Die beiden Kleeblattschlingen.

Von

M. DEHN in Breslau.

Die beiden Kleeblattschlingen.

I.

Im Folgenden möchte ich zeigen, daß die Untersuchung der zu den verschlungenen Raumkurven (*Knoten*) gehörenden Gruppen uns in den Stand setzt, grundlegende topologische Probleme einfach und streng zu behandeln. Zu diesem Zwecke habe ich ein ziemlich spezielles Beispiel ausgesucht, das doch einerseits allgemeineres Interesse beanspruchen darf, andererseits so einfach ist, daß man keiner schwierigen oder besonders auf den Fall zugeschnittenen Methoden bedarf.

Die *Kleeblattschlinge* (Fig. 1) ist der einfachste Knoten, d. i. die einfachste verschlungene Raumkurve, die sich im Raume nicht stetig in einen Kreis überführen läßt. Sie ist der einzige Knoten, der so auf eine Ebene projiziert werden kann, daß die Projektion nur drei Doppelpunkte aufweist. Im Raum kann man nun *zwei verschiedene Arten* von Kleeblattschlingen unterscheiden, die auseinander durch Spiegelung, etwa an einer Ebene, entstehen. Beide Arten sind in Fig. 1 dargestellt. *Unser Problem besteht darin, den Nachweis zu führen, daß diese beiden Arten von Kleeblattschlingen im Raume*) voneinander topologisch zu unterscheiden sind,* daß also die linke Kleeblattschlinge durch keine stetige Raumtransformation in die rechte überführbar ist. Natürlich ist diese Tatsache jedem bekannt, der sich mit Knoten etwas eingehender beschäftigt hat und sich die Raumkurven etwa durch Fäden veranschaulicht hat. Aber diese prak-

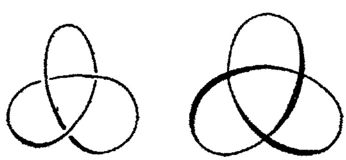

Fig. 1.

*) Und zwar auch im geschlossenen sphärischen Raume, im Widerspruch zu einer Bemerkung in der Enzyklopädie.

tisch vielleicht ausreichende Gewißheit ist sehr weit entfernt von einem wirklichen Beweise.*) — Die Erscheinung ist jedenfalls sehr beachtenswert:**) Der Raum mit einer Linkskleeblattschlinge und der Raum mit einer Rechtskleeblattschlinge sind homöomorph, d. i. in der Weise gleich zusammensetzbar, daß die beiden Knoten entsprechende Gebilde in den beiden Räumen sind. Trotzdem sind die beiden in demselben Raume gelegenen Knoten nicht durch stetige Transformation des Raumes ineinander überführbar. Wir haben hier also eine Art *topologische Symmetrie* vor uns. Die im zweidimensionalen Raume (auf der Kugel) gelegenen topologisch symmetrischen, nicht ineinander deformierbaren Gebilde sind lange nicht so schön, wie nebenbei bemerkt sei. Fig. 2 stellt zwei solche, übrigens ziemlich willkürlich ausgewählte Gebilde dar.

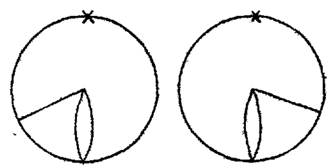

Fig. 2.

Ich will nun im Folgenden die Grundlagen für den Beweis entwickeln. Der Gang wird wohl noch klarer, wenn man zunächst die stetigen Transformationen Δ irgend einer dreidimensionalen Mannigfaltigkeit M_3 in sich betrachtet, bei der zwei in M_3 liegende Kurven K_1 und K_2 ineinander übergehen (in unserem Falle ist die M_3 ein einfach zusammenhängendes Stück des gewöhnlichen Raumes oder auch der ganze dreidimensionale sphärische Raum).

*Sollen K_1 und K_2 durch Δ ineinander übergehen, so müssen die Gruppen***) von K_1 und K_2 in der Weise isomorph aufeinander bezogen werden können, daß die bei Δ einander entsprechenden Kurven auch bei der isomorphen Zuordnung einander entsprechen.*

Diese „*Hauptbedingung*“ folgt sofort aus dem Umstande, daß irgend welche Kurven, die zusammen im Außenraum von K_1 ein Elementarflächenstück begrenzen, bei der stetigen Transformation Δ der M_3 in Kurven übergehen, die im Außenraum von K_2 zusammen ein Elementarflächenstück begrenzen. Sind also $a_1 \cdots a_n$ Elemente der Gruppe von K_1 und gilt:

$$a_1 \cdots a_n = 1,$$

so muß für die entsprechenden Elemente der Gruppe von K_2 gelten:

$$a_1' \cdots a_n' = 1,$$

wobei a_1 und a_1' Kurven entsprechen, die durch Δ ineinander übergehen. Also ist die Zuordnung $a_i \to a_i'$ eine isomorphe Zuordnung der Gruppe auf sich selbst. — Umgeben wir innerhalb M_3 einen Punkt einer Kurve K mit einem genügend kleinen Elementarraumstück E_3, so wird K die E_3

*) Hierauf weist auch H. Tietze, Monatsh. f. Math. u. Phys. 19, S. 97 hin.

