北京邮电大学

2016 年硕士研究生入学考试试题

考试科目:概率论

请考生注意:①所有答案(包括选择题和填空题)一律写在答题纸上,否则不计成绩。

②不允许考生使用计算器。

一、填空题(每小题 5 分,共 50 分)

1. 设事件 A,B 相互独立,且 $P(A)=0.5$, $P(AB)=0.3$, 则 $P(B\mid A\cup B)=$ ________.

2. 设 K 服从 $(1,6)$ 上的均匀分布,则方程 $x^2+Kx+1=0$ 有实根的概率为 ________.

3. 设随机变量 X 的概率密度函数为 $f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, & x>0,\\ 0, & x\le 0,\end{cases}$ $(\lambda>0)$. 当 $k=$ ________时,$P(X>k)=0.5$.

4. 在相同的条件下独立抛掷10次均匀的骰子,X_i 表示点 i 出现的次数,$i=1,2,\dots,6$,则 X_1 与 X_2 的相关系数 $\rho=$ ________.

5. 设一机器元件的使用寿命 X 服从均值为 $1/\lambda$(小时)的指数分布,现已知元件用了 100 小时还没有坏,则该机器元件至少还能再用 100 小时的概率为________.

6. 设随机变量 X 服从均匀分布 $U(0,1)$, 当给定 $X=x$ 时,随机变量 Y 的条件概率密度函数为 $f_{Y|X}(y\mid x)=\begin{cases}x, & 0<y<\dfrac{1}{x},\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$ 则当 $0<y<1$ 时,Y 的边缘概率密度函数 $f_Y(y)=$ ________.

7. 设随机变量 X 服从均匀分布 $U(0,4)$，Y 服从二项分布 $B(2,0.5)$，且 X 与 Y 相互独立，则 $P(X+Y\geq 3)=$__________.

8. 设随机变量 X 与 Y 相互独立，且都服从 $[0, 1]$ 上的均匀分布，则 $Z=|X-Y|$ 的分布函数 $F_z(z)=$__________.

9. 设随机变量 X 的特征函数为 $\phi(t)=(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}e^{it})^4$，则 $P(X=1)=$ __________.

10. 设随机变量 $X_i, i=1,2,\ldots$ 独立同分布，分布函数为

$$F(x)=\begin{cases}1-e^{x}, & x>0,\\ 0, & x\leq 0.\end{cases}$$

令 $Y_i=1-e^{X_i}, i=1,2,\ldots$，则依概率 1 有 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}Y_i=$__________.

二(20 分)设二维随机变量 (X,Y) 的联合概率密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases}c(x+y), & 0\leq y\leq x\leq 1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

求：(1) 常数 c； (2) 关于 X,Y 的边缘概率密度函数 $f_X(x), f_Y(y)$；

(3) 讨论 X 和 Y 是否独立； (4) $P(X+Y\leq 1)$； (5) $E(XY)$.

三(20 分)设 ξ,η 是相互独立的非负整数值随机变量，$E(\xi)<+\infty$，$E(\eta)<+\infty$，试证：

(1) $E(\xi)=\sum\limits_{m=1}^{\infty}P(\xi\geq m)$；

(2) $E[\min(\xi,\eta)]=\sum\limits_{m=1}^{\infty}P(\xi\geq m)P(\eta\geq m)$.

四(20 分)设随机变量 X_i $(i=1,2,3,4)$ 相互独立同二项分布 $B(1,0.4)$，

求：

(1) X_1,X_2,X_3,X_4 的协方差矩阵；

(2) 行列式 $X=\begin{vmatrix} X_1 & X_2 \\ X_3 & X_4 \end{vmatrix}$ 的分布律；

(3) $E(X), D(X)$.

五（20 分）设随机变量 (X,Y) 的概率密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases} e^{-(x+y)}, & x>0,y>0, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

令 $\begin{cases} U=X+Y, \\ V=X-Y. \end{cases}$

(1) 求 (U,V) 的概率密度函数 $g(u,v)$，U 和 V 的边缘概率密度函数 $g_U(u)$ 和 $g_V(v)$；

(2) 判别 U 和 V 的独立性；

(3) 求 $Cov(U,V)$.

六（20 分）设两随机变量 $X\sim N(0,1)$，$Y\sim N(0,1)$ 且 X 与 Y 相互独立. 令 $Z=X+Y$.

(1) 求 $E(|Z|)$，$D(|Z|)$；

(2) 若随机变量序列 $Z_1,Z_2,\ldots$ 相互独立，且与 Z 同分布. 利用中心极限定理，用 Φ 近似表示概率 $P\left\{\sum_{k=1}^{100}|Z_k|>a\right\}$，其中 Φ 为标准正态分布的分布函数，a 为一常数，并问 a 取何值时，概率 $P\left\{\sum_{k=1}^{100}|Z_k|>a\right\}$ 近似为 0.5.