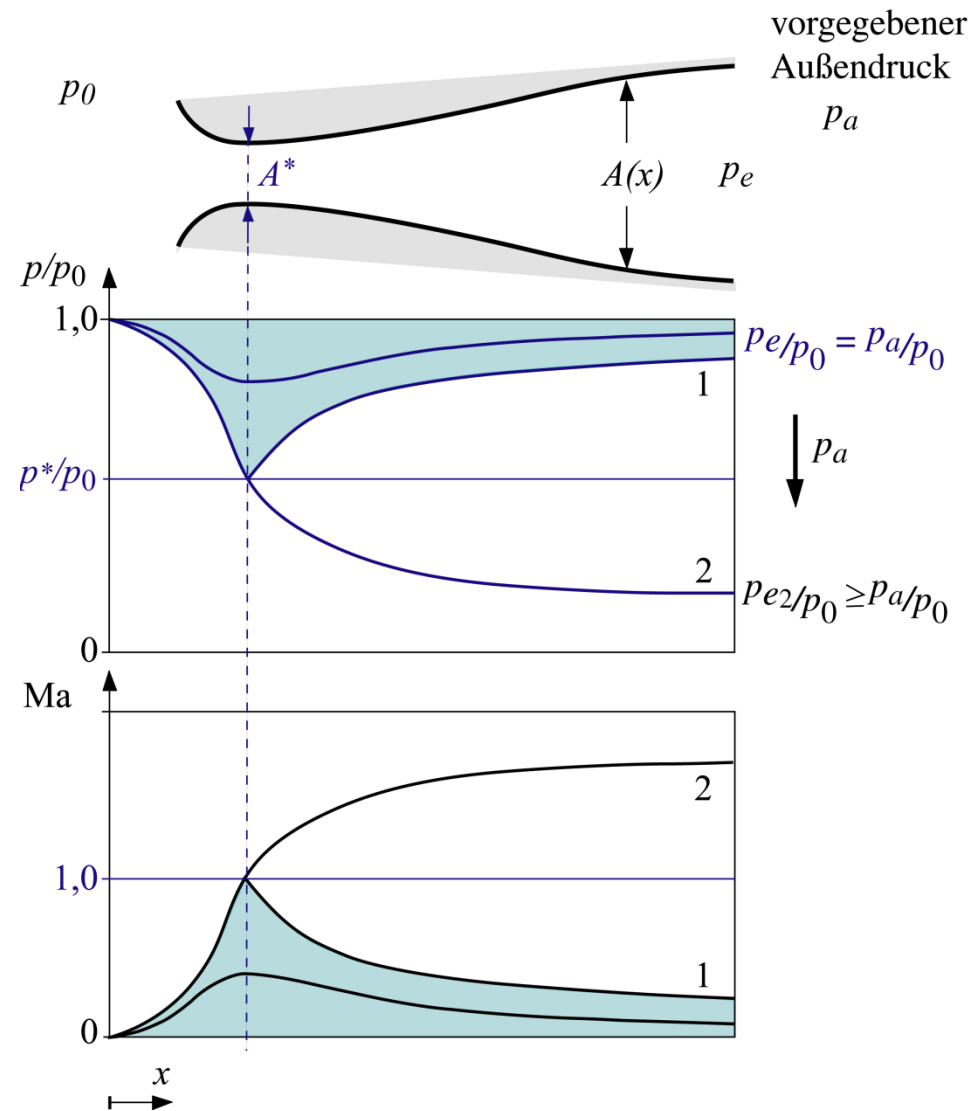
Überschallströmung:

Überschall tritt hinter dem engsten Querschnitt erst auf, falls p_a/p_0 unter bestimmtes Druckverhältnis p_e/p_0 fällt.

Isentrope Strömungsverläufe in der gesamten Düse sind erst dann möglich, wenn der Druck auf p_{e2}/p_0 abfällt*).

Der einzig mögliche Lösungsverlauf ist dann durch die Kurve 2 gegeben.

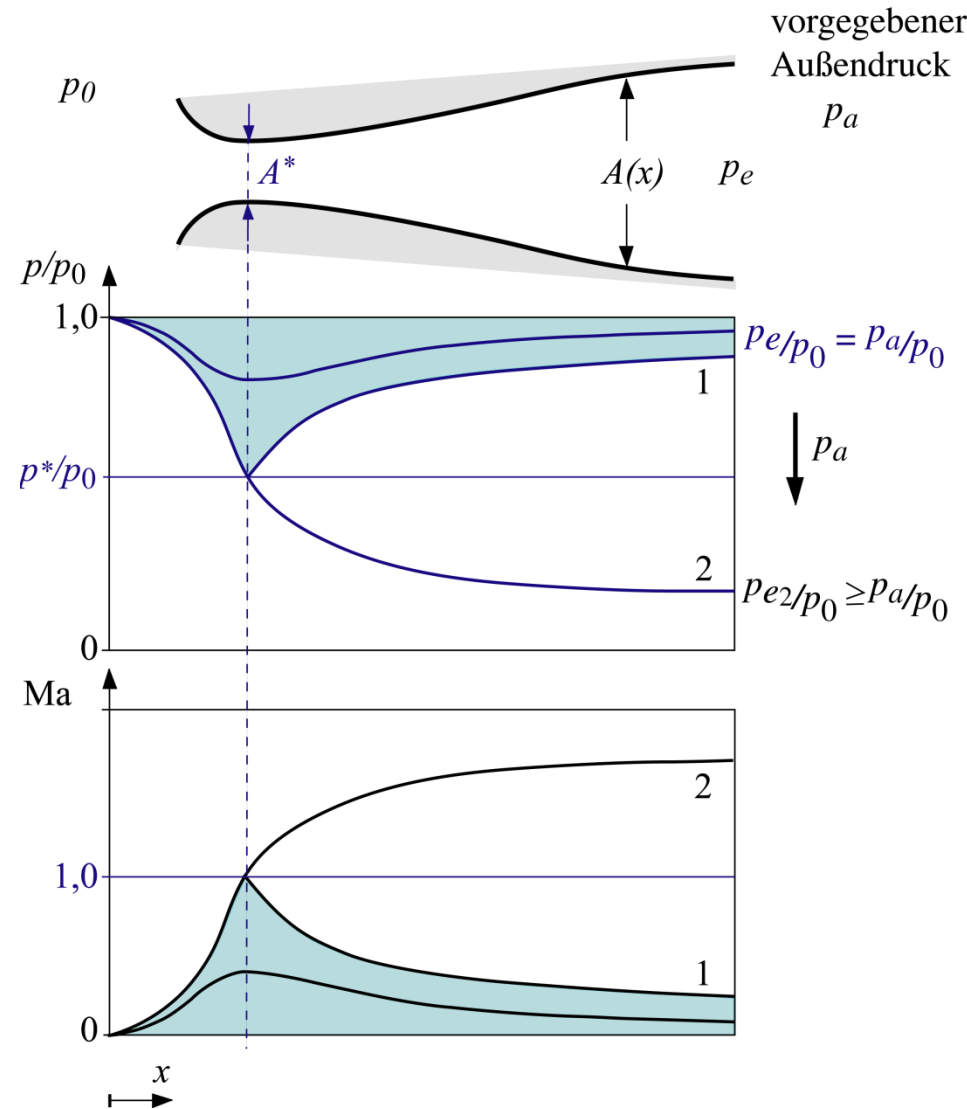
*) Der Zwischenbereich wird später diskutiert.



Diskussion der isentropen Strömungsvorgänge in einer Laval-Düse (kont.)

Liegt der Druck p_a in der Umgebung niedriger als der isentrop erreichbare Druck p_{e2} , so ändert sich im Inneren der Düse der Strömungszustand nicht.

