ВЫВОД СООТНОШЕНИЯ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТЕЙ ДЛЯ КВАНТОВЫХ ГАМИЛЬТОНОВЫХ СИСТЕМ

В.Е. Тарасов,
кандидат физико-математических наук, доцент,
НИИ ядерной физики им. Д.В. Скобельцина
Московского государственного университета им. М.В. Ломоносова

Аннотация. В статье выводится общий вид соотношения неопределенностей для квантовых наблюдаемых гамильтоновых систем.
Ключевые слова: соотношение неопределенностей Гейзенберга, соотношение неопределенностей Шредингера-Робертсона.

Vasily E. Tarasov, Skobeltsyn Institute of Nuclear Physics, Moscow State University
DERIVATION OF UNCERTAINTY RELATION FOR QUANTUM HAMILTONIAN SYSTEMS
Abstract. In the paper we derive the general form of uncertainty relation for quantum observables of Hamiltonian systems.
Keywords: Heisenberg uncertainty relation, Schrodinger-Robertson uncertainty relation.

Введение. Соотношения неопределенностей задают фундаментальные ограничения на допустимые значения среднеквадратичных отклонений квантовых наблюдаемых, таких как координаты и импульсы. Соотношения неопределенностей является базовыми неравенствами квантовой механики. Впервые такое соотношение было предложено в 1927 году Гейзенбергом [1] для координаты Q и импульса P в виде соотношения $\Delta Q \Delta P \sim \hbar$, где $\hbar$ – постоянная Планка. Соотношение неопределенностей в виде неравенства для операторов Q и P было впервые получено Кеннардом [2] в 1927 году

$$\Delta Q \cdot \Delta P \geq \frac{\hbar}{2} \quad , \tag{1}$$

где ΔQ, ΔP — среднеквадратичные отклонения, определяемые формулой $\Delta X = \sqrt{\langle (X - \langle X \rangle I)^2 \rangle} = \sqrt{\langle X^2 \rangle - \langle X \rangle^2}$ В настоящее время неравенство (1) принято называть соотношением неопределенностей Гейзенберга. В 1929 году Робертсон [3] обобщили соотношение неопределенностей (1) на случай произвольной пары квантовых наблюдаемых X и Y:

$$\Delta X \cdot \Delta Y \geq \frac{1}{2} . \left| \langle XY - YX \rangle \right| \tag{2}$$

В 1930 году Шредингер [4] и Робертсон [5] усиливает первоначальное неравенство Гейзенберга (1), получив неравенство для двух произвольных квантовых наблюдаемых и чистых квантовых состояний, в которое помимо коммутатора входит и антикоммутатор:

$$\Delta X \cdot \Delta Y \geq \frac{1}{2} \sqrt{\langle XY - YX \rangle^2 + \langle XY + YX \rangle^2} . \tag{3}$$

В дальнейшем обобщения соотношений неопределенностей Гейзенберга и Шредингера-Робертсона для различных квантовых наблюдаемых, чистых и смешанных квантовых состояний неоднократно выводились различными авторами [6, 7, 8, 9]. Соотношение неопределенностей для открытых и негамильтоновых квантовых систем было рассмотрено в работе Сандулеску и Скутару [10, 11] на примере гармонического осциллятора с трением и в работе [12, гл. 18.7]. Отметим, что общие свойства соотношений неопределенностей для квантовых негамильтоновых систем [12, гл.19] до сих пор не изучены в связи с тем, что эволюция квантовых наблюдаемых таких систем не является эндоморфизмом ни лиевой, ни йордановой, ни ассоциативной операторных алгебр, описывающих свойства наблюдаемых. При этом соотношения неопределенностей для квантовых негамильтоновых систем должно рассматриваться именно в форме Шредингера-Робертсона, позволяющей учитывать лиево-йорданову алгебру квантовых наблюдаемых. К сожалению, в большинстве учебников по общей физике, по теоретической физике, и по квантовой механике соотношения неопределенностей представляются только в форме Гейзенберга (1), а форма Шредингера-Робертсона (2) даже не упоминается.

