

# **Experimentelle und modellbasierte Untersuchung von Stehwellenantrieben**

Von der Fakultät für Maschinenbau  
der Gottfried Wilhelm Leibniz Universität Hannover  
zur Erlangung des akademischen Grades  
Doktor-Ingenieur  
genehmigte

**Dissertation**

von  
**Jens Twiefel**  
geb. am 16. August 1976 in Gütersloh

**2010**

1. Referent: Prof. Dr.-Ing. Jörg Wallaschek  
2. Referent: Prof. Dr.-Ing. Wolfgang Seemann  
Tag der Promotion: 10. November 2010

## Vorwort

Diese Arbeit ist in meiner Zeit als wissenschaftlicher Mitarbeiter des Heinz Nixdorf Institut, Fachgruppe Mechatronik und Dynamik, Universität Paderborn und des Instituts für Dynamik und Schwingungen, Leibniz Universität Hannover entstanden. Der Standortwechsel nach Hannover, in etwa zur Halbzeit, begründet sich im angenommenem Ruf von Herrn Prof. Dr.-Ing. Jörg Wallaschek. Die Qualität der vorliegenden Arbeit hat von beiden Instituten profitiert. Ohne die Inspirationen, Motivation und insbesondere die unterschiedlichen Herangehensweisen an diesen beiden Wirkungsstätten wäre die Arbeit in der vorliegenden Form nicht möglich gewesen.

Zuerst möchte ich mich bei Herrn Prof. Dr.-Ing. Jörg Wallaschek für das entgegengebrachte Vertrauen, die stete Förderung und die gegebenen Freiräume bedanken.

Den Herren Prof. Dr.-Ing. Wolfgang Seemann und Prof. Dr.-Ing. Lutz Rissing danke ich für die freundliche Übernahme des Korreferats und des Vorsitzes der Prüfungskommission.

Ich möchte mich bei allen Kollegen der beiden Institute bedanken, das tolle Arbeitsklima und die hohe Kooperationsbereitschaft lies manchmal fast vergessen, dass es sich um Arbeit handelt. Auch wenn ich mich hier nicht bei allen namentlich Kollegen bedanken kann, möchte ich einige nennen.

Den Herren Dr.-Ing. Walter Littmann, Prof. Dr.-Ing. Thomas Sattel und Dr.-Ing. Christopher Kauzor danke ich für die inertielle Einführung in die Thematik Piezo und Ultraschall und das Wecken meines Interesses für diese spannende mechatronische Disziplin. Ihre verschiedenen Blickwinkel auf das Ganze gaben den Anstoß und Motivation dieses Thema weiter zu vertiefen.

Herrn Dr.-Ing. Tobias Hemsel danke ich für die Einführung in die Thematik der piezoelektrischen Motoren. Weiterhin danke ich ihm für das große Vertrauen und die zahllosen Diskussionen.

Herrn Dr.-Ing. Christian Potthast danke ich für die gute Zusammenarbeit bei der Modellierung der piezoelektrischen Stoßschwinger, diese gemeinsamen Arbeiten haben einen Grundstein für die gezeigte Modellierung gelegt.

Herrn Dipl.-Ing. Wiebold Wurpts möchte ich für die zahllosen Diskussionen im Bereich der Modellierung und das Korrekturlesen der Arbeit danken.

Herrn Dipl.-Ing. Andreas Renner danke ich für die gute Zusammenarbeit und das schnelle finden jeglicher Schwachstellen, auch aber nicht nur beim Korrekturlesen dieser Arbeit.

Herrn Dipl.-Ing. Sebastian Mojzisch danke ich für die zahlreichen Diskussionen zur Ansteuerung und Regelung.

Ich möchte mich auch bei allen Kollegen bedanken, die ein Institut am Laufen halten, dem Sekretariat, den Laboringenieuren und den anderen technischen Angestellten. Hierbei möchte ich Herrn Dipl.-Ing. Martin Liekenbröcker hervorheben, der maßgeblich an der Konstruktion der Prüfstände beteiligt war.

Auch bei den vielen Studenten, deren SHK-, HiWi-, Labor-, Studien-, Projekt-, Master- und Diplomarbeiten zu dem Gelingen dieser Arbeit beigetragen haben möchte ich mich bedanken.