**) Zuerst hat wohl Listing auf diese Erscheinung und ihr Gegenstück, die „Amphicheiralität“ der Knoten hingewiesen.

***) Siehe Anm. **) auf der nächsten Seite.

begrenzende Kugelfläche in zwei Punkten A und B schneiden; eine Kurve β, die auf der Begrenzung von E_3 A und B trennt, wollen wir eine *Breitenkurve* β nennen. Umgeben wir K innerhalb M_3 mit einem genügend kleinen Ringraum, so wird die begrenzende Ringfläche keinen Punkt mit K gemeinsam haben. Diese Ringfläche wird bei geeigneter Wahl eine bestimmte Breitenkurve β enthalten. β wird diese Ringfläche nicht zerstückeln. Eine Kurve auf der Ringfläche, die β *einmal* schneidet, wollen wir eine *Längskurve* λ nennen. Dann ist ein besonderer Teil der Hauptbedingung:

a) *Die isomorphe Beziehung der Gruppen von K_1 und K_2 aufeinander muß so gewählt werden können, daß eine jede Breitenkurve β_1 von K_1 in eine Breitenkurve β_2 von K_2 und ebenso eine Längskurve λ_1 von K_1 in eine Längskurve λ_2 von K_2 übergeht.**)

In der Tat geht durch Δ ein einen Punkt von K_1 bzw. K_1 selbst umgebender Elementarraum bzw. Ringraum in ein einen Punkt von K_2 bzw. K_2 selbst umgebenden Elementarraum bzw. Ringraum über und K_2 wird ebenso wie K_1 mit dem Elementarraum zwei, mit dem Ringraum keinen Punkt gemeinsam haben usf.

Diese Bedingung a) gilt für alle zweiseitigen und einseitigen Mannigfaltigkeiten M_3. *Ist die M_3 zweiseitig*, so können wir die Bedingung a) noch weiter verschärfen: Nehmen wir irgend ein Paar β und λ, die zu einer Kurve K gehören, und geben β und λ Durchlaufungssinn, so erhält dadurch zunächst das β entsprechende, einen Punkt P von K umgebende Elementarraumstück E_3 und damit die ganze Mannigfaltigkeit M_3 eine Indikatrix. Wir können etwa den angenommenen Durchlaufungssinn von β demjenigen Teil der E_3 begrenzenden Kugelfläche zuordnen, der von K zuerst getroffen wird, wenn man K von P aus in derselben Richtung wie λ durchläuft (s. Fig. 3).

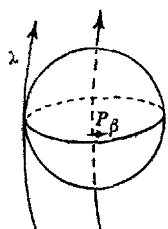

Fig. 3.

Da nun bei der stetigen Transformation der *zweiseitigen* M_3 in sich die Indikatrix unverändert bleibt, so folgt die Verschärfung der Bedingung a).

a') *Die isomorphe Beziehung der Gruppe von K_1 auf die Gruppe von K_2 muß so gewählt werden können, daß, wenn dabei ein Paar mit Durchlaufungssinn versehener Kurven β_1 und λ_1 von K_1 in ein Paar mit Durchlaufungssinn versehener Kurven β_2 und λ_2 von K_2 übergeht, die durch die Richtungen von β_1 und λ_1 bestimmte Indikatrix von M_3 dieselbe ist, wie die durch die Richtungen von β_2 und λ_2 bestimmte.*

In unserem Falle ist die M_3 der gewöhnliche Raum. Die Gruppe G_{Kl} der Kleeblattschlinge in diesem Raume ist aus früheren Untersuchungen**)

*) S. die Bemerkung am Schluß dieser Arbeit.

**) S. Math. Ann. 1910 und 1911 sowie die Münsterische Dissertation von Gieseking.

schon recht bekannt. Wir untersuchen nun im folgenden Abschnitt die isomorphe Zuordnung von G_{Kl} auf sich selbst, die *Gruppe der Isomorphismen von* G_{Kl}. Es wird sich zeigen, daß diese sehr einfach zu beschreiben ist: Außer den selbstverständlichen „kogredienten" Isomorphismen gibt es wesentlich nur einen „kontragredienten" Isomorphismus. Wir beherrschen so alle Möglichkeiten, die Raumkurven in bezug auf die linke Kleeblattschlinge den Raumkurven in bezug auf die rechte Kleeblattschlinge so zuzuordnen, daß durch dieses Zuordnen die aus diesen Kurven bezw. gebildeten Gruppen einander isomorph zugeordnet werden. Es ergibt sich dabei, daß *die Bedingung* a′) *niemals erfüllt ist*, womit unser Ziel erreicht ist.

