北京邮电大学

2017年硕士研究生入学考试试题

考试科目：概率论

请考生注意：①所有答案(包括选择题和填空题)一律写在答题纸上，否则不计成绩。

② 不允许使用计算器。

一、填空题（每小题5分，共50分）

1. 假设随机事件 A,B 满足 $P(A)=0.7$，$P(B)=0.4$，$P(A\overline{B})=0.5$，则 $P(B\mid A\bigcup\overline{B})=$__________.

2. 假设随机变量 X 的分布函数为 $F(x)=\begin{cases} 0, & x<0, \\ \frac{1}{2}(x+1), & 0\le x<1, \\ 1, & x\ge 1, \end{cases}$

则概率 $P\{0<X<\frac{1}{2}\}=$__________.

3. 设随机变量 X 的概率密度函数为 $f(x)=\begin{cases} \frac{1}{3}, & 0\le x\le 1, \\ \frac{2}{9}, & 3\le x\le 6, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases}$ 若

$P\{X\ge k\}=\frac{2}{3}$，则 k 的取值范围是 __________.

4. 设随机变量 X 服从 $(0,1)$ 上的均匀分布，即 $X\sim U(0,1)$，令 $Y=|\ln X|$，则当 $y>0$ 时，随机变量 Y 的概率密度函数 $f(y)=$__________.

5. 设$0 < y \le 1$, 在$Y = y$的条件下, 随机变量X的条件概率密度函数

$$f_{X|Y}(x \mid y) = \begin{cases} \dfrac{3}{2} x^2 y^{-3/2}, & -\sqrt{y} \le x \le \sqrt{y}, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases}$$

则$P\{X \ge 0 \mid Y = 1/2\} =$__________.

6. 独立地投掷一枚均匀的骰子n次，令X_i为点i出现的次数, $i = 1, 2, \ldots, 6$，则协方差 $\mathrm{Cov}(X_1, X_6) =$__________.

7. 设随机变量X, Y独立同分布，都服从正态分布$N(1,1)$，则$D(|X - Y|) =$__________.

8. 设二维随机变量(X, Y)服从正态分布$N(1, -1, 9, 4, -1)$，即$E(X) = 1$，$E(Y) = -1$，$D(X) = 9$，$D(Y) = 9$，$\rho(X, Y) = -1$，则$E(X + Y)^2 =$______.

9. 设随机变量X的特征函数为$\phi(t) = e^{\alpha(e^{it} - 1)}$, $\alpha > 0$为一常数，则$E(X^2) =$______.

10. 设随机变量序列$\{X_n, n = 1, 2, \ldots\}$独立同分布, 均服从参数为$p$的几何分布，即分布律为$P(X = k) = (1 - p)^{k-1} p$, $k = 1, 2, \ldots$, 则$\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{1}{n} \sum\limits_{k=1}^{n} X_k =$____.

二. （20 分） 设随机变量序列$X_1, X_2, \ldots, X_{10}$独立同分布，具有密度函数$f(x)$和分布函数$F(x)$，定义

$$Y_1 = \min\{X_1, X_2, \ldots, X_{10}\}, \quad Y_{10} = \max\{X_1, X_2, \ldots, X_{10}\}, \quad Z = Y_{10} - Y_1.$$

(1) 设 Y_i 的分布函数为 $G_i(y_i)$，$i=1,\ 10$，试用分布函数 $F(x)$ 表示

$G_i(y_i),\ i=1,10$；

(2) 设 (Y_1,Y_{10}) 的分布函数为 $G(y_1,y_{10})$，试用分布函数 $F(x)$ 表示 $G(y_1,y_{10})$；

(3) 若 $F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0,\\ x, & 0<x\le 1,\\ 1, & x\ge 1,\end{cases}$ 求 $E(Z)$.

三.（20 分） 设随机变量 $\xi,\ \eta$ 相互独立，且服从均匀分布，具体为 $\xi\sim U(-2,2),\ \eta\sim U(-9,9)$，

（1） 求方程 $x^2+2\xi x+\eta=0$ 有实根的概率；

（2） 求方程 $x^2+2\xi x+\eta=0$ 有实根的条件下，$2\eta>|\xi|$ 的条件概率，即 $P\{2\eta>|\xi|\,|\,x^2+2\xi x+\eta=0\text{有实根}\}$.

四.（20 分） 设二维随机变量 (X,Y) 的联合概率密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases}8xy, & 0\le x\le y\le 1,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$

若记 $U=\dfrac{X}{Y}$，$V=Y$，

（1）求 (U,V) 的概率密度函数；

（2）随机变量 X 和 Y 是否相互独立？为什么？

（3）随机变量 U 和 V 是否相互独立？为什么？

五.（20 分） 设随机变量 $X_i(i=1,2,3,4)$ 相互独立同二项分布 $B(1,0.4)$，

求：（1） X_1, X_2, X_3, X_4 的协方差矩阵；

（2） 行列式 $X = \begin{vmatrix} X_1 & X_2 \\ X_3 & X_4 \end{vmatrix}$ 的概率分布；

（3） $E(X), D(X)$.

六．（20 分） 设随机变量 X, Y 独立，分别服从参数为 $\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0$ 的泊松分布，即 $X \sim \pi(\lambda_1),\ Y \sim \pi(\lambda_2)$，

（1）证明：$X+Y$ 服从参数为 $\lambda_1+\lambda_2$ 的泊松分布；

（2）求概率 $P(X=k \mid X+Y=n)$，其中 $n \ge k$，都为正整数；

（3）定义 $Z = X+Y$，若 Z 表示从零时刻起单位时间内某放射性物质放射的粒子数，且放射时刻依次为 $T_1, T_2, \ldots,$ 即 T_i 表示第 i 个放射的粒子的放射时刻，求概率 $P\{T_1 \le 1\}$.