Вывод соотношения неопределенностей. Для получения соотношения неопределенностей для квантовых наблюдаемых X и Y, определим операторы

$$A = X - \langle X \rangle \cdot I, \qquad B = Y - \langle Y \rangle \cdot I.$$

Здесь I – единичный оператор, а $\langle X \rangle$ и $\langle Y \rangle$ — средние значения операторов X и Y вида $\langle A \rangle = Tr[\rho \cdot A]$ где ρ – оператор матрица плотности (статистический оператор). Если операторы X и Y являются самосопряженными, то операторы A и B тоже будут самосопряженными. Определим оператор $C=zA+iB$, где z – некоторое комплексное число. Воспользовавшись свойством неотрицательности среднего значения $\langle C^{\dagger} C \rangle \geq 0$, имеем неравенство

$$\langle (z^* A - iB) \cdot (zA + iB) \rangle \geq 0 \ , \tag{4}$$

которое должно выполняться для любых z. Используя далее линейность средних значений $\langle a\cdot A+b\cdot B\rangle=a\cdot\langle A\rangle+b\cdot\langle B\rangle$, где a и b – комплексные числа, для (4) получаем

$$z^*z\cdot\left\langle A^2\right\rangle+iz^*\cdot\left\langle AB\right\rangle-iz\cdot\left\langle BA\right\rangle+\left\langle B^2\right\rangle\geq 0.$$

Перепишем это неравенство в виде

$$(z_1^2+z_2^2)\cdot\left\langle A^2\right\rangle+iz_1\cdot\left\langle AB-BA\right\rangle+z_2\cdot\left\langle AB+BA\right\rangle+\left\langle B^2\right\rangle\geq 0, \quad (5)$$

где z_1 и z_2 – действительная и мнимая части числа $z=z_1+iz_2$. Воспользуемся лиевым и йордановым умножениями на алгебре квантовых наблюдаемых

$$A*B=\frac{1}{i\hbar}[A,B]=\frac{1}{i\hbar}(AB-BA), \quad A\circ B=\frac{1}{2}(AB+BA),$$

которые сопоставляют самосопряженным операторам самосопряженные оператор, то есть это операции действуют на множестве квантовых наблюдаемых. Неравенство (5) перепишется в виде

$$(z_1^2+z_2^2)\cdot\left\langle A^2\right\rangle-\hbar z_1\cdot\left\langle A*B\right\rangle+2z_2\cdot\left\langle A\circ B\right\rangle+\left\langle B^2\right\rangle\geq 0.$$

Согласно формуле Эйлера запишем $z_1=x\cdot\cos\varphi$ и $z_2=x\cdot\sin\varphi$. Тогда

$$\left\langle A^2\right\rangle\cdot x^2+\left(2\cdot\left\langle A\circ B\right\rangle\cdot\sin\varphi-\hbar\left\langle A*B\right\rangle\cdot\cos\varphi\right)\cdot x+\left\langle B^2\right\rangle\geq 0. \quad (6)$$

Данное неравенство должно выполняться для любых действительных значений аргумента φ и любых неотрицательных значений модуля x комплексного числа z. Известно, что неравенство $a\cdot x^2+b\cdot x+c\geq 0$ с положительным $a=\langle A^2\rangle$ выполняется для всех значений $x\geq 0$ в двух случаях: (a) дискриминант D отрицателен; (b) одновременно неотрицательны D, b и c. Легко проверить, используя метод вспомогательного аргумента, что условие

$$b=2\cdot\left\langle A\circ B\right\rangle\cdot\sin\varphi-\hbar\left\langle A*B\right\rangle\cdot\cos\varphi\geq 0$$

не может быть выполнено для любых действительных значений аргумента φ. Следовательно, реализуется лишь случай (a), и дискриминант должен быть отрицательным

$$D=\left(2\cdot\left\langle A\circ B\right\rangle\cdot\sin\varphi-\hbar\left\langle A*B\right\rangle\cdot\cos\varphi\right)^2-4\left\langle A^2\right\rangle\cdot\left\langle B^2\right\rangle\leq 0 \quad (7)$$

для всех действительных значений аргумента φ. Неравенство (7) можно записать в виде

$$\left\langle A^2\right\rangle\cdot\left\langle B^2\right\rangle\geq\frac{1}{4}\left(2\left\langle A\circ B\right\rangle\cdot\sin\varphi-\hbar\left\langle A*B\right\rangle\cdot\cos\varphi\right)^2. \quad (8)$$

Это неравенство должно выполняться для всех действительных φ. Используя далее формулу метода вспомогательного аргумента

$$a\cdot\sin\varphi-b\cdot\cos\varphi=\sqrt{a^2+b^2}\cdot\sin(\varphi-\alpha),$$

где $\sin\alpha=\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$, получаем неравенство

$$\left\langle A^2\right\rangle\cdot\left\langle B^2\right\rangle\geq\left(\frac{\hbar^2}{4}\left\langle A*B\right\rangle^2+\left\langle A\circ B\right\rangle^2\right)\cdot\sin^2(\varphi-\alpha) \ ,$$