Eine weitere Klärung des hier vorliegenden Problems habe ich dadurch versucht, daß ich im dritten Abschnitt ganz kurz einen „amphicheiralen" Knoten behandelt habe, d. i. eine solche verschlungene, durch eine stetige Raumtransformation nicht in einen Kreis zu transformierende Raumkurve, die durch eine stetige Raumtransformation in ihr Spiegelbild übergeführt werden kann. Der von mir behandelte Knoten ist nach der Kleeblattschlinge der überhaupt einfachste, nämlich der einzige, der bei geeigneter Projektion nur vier Doppelpunkte aufweist. Wir werden sehen, daß für diesen Knoten, seinem amphicheiralen Charakter entsprechend, die Gruppe der Isomorphismen nicht mehr so einfach ist, wie bei der Kleeblattschlinge.

So führt unser topologisches Problem von selbst auf die Frage nach den Isomorphismen einer unendlichen Gruppe, etwa zu dem sehr allgemeinen Problem: *wenn die Gruppe selbst durch Erzeugende und Relationen gegeben ist, die Gruppe ihrer Isomorphismen in derselben Weise darzustellen.* Im Falle der Fundamentalgruppen für geschlossene Flächen wird dies Problem in einer demnächst erscheinenden Arbeit in Angriff genommen.

II.

Die Gruppe G_{Kl} der Kleeblattschlinge kann, wie mehrfach auseinandergesetzt*), in folgender Weise definiert werden:

Erzeugende:

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4,$$

Relationen:

$$a_1 a_4^{-1} a_2 = a_2 a_4^{-1} a_3 = a_3 a_4^{-1} a_1 = 1.$$

Das zugehörige Gruppenbild besteht (s. a. a. O.) aus Streifen (s. Fig. 4), die zu je dreien an den Rändern zusammenhängen. Stellt man (s. Math. Ann. 1911) das Gruppenbild als reguläres Netz in einem nicht-euklidischen Raum dar, dessen Fundamentalgebilde ein Zylinder mit einer zu den Streifenkanten

*) Siehe Anm. **) auf der vorhergehenden Seite.

bzw. den Erzeugenden a_4 parallelen Achse ist, so entspricht jedem Element der Gruppe eine bestimmte Bewegung in dieser Geometrie, die das Gruppenbild mitsamt der Bezeichnung in sich überführt. Der Erzeugenden a_4 bzw. dem Element $a_4{}^n$ entspricht speziell eine Drehung um die Kante, durch den Anfangspunkt um $\frac{2\pi}{3}$ bzw. $\frac{2n\pi}{3}$, verbunden mit einer Parallelverschiebung längs dieser Kante um c bezw. nc, wo c die Länge von a_4 ist. In einer Ebene senkrecht zur Achse gilt die gewöhnliche hyperbolische Geometrie. Schneiden wir das Gruppenbild mit einer solchen Ebene durch den Anfangspunkt O, so liefern die Spuren der Streifen einen unendlichen Streckenkomplex Γ (s. Fig. 5): von jedem Punkt von Γ gehen drei Strecken aus, die Winkel von 120^0 miteinander bilden. Γ ist ein Baum, d. i., es gibt keine geschlossenen Polygone in Γ. Einem Element von G_{Kl} entspricht eine Bewegung von Γ in sich. *Die Erzeugende a_4 und ihre Potenzen*

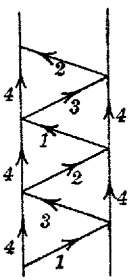

Fig. 4.

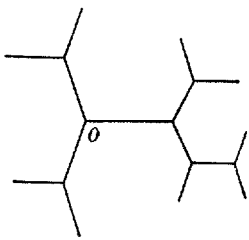

Fig. 5.

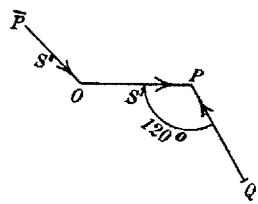

Fig. 6.

sind die einzigen Elemente, für die die entsprechenden Bewegungen von Γ den Anfangspunkt O in Ruhe lassen.

1. *Bei einem Isomorphismus von G_{Kl}* (d. i. einer isomorphen Abbildung auf sich selbst) *geht $a_4{}^3$ in $a_4{}^3$ oder in $a_4{}^{-3}$ über.* In der Tat, ein Element, das mit allen Elementen von G_{Kl} vertauschbar ist (ein ausgezeichnetes Element von G_{Kl}), muß wieder in ein solches Element übergehen. Nun sind aber $a_4{}^3$ und seine Potenzen die einzigen ausgezeichneten Elemente von G_{Kl}, wie wir gleich zeigen werden; folglich geht die Gruppe $\{(a_4{}^3)^n\}$ durch den Isomorphismus wieder in die Gruppe $\{(a_4{}^3)^n\}$ über. Die Gruppe $\{(a_4{}^3)^n\}$ läßt sich aber durch *ein* Element nur dann erzeugen, wenn dieses Element gleich $(a_4)^3$ oder $(a_4)^{-3}$ gewählt wird. Folglich geht $a_4{}^3$ beim Isomorphismus in $a_4{}^3$ oder in $a_4{}^{-3}$ über. Wir müssen also nur noch nachweisen, daß $(a_4{}^3)^n$ *die einzigen ausgezeichneten Elemente von G_{Kl}* sind.