Die Information über den niedrigen Druck kann nicht stromauf, also überschallschnell, an das strömende Gas weitergeleitet werden.



Strömungsvorgänge mit Entropieproduktion in einer Laval-Düse (kont.)

Liegt der Umgebungsdruck zwischen den Grenzkurven 1 und 2 kann sich das Gas nicht durch isentrope Zustandsänderungen dem Druck am Düsenaustritt anpassen.

Hinter dem engsten Querschnitt expandiert das Gas zunächst in den Überschall, um in einem bestimmten Düsenquerschnitt durch nahezu sprunghafte Änderung des Druckes, der Dichte und der Temperatur in einen Unterschallzustand $Ma < 1$ überzugehen.

Strömungsvorgänge mit Entropieproduktion in einer Laval-Düse (kont.)

Bei diesem sprunghaften Übergang wird durch innere Reibung und Wärmeleitung Entropie produziert.

Diese sprunghaften, nichtisentropen Änderungen erfolgen in einem sogenannten **Verdichtungsstoß**.

Im passenden Kanalquerschnitt stellt sich ein senkrechter Verdichtungsstoß ein.

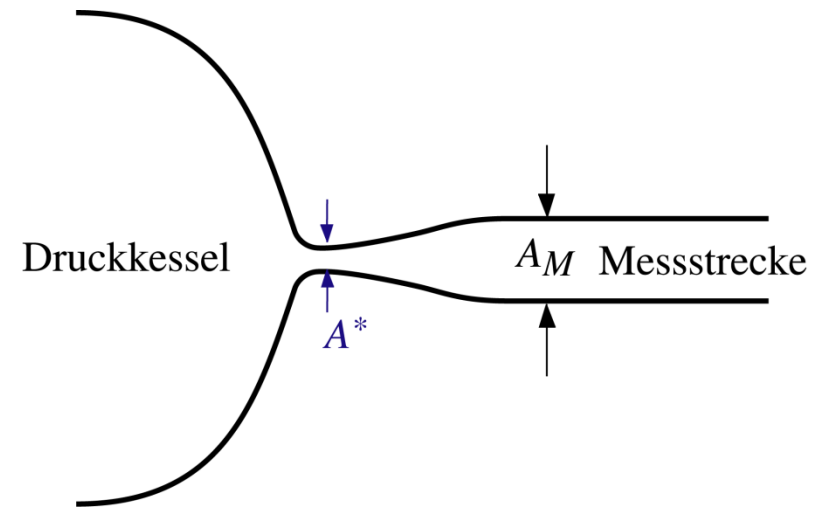
Diese nichtisentrope Druckstörung breitet sich überschallschnell relativ zum strömenden Gas aus, $Ma_S > 1$.

Anwendung: Überschallwindkanal

Mögliche Bauart:

Sehr großer Druckkessel mit abgeschlossener
Lavaldüse, Ausblasen in die Umgebung

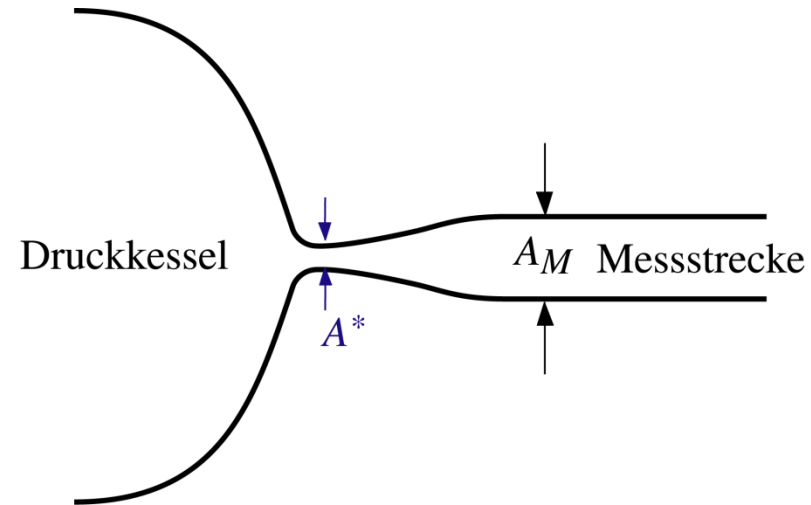
Das Querschnittsverhältnis der Messstrecke A_M/A^*
alleine bestimmt die Machzahl in der Messstrecke,
solange der Kesseldruck für eine Überschallströmung
ausreicht.*)



Bei vorgegebener Geometrie der Düse ist damit die Machzahl als wichtige Kenngröße der Strömungsverhältnisse in der Messstrecke konstant, solange der Kesseldruck nicht zu weit abgesunken ist.

Anwendung: Überschallwindkanal (kont.)

Der Massenstrom wird durch den engsten Querschnitt und die Ruhegrößen bestimmt.

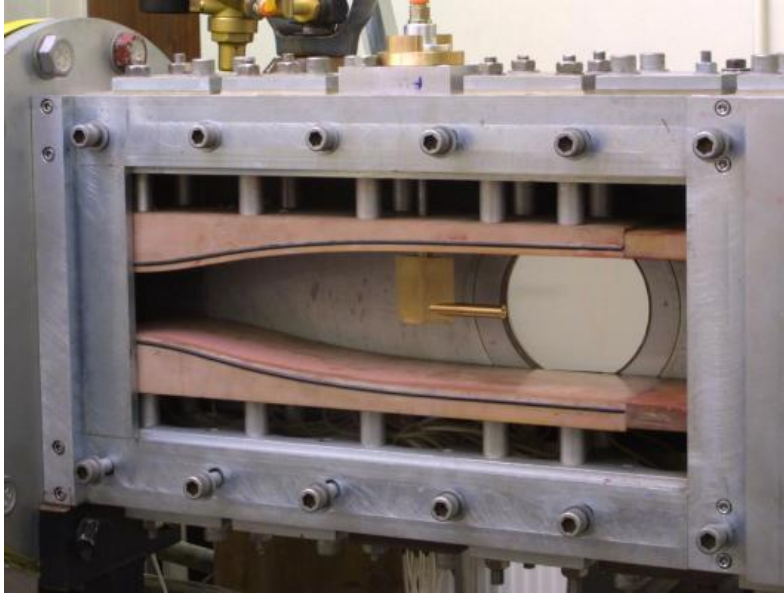


Es gilt, wenn sich der Ruhedruck nur langsam ändert (quasistationäre Verhältnisse):

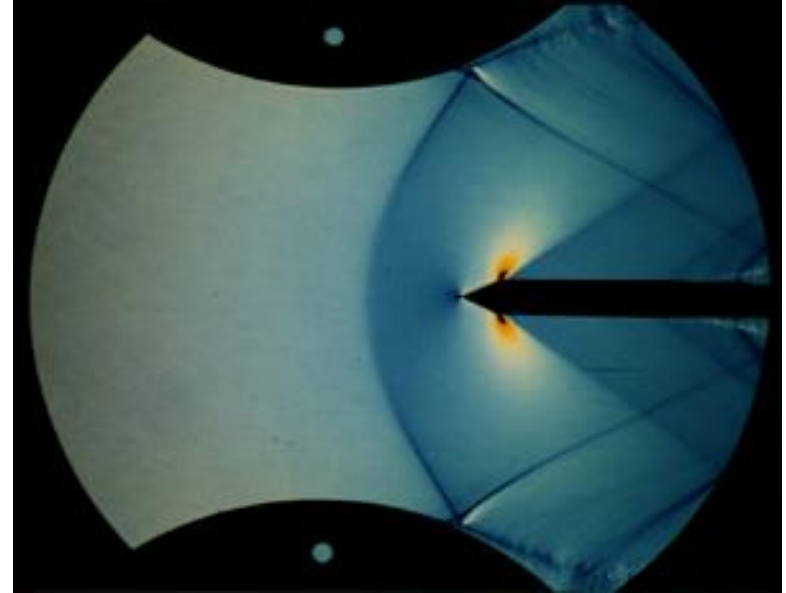
$$\dot{m}(t) = \rho^* A^* a^* = \left(\frac{\rho^*}{\rho_0}\right) A^* \sqrt{\frac{\kappa R T^*}{T_0}} \rho_0 \sqrt{T_0} = \left(\frac{2}{\kappa + 1}\right)^{\frac{1}{\kappa - 1}} A^* \sqrt{\frac{2}{\kappa + 1}} p_0(t) \sqrt{\frac{\kappa}{R T_0}}$$

Mit dem Kesselvolumen lässt sich die Laufzeit des Windkanals errechnen, bis zu der die Überschallströmung in eine Unterschallströmung übergeht.