которое должно выполняться для всех действительных φ, где

$$\sin\alpha=\hbar\left\langle A*B\right\rangle\cdot\left(4\left\langle A\circ B\right\rangle+\hbar^2\left\langle A*B\right\rangle\right)^{-1/2}.$$

Далее воспользуемся тем, что $\sin^2(\varphi-\alpha)\leq 1$. В результате получаем

$$\left\langle A^2\right\rangle\cdot\left\langle B^2\right\rangle\geq\frac{\hbar^2}{4}\left\langle A*B\right\rangle^2+\left\langle A\circ B\right\rangle^2. \quad (9)$$

Данное неравенство задает соотношение неопределенностей в форме Шредингера-Робертсона. Из определений операторов A и B следует неравенство для квантовых наблюдаемых X и Y в виде

$$(\Delta X)^2\cdot(\Delta Y)^2\geq\frac{\hbar^2}{4}\left\langle X*Y\right\rangle^2+\left(\left\langle X\circ Y\right\rangle-\left\langle X\right\rangle\left\langle Y\right\rangle\right)^2,$$

задающее для них соотношение неопределенностей.

Частные случаи соотношений неопределенностей.

1) Если A и B являются коммутирующими операторами, то $A*B=0$ и неравенство (9) принимает вид

$$\left\langle A^2\right\rangle\cdot\left\langle B^2\right\rangle\geq\left\langle A\circ B\right\rangle^2. \quad (10)$$

Отметим, что в классической механике имеем соотношение неопределенностей

$$\left\langle A^2\right\rangle_c\cdot\left\langle B^2\right\rangle_c\geq\left\langle A\circ B\right\rangle_c^2,$$

где $A\circ B=A(t,q,p)\cdot B(t,q,p)$ и

$$\left\langle A\right\rangle_c=\int\rho(t,q,p)\cdot A(t,q,p)dqdp.$$

Отметим, что соотношение (10) может быть получено из (8) при $\varphi=\pi/2$.

2) Если A и B являются антикоммутирующими операторами, то $A\circ B=0$ неравенство (9) запишется в виде

$$\left\langle A^2\right\rangle\cdot\left\langle B^2\right\rangle\geq\frac{\hbar^2}{4}\left\langle A*B\right\rangle^2. \quad (11)$$

Это соотношение является обобщенным соотношением неопределенностей Гейзенберга. Соотношение (11) можно также получить из (8) при $\varphi=0$.

3) Если X=Q и Y=P являются операторами координаты и импульса, то, используя канонические коммутацион-

ные соотношения $[Q,P]=i\hbar I$, $[Q,I]=[P,I]=0$ получаем $A*B=I$. В результате имеем неравенство

$$\left\langle \left(Q-\langle Q\rangle\cdot I\right)^2\right\rangle\cdot\left\langle \left(P-\langle P\rangle\cdot I\right)^2\right\rangle \ge \frac{\hbar^2}{4}+\left(\langle Q\circ P\rangle-\langle Q\rangle\cdot\langle P\rangle\right)^2.$$

Видно, что соотношение неопределенностей Гейзенберга вида (1) выполняется лишь при условии

$$\langle QP+PQ\rangle-2\langle Q\rangle\cdot\langle P\rangle=0. \quad (12)$$

При этом недостаточно, чтобы среднее значение антикоммутатора было нулевым ($\langle QP+PQ\rangle=0$), как это утверждается в [9], поскольку оба средних значения для самих операторов Q и P могут быть отличными от нуля:

$$\left\langle \left(Q-\langle Q\rangle\cdot I\right)^2\right\rangle\cdot\left\langle \left(P-\langle P\rangle\cdot I\right)^2\right\rangle \ge \frac{\hbar^2}{4}+\langle Q\rangle^2\cdot\langle P\rangle^2. \quad (13)$$

В общем случае, соотношение неопределенностей Гейзенберга (1) должно быть усилено, и следует использовать соотношение неопределенностей (9).