Es sei nun S irgend ein ausgezeichnetes Element, dann wird speziell

$$S a_4 S^{-1} = a_4$$

sein, also eine Drehung um O hervorrufen. Es möge nun durch die S entsprechende Bewegung von Γ O in P, $\overline{P}$ in O übergehen (s. Fig. 6).

Dann wird durch die Bewegung Sa_4 der Punkt O in P und $\overline{P}$ etwa in Q übergeführt, wo $\sphericalangle OPQ = \frac{2\pi}{3}$ und $OP = QP$ ist. Durch die Bewegung Sa_4S^{-1} wird folglich O in Q übergeführt, weil der Streckenzug S, dessen Projektion auf die Ebene von Γ $OP = S'$ ist, durch die Drehung a_4 um P in einen Streckenzug übergeführt wird, dessen Projektion auf die Ebene von Γ auch der Richtung nach QP ist. Also liefert das Element Sa_4S^{-1} nur dann eine Drehung um O, wenn P mit O zusammenfällt. Folglich muß S eine Drehung um O hervorrufen, also eine Potenz von a_4 sein. Alle ausgezeichneten Elemente von G_{Kl} sind folglich in der Form a_4^n enthalten. Nun ist aber

$$a_4\, a_1 a_4^{-1} = a_2\,,$$
$$a_4^2 a_1 a_4^{-2} = a_3\,.$$

Also sind weder $a_4^{\pm 1}$ noch $a_4^{\pm 2}$ ausgezeichnete Elemente, da a_1, a_2 und a_3 voneinander verschieden sind. Dagegen ist in der Tat

$$a_4^3 a_1 a_4^{-3} = a_1\,,$$
$$a_4^3 a_2 a_4^{-3} = a_2\,,$$
$$a_4^3 a_3 a_4^{-3} = a_3\,,$$

wie aus der Figur abzulesen ist, woraus sofort folgt, daß, wie zu beweisen war, $(a_4^3)^n$ die einzigen ausgezeichneten Elemente unserer Gruppe sind.

2. *Bei einem Isomorphismus von G_{Kl} geht a_4 über in Sa_4S^{-1} oder $Sa_4^{-1}S^{-1}$.*

Es möge a_4 in $\bar{a}_4$ übergehen, dann muß die dritte Potenz von a_4 nach dem Vorherigen entweder a_4^3 oder a_4^{-3} sein. Also muß die Bewegung, die $(\bar{a}_4)^3$ entspricht, Γ in Ruhe lassen. Also muß $\bar{a}_4$ selbst eine Drehung von Γ um 120^0 um einen realen Mittelpunkt M der Ebene von Γ hervorrufen. Wir beachten nun, daß sich Γ aus lauter regulären Polygonzügen zusammensetzen läßt, deren Winkel 120^0 betragen und deren Ecken bei geeigneter Wahl der Länge der Seite (oder Länge der Projektion von a_1 usw.) auf einem Grenzkreis (d. i. einem das Fundamentalgebilde berührenden Kreis) liegen. Diese Polygonzüge wollen wir kurz *Fundamentalpolygone* nennen. Durch Drehung um M sollen nun die Fundamentalpolygone ineinander übergehen. Läge M nun im Inneren eines Fundamentalpolygons, so müßte dieses durch die Drehung um M in sich übergehen. Denn M liegt nur im Inneren eines einzigen Polygons und bei Drehung um M kann M nicht aus dem Inneren des Polygons herauskommen. Aber bei Drehung um den realen Punkt M um einen von 2π verschiedenen Winkel kann das Fundamentalpolygon nicht in sich übergehen. Vielmehr ist das nur möglich, wenn der Drehmittelpunkt in den Polygonmittelpunkt fällt, der jedenfalls ideal ist (und bei geeigneter Wahl der Streckenlänge von Γ auf das Fundamentalgebilde fällt). Also kann M nicht im Inneren eines Polygons liegen. Folglich muß M mindestens auf *einer* Strecke von Γ liegen. Liegt M aber auf *einer* Strecke, dann geht diese durch Drehung um 120^0 um M in eine von ihr verschiedene Strecke von Γ über, die mit ihr den Punkt M gemeinsam hat. Also fällt M mit einem Eckpunkt von Γ zusammen. $\bar{a}_4$ ruft folglich eine Drehung um 120^0 um einen Eckpunkt M von Γ hervor und ist also durch Transformation mit einem geeigneten Element S aus a_4 resp. a_4^{-1} zu erhalten. In der Tat, wird durch S O_1 in O, O in M (s. Fig. 7) übergeführt, so geht durch $S^{-1}\bar{a}_4 S$ O in sich über, also ist $S^{-1}\bar{a}_4 S$ eine Drehung um O also $= a_4^n$. Es kann aber n nur gleich $+1$ oder -1 sein, da $(\bar{a}_4)^3 = a_4^{+3}$ oder $= a_4^{-3}$ sein soll und