Lavaldüse und Messstrecke eines Überschallwindkanals



Farbige Schlieren-Aufnahme eines Objektes in Überschallströmung



Wegen der Mehrdimensionalität der Strömung bildet sich vor dem Hindernis eine gekrümmte Stoßfront aus.

Der senkrechte Verdichtungsstoß stellt sich nur an einem Punkt ein.

Dort schließen sich schräge Verdichtungsstöße an, die von den Kanalwänden reflektiert werden.

Astronomisches Beispiel für eine Kopfwelle

“Bugwelle” im interstellaren Gas
hervorgerufen durch den
Sonnenwind des Sterns LL-ori.

Die gekrümmte Stoßfront geht mit
zunehmenden Abstand zum Objekt
in immer schwächere, schräge
Verdichtungsstöße (abnehmende
Winkel) über.



Fernab vom Hindernis geht der Winkel dieser schrägen Stöße asymptotisch in den Machschen-
Winkel über.

Leistungsvergleich

Formel 1: 770 PS

Boeing 747 Jumbo: 17.600 PS

Ariane 5

Triebwerk Vulcain 2: 3.500.000 PS

entspricht 2570 MW bei einer Brenndauer
von ca. 10 Minuten,

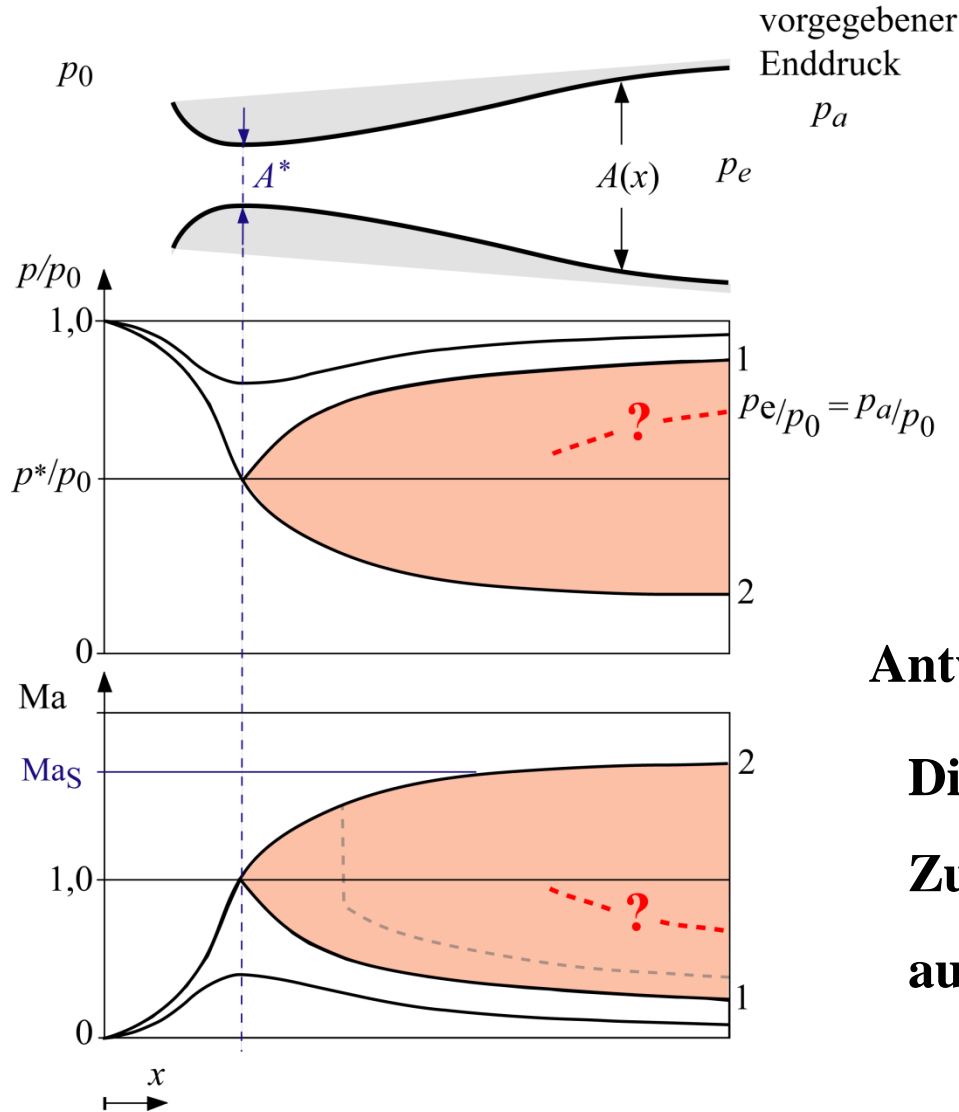
Energieaufwand 1542 GJ

Zum Vergleich: KKW ca. 2000 MW



Die Brennkammer besitzt die Form einer Lavaldüse. Aufgeklappt, schaut man auf den Injektorkopf mit den Einspritzdüsen für flüssigen Sauerstoff und Wasserstoff.

Offene Frage: Was passiert für Drücke im Bereich $p_{e1}/p_0 < p/p_0 < p_{e2}/p_0$



Antwort:

Die Annahme der isentropen Zustandsänderung kann nicht mehr aufrechterhalten werden!

Zusammenfassung für isentrope Strömungen in Kanälen mit veränderlichem Querschnitt

Definition der Machzahl: $Ma = \frac{c}{a}$

Der Übergang in den Überschall, $Ma > 1$, erfordert konvergent-divergente Düsen.

Adiabat, ohne Zufuhr von technischer Arbeit: $\frac{T_0}{T} = 1 + \frac{\kappa - 1}{2} Ma^2$

Max. theoretische Geschwindigkeit ($T = 0$): $c_{\max} = \sqrt{2 h_0} \stackrel{iG}{=} \sqrt{2 \frac{\kappa}{\kappa - 1} R T_0}$

Zusätzlich reibungsfrei: $\frac{p_0}{p} = \frac{T_0}{T}^{\frac{\kappa}{\kappa-1}}, \quad \frac{\rho_0}{\rho} = \frac{T_0}{T}^{\frac{1}{\kappa-1}}$

Zusammenfassung für isentrope Strömungen in Kanälen mit veränderlichem Querschnitt (kont.)

