Zwei Theorien über den Gegenstand der Logik

Von
FRANZ VON KUTSCHERA

Was der Gegenstand einer empirischen Wissenschaft ist, wie sich der Bereich der Objekte und Erscheinungen umgrenzen und ontologisch charakterisieren läßt, mit denen sie sich befaßt und von denen ihre Theorien handeln, ist eine Frage, die im konkreten Wissenschaftsbetrieb kaum eine Rolle spielt und deren Beantwortung im allgemeinen ohne Einfluß auf den Gang der Wissenschaft bleibt. Der Naturwissenschaftler ist primär an der Beschreibung der Erscheinungen interessiert, an dem *Wie,* nicht an ihrem ontologischen Status, dem *Was.* Diese Unabhängigkeit von ontologischen Fragen gilt als wesentlicher Vorzug der neuzeitlichen gegenüber der antiken und mittelalterlichen Naturwissenschaft und es wird oft behauptet, der Fortschritt etwa der Physik seit GALILEI sei wesentlich auch dadurch bewirkt worden, daß sie sich nicht mehr für die Metaphysik ihrer Gegenstände interessierte, für das Wesen der Materie usf., sondern für die Gesetze, nach denen die physikalischen Erscheinungen ablaufen.

Anders ist die Situation in der Logik und in der Mathematik. In diesen Wissenschaften ist die Beantwortung der Frage nach dem ontologischen Status ihrer Objekte, der Begriffe, Funktionen, Mengen und Propositionen von entscheidendem Einfluß auf die Gestaltung ihrer Theorien. Je nach dem Standpunkt, den man in dieser Frage einnimmt, wird man gewisse fundamentale logische Gesetze annehmen oder verwerfen, gewisse Definitionsmethoden zulassen oder ausschließen und die Existenz gewisser Mengen anerkennen oder ablehnen. Die Frage nach dem Gegenstand der Logik und der Mathematik hat also eine ganz konkrete Bedeutung für diese Wissenschaften selbst, so daß es als lohnend erscheint, ihr genauer nachzugehen. Wir beginnen dabei mit der Diskussion der Antwort, welche die klassische Logik auf diese Frage gibt.

Die Gestalt, die man heute gewöhnlich als *klassische* Gestalt der formalen Logik anspricht, wurde seit der Mitte des vorigen Jahrhunderts durch die bahnbrechenden Arbeiten von GEORGE BOOLE, AUGUSTUS DE MORGAN und insbesondere von GOTTLOB FREGE geformt. Sie enthält die erste Formulierung der modernen *mathematischen* oder *symbolischen* Logik, die sich von der auf ARISTOTELES zurückgehenden traditionellen Logik der Methode nach durch die Verwendung präziser syntaktischer Formalismen unterscheidet, dem Inhalt nach durch den Aufbau wesentlich stärkerer deduktiver Theorien, in denen sich nach dem Programm des Logizismus nun die Mathematik aus der Logik begründen läßt, in denen man also die mathematischen Begriffe durch logische Begriffe definieren und mit Hilfe dieser Definitionen die mathematischen Theoreme als logische Lehrsätze beweisen kann. Im Hinblick auf die Durchführbarkeit dieses Programms reduziert sich also die Frage nach dem Gegenstand der Mathematik auf die nach dem Gegenstand der Logik.

Die Antwort der klassischen Logik auf die Frage nach dem ontologischen Status ihrer Gegenstände läßt sich nun in der These zusammenfassen:

R) Es gibt eine, von der empirischen verschiedene transsubjektive Wirklichkeit, der die Gegenstände der Logik, die Begriffe, Funktionen, Mengen und Propositionen zugehören und in der gewisse Gesetzmäßigkeiten gelten. Zu dieser idealen Wirklichkeit haben wir in Form eines apriorischen Anschauungsvermögens einen erkenntnismäßigen Zugang.

Den so umrissenen Standpunkt wollen wir als *logischen Realismus* bezeichnen. GEORG CANTOR, der Schöpfer der Mengenlehre, formuliert ihn, wenn er im Hinblick auf die mathematischen Gesetze sagt: „Neque enim leges intellectui aut rebus damus ad arbitrium nostrum, sed tamquam scribae fideles ab ipsius naturae voce latas et prolatas excipimus et describimus“ [1].

Und FREGE schreibt:
„... ich erkenne ein Gebiet des Objektiven, Nichtwirklichen [d. h. Nichtempirischen] an ...“[2], und „... der Begriff ist etwas Objektives, das wir nicht bilden, das sich auch nicht in uns bildet, sondern das wir zu erfassen suchen und zuletzt hoffentlich wirklich erfassen ...“ [3].

Betrachten wir nun den Inhalt der These *R* näher! Sie behauptet zunächst, daß die Logik apriorischen Charakter hat. Tatsächlich lassen sich ja logische Gesetze auch in der Gestalt von Allsätzen definitiv verifizieren, während das bei empirischen Gesetzen nicht möglich ist. So läßt sich etwa die Allgemein-

[1] Motto der „Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre“, [1], S. 282. — Die Ziffern in eckigen Klammern beziehen sich auf das Literaturverzeichnis am Ende der Arbeit.