$$(\bar{a}_4)^3 = (S a_4^n S^{-1})^3 = S^3 a_4^{3n} S^{-3} = a_4^{3n}$$

ist.

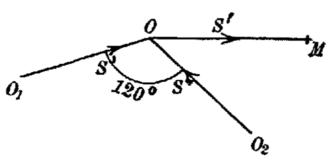

Fig. 7.

3. *Geht bei einem Isomorphismus a_4 in a_4 über, so geht a_1 über in $a_4^{\alpha} a_1 a_4^{-\alpha}$.*

Die Gruppe G_{Kl} kann auch allein durch a_1 und a_4 erzeugt werden, denn die anderen Erzeugenden a_2 und a_3 sind die Transformierten von a_1 durch a_4 resp. a_4^2. G_{Kl} wird durch *eine* Relation zwischen a_4 und a_1 definiert, nämlich durch

$$a_4^{-2} a_1 a_4 a_1 = 1,$$

die man durch Elimination von a_2 und a_3 aus den drei ursprünglichen Relationen erhält.

Es möge nun bei einem Isomorphismus a_4 in a_4, a_1 in $\bar{a}_1$ übergehen. Dann muß der Relation gemäß

$$\bar{a}_1 a_4 \bar{a}_1 = a_4^2$$

sein, also eine Drehung um O hervorrufen. Es sei nun (Fig. 8) OPP_1 die Projektion des Streckenzuges $\bar{a}_1\bar{a}_1$ auf die Ebene von Γ. Dann ist OPQ_1 die Projektion des Streckenzuges $\bar{a}_1 a_4 \bar{a}_1$, wo

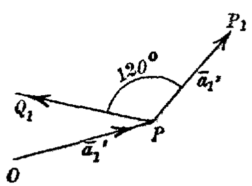

Fig. 8.

$$\sphericalangle P_1 P Q_1 = 120^0$$

ist und

$$PQ_1 = PP_1 = OP$$

ist. Demgemäß kann nur dann $\bar{a}_1 a_4 \bar{a}_1 = a_4^2$ sein, also eine Drehung um O hervorrufen, wenn Q_1 mit O zusammenfällt, also $\sphericalangle OPP_1 = 120^0$ ist (und zwar muß die Drehung um P von O nach P_1 rechtsläufig sein, wenn a_4 eine linksläufige Drehung von 120^0 hervorruft und umgekehrt). Wir konstruieren nun mit der Projektion $\bar{a}_1'$ von $\bar{a}_1$ einen unendlichen Streckenkomplex $\bar{\Gamma}$, der von O angeht, bei dem wieder an jeder Ecke drei Strecken unter dem Winkel von 120^0 zusammenstoßen.

Da die Länge von $\bar{a}_1'$ nicht kleiner ist als die Länge von a_1' (die Streckenlänge von Γ), so wird auch $\bar{\Gamma}$ ein Baum sein. Er enthält nur Eckpunkte, die auch Eckpunkte von Γ sind, aber alle Eckpunkte von Γ nur dann, wenn die Länge von $\bar{a}_1'$ gleich der Länge von a_1' ist. Alle Eckpunkte des Gruppenbildes, die durch a_4 und $\bar{a}_1$ erhalten werden können, projizieren sich auf die Ecken von $\bar{\Gamma}$, da aber durch $\bar{a}_1$ und a_4 die ganze Gruppe erzeugbar ist, so muß $\bar{a}_1'$ die Streckenlänge von Γ haben, also gleich $a_1^{\pm 1}$, $a_2^{\pm 1}$ oder $a_3^{\pm 1}$ sein. Es ist aber:

$$a_4^{-2} a_i^{-1} a_4 a_i^{-1} \neq 1 \qquad (i = 1, 2, 3).$$

Es ist also $\bar{a}_1 = a_1$, a_2 oder a_3, d. i. nach obigen $= a_4^{\alpha} a_1 a_4^{-\alpha}$. Da a_2 und a_3 die Transformierten von a_1 durch a_4 resp. a_4^2 sind, so folgt, daß a_2 und a_3 entsprechend $a_4^{\alpha} a_2 a_4^{-\alpha}$, und $a_4^{\alpha} a_3 a_4^{-\alpha}$ zugeordnet werden.