О соотношениях неопределенностей для негамильтоновых систем. Поскольку квантовые наблюдаемые могут зависеть от времени, соотношения неопределенностей должны выполняться для любого момента времени

$$\left\langle (\Phi_t(A))^2\right\rangle\cdot\left\langle (\Phi_t(B))^2\right\rangle \ge \frac{\hbar^2}{4}\left\langle \Phi_t(A)*\Phi_t(B)\right\rangle^2+\left\langle \Phi_t(A)\circ\Phi_t(B)\right\rangle^2. \quad (14)$$

Если дополнительно потребовать выполнения линейности $\Phi_t(a\cdot A+b\cdot B)=a\cdot\Phi_t(A)+b\cdot\Phi_t(B)$ для квантового динамическое отображение Φ_t, то, помимо соотношения неопределенностей вида (14), имеем неравенство

$$\left\langle \Phi_t(A^2)\right\rangle\cdot\left\langle \Phi_t(B^2)\right\rangle \ge \frac{\hbar^2}{4}\left\langle \Phi_t(A*B)\right\rangle^2+\left\langle \Phi_t(A\circ B)\right\rangle^2. \quad (15)$$

Для квантовых гамильтоновых систем верны равенства

$\Phi_t(A\cdot B)=\Phi_t(A)\cdot\Phi_t(B)$, $\Phi_t(A^2)=(\Phi_t(A))^2$,
$\Phi_t(A*B)=\Phi_t(A)*\Phi_t(B)$, $\Phi_t(A\circ B)=\Phi_t(A)\circ\Phi_t(B)$,

и, как следствие, неравенства (14) и (15) эквивалентны. Для квантовых негамильтоновых систем выписанные равенства не выполняются, и, в силу этого, такие системы обладают необычными свойствами. Во-первых, эволюция квантовых наблюдаемых негамильтоновых систем не является эндоморфизмом [12, гл. 19] алгебр квантовых наблюдаемых, то есть произведение операторов эволюционируют так, что оно в момент времени $t>0$ не равно произведению проэволюционировавших операторов $\Phi_t(A\cdot B)-\Phi_t(A)\cdot\Phi_t(B)\neq 0$, или, например, $\Phi_t(A^2)\neq(\Phi_t(A))^2$. В результате соотношения (14) и (15) не эквивалентны. Во-вторых, для квантовых негамильтоновых систем существует эффект возникающей некоммутативности [12, гл.19]: операторы, которые в начальный момент времени были коммутативными ($A*B=0$), могут стать в некоторый момент времени $t>0$ некоммутативными ($\Phi_t(A)*\Phi_t(B)\neq 0$). Аналогичный эффект может существовать и для йорданового умножения квантовых наблюдаемых: имея равенство $A\circ B=0$ в начальный момент времени, для следующего момента времени получим $\Phi_t(A)\circ\Phi_t(B)\neq 0$. Все эти свойства и эффекты сказываются на правой части соотношений неопределенностей (14) и (15), которые должны учитываться одновременно для квантовых негамильтоновых систем.

Список литературы:

1. Heisenberg W. Uber den anschaulichen Inhalt der quantentheoretischen Kinematik und Mechanik // Zeitschrift fur Physik. 1927. Vol. 43. N. 3-4. P. 172-198. Русский перевод: Гейзенберг В., «О наглядном содержании квантовотеоретической кинематики и динамики», в книге Гейзенберг В., Избранные труды. Пер с нем. М.: Эдиториал УРСС, 2001. С. 209-228.

2. Kennard E.H. Zur Quantenmechanik einfacher Bewegungstypen // Zeitschrift fur Physik. 1927. Vol. 44. P. 326-352.

3. Robertson H.P. The uncertainty principle // Physical Review. 1929. Vol. 34. P. 163-164.

4. Schroedinger E. Zum Heisenbergschen Unscharfeprinzip // Berliner Königlich Akademie und die Wissenschaft. Berlin. 1930. S. 296-303. Русский перевод: Шредингер Э., «К принципу неопределенности Гейзенберга», Избранные труды по квантовой механике. М.: Наука, 1976. С. 210-217.

5. Robertson H.P. A general formulation of the uncertainty principle and its classical interpretation // Physical Review A. 1930. Vol. 35. N. 5. P. 667-667.

6. Ульянов В. В. О соотношении неопределенностей // Известия вузов. Физика. 1975. №2. С. 146-148.

7. Dodonov V.V., Kurmyshev E.V., Man'ko V.I. Generalized uncertainty relation and correlated coherent states // Physics Letters A. 1980. Vol. 79. N. 2-3. P. 150-152.

8. Додонов В.В., Манько В.И. Обобщения соотношений неопределенностей в квантовой механике // Труды ФИАН СССР. 1987. Т. 183. С. 5-70.

9. Суханов А.Д. Соотношения неопределенностей Шредингера и физические особенности коррелированно-когерентных состояний // Теоретическая и математическая физика, 2002. Т. 132. №3. С. 449-468.