[2] [4], Bd. *I*, S. XVIII. Vgl. dort auch die Ausführungen auf S. XIV ff.

[3] [3], S. 158.

gültigkeit des logischen Gesetzes einsehen: „Wenn alle Gegenstände, die unter einen Begriff A fallen, auch unter einen Begriff B fallen, und alle Gegenstände, die unter den Begriff B fallen, auch unter den Begriff C fallen, so fallen auch alle Gegenstände, die unter den Begriff A fallen, unter den Begriff C." Die Allgemeingültigkeit eines empirischen Gesetzes wie „Alle Raben sind schwarz" läßt sich hingegen nie definitiv verifizieren. Denn die Verifizierung dieses Gesetzes ist nur über die Beobachtung der einzelnen Raben auf ihre Farbe hin möglich und alle vergangenen Beobachtungen über schwarze Raben erlauben nie den Schluß, daß auch alle zukünftigen Beobachtungen immer nur schwarze Raben ergeben werden. Diesen Tatbestand hat zuerst HUME in voller Schärfe hervorgehoben. Die Verifizierbarkeit allgemeiner logischer Gesetze läßt sich also nur durch ihren nichtempirischen Charakter erklären.

In dieser Behauptung des apriorischen Charakters der Logik besteht aber nicht der spezifische Gehalt der These R des logischen Realismus. Er besteht auch nicht darin, daß hier im Sinne des Platonismus die Existenz nichtempirischer Entitäten anerkannt wird. Entscheidend ist vielmehr, daß diese Entitäten konzipiert werden als existierend unabhängig vom denkenden Subjekt, als nicht von ihm gebildet oder geschaffen, sondern als präexistent.

Das Erzeugen oder Schaffen z. B. eines Begriffs durch das Subjekt kann nun u. a. auch so gedacht werden, daß der Begriff durch Angabe einer Definition entsteht. Definitionen dürfen nach der These R also nicht als Erzeugungsvorschriften für Begriffe angesehen werden, sondern nur als Beschreibungen. Begriffe werden nicht durch Definition gebildet, sondern sie werden entdeckt, wie etwa ein Stern entdeckt wird und das Entdeckte kann dann u. U. mit Hilfe einer Definition beschrieben werden. Die Existenz der Begriffe bleibt aber unabhängig davon, ob eine Definition für sie angegeben worden ist, oder ob eine solche Definition überhaupt angegeben werden kann. Die für das folgende entscheidende Behauptung des logischen Realismus läßt sich daher negativ auch so formulieren:

R^*) Existenz und Eigenschaften der logischen Entitäten werden nicht durch Definitionen begründet.

Aus den beiden Thesen von der Apriorität und der Transzendenz der logischen Objekte ergibt sich dann für den logischen Realismus die Forderung der Existenz einer apriorischen Anschauung, in der uns diese Objekte erkenntnismäßig zugänglich sind. Denn eine transzendente Wirklichkeit erfordert offenbar ein eigenes Erkenntnisvermögen, das uns den Zugang zu ihr öffnet, und da sie apriorisch ist, kann es sich dabei nicht um das sinnliche Wahrnehmungsvermögen handeln, so daß man zur Forderung eines eigenen apriorischen Erkenntnisvermögens geführt wird.

Eine eingehende Begründung für die These R hat vor allem FREGE angegeben [4]. Aus seiner Argumentation geht hervor, daß er in dieser These das Mittel sah, die Objektivität der logischen und mathematischen Erkenntnis gegenüber den empirisch und subjektivistisch orientierten psychologischen Auffassungen der Logik seiner Zeit zu begründen [5]. Nach der empirischen Auffassung der Logik sind die logischen Gesetze Denkgesetze in dem Sinn, daß sie beschreiben, wie tatsächlich gedacht wird, wie die psychischen Denkvorgänge ablaufen. Wir haben aber oben schon hervorgehoben, daß eine Auffassung, nach der die logischen Gesetze empirischen Charakter haben, nicht haltbar ist. Außerdem wären die logischen Gesetze in dieser Interpretation sicherlich falsch, da keinesfalls immer im Einklang mit ihnen gedacht wird. Nach der Auffassung der älteren Bewußtseinspsychologie wiederum sind die logischen und mathematischen Entitäten Vorstellungen und Vorstellungen werden als Zustände des Erkenntnissubjekts verstanden, die als solche von dem Subjekt nicht abzulösen sind, so daß keine zwei Menschen die gleiche Vorstellung haben können. Dadurch ergibt sich eine Umdeutung der Aussagen der Logik und Mathematik, nach der sie von den Vorstellungen des aussagenden Subjekts handeln. FREGE hat mit Recht hervorgehoben, daß diese Interpretation nicht haltbar ist, da nach ihr z. B. der Inhalt des Pythagoreischen Lehrsatzes davon abhinge, wer ihn ausspricht.