Bei meiner Freundin Jennifer Tretschok möchte ich mich für ihr unermüdliches Korrekturlesen, ihre Zuneigung, ihre Geduld und ihr Verständnis bedanken.

Ein besonderer Dank gilt meinen Eltern, Doris und Herbert Twiefel und meinem Bruder Oliver Twiefel für den immer gegebenen Rückhalt sowie die fortwährende Unterstützung.

Jens Twiefel

Hannover, im November 2010

# Kurzfassung

## Experimentelle und modellbasierte Untersuchung von Stehwellenantrieben

Stehwellenantriebe werden seit einigen Jahren als Alternative zu elektromagnetischen Antrieben untersucht. Dabei eignen sie sich vor allem für Stellaufgaben im kleinen und mittleren Leistungsbereich. Obwohl diese Antriebe schon seit Jahren untersucht und auch eingesetzt werden, sind noch einige grundlegende Fragen zum Antriebsprinzip ungeklärt. Die vorliegende Arbeit beschäftigt sich mit der Beantwortung dieser Fragen für piezoelektrische Stehwellenmotoren. Zu diesem Zweck wird in experimentellen Untersuchungen die Bewegungsbahn des Stößels während des Antriebsvorgangs in einem eigens dafür aufgebauten Prüfstand ermittelt. Zur rückwirkungsfreien Messung der Bewegungstrajektorie wird ein 3D-Laservibrometer verwendet. In diesen Untersuchungen können Beziehungen zwischen der Trajektorie des Kontaktpunktes und den Systemparametern, wie zum Beispiel der Amplitude, der Phasenlage oder aber der statischen Anpresskraft aufgezeigt werden.

Neben den experimentellen Untersuchungen liegt der Schwerpunkt dieser Arbeit in der modellbasierten Beschreibung von Stehwellenmotoren, wobei die Modellierung in drei Abstraktionsstufen durchgeführt wird. Zunächst wird mit einem Minimalmodell das reibungsbasierte Antriebsprinzip untersucht. Da sich das diskutierte Modell auf den Stoßreibkontakt konzentriert, ist es prinzipiell für alle reibungsbasierten Antriebe einsetzbar. Um umfangreiche Parameteruntersuchungen zu ermöglichen, ist ein besonders effektives numerisches Verfahren implementiert worden. In einem anschließendem Anwendungsbeispiel werden die gewonnen Erkenntnisse auf einen speziellen Stehwellenmotor, einen *Shaking-Beam-Motor*, übertragen.

Im zweiten Bereich wird die Rückwirkung des Kontaktvorgangs auf die Strukturschwingung des Ultraschallschwingers untersucht. Dazu wird ein Mehr-Massen-Modell mit einer Kontaktstelle erstellt und diskutiert. Dabei werden insbesondere die Veränderung in der Schwingungsform und die Verlagerung des Schwingungsknotens betrachtet. Zur deutlichen Verringerung des Berechnungsaufwandes wird der Schwinger als selbsterregtes System betrachtet. Dies hat den Vorteil, dass der Schwinger immer in einer Resonanzfrequenz schwingt. Somit sind insgesamt weniger Berechnungen notwendig, da die Resonanz der gewünschte Betriebspunkt ist. Die gezeigten Untersuchungen geben Aufschluss über den Einfluss der verschiedenen Parameter, im Speziellen der Lager- und Kontaktsteifigkeiten und der statischen Anpresskraft.

Abschließend wird ein elektromechanisches Gesamtmodell des Antriebs erstellt. Die Herausforderung hierbei ist, das System in einer genügenden Komplexität darzustellen und dabei gleichzeitig die notwendige Rechenzeit klein zu halten. Hierfür wird ein FE-Modell mit auf Balken und Stäben basierenden Elementen aufgebaut, in denen auch der piezoelektrische Effekt berücksichtigt wird. Dabei wurden sowohl im Falle der Stäbe Querkontraktionseffekte, als auch Schubkrafteinflüsse im Falle der Balken berücksichtigt. Zur Einbindung des Kontaktprozesses wird eine adaptierte Version des numerischen Verfahrens, das zur Berechnung des Minimalmodells entwickelt wurde, genutzt. Mit dem vorgestellten Modell ist es möglich, das Frequenzverhalten von Stehwellenantrieben, unter Berücksichtigung aller als wesentlich betrachteten Effekte, in einer überschaubaren Zeit zu berechnen, was auch an einem exemplarischen Beispiel gezeigt wird.