4. Ganz ebenso folgt: *Geht a_4 in a_4^{-1} über, so geht a_1 in $a_4^{\alpha} a_1^{-1} a_4^{-\alpha}$ über.* Denn aus der Relation

$$a_4^{-2} a_1 a_4 a_1 = 1$$

folgt durch Umkehrung:

$$a_4^{-1} a_1^{-1} a_4^2 a_1^{-1} = 1,$$

durch Transformation

$$a_4^3 a_4^{-1} a_1^{-1} a_4^2 a_1^{-1} a_4^{-3} = 1,$$

und wegen der Vertauschbarkeit von a_4^3 mit allen Elementen,

$$a_4^2 a_1^{-1} a_4^{-1} a_1^{-1} = 1.$$

Also gelten dieselben Schlüsse für a_4^{-1} und a_1^{-1} die wir unter 3. für a_4 und a_2 gemacht haben. *Die Zuordnung $a_1 \longrightarrow a_1^{-1}$, $a_4 \longrightarrow a_4^{-1}$ stellt einen kontragredienten Isomorphismus von G_{Kl} dar.* Denn a_1 ist nicht in a_1^{-1} transformierbar, wie man am einfachsten einsieht, wenn man G_{Kl} durch Hinzufügung geeigneter Relationen zu einer Abelschen Gruppe macht. Denn dann geht G_{Kl} über in die gewöhnliche unendlich zyklische Gruppe $\{a_1^n\}$, in welcher a_1 nicht in a_1^{-1}-transformierbar ist, weil daraus $a_1^2 = 1$ folgen würde.

5. Geht a_4 in $S a_4 S^{-1}$ über, so gibt es einen Isomorphismus (nämlich den gewöhnlichen kogredienten), durch den a_1 in $S a_1 S^{-1}$ übergeht, folglich geht nach 4. bei einem Isomorphismus, bei dem a_4 in $S a_4 S^{-1}$ übergeht, a_1 in $a_4^{\alpha} S a_1 S^{-1} a_4^{-\alpha}$ über, denn durch Einschaltung des Isomorphismus:

$$a_4 \longrightarrow \bar{\bar{a}}_4 = S a_4 S^{-1},$$
$$a_1 \longrightarrow \bar{\bar{a}}_1 = S a_1 S^{-1}$$

erhalten wir aus dem gegebenen einen Isomorphismus, bei dem $\bar{\bar{a}}_4$ in $\bar{a}_4$ übergeht, folglich muß dabei $\bar{a}_1$ in $a_4^{\alpha} \bar{\bar{a}}_1 a_4^{-\alpha}$ übergehen. Ebenso geht a_1 in $S a_4^{\alpha} a_1^{-1} a_4^{-\alpha} S^{-1}$ über, wenn a_4 in $S a_4^{-1} S^{-1}$ übergeht. Da es aber nach 2. andere Zuordnungen zu a_4 als die beiden vorstehenden nicht gibt, so haben wir das Resultat:

Alle Isomorphismen von G_{Kl} sind durch die folgenden Zuordnungen gegeben:

$$\left.\begin{array}{l} a_i \longrightarrow S a_i S^{-1} \\ \text{resp.} \qquad a_i \longrightarrow S a_i^{-1} S^{-1} \end{array}\right\} \qquad (i = 1, 4).$$

Wir erhalten daraus für a_2 und a_3 die Zuordnung:

$$a_2 \longrightarrow S a_2 S^{-1}, \quad a_3 \longrightarrow S a_3 S^{-1}$$

resp.

$$a_2 \longrightarrow S a_3^{-1} S^{-1}, \ a_3 \longrightarrow S a_2^{-1} S^{-1}.$$

Alle kontragredienten Isomorphismen können durch einen geeigneten kogredienten Isomorphismus auf die Form gebracht werden:

$$a_1 \longrightarrow a_1^{-1}, \ a_2 \longrightarrow a_3^{-1}, \ a_3 \longrightarrow a_2^{-1}, \ a_4 \longrightarrow a_4^{-1}.$$

6. Haben wir nun die beiden Kleeblattschlingen Kl_λ und Kl_ϱ, so ist die Gruppe der Raumkurven in bezug auf Kl_λ isomorph bezogen auf die Gruppe der Raumkurven in bezug auf Kl_ϱ, wenn man den erzeugenden Kurven a_1 und a_4 links die entsprechenden Kurven rechts mit umgekehrtem Umlaufssinn zuordnet (s. Fig. 9) (indem die letzteren Kurven aus den Kurven links etwa durch Spiegelung an der Projektionsebene entstehen). a_1 ist eine Breitenkurve, a_4^3 stellt bei beiden Schlingen eine Längskurve

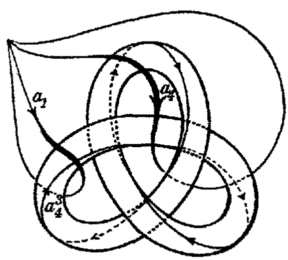

Fig. 9a.