FREGES Kritik dieser beiden Auffassungen ist durchaus anzuerkennen. Um sie abzuwehren benötigt man aber die These R nicht. Daher liegt ein *non sequitur* vor, wenn FREGE seine diesbezüglichen Überlegungen mit den Worten abschließt:

„So scheint das Ergebnis zu sein: Die Gedanken [FREGES Ausdruck für Propositionen] sind weder Dinge der Außenwelt, noch Vorstellungen. Ein drittes Reich muß anerkannt werden. Was zu diesem gehört, stimmt mit den Vorstellungen darin überein, daß es nicht mit den Sinnen wahrgenommen werden kann, mit den Dingen aber darin, daß es keines Trägers bedarf, zu dessen Bewußtseinsinhalte es gehört" [6].

Aus dem apriorischen Charakter der Logik und den Unzulänglichkeiten ihrer psychologischen Inter-

[4] Vgl. dazu [4], Bd. *I*, S. XIV ff. und [5].

[5] Man hat dabei etwa an die damals verbreitete Logik von B. ERDMANN zu denken, auf die sich auch FREGE bezieht.

[6] [5], S. 69.

pretation ergibt sich nicht die Notwendigkeit, den logischen Entitäten eine transzendente Realität zuzuordnen. So gibt es etwa in Form des modernen Konzeptualismus, wie des Intuitionismus, eine nichtpsychologische, apriorische Auffassung der Logik, die ihren Gesetzen objektive Geltung sichert. FREGE trägt aber kein Argument vor, das den logischen Realismus vor einem solchen nichtpsychologischen Konzeptualismus auszuzeichnen vermöchte, obwohl er den Konzeptualismus, den er wohl nur in einer psychologischen Version vor Augen hatte, ausdrücklich ablehnt, wenn er sagt:

„... das Denken ist nicht ein inneres Erzeugen und Bilden, sondern ein Fassen von Gedanken, die schon objektiv vorhanden sind" [7].

FREGES Argumentation reicht also nicht hin, um die These *R* zu begründen. Auch bei den übrigen Vertretern des logischen Realismus scheint die Ansicht bestimmend zu sein, daß die objektive Gestaltung und damit die Dignität einer Wissenschaft von der objektiven, und das heißt für sie: von der transzendenten Realität ihrer Gegenstände abhängt: „Wenn wir überhaupt aus dem Subjektiven herauskommen wollen, so müssen wir das Erkennen auffassen als eine Tätigkeit, die das Erkannte nicht erzeugt, sondern das schon Vorhandene ergreift" [8]. Die Objektivität, die für die Wissenschaftlichkeit einer Disziplin entscheidend ist, ist aber nicht die Objektivität im Sinne einer Transzendenz ihrer Gegenstände, sondern die Objektivität ihrer Aussagen im Sinne der intersubjektiven Kontrollierbarkeit, der Existenz von Gültigkeitskriterien für diese Aussagen, die ihre Anerkennung oder Verwerfung aus dem Bereich des subjektiven Beliebens rücken. Eine solche Objektivität der Aussagen hängt aber nicht an der Transzendenz der Gegenstände, von denen sie handeln. So sind z. B. Aussagen über die Lösung von Schachproblemen sicherlich intersubjektiv kontrollierbar, obwohl sich die Spielregeln, auf die sie sich beziehen, als willkürliche Festsetzungen darstellen. Eine Verwerfung der These *R* besagt also nicht, daß die Objektivität der Logik aufgegeben würde.

Neben ihrer Begründung ist aber auch der Inhalt der These *R* fragwürdig. Die Tätigkeit des Logikers und Mathematikers stimmt schlecht zum Bild eines Entdeckers: Es gibt keine Entdeckungsberichte von abstrakten Entitäten, Begriffe werden definiert und nicht entdeckt und die Definition bildet auch den einzigen Zugang zu den Begriffen, den man tatsächlich benutzt. Ist ein Begriff aber definiert, so wird er auch ohne weitere Untersuchungen über seine transzendente Existenz zugelassen. Metaphysische Untersuchungen über die Existenz, und also über die Zulässigkeit von Begriffen im Sinn der These *R* kommen in Logik und Mathematik tatsächlich nicht vor.

Daß der Mathematiker sich nur auf die Definitionen von Begriffen bezieht, nicht aber auf ihre transzendente Existenz, hat insbesondere CANTOR hervorgehoben [9]. Er unterscheidet zwischen der transzendenten, oder wie er sagt, der *transienten* Realität der mathematischen Entitäten und ihrer *immanenten* Realität, unter der diejenige Realität zu verstehen ist, die den Entitäten durch Angabe einer Definition gesichert ist. CANTORS These besagt nun, daß beide Realitätsmodi zusammenfallen, d. h. daß gilt:

C) Jeder definierbaren mathematischen Entität kommt eine transzendente Existenz zu und jede transzendente mathematische Entität ist umgekehrt auch definierbar.