Im engsten oder kritischen Querschnitt A^* einer Lavaldüse gilt für die Machzahl:

$$\text{Ma} \leq 1$$

Kritische Größen für $\text{Ma} = 1$:

$$\text{Ma} = 1 : \quad c^* = a^*, \quad \frac{T_0}{T^*} = \frac{\kappa + 1}{2}, \quad \frac{p_0}{p^*} = \frac{\kappa + 1}{2}^{\frac{\kappa}{\kappa-1}}, \quad \frac{\rho_0}{\rho^*} = \frac{\kappa + 1}{2}^{\frac{1}{\kappa-1}}$$

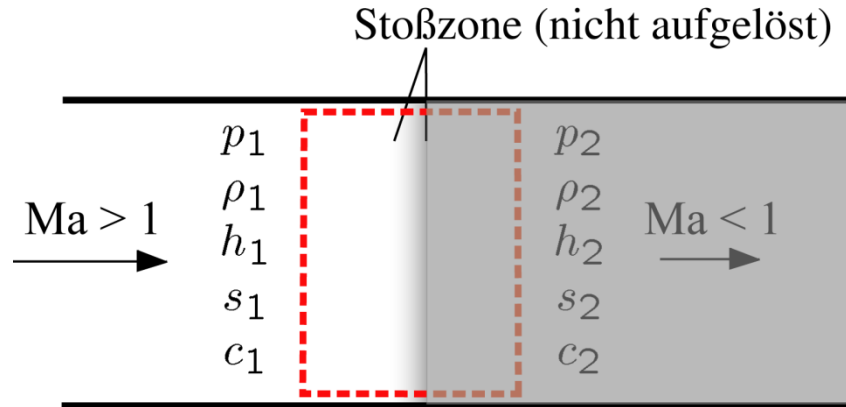
Wird $\text{Ma} = 1$ im engsten Querschnitt erreicht, ist für den gegebenen Ruhezustand der maximale Massendurchsatz der Laval-Düse erreicht.

Bilanzen (stationär):

Masse: $\rho_1 c_1 = \rho_2 c_2$

Impuls: $p_1 + \rho_1 c_1^2 = p_2 + \rho_2 c_2^2$

Energie: $h_1 + \frac{c_1^2}{2} = h_2 + \frac{c_2^2}{2}$



Wegen **Massen-** und **Impulsbilanz** gilt

$$\frac{p_1}{\rho_1 c_1} + c_1 = \frac{p_2}{\rho_2 c_2} + c_2$$

Für ein ideales Gas gilt für die Schallgeschwindigkeit:

$$a^2 = \kappa \frac{p}{\rho}$$

Für die Geschwindigkeiten über den Stoß gilt folgende nichtlineare Gleichung:

$$c_1 - c_2 = \frac{a_2^2}{\kappa c_2} - \frac{a_1^2}{\kappa c_1} \quad (1)$$

Die **Energiebilanz** formuliert zwischen einem Zustand 1 und fiktivem,

kritischen Zustand * liefert für ein ideales Gas konstanter spezifischer Wärmen:

$$c_p T_1 + \frac{c_1^2}{2} = c_p T^* + \frac{a^{*2}}{2}$$

Mit

$$c_p T = \frac{\kappa}{\kappa - 1} R T = \frac{a^2}{\kappa - 1}, \quad a^2 = \kappa R T$$

wird daraus:

$$a_1^2 + \frac{\kappa - 1}{2} c_1^2 = a^{*2} + \frac{\kappa - 1}{2} a^{*2} = \frac{\kappa + 2}{2} a^{*2}$$

Adiabate Strömung \Rightarrow **Ruhetemperatur T_0 ändert sich nicht!**

Damit bleiben auch kritische Temperatur und kritische Geschwindigkeit über

den Stoß konstant:

$$a_1^2 = \frac{\kappa + 1}{2} a^{*2} - \frac{\kappa - 1}{2} c_1^2, \quad a_2^2 = \frac{\kappa + 1}{2} a^{*2} - \frac{\kappa - 1}{2} c_2^2 \quad (2)$$

Für die Geschwindigkeitsänderung über den Stoß hat man folgende beiden Gleichungen zur Verfügung:

$$c_1 - c_2 = \frac{a_2^2}{\kappa c_2} - \frac{a_1^2}{\kappa c_1}$$

$$a_1^2 = \frac{\kappa + 1}{2} a^{*2} - \frac{\kappa - 1}{2} c_1^2,$$

$$a_2^2 = \frac{\kappa + 1}{2} a^{*2} - \frac{\kappa - 1}{2} c_2^2$$

Dies ist richtig, falls gilt:

$$c_1 - c_2 = a^{*2} \left(\frac{1}{c_2} - \frac{1}{c_1} \right)$$

Daraus folgt:

$$c_1 c_2 = a^{*2}$$

Die Beziehung

$$c_1 c_2 = a^{*2}$$

zeigt Folgendes:

Wenn nicht $c_1 = c_2 = a^*$ ist, muss eine der beiden Geschwindigkeiten größer, die andere kleiner als die kritische Geschwindigkeit sein.

Es findet also über die Stoßzone ein Wechsel von Überschall zu Unterschall oder bisher nicht ausgeschlossen ein Wechsel von Unterschall nach Überschall statt.

Letzter Fall verletzt jedoch den 2. Hauptsatz der Thermodynamik und kommt nicht vor, wie wir weiter unten zeigen werden.

Die Beziehung

$$c_1 c_2 = a^{*2}$$

lässt sich nutzen, um die Machzahl nach dem Stoß, Ma_2 , als Funktion der Machzahl vor dem Stoß, Ma_1 , anzugeben, indem man beide Seiten durch $a_1 a_2$ dividiert.

Aus

$$\frac{c_1}{a_1} \frac{c_2}{a_2} = Ma_1 Ma_2 = \frac{a^*}{a_1} \frac{a^*}{a_2} = \sqrt{\frac{T^*}{T_1} \frac{T^*}{T_2}} = \sqrt{\frac{T^*}{T_0} \frac{T_0}{T_1} \frac{T^*}{T_0} \frac{T_0}{T_2}} = \frac{T^*}{T_0} \sqrt{\frac{T_0}{T_1} \frac{T_0}{T_2}}$$

folgt mit

$$\frac{T_0}{T^*} = \frac{\kappa + 1}{2}, \quad \frac{T_0}{T} = 1 + \frac{\kappa - 1}{2} Ma^2$$

$$\boxed{Ma_2^2 = \frac{1 + \frac{\kappa - 1}{2} Ma_1^2}{\kappa Ma_1^2 - \frac{\kappa - 1}{2}}}$$