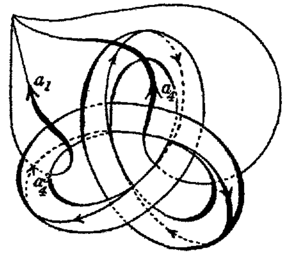

Fig. 9b.

dar (s. Fig.) (die eine geht aus der anderen etwa durch Spiegelung an der Projektionsebene hervor). Man sieht sofort, daß die durch den Umlaufssinn von a_1 und a_4^3 bei Kl_λ entstehende Indikatrix die umgekehrte ist, wie die durch den Umlaufssinn von a_1 und a_4^3 bei Kl_ϱ entstehende Indikatrix. Also kann diese Zuordnung der Kurven von Kl_λ und Kl_ϱ nicht einer stetigen Raumtransformation, bei der die beiden Knoten ineinander übergehen, entsprechen. Jede weitere mögliche Zuordnung von a_1 und a_4 zu Kurven von Kl_ϱ entspricht aber einem Isomorphismus von G_{Kl}. Wir wissen, daß alle Isomorphismen von G_{Kl} sich durch Hinzufügung eines kogredienten Isomorphismus (Transformation) auf die Identität:

$$a_1 \longrightarrow a_1,$$
$$a_4 \longrightarrow a_4$$

oder die Zuordnung

$$a_1 \longrightarrow a_1^{-1},$$
$$a_4 \longrightarrow a_4^{-1}$$

zurückführen lassen. Der ersten Zuordnung entspricht wie wir eben sahen, keine Möglichkeit der stetigen Überführung von Kl_l in Kl_ϱ aber auch nicht der zweiten. Denn a_1^{-1} und a_4^{-3} liefern dieselbe Indikatrix wie a_1 und a_4^3.

Um nun unseren Beweis völlig zu Ende zu führen, haben wir nur noch nachzuweisen, daß Sa_1S^{-1} und $Sa_4^3S^{-1}$ als Breiten- resp. Längskurve dieselbe Indikatrix liefern wie a_1 und a_4^3. Wir können aber leicht noch mehr zeigen, nämlich, daß die Indikatrix sich nicht ändert, wenn man die Breitenkurve a_1 und die Längskurve a_4^3 jede für sich beliebig transformiert (d. i., stetig im Außenraum von Kl deformiert). In der Tat, um die Indikatrix zu bestimmen genügt es, erstens die durch a_1 und die mit bestimmtem Umlaufssinn versehene Knotenlinie etwa $\overrightarrow{Kl}$ selbst entstehende Indikatrix zu betrachten und sodann den Umlaufssinn von a_4^3 mit dem angenommenen Umlaufssinn von $\overrightarrow{Kl}$ zu vergleichen. Nun wird aber erstens durch keine stetige Deformation von a_1 im Außenraum von Kl die zu a_1 und $\overrightarrow{Kl}$ gehörige Indikatrix verändert. Zweitens aber kann man a_4^3 nicht im Außenraum von Kl stetig in eine Längskurve deformieren, die in bezug auf $\overrightarrow{Kl}$ den umgekehrten Umlaufssinn hat. Denn dieser könnten wir die Form $a_4^{-3}a_1^{12}$ geben. Es haben nämlich alle Längskurven eventuell nach einer Transformation auf der Kl umgehenden Ringfläche die Form $a_4^{\pm 3}a_1^n$. Ferner haben alle auf dieser Ringfläche ineinander transformierbaren Längskurven in bezug auf $\overrightarrow{Kl}$ denselben Umlaufssinn und $a_4^3a_1^n$ hat in bezug auf $\overrightarrow{Kl}$ den umgekehrten Umlaufssinn wie $a_4^{-3}a_1^n$. Soll aber durch Transformation im Außenraum a_4^3 in $a_4^{-3}a_1^n$ übergehen, so muß n gleich 12 sein, wie sofort aus den definierenden Relationen von G_{Kl} folgt, wenn man noch die Vertauschbarkeit aller Elemente hinzufügt. Aus

$$Ta_4^3T^{-1} = a_4^{-3}a_1^{12}$$

folgt

$$a_4^3 = a_4^{-3}a_1^{12},$$

weil ja a_4^3 mit allen Elementen vertauschbar ist. Also müßte

$$a_4^6 = a_1^{12}$$

sein, eine Relation, die, wie etwa ein Blick auf das Gruppenbild lehrt, gewiß nicht erfüllt ist. — Es liefern also die beiden Kurven, die aus a_1 und a_4^3 durch Transformation entstehen, dieselbe Indikatrix, wie a_1 und a_4^3, womit unser Beweis erledigt ist.

III.