Er schreibt:

„Dieser Zusammenhang beider Realitäten hat seinen eigentlichen Grund in der Einheit des Alls, zu welcher wir selbst mitgehören" [10].

Auf Grund der Korrespondenz von immanenter und transzendenter Wirklichkeit erst ist das Verfahren der Mathematik gerechtfertigt, in dem auf die transzendente Realität der Entitäten kein Bezug genommen wird:

„Der Hinweis auf diesen Zusammenhang hat nun hier den Zweck, eine mir sehr wichtig scheinende Konsequenz für die Mathematik daraus herzuleiten, daß nämlich letztere bei der Ausbildung ihres Ideenmaterials einzig und allein auf die immanente Realität ihrer Begriffe Rücksicht zu nehmen und daher keinerlei Verbindlichkeit hat, sie auch nach ihrer transienten Realität zu prüfen" [11].

CANTOR möchte die Mathematik nicht in Abhängigkeit von metaphysischen Untersuchungen geraten lassen. Auf Grund der These *C* kann er aber sagen:

„Die Mathematik ist in ihrer Entwicklung völlig frei und nur an die selbstredende Rücksicht gebunden, daß ihre Begriffe sowohl in sich widerspruchslos sind, als auch in festen, durch Definitionen geordneten Beziehungen zu den vorher gebildeten, bereits vorhandenen und bewährten Begriffen stehen" [12].

[7] Brief an E. HUSSERL vom 30. 10./1. 11. 1906, unveröffentlicht. — Für eine genaue Analyse der Begriffe *Platonismus* und *Konzeptualismus* vgl. [9].

[8] [4], Bd. *I*, S. XXIV.

[9] [1], S. 181 ff.

[10] [1], S. 182.

[11] [1], S. 182.

[12] [1], S. 182.

Ist schon die These von der transzendenten Realität der logischen Entitäten nicht ausreichend begründet, so macht nun die Cantorsche These C, die das faktische Verfahren der Mathematik mit der These *R* in Einklang bringen soll, zusätzliche Schwierigkeiten. Die Berufung auf die Einheit des Alls und die gleichlautenden Ansichten einiger Philosophen wie Parmenides, Platon, Spinoza und Leibniz [13] kann wohl nicht als zureichende Begründung für sie angesehen werden. Eine andere Begründung fehlt aber und es bleibt auch ganz unklar, wie sie aussehen sollte. Ferner liegt es doch nahe zu sagen: Wenn Cantors These richtig ist. so kann man die Fiktion der transzendenten Realität der logischen Entitäten ohne Verlust aufgeben. Wenn die transzendente Realität der immanenten genau entspricht, so braucht man nur auf diese zu achten und die Annahme der transzendenten Realität bleibt ohne Folgen für die Gestaltung von Logik und Mathematik. Die These *R* stellt sich dann nur als ein für diese Wissenschaften selbst nicht relevanter metaphysischer Überbau zur Sicherung ihrer „objektiven" Geltung dar, der sich auch in dieser Funktion nach unseren früheren Überlegungen als entbehrlich erweist.

Tatsächlich ist aber die These C für die klassische Logik nicht haltbar und die Fiktion der transzendenten Realität der Entitäten erweist sich für den Aufbau dieser Logik als wesentlich: In der klassischen Logik gilt das Prinzip *tertium non datur*, jede Proposition ist wahr oder falsch, eine dritte Möglichkeit gibt es nicht. In Anwendung auf Begriffe besagt dieses Prinzip: Jeder Begriff ist erklärt für alle Objekte, die Begriffe sind total bestimmt, so daß für jeden Gegenstand festliegt, ob er unter den Begriff fällt oder nicht. Die klassische Logik kann dieses Prinzip auf Grund der These *R* als Tatsachenbehauptung ausgeben, die uns in der apriorischen Anschauung evident ist. Bei der immanenten Auffassung der Begriffe ist das nicht möglich, hier wäre vielmehr zu beweisen, daß durch alle in der klassischen Logik zugelassenen Definitionsweisen die Begriffe total definiert werden. Ein solcher Beweis läßt sich aber im Rahmen der höheren Logiksysteme, wo *imprädikative* Definitionen auftreten, nicht erbringen. In einer imprädikativen Definition kann z. B. das Zutreffen oder Nichtzutreffen eines Begriffes auf einen Gegenstand, mittelbar und auf sehr komplizierten Umwegen, erklärt werden unter Bezugnahme auf die Erklärung eben dieses Begriffes für diesen Gegenstand. Nach einer solchen Definition bleibt dann aber dieser Begriff für den fraglichen Gegenstand undefiniert, da er ja schon für diesen Gegenstand erklärt sein müßte, damit man ihn mit Hilfe der Definition für den Gegenstand erklären könnte. So kann man z. B. einen Begriff *F* durch die Festsetzung definieren:

I. Der Begriff *F* soll auf eine Menge *a* zutreffen dann und nur dann, wenn die Menge *a* sich selbst als Element enthält.