Der Grenzübergang

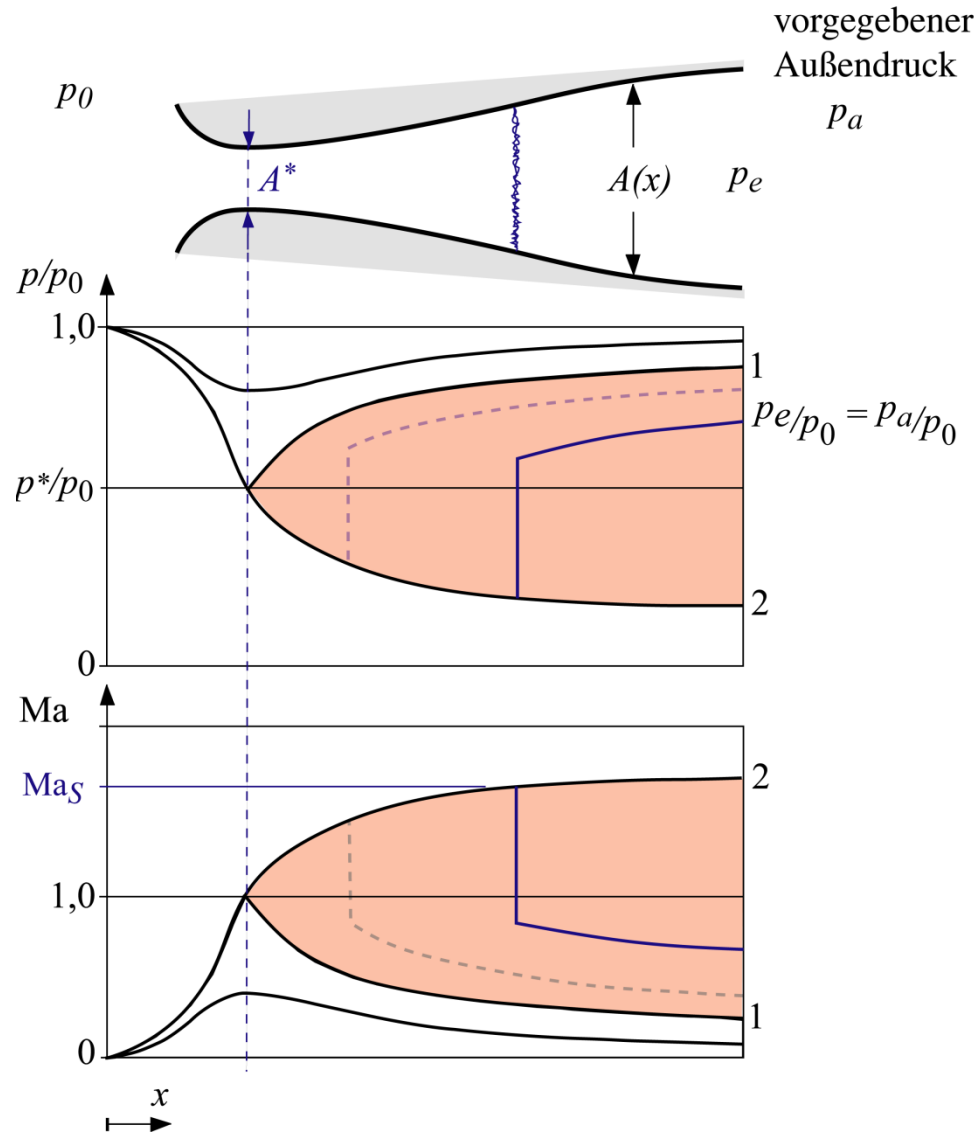
$$\lim_{\text{Ma}_1 \rightarrow 1} \text{Ma}_2 = 1$$

in

$$\text{Ma}_2^2 = \frac{1 + \frac{\kappa-1}{2} \text{Ma}_1^2}{\kappa \text{Ma}_1^2 - \frac{\kappa-1}{2}}$$

zeigt, dass eine schallschnelle Strömung keinen Sprung in den Strömungsgrößen zulässt.

Diskussion der Düsenströmung mit Verdichtungsstoß (nicht isentrop!)



Das Dichteverhältnis erhält man aus der Massenbilanz:

$$\begin{aligned} \frac{\rho_2}{\rho_1} &= \frac{c_1}{c_2} = \left(\frac{c_1}{a^*}\right)^2 = \left(\frac{c_1}{a_1}\right)^2 \left(\frac{a_1}{a^*}\right)^2 \\ &= \text{Ma}_1^2 \left(\frac{T_1}{T^*}\right) = \text{Ma}_1^2 \left(\frac{T_1}{T_0}\right) \left(\frac{T_0}{T^*}\right) = \text{Ma}_1^2 \left(\frac{1}{1 + \frac{\kappa-1}{2} \text{Ma}_1^2}\right) \left(\frac{\kappa+1}{2}\right) \end{aligned}$$

$$\boxed{\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{(\kappa+1) \text{Ma}_1^2}{2 + (\kappa-1) \text{Ma}_1^2}}$$

Für sehr große Machzahlen, $\text{Ma}_1 \rightarrow \infty$, strebt das Dichteverhältnis einem endlichen Grenzwert zu.

$$\lim_{\text{Ma}_1 \rightarrow \infty} \rho_2/\rho_1 = \frac{\kappa+1}{\kappa-1} > 1$$

Das Druckverhältnis folgt aus der Impulsgleichung:

$$p_2 + \rho_2 c_2^2 = p_1 + \rho_1 c_1^2$$

Mit

$$\frac{c_2}{c_1} = \frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{2 + (\kappa - 1) \text{Ma}_1^2}{(\kappa + 1) \text{Ma}_1^2}$$

ergibt sich:

$$\frac{p_2}{p_1} = 1 + \frac{\rho_1 c_1^2}{p_1} - \frac{\rho_2 c_2^2}{p_1} = 1 + \frac{\rho_1 c_1^2}{p_1} \left(1 - \frac{\rho_2 c_2^2}{\rho_1 c_1^2}\right) = 1 + \kappa \text{Ma}_1^2 \left(1 - \frac{c_2}{c_1}\right)$$

$$\frac{p_2}{p_1} = 1 + \frac{2\kappa}{\kappa + 1} (\text{Ma}_1^2 - 1)$$

Für sehr große Machzahlen, $\text{Ma}_1 \rightarrow \infty$, strebt das Druckverhältnis und damit auch das Temperaturverhältnis anders als das Dichteverhältnis keinem Grenzwert zu:

$$\lim_{\text{Ma}_1 \rightarrow \infty} p_2/p_1 = \infty$$

Zusammenfassung zum Verdichtungsstoß

Geschwindigkeits-, Machzahländerung: $c_1 c_2 = a^{*2} \quad \text{Ma}_2^2 = \frac{1 + \frac{\kappa-1}{2} \text{Ma}_1^2}{\kappa \text{Ma}_1^2 - \frac{\kappa-1}{2}}$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Dichteverhältnis: } \frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{c_1}{c_2} = \frac{(\kappa + 1) \text{Ma}_1^2}{2 + (\kappa - 1) \text{Ma}_1^2} \\ \text{Druckverhältnis: } \frac{p_2}{p_1} = 1 + \frac{2\kappa}{\kappa + 1} (\text{Ma}_1^2 - 1) \end{array} \right\} \text{Ma}_1 > 1 \Rightarrow \begin{array}{l} \rho_2 > \rho_1 \\ p_2 > p_1 \end{array}$$

Ein Kompression des Gases ($p_2 > p_1$) kommt demnach nur zustande, wenn die Anströmmachzahl $\text{Ma}_1 > 1$ ist.

Zusammenfassung zum Verdichtungsstoß (kont.)

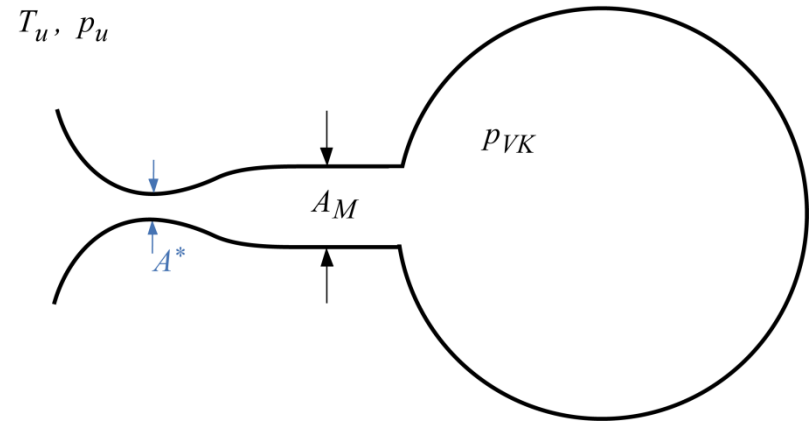
Verdichtungsstoß versus Schallwelle

In einem ruhenden Medium breitet sich ein Verdichtungsstoß oder eine Stoßwelle mit Überschallgeschwindigkeit aus.

Je größer der Druckanstieg, desto schneller breitet sich die Stoßwelle im Medium aus.