Издательство ИНГН

10. Sandulescu A., Scutaru H. Open quantum systems and the damping of collective models in deep inelastic collisions // Annals of Physics. 1987. Vol. 173. P. 277-317.

11. Isar A., Sandulescu A., Scutaru H., Stefanescu E., Scheid W. // Open quantum systems // International Journal of Modern Physics E. 1994. Vol. 3. P. 635-714. (arXiv:quant-ph/0411189)

12. Tarasov V.E. Quantum Mechanics of Non-Hamiltonian and Dissipative Systems // Elsevier Science, 2008. 540 p.

References:

1. Heisenberg W., Zeitschrift fur Physik. 1927. Vol. 43. N. 3-4. P. 172-198.

2. Kennard E.H., Zeitschrift fur Physik. 1927. Vol. 44. P. 326-352.

3. Robertson H.P., Physical Review. 1929. Vol. 34. P. 163-164.

4. Schroedinger E., Berl. Königlich Akad. Wiss. 1930. S. 296-303.

5. Robertson H.P., Phys. Rev. A. 1930. Vol. 35. N. 5. P. 667-667.

6. Ulyanov V.V., Izvestiya Vuzov. Fizika. 1975. N.2. P. 146-148.

7. Dodonov V.V., Kurmyshev E.V., Man'ko V.I., Phys. Lett. A. 1980. Vol. 79. N. 2-3. P. 150-152.

8. Dodonov V.V., Man'ko V.I., Proc. P.N. Lebedev Phys. Inst. 1987. Vol. 183. P. 5-70.

9. Sukhanov A.D., Theor. Math. Phys., 2002. Vol. 132. N. 3. P. 1277-1294.

10. Sandulescu A., Scutaru H., Ann. Phys. 1987. Vol. 173. P. 277-317.

11. Isar A., Sandulescu A., Scutaru H., Stefanescu E., Scheid W., Int. J. Mod. Phys. E. 1994. Vol. 3. P. 635-714.

12. Tarasov V.E. Quantum Mechanics of Non-Hamiltonian and Dissipative Systems. Elsevier Science, 2008. 540 p.

АНАЛИЗ ВОЗМОЖНОСТИ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ СОВРЕМЕННЫХ КОНСТРУКЦИЙ МАССООБМЕННЫХ КОНТАКТНЫХ УСТРОЙСТВ В УСЛОВИЯХ ДЕГАЗАЦИИ НЕФТИ

А.В. Агапов,
главный механик ОАО «Куйбышевский нефтеперерабатывающий завод»,
аспирант САМГТУ

Соавторы:
К.Г. Севрюгин,
начальник службы технического надзора ОАО «Куйбышевский нефтеперерабатывающий завод,
аспирант САМГТУ;

Р.Г. Павлов,
инженер службы технического надзора ОАО «Куйбышевский нефтеперерабатывающий завод»

С.П. Сетин,
заместитель главного инженера (по ИТ и автоматизации),
ОАО «Куйбышевский нефтеперерабатывающий завод», аспирант САМГТУ

Аннотация. Цель настоящей статьи анализ возможности использования современных конструкций массообменных контактных устройств в условиях дегазации нефти. Были проанализированы различные конструкции аппаратов исходя из условий представленных в данной статье. Лидирующие позиции в данном исследовании занимают аппараты с регулярной насадкой. В статье был проведен сравнительный анализ технических характеристик насадочных и тарельчатых аппаратов с целью обоснованного выбора подходящей схемы для разрабатываемой конструкции.

Ключевые слова: нефть, газ, аппарат, пленочное течение, массоперенос, ступень, дегазация, жидкость, колонна, насадка, плотность, скорость, анализ, камера, решетка, пенообразование.

Agapov A.V., Sevryugin K.G., Pavlov R.G., Setin S.P.

ANALYSIS OF THE POSSIBILITY OF USING MODERN DESIGNS OF MASS TRANSFER CONTACTING DEVICES IN TERMS OF OIL DEGASSING

Abstract. This article aims to analyze the possibility of using modern designs of mass transfer contacting devices in the degassing of oil.

Analyzed various design devices based on the conditions provided in this article. Leading position in this study occupied units with a regular nozzle. In this paper a comparative analysis of the technical characteristics of packed and plate-type apparatus in order to make informed choices appropriate to the scheme developed by the design.

Keywords: oil, gas, apparatus, film flow, mass transfer, stage, degassing, liquid, column, nozzle, density, rate, analysis, camera, lattice, foaming..