Nach dieser Definition ist klar, daß der Begriff *F* z. B. auf die Menge aller Mengen, die als Menge Element von sich selbst ist, zutrifft, nicht hingegen auf die Menge der Menschen, die als Menge kein Mensch und also nicht Element von sich selbst ist. Fällt nun nach der Definition I der Umfang des Begriffes *F*, d. h. die Menge *b* aller Mengen, die unter den Begriff *F* fallen, unter den Begriff *F* oder nicht? Um aus der Definition I auf ein Zutreffen, bzw. ein Nichtzutreffen von *F* auf *b* schließen zu können, müßte man bereits wissen, daß *b* Element von sich selbst ist, d. h. daß *b* unter den Begriff *F* fällt, bzw. daß *b* nicht unter den Begriff *F* fällt. Aus der Definition I erhalten wir also keine Auskunft darüber, ob *F* auf *b* zutrifft oder nicht, d. h. der Begriff *F* bleibt undefiniert für den Gegenstand *b* und das *tertium non datur* gilt für den so definierten Begriff *F* nicht.

Wenn man also die klassisch zulässigen Definitionsweisen betrachtet und die durch sie abgegrenzte immanente Realität der Begriffe, so wird man das *tertium non datur* nicht akzeptieren. Erkennt man aber eine transzendente Realität der Begriffe an, so werden die Begriffe durch ihre Definition nicht erzeugt, sondern nur beschrieben und sie können Eigenschaften haben, die durch die Beschreibung nicht erfaßt werden. Von diesem Standpunkt aus würde man also sagen: I ist eine unvollständige Beschreibung eines Begriffes *F* an sich, aus der sich der Wert von *F* für das Argument *b* nicht ablesen läßt. An sich liegt dieser Wert aber fest. Mit dieser Argumentation, die auf die These *R* zurückgreift, kann man also das *tertium non datur* aufrechterhalten, unter Bezugnahme auf die immanente Realität der Begriffe allein hingegen nicht. An diesem Punkt wird es also ausschlaggebend, ob man die These *R* akzeptiert oder nicht, und die Cantorsche These erweist sich somit als unhaltbar.

Die Kluft zwischen der immanenten und der durch das Prinzip *tertium non datur* charakterisierten transzendenten Realität der Begriffe gewinnt ihre entscheidende Bedeutung aber erst, wenn man beachtet, daß es auch imprädikative Definitionen gibt, die gewissermaßen *wesentlich* unvollständig sind. Ein Beispiel dafür bildet die folgende Definition:

[13] [1], S. 206 f., Anmerkung 6.

II. Der Begriff G soll auf eine Menge a zutreffen dann und nur dann, wenn die Menge a sich selbst nicht als Element enthält.

Um mit dieser Definition feststellen zu können, daß G auf den Umfang c des Begriffes G zutrifft, bzw. nicht zutrifft, müßte man bereits wissen, daß c nicht Element von sich selbst ist, d. h. nicht unter den Begriff G fällt, bzw. daß c unter den Begriff G fällt. Die Definition II gibt also über den Wert von G für das Argument c keine Auskunft und insofern ist die Situation ähnlich wie im Fall der Definition I. Wenn man die Definition II nun aber im Sinn der These R als unvollständige Beschreibung eines an sich total definierten Begriffes G versteht, für den also das *tertium non datur* gilt, so erhält man sofort einen Widerspruch, die Antinomie von RUSSELL: Nach dem *tertium non datur* gilt ja: G trifft auf c zu oder G trifft nicht auf c zu. Im ersten Fall ist c nach I nicht Element von sich selbst, so daß auch gilt: G trifft nicht auf c zu. Im zweiten Fall ist c nach I Element von sich selbst, so daß auch gilt: G trifft auf c zu. In jedem Fall ergibt sich als der Widerspruch: G trifft auf c zu und G trifft nicht auf c zu.

Diese Antinomie beweist die Unverträglichkeit der klassischen Definitionsmethoden mit den klassischen Vorstellungen von den transzendenten Eigenschaften der Begriffe und stellt damit die Logik vor die Wahl, entweder an dem *tertium non datur* und damit an der These R festzuhalten und gewisse Definitionsweisen, insbesondere die imprädikativen Definitionen der angegebenen Art abzulehnen, oder aber die These R aufzugeben und eine Rekonstruktion der Logik nur auf der Basis von Definitionssystemen und der durch sie fixierten immanenten Realität der logischen Entitäten zu versuchen [14]. Eine Logik, deren Aufbau diesem letzteren Leitgedanken folgt, wollen wir *konstruktiv* nennen. Auf Grund der voraufgegangenen Diskussion der These R steht es wohl außer Zweifel, daß eine hinreichend leistungsfähige konstruktive Logik einer Logik vorzuziehen ist, die von der Fiktion einer transzendenten Realität ihrer Entitäten Gebrauch machen muß. Das ergibt sich auch schon aus dem Prinzip der wissenschaftlichen Ökonomie, das OCCAM in der Forderung zusammenfaßte: *entia non sunt multiplicanda praeter necessitatem.* Da jede Logik von Definitionen Gebrauch machen muß, ist eine Logik, die nur von definitorischen Festsetzungen Gebrauch macht, einer Logik vorzuziehen, die darüber hinaus noch Eigenschaften ihrer Entitäten annehmen muß, die sich durch deren Definitionen allein nicht ausweisen lassen.