Dies unterscheidet Stoßwellen wesentlich von akustischen Wellen (Schall), die sich genau mit Schallgeschwindigkeit ausbreiten. Dichte und Drucksprünge sind dabei infinitesimal klein.

Ein Windkanal mit Messquerschnitt A_M saugt Luft mit der Gaskonstanten R aus der Umgebung in einen Vakuumkessel mit Volumen V . Durch das Querschnittsverhältnis A_M/A^* ist der Kanal für eine Machzahl von $Ma_M = 2$ in der Messstrecke ausgelegt.



Fragestellungen:

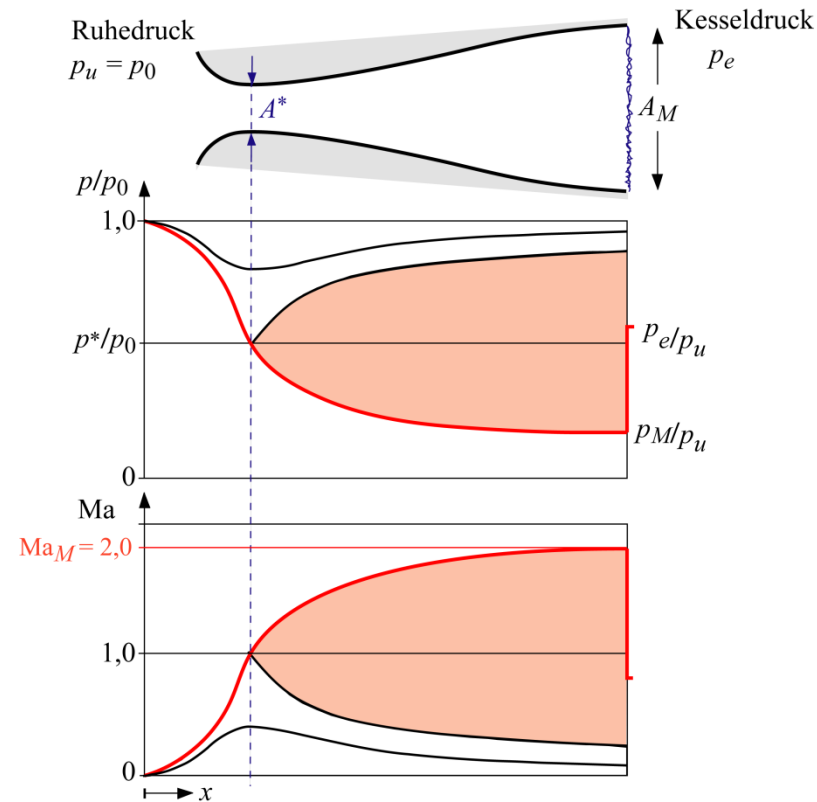
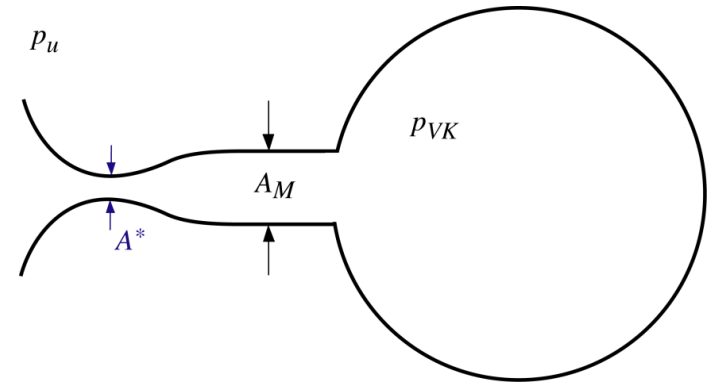
Bis zu welchem Kesseldruck p_{VK} wird sich in der Messstrecke die gewünschte Überschallströmung einstellen?

Wie lange kann maximal in der Messstrecke gemessen werden, wenn der Kessel anfänglich evakuiert war?

Solange kein Verdichtungsstoß in der Messstrecke auftritt, bleibt die Überschallströmung erhalten.

Der begrenzende Druck im Vakuumkessel ist der Druck hinter einem senkrechten Verdichtungsstoß in der Messstrecke bei $Ma_M = 2$.

p_{VM} darf also bis nahe dem im Diagramm mit p_e angegebenen Druck ansteigen, ohne dass in der Messstrecke ein Verdichtungsstoß auftritt.



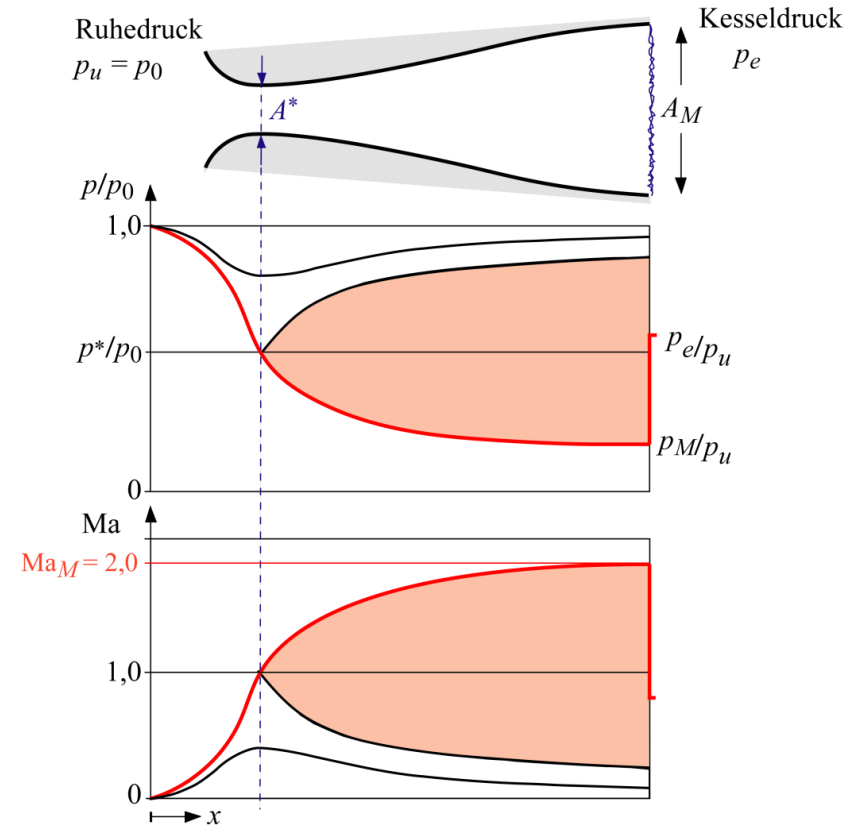
p_{VK} darf also bis nahe dem im Diagramm mit p_e angegebenen Druck ansteigen.

$$p_{VK} = p_e \leq \left(\frac{p_{VK}}{p_M}\right) \left(\frac{p_M}{p_u}\right) p_u =$$

$$= \left(1 + \frac{2\kappa}{\kappa + 1} (\text{Ma}^2 - 1)\right) \left(\frac{1}{\left(1 + \frac{\kappa - 1}{2} \text{Ma}^2\right)^{\frac{\kappa}{\kappa - 1}}}\right) p_u$$

Zahlenwert für $\text{Ma}_M = 2$ und $k = 1,4$:

$$p_{VK} < 0,575 p_u$$



Da der Massenstrom konstant ist und sich die Ruhetemperatur in der gesamten Anlage nicht ändert, lässt sich leicht aus der Größe des Vakuumkessels leicht die Messzeit ermitteln

Maximale Messzeit:

Während der gesamten Messdauer bleibt der Massenstrom konstant, da die Ruhegrößen in der Umgebung sich nicht ändern und im engsten Querschnitt stets Schallzustand $Ma^* = 1$ herrscht.