Wie im Anfang gesagt, soll zum Schluß noch ganz kurz ein amphicheiraler Knoten L behandelt werden, d. i. ein solcher Knoten, der in sein Spiegelbild transformierbar ist. Dieser Knoten ist in der nebenstehenden Figur dargestellt.*) Die Gruppe ergibt sich nach dem Math. Ann. 1910 entwickelten Verfahren direkt durch Betrachtung der in den vier Überkreuzungspunkten zusammenstoßenden fünf inneren Parzellen:

$$\text{Erzeugende: } a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4,\ a_5.$$

$$\text{Relationen: } a_3 a_4^{-1} a_1 = a_1 a_2^{-1} a_3 = a_1 a_4^{-1} a_5 a_2^{-1} = a_3 a_2^{-1} a_5 a_4^{-1} = 1.$$

Wir betrachten folgende Zuordnung der Erzeugenden der Gruppe G_L unseres Knotens zu anderen Elementen:

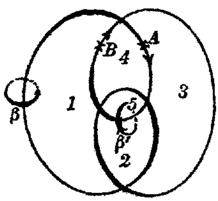

Fig. 10.

$$\begin{aligned} a_1 &\rightarrow a_2 a_5^{-1} = b_1, \\ a_2 &\rightarrow a_3 a_5^{-1} = b_2, \\ a_3 &\rightarrow a_4 a_5^{-1} = b_3, \\ a_4 &\rightarrow a_1 a_5^{-1} = b_4, \\ a_5 &\rightarrow a_5^{-1} \quad\ = b_5. \end{aligned}$$

Es ist leicht zu sehen, daß diese Zuordnung ein Isomorphismus ist, indem in der Tat 1) sämtliche definierende Relationen für die b_i in derselben Weise gelten, wie für die a_i, 2) durch die b_i die a_i ausdrückbar sind, wie aus den obigen Relationen sofort hervorgeht.

Eine Breitenkurve β und eine Längskurve λ für L werden dargestellt durch die Elemente:

$$a_1 \text{ resp. } a_4 a_5^{-1} a_1 a_1 a_4^{-1} a_3.$$

(Für λ erkennt man das am besten, wenn man vom Punkt A in der Pfeilrichtung ausgeht). Durch den Isomorphismus gehen β und λ über in

$$a_2 a_5^{-1} \text{ resp. } a_1 a_2 a_5^{-1} a_2 a_3 a_5^{-1}.$$

Die erste Kurve stellt wieder eine Breitenkurve, β', dar, die zusammen mit den mit Umlaufssinn versehenen Knoten, $\overrightarrow{L}$, die *umgekehrte* Indikatrix bildet wie β. Die zweite Kurve stellt wieder eine Längskurve, λ', dar (wie man am besten sieht, wenn man von B aus in der Pfeilrichtung ausgeht). Da λ' in bezug auf $\overrightarrow{L}$ denselben Umlaufssinn hat wie λ, so ist

*) Er wird zur Zeit auf meine Veranlassung von einem Kieler Schüler behandelt. Es ist ihm bereits gelungen, das interessante Gruppenbild für den Knoten aufzustellen.

durch den Isomorphismus die Indikatrix (β, λ) in die umgekehrte (β', λ') übergeführt. Das entspricht der Möglichkeit, daß der Knoten amphicheiral ist. In der Tat *entspricht diesem Isomorphismus von G_L eine Transformation von L in sein Spiegelbild.* Dies sieht man leicht ein, wenn man sich L über eine Kugelfläche ausgebreitet denkt und die Außenparzelle in die Mittelparzelle 5 überführt. Dann geht L in sein Spiegelbild (etwa in bezug auf die Kugelfläche) über.

Es liegt nahe, weitere Isomorphismen von G_L aufzusuchen. Man findet einen zweiten von der Form:

$$\begin{aligned} c_1 &= a_3^{-1}, \\ c_2 &= a_2^{-1}, \\ c_3 &= a_1^{-1}, \\ c_4 &= a_4^{-1}, \\ c_5 &= a_5^{-1}. \end{aligned}$$

Dieser ist auch kontragredient wie der erste. Verbinden wir diese beiden Isomorphismen, so erhalten wir, wenn wir einem kogredienten Isomorphismus stets die Identität zuordnen, eine Gruppe von acht Isomorphismen, die mit der achtgliedrigen Diedergruppe übereinstimmt. Ob aus dieser Gruppe durch Transformation alle Isomorphismen erhalten werden können bedarf einer weiteren Untersuchung.

Diese Isomorphismen haben alle die Eigenschaft die Breitenkurven und Längskurven wieder in Breiten- resp. Längskurven überzuführen. Die Untersuchung, ob dies für alle Isomorphismen von Knotengruppen der Fall ist, bildet ein wichtiges Mittel, um das allgemeine Problem der Transformierbarkeit von Knoten ineinander zu bewältigen.

Fiskelös, den 24. August 1913.