Wir wollen daher untersuchen, wie sich von der konstruktiven Thesen her

K) für die Sätze der Logik soll keine andere Begründung zugelassen werden, als der Rückgriff auf ein System von definitorischen Festsetzungen,

ein konsequenter Begründungsansatz für die Logik gewinnen läßt. Dazu muß genauer bestimmt werden, wie ein solches System von Festsetzungen aussehen soll.

Zunächst genügt es, unter den Festsetzungssystemen Systeme von *Wahrheitsregeln* zu verstehen, mit denen gewissen Sätzen einer der beiden Wahrheitswerte „wahr" oder „falsch" zugeordnet werden kann. Denn die Definition eines Eigennamens a durch einen Eigennamen b läßt sich immer umschreiben in die Gestalt einer Definition der Satzform $x = a$ (x ist mit a identisch) durch die Satzform $x = b$ [15]. Im Hinblick auf den konventionellen Charakter der Festsetzungen wird man weiterhin fordern, daß sie in Gestalt präziser sprachlicher Vorschriften formuliert werden sollen, und daß die Zuordnung eines Wahrheitswertes zu einem Satz, die durch Anwendung einer Regel unter vorgegebenen Bedingungen erzeugt wird, eindeutig bestimmt und effektiv herstellbar ist. Damit ein System T von von Wahrheitsregeln von vornherein in seiner Totalität scharf umgrenzt ist, wird man ferner fordern, daß die Menge der Regeln von T entscheidbar ist. Das Wort „entscheidbar" ist dabei in folgendem Sinn zu verstehen: Man sagt, für einen Problemkreis liege ein allgemeines Lösungsverfahren oder ein *Algorithmus* vor, wenn ein Verfahren angegeben wird, dessen Durchführung bis in alle Einzelheiten eindeutig bestimmt ist, das auf alle fraglichen Probleme angewendet und gewissermaßen rein mechanisch ausgeführt werden kann und das für jedes dieser Probleme in endlich vielen Schritten die Lösung ergibt. Beispiele solcher Algorithmen sind etwa das Additions- oder Divisionsverfahren für rationale Zahlen. Besteht nun die Lösung der fraglichen Probleme in der Beantwortung von Fragen mit „ja" oder „nein", so nennt man ein allgemeines Lösungsverfahren für diesen Problemkreis ein *Entscheidungsverfahren.* Und man nennt eine Menge entscheidbar, wenn sich ein solches Entscheidungsverfahren angeben läßt für die Frage, ob ein Gegenstand Element der Menge ist oder nicht. Unsere letztgenannte Forderung besagt also, daß nur solche Systeme T von Wahrheitsregeln in Betracht

[14] Diese beiden Richtungen lassen sich etwa durch die verzweigte Typentheorie von RUSSELL und das typenfreie System von ACKERMANN veranschaulichen. Vgl. die Darstellungen in [8].

[15] Vgl. dazu etwa [10], Kap. VIII.

kommen sollen, für die sich entscheiden läßt, ob eine Regel dem System T zugehört oder nicht. Das gilt offenbar insbesondere für Systeme T, die nur endlich viele Regeln enthalten.

Endlich wird man fordern, daß die Erzeugbarkeit einer Wahrheitswertzuordnung mit einer Regel eines Systems T nur von Bedingungen abhängt, deren Erfülltsein oder Nichterfülltsein allein durch das System T selbst festgelegt ist. Diese Bedingungen dürfen demnach nur Wahrheitswertzuordnungen in T betreffen. Diese Forderung soll im Sinn der These K verhindern, daß der Wahrheitswert, der einem Satz durch ein Regelsystem T zugeordnet wird, letztlich doch wieder nicht nur von den Festlegungen in T abhängt, sondern z. B. von empirischen Tatsachen, von dem Gehalt nichtlogischer Theorien etc.

Nach dieser letzten Forderung haben die Wahrheitsregeln eines Systems T nun entweder die kategorische Gestalt: der Satz A soll wahr, bzw. falsch sein, oder die hypothetische Gestalt: Wenn die Sätze $A_1, \ldots, A_m$ in T als wahr ausgezeichnet sind und die Sätze $B_1, \ldots, B_n$ als falsch, so soll der Satz C in T als wahr, bzw. falsch ausgezeichnet sein. Ist A ein Satz, so wollen wir die Zuordnungen „A ist wahr", bzw. „A ist falsch" als *Zuordnungssätze* bezeichnen. Man kann dann eine Wahrheitswertzuordnung in einem System T darstellen als eine endliche Folge von Zuordnungssätzen, deren letztes Glied die fragliche Zuordnung ausdrückt und deren sämtliche Glieder entweder kategorische Zuordnungssätze von T sind oder durch Anwendung einer der hypothetischen Regeln von T vorhergehende Zuordnungssätze der Folge hervorgehen.