Massenstrom:

$$\dot{m} = \rho^* A^* c^* = \frac{\rho^*}{\rho_0} \rho_0 \frac{A^*}{A_M} A_M \frac{c^*}{a^*} \frac{a^*}{a_0} a_0 = \left(\frac{T^*}{T_0} \right)^{\frac{1}{\kappa-1}} \left(\frac{1}{Ma} \left(1 + \frac{\kappa-1}{2} Ma^2 \right) \right)^{-\frac{\kappa+1}{2(\kappa-1)}} \sqrt{\frac{T^*}{T_0}} \rho_0 \sqrt{\kappa R T_0} A_M$$

Massenbilanz:

$$m(p_{VK}) = \frac{p_{VK} V}{R T_{VK}} = \dot{m} \Delta t$$

Mit $T_0 = T_{VK} = T_u$, $p_0 = p_u$, $\rho_0 = \frac{p_0}{R T_0}$, $\frac{T^*}{T_0} = \frac{2}{\kappa + 1}$ folgt die Messzeit Δt .

Sind auch Verdünnungsstöße möglich?

Um darüber eine Aussage machen zu können, betrachten wir die Entropieänderung beim Übergang vom Zustand 1 in den Zustand 2.

Für die Entropieänderung ergibt sich aus der Fundamentalgleichung

$$ds = \frac{dh - vdp}{T}$$

für ein ideales Gas mit konstanten spezifischen Wärmen:

$$\begin{aligned} \frac{s_2 - s_1}{R} &= \frac{\kappa}{\kappa - 1} \ln \left(\frac{T_2}{T_1} \right) - \ln \left(\frac{p_2}{p_1} \right) = \ln \left[\left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{1}{\kappa-1}} \left(\frac{\rho_2}{\rho_1} \right)^{\frac{-\kappa}{\kappa-1}} \right] \\ &= \ln \left[\left(1 + \frac{2\kappa}{\kappa + 1} (\text{Ma}_1^2 - 1) \right)^{\frac{1}{\kappa-1}} \left(\frac{(\kappa + 1) \text{Ma}_1^2}{2 + (\kappa - 1) \text{Ma}_1^2} \right)^{\frac{-\kappa}{\kappa-1}} \right] \end{aligned}$$

Sind auch Verdünnungsstöße möglich? (kont.)

Der Zweite Hauptsatz fordert, dass die irreversible Entropieproduktion positiv ist.

Daraus folgt die Bedingung, dass die Entropie in Strömungsrichtung nicht abnehmen darf:

$$s_{\text{irr}} \stackrel{!}{>} 0 \quad \Rightarrow \quad s_2 - s_1 > 0$$

Die Bedingung $s_2 > s_1$ in

$$\frac{s_2 - s_1}{R} = \ln \left[\left(1 + \frac{2\kappa}{\kappa + 1} (\text{Ma}_1^2 - 1) \right)^{\frac{1}{\kappa - 1}} \left(\frac{(\kappa + 1) \text{Ma}_1^2}{2 + (\kappa - 1) \text{Ma}_1^2} \right)^{\frac{-\kappa}{\kappa - 1}} \right]$$

führt auf $\text{Ma}_1 > 1$ und damit auf eine Druckerhöhung $p_2 > p_1$.

Ein Verdünnungsstoß ist nicht zugelassen!

Folgerungen:

- Verdichtungsstöße sind nur in Überschallströmungen möglich.
- Verdünnungsstöße mit $p_2 < p_1$ und $\rho_2 < \rho_1$ existieren grundsätzlich nicht.

Bemerkung:

Schlagartige Umlenkungen der Strömung an Körperkonturen, die gegen die Strömung angestellt sind, bedingen in der Überschallströmung immer Verdichtungsstöße zur Druckerhöhung ← *schräge oder gekrümmte abgelöste Verdichtungsstöße*

Schlagartige Umlenkungen der Strömung an Körperkonturen, die der Strömung mehr Platz bieten, gehen trotzdem immer mit kontinuierlicher Druckabnahme einher ← *Prandl-Meyer-Expansion*

Die Entropieänderung lässt sich unmittelbar durch die Abnahme des Ruhedrucks über den Stoß ausdrücken.

Berücksichtigt man, dass die Strömung bis zum Stoß und hinter dem Stoß isentrop erfolgt, so gilt für die Entropien:

$$s_{10} - s_{\text{ref}} = s_1 - s_{\text{ref}} = c_p \ln(T_{01}/T_{\text{ref}}) - R \ln(p_{01}/p_{\text{ref}})$$

$$s_{20} - s_{\text{ref}} = s_2 - s_{\text{ref}} = c_p \ln(T_{02}/T_{\text{ref}}) - R \ln(p_{02}/p_{\text{ref}})$$

Da sich die Ruhetemperatur über den Stoß nicht ändert, folgt sofort:

$$s_2 - s_1 = R \ln(p_{01}/p_{02})$$

Die Entropiezunahme ist unmittelbar mit dem Ruhedruckabfall verknüpft.

Ursache der Entropieerhöhung

Wir haben noch nichts über die Dicke des Verdichtungsstoßes ausgesagt. Eine Diskontinuität werden wir in realen Fluiden nicht erwarten können.

Entropieerzeugung durch Wärmeleitung und Reibung:

Fouriersches Wärmeleitungsgesetz: $\dot{q} \sim -\lambda \frac{dT}{dx}$

Wärmeleitkoeffizient λ

Newtonsches Reibungsgesetz: $\tau \sim -\eta \frac{dc}{dx}$

Reibungskoeffizient η (dynamische Zähigkeit)

Ursache der Entropieerhöhung (kont.)

Bilanzen in differentieller Form mit Reibung und Wärmeleitung (**Stoßzone aufgelöst**)

$$\frac{d}{dx} (\rho c) = 0$$

$$\frac{d}{dx} \left(\rho c^2 + p - \frac{4}{3} \eta \frac{dc}{dx} \right) = 0$$

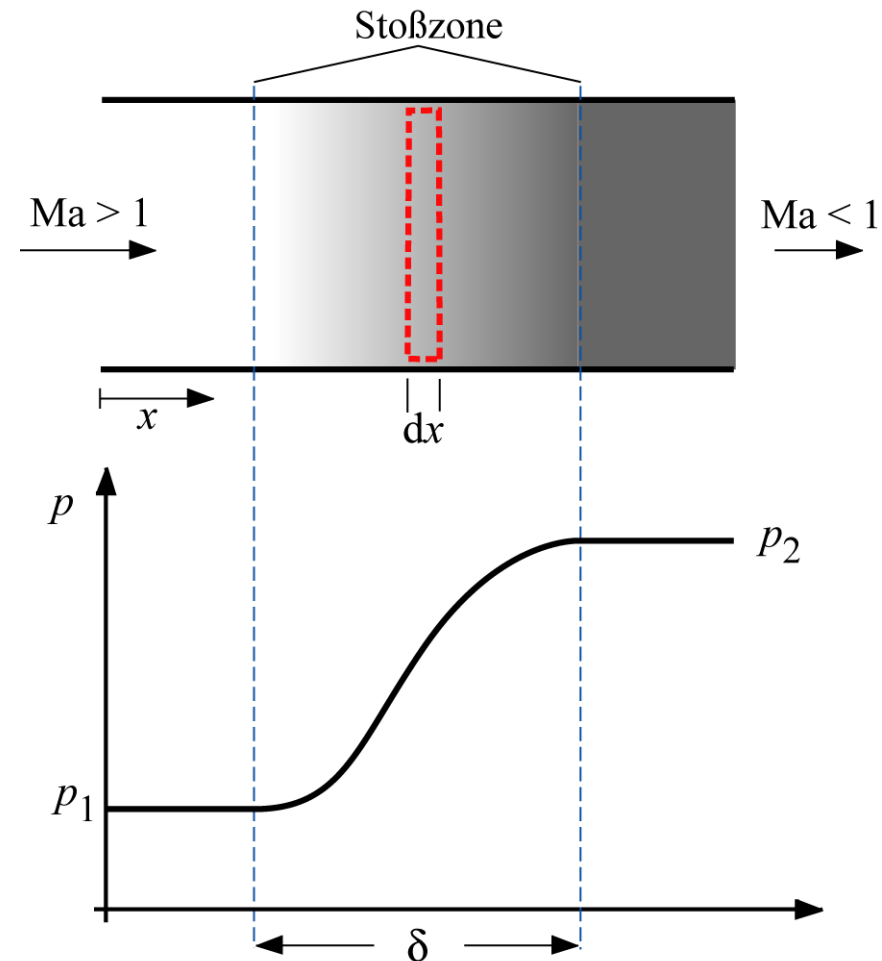
$$\frac{d}{dx} \left(\rho c \left(h + \frac{c^2}{2} \right) - \lambda \frac{dT}{dx} - \frac{4}{3} \eta c \frac{dc}{dx} \right) = 0$$