**Schlagwörter:** Stehwellenantrieb, Ultraschallmotor, hochfrequente Kontaktvorgänge, Finite-Elemente-Methode

# Abstract

## **Experimental and model based investigations on standing wave motors**

Standing wave type motors are investigated since several years. Their main applications are positioning tasks, which are preferable in the small and medium power range. Even though these drives have been investigated for years and are already commercially available, there are still unanswered fundamental questions on their driving principle. These open questions regarding the working principle of piezoelectric standing wave type ultrasonic motors will be answered in the presented work. Experimental investigations on the trajectory of the contact point of the vibrator during motor operation are performed. The measurements of its movements are realized utilizing a 3D-laservibrometer. The investigations give a deeper insight into the relationships between the contact point trajectory and the external parameter such as driving amplitude, phase shift in between the driving signals, and static preload.

The model based description of the driving processes behind the experimental investigations is the main focus of this work. The modeling is structured into three abstraction layers. Initially, a minimal model of the friction based driving process is investigated. The discussed model can be used in principal for all types of friction based motors, due to the fact that it is focused on the driving part of the system. To enable intensive parametric studies, an especially time efficient numerical method is implemented. The results gained from this model are transferred to a specific case study of a shaking-beam-type motor.

The second modeling aspect is the feedback of the high frequency contact process on the structural vibrations of a stator. Therefore, the vibrator is modeled as a multiple mass model including one contact interface. The influence of the vibro-impact process on the vibration shape and the nodal positions are especially considered. To decrease the necessary computing time, the system is modeled and calculated as an auto-resonant system. This provides an advantage in that the vibrator is always working in one of its resonance frequencies. Consequently, the parameter variations are decreased compared to a system calculated with fixed frequency. The described investigations elucidate the influence of the main parameters like support and contact stiffness, or static preload.

The last fundamental modeling topic is a full electromechanical model including the structural vibration as well as the driving process. The challenge for this objective is the trade-off between a sufficiently descriptive (complex) model of a structure and a feasible computing time. The system is modeled using finite elements based on common mechanical

elements such as rods and beams, also considering the piezoelectric effect. In the utilized elements the lateral contraction is considered for rods as well as shear forces for beams. To include the contact and driving process, the numerical method from the minimal model is adapted and has been used. Hence, the model considers all essential effects for the description of standing wave type motors. The model presented may be used for complex investigations on those motors such as the determination of the frequency dependency of the driving process in a comparably short time.

**Key words:** standing wave type motor, ultrasonic motor, vibro-impact, finite-element-method



---

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Schwingungsantriebe</b>	<b>4</b>
2.1	Klassifizierung von piezoelektrischen Schwingungsantrieben . . . . .	4
2.2	Stehwellenmotoren . . . . .	10
2.3	Experimentelle Untersuchungen . . . . .	17
2.4	Modellierung . . . . .	19
2.4.1	Analytische Berechnung der Strukturdynamik . . . . .	19
2.4.2	Numerische Berechnung der Strukturdynamik . . . . .	20
2.4.3	Minimalmodelle für Stehwellenantriebe . . . . .	23
2.4.4	Modale Ersatzsysteme . . . . .	25
2.5	Betrieb und Frequenzverhalten von Stehwellenmotoren . . . . .	28
<b>3</b>	<b>Aufgabenstellung</b>	<b>33</b>
3.1	Analyse des Stands der Technik . . . . .	33
3.2	Ziele der Arbeit . . . . .	35
3.3	Lösungsweg . . . . .	37
<b>4</b>	<b>Experimentelle Untersuchungen an einem Schwingungsantrieb</b>	<b>38</b>
4.1	Versuchsaufbau . . . . .	38
4.2	Versuchsdurchführung . . . . .	40
4.2.1	Versuchsplanung . . . . .	40