Die durch unsere Forderungen ausgezeichneten Systeme von Wahrheitsregeln stellen sich demnach als formale Kalküle dar. Allgemein bezeichnet man als einen *formalen Kalkül* ein System von Regeln, deren Menge entscheidbar ist und die entweder gewisse Ausdrücke als *Axiome* auszeichnen oder, in Form von *Deduktionsregeln*, angeben, wie aus bereits ausgezeichneten Ausdrücken neue auszuzeichnende Ausdrücke gewonnen werden können. Als *Beweis* für einen Ausdruck A in einem solchen Kalkül S bezeichnet man eine Folge von Ausdrücken, deren letztes Glied A ist und deren sämtliche Glieder entweder Axiome von S sind oder durch Anwendung einer der Deduktionsregeln von S auf vorhergehende Glieder der Folge hervorgehen. Bei der Auffassung von Wahrheitsregelsystemen als formale Kalküle fungieren also die kategorischen Zuordnungssätze als Axiome, die hypothetischen Regeln als Deduktionsregeln und die Wahrheitswertzuordnungen als Beweise.

Unter Benutzung des Kalkülbegriffes läßt sich also der Begriff des Systems von Wahrheitsregeln exakt präzisieren. Diese Präzisierung hat den Vorteil, daß die Wahrheitswertzuordnungen auf Grund von Regelsystemen der denkbar schärfsten Kontrolle unterliegen. Denn für jede als Folge F von Zuordnungssätzen vorgelegte Wahrheitswertzuordnung ist es entscheidbar, ob sie in einem gegebenen System T regelgemäß ist oder nicht: Für jedes Glied C von F läßt sich zunächst die Frage entscheiden, ob C ein kategorischer Zuordnungssatz von T ist — die Menge der Regeln von T sollte ja entscheidbar sein, und da es auch entscheidbar ist, ob eine Regel von T kategorisch oder hypothetisch ist, so sind auch die Mengen der kategorischen und hypothetischen Regeln von T entscheidbar — oder, wenn das nicht der Fall ist, ob C durch einmalige Anwendung einer der Deduktionsregeln von T auf vorhergehende Glieder der Folge F hervorgeht — da C in F nur endlich viele Glieder vorhergehen, gibt es nur endlich viele Regeln, mit denen man C aus ihnen gewinnen kann und da die Menge der hypothetischen Regeln von T entscheidbar ist, läßt sich feststellen ob eine dieser Regeln im System T enthalten ist. Wenn diese Frage für jedes Glied C von F bejaht werden kann, dann und nur dann ist F eine regelgemäße Wahrheitswertzuordnung in T.

Mit der Präzisierung des Begriffs der Wahrheitsregelsysteme ist nun der Ausgangspunkt für eine konstruktive Begründung der Logik gewonnen. Die nächste Aufgabe besteht dann darin, die logischen Operatoren, die umgangssprachlichen Worten wie „nicht", „und", „oder", „wenn — dann", „alle", „einige", „ist gleich", „ist Element von" und „die Klasse der ..." entsprechen, explizit zu definieren. Die dazu verwendeten Definitionsregeln müssen nach dem konstruktiven Grundgedanken wieder die Gestalt von Regeln eines formalen Kalküls annehmen. Dabei geht man von einem Grundkalkül T aus, in dem zunächst Sätzen ohne solche logischen Operatoren Wahrheitswerte zugeordnet werden und erweitert ihn zu einem Kalkül T^*, indem man Regeln hinzunimmt, die angeben, unter welchen Bedingungen ein Satz, der einen der angegebenen logischen Operatoren enthält, als wahr oder als falsch ausgezeichnet werden kann. Für den Operator „nicht" wird man so z. B. Regeln wählen wie: „Wenn der Satz A als falsch ausgezeichnet ist, so ist der Satz nicht-A als wahr ausgezeichnet", und „Wenn A als wahr ausgezeichnet ist, so ist nicht-A als falsch ausgezeichnet". Die in den Erweiterungen aller Grundkalküle T als wahr ausgezeichneten Sätze sind dann die Theoreme der Logik.