Aus der Fundamentalgleichung

$$ds = \frac{1}{T} (dh - \frac{1}{\rho} dp)$$

folgt durch Einsetzen:

$$\rho c \frac{ds}{dx} = \frac{1}{T} \left[\frac{d}{dx} \left(\lambda \frac{dT}{dx} \right) + \frac{4}{3} \eta \left(\frac{dc}{dx} \right)^2 \right]$$



Integration in den Grenzen von 1 nach 2 und Umformung des ersten Integrals durch partielle Integration liefert:

$$\rho c_1 (s_2 - s_1) = \int_1^2 \frac{\lambda}{T^2} \left(\frac{dT}{dx} \right)^2 dx + \frac{4}{3} \int_1^2 \frac{\eta}{T} \left(\frac{dc}{dx} \right)^2 dx$$

Die Integrale sind stets positiv.

Sie stellen die **Entropieproduktion durch Wärmeleitung und durch Reibung** dar.

Da wegen

$$\frac{s_2 - s_1}{R} = \ln \left[\left(1 + \frac{2\kappa}{\kappa + 1} (\text{Ma}_1^2 - 1) \right)^{\frac{1}{\kappa - 1}} \left(\frac{(\kappa + 1) \text{Ma}_1^2}{2 + (\kappa - 1) \text{Ma}_1^2} \right)^{\frac{-\kappa}{\kappa - 1}} \right]$$

die Gesamthöhe der Entropieproduktion alleine durch die Machzahl Ma_1 vor dem Stoß gegeben ist, lässt sich in Kombination mit

$$\rho c_1 (s_2 - s_1) = \int_1^2 \frac{\lambda}{T^2} \left(\frac{dT}{dx} \right)^2 dx + \frac{4}{3} \int_1^2 \frac{\eta}{T} \left(\frac{dc}{dx} \right)^2 dx$$

folgende Aussage über die Dicke von Verdichtungsstößen machen:

Abmessungen von Verdichtungsstößen:

- Wärmeleitungskoeffizient und Reibungskoeffizient gewöhnlicher Gase sind sehr klein. Daher müssen die Gradienten dT/dx und dc/dx groß werden.

⇒ Die Dicke δ von Verdichtungsstößen ist daher sehr klein im Vergleich zu den typischen Abmessungen des Strömungskanals.

⇒ Im Grenzfall reibungs- und wärmeleitungsfreier Strömung muß die Stoßdicke gegen Null gehen und die Strömungsgrößen müssen sich sprunghaft ändern

← schwache Lösungen der Strömungsgleichungen

In vielen der vorstehenden Formeln taucht wiederholt der Faktor Ma^2-1 auf wie auch in

$$\frac{s_2 - s_1}{R} = \ln \left[\left(1 + \frac{2\kappa}{\kappa + 1} (\text{Ma}_1^2 - 1) \right)^{\frac{1}{\kappa - 1}} \left(\frac{(\kappa + 1) \text{Ma}_1^2}{2 + (\kappa - 1) \text{Ma}_1^2} \right)^{\frac{-\kappa}{\kappa - 1}} \right]$$

$$\frac{p_2 - p_1}{p_1} = \frac{2\kappa}{\kappa + 1} (\text{Ma}_1^2 - 1)$$

Wir können deshalb leicht Näherungen für schallnahe Strömungen angeben.

Für $\text{Ma}^2 \ll 1$ folgt für die Entropieproduktion:

$$\frac{s_2 - s_1}{R} = \frac{2\kappa}{(\kappa + 1)^2} \frac{(\text{Ma}_1^2 - 1)^3}{3} + \dots$$

$$\frac{s_2 - s_1}{R} = \frac{2\kappa}{(\kappa + 1)^2} \frac{(\text{Ma}_1^2 - 1)^3}{3} + \dots$$

Das heißt, Terme erster und sogar zweiter Ordnung in $\text{Ma}^2 - 1$ verschwinden.

Alle Zustandsänderungen sind dann mit guter Genauigkeit nahezu isentrop.

Für die Druckänderung

$$\frac{p_2 - p_1}{p_1} = \frac{2\kappa}{\kappa + 1} (\text{Ma}_1^2 - 1)$$

dagegen sind die führenden Terme von erster Ordnung:

Schallwellen sind sehr kleine Druckstörungen und breiten sich deshalb nahezu

isentrop aus. Dies stimmt mit der vorher getroffenen Definition für die

Schallgeschwindigkeit überein:

$$a^2 = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_s$$

Bemerkung:

Die Skalentrennung ist bei den Verdichtungsstößen sogar größer als diejenige bei der Entropieproduktion bei Wärmeübergang. Hier gilt:

$$\dot{S}_{\text{irr}} \propto \Delta T^2$$

wogegen der Wärmetransport durch

$$\dot{Q} \propto \Delta T$$

charakterisiert ist.

Die Annahme reversiblen Wärmeübergangs bei $\Delta T \rightarrow 0$ steht also auf schwächeren Füßen als die Annahme der Isentropie schwacher Druckstörungen.

Zusammenfassung

- In Überschallströmungen sind nahezu sprunghafte Zustandsänderungen möglich.
- Druck, Dichte und Temperatur nehmen in einer dünnen Zone zu, die Strömungsgeschwindigkeit nimmt ab.
- Das Phänomen wird Stoßwelle oder Verdichtungsstoß genannt.
- Beim senkrechten Verdichtungsstoß geht die Überschallströmung immer in eine Unterschallströmung über.

Zusammenfassung

- Die mit Verdichtungsstößen verbundene Entropieproduktion resultiert aus innerer Wärmeleitung und Reibung in der Stoßzone.
- Dies führt zu einem Ruhedruckverlust, kritische Temperatur und kritische Schallgeschwindigkeit bleiben in adiabaten Kanälen über den Stoß unverändert.
- Verdünnungsstöße sind wegen des Zweiten Hauptsatzes, der Entropieerhöhung fordert, ausgeschlossen.
- Da Reibung und Wärmeleitung in Gasen gering sind, ist die Stoßzone klein im Verhältnis zu den Abmessungen des Kanals.
- Im Grenzfall sehr kleiner Druckänderung breitet sich die Verdichtungszone mit Schallgeschwindigkeit aus, die damit verbundene Entropieproduktion verschwindet \Rightarrow die Verdichtungszone wird zu einer Schallwelle.