Die Grundgedanken für den Aufbau solcher Regelsysteme sind von Gentzen, Curry und Loren-

ZEN entwickelt worden [16]. Man kann auf diesem Weg zu einem typenfreien Logiksystem gelangen, d. h. zu einem Logiksystem, in dem auch imprädikative Definitionen in der Art der Definitionen I und II zugelassen sind, in dem aber das *tertium non datur* nicht gilt, da nicht jeder Satz in jedem Kalkül als wahr oder als falsch ausgezeichnet ist. Die Widerspruchsfreiheit dieses Systems läßt sich dann beweisen, so daß man sichergeht, daß in dieser konstruktiven Logik nicht wieder Antinomien auftreten [17]. Aus der Definition II, die in der klassischen Logik Anlaß zum Auftreten der Antinomie von RUSSELL gibt, kann man im Sinn unserer früheren Analyse in der konstruktiven Logik weder eine Auszeichnung des Satzes „Die Klasse *c* fällt unter den Begriff *G*“ als wahr, noch als falsch gewinnen, so daß diese Antinomie tatsächlich durch eine strenge Beschränkung auf die immanente Realität der Begriffe beseitigt werden kann.

Dieser kurze Hinweis auf den Weg, auf dem sich eine Logik nach dem konstruktiven Grundgedanken begründen läßt, soll die Fruchtbarkeit der These *K* unterstreichen. Diese These nimmt sich ja zunächst recht abstrakt und vage aus, so daß man auf den ersten Blick nicht absieht, ob sich auf diesen Grundgedanken tatsächlich ein brauchbares Logiksystem aufbauen läßt, und ob diese Auffassung vom Gegenstand der Logik also auch haltbar ist.

Eine konstruktive Logik ist nun ebenso wie die Logik nach der These *R* eine apriorische Wissenschaft, wird doch durch die These *K* ein Rückgriff auf empirische Tatsachen zur Begründung der logischen Theoreme gerade ausgeschlossen. Ein besonderes apriorisches Erkenntnisvermögen, mit dessen Hilfe die Gültigkeit der logischen Sätze erst eingesehen werden kann, braucht der logische Konstruktivismus im Gegensatz zum logischen Realismus hingegen nicht anzunehmen, da die definitorischen Festsetzungen, auf die sich die logischen Theoreme gründen, als freie Setzungen in sich selbst evident sind. Die Sätze der konstruktiven Logik können endlich auch objektive Geltung beanspruchen in dem für die Wissenschaftlichkeit dieser Disziplin allein relevanten Sinn einer intersubjektiven Kontrollierbarkeit. Das gilt sogar in noch stärkerem Maße als für die realistische Auffassung der Logik, da das Operieren in formalen Kalkülen, wie wir gesehen haben, der allerstrengsten Kontrolle unterliegt, wie sie für die Betätigung eines apriorischen Anschauungsvermögens nicht möglich ist. Die Verläßlichkeit dieses Anschauungsvermögens ist denn auch durch die Entdeckung der Antinomien ernstlich in Frage gestellt worden.

[16] Vgl. [6], [2] und [7].

[17] Ein Logiksystem dieser Art ist zuerst von ACKERMANN angegeben worden, vgl. die Darstellung in [8].

Literatur

[1] CANTOR, G: Gesammelte Abhandlungen. Hrsg. von E. Zermelo, Berlin 1932.
[2] CURRY, H. B.: Foundations of Mathematical Logic. New York 1963.
[3] FREGE, G.: Über das Trägheitsgesetz. Zeitschr. f. Philos. u. philos. Kritik. N. F. *98*, 145—161 (1891).
[4] —: Grundgesetze der Arithmetik. 2 Bde. Jena 1893/1903.
[5] —: Der Gedanke. Eine logische Untersuchung, Beitr. z. Philos. d. Dt. Idealism. *1*, 58—77 (1918/19).
[6] GENTZEN, G.: Untersuchungen über das logische Schließen. Math. Ztschr. *39*, 176—210, 405—431 (1934).
[7] LORENZEN, P.: Einführung in die operative Logik und Mathematik. Berlin, Göttingen, Heidelberg: Springer 1955.
[8] SCHÜTTE, K.: Beweistheorie. Berlin, Göttingen, Heidelberg: Springer 1960.
[9] STEGMÜLLER, W.: Das Universalienproblem einst und jetzt. Archiv f. Philos. *6*, 192—225 (1956) und *7*, 45—81 (1957).
[10] SUPPES, P.: Introduction to Logic. New York 1957.

(Dr. phil. Franz v. Kutschera, Priv.-Dozent f. Logik und Grundlagenforschung an der Universität München, 8 München 23, Gundelindenstraße 5)

Intuition und Konstruktion

Von

B. VAN ROOTSELAAR

1. Einleitung

Der große Unterschied zwischen den exakten Wissenschaften und der Mathematik ist der, daß letztere versucht, sich mit dem Unendlichen auseinanderzusetzen. Die exakten Wissenschaften könnten gänzlich ohne die Betrachtung des Unendlichen auskommen, denn unendlich groß ist in diesen Wissenschaften nur sehr groß und vielleicht am nächsten Tag etwas größer, während unendlich klein nur sehr klein ist und möglicherweise etwas kleiner. Die weitverbreitete Anwendung der sogenannten Unendlichkeitsmathematik in den exakten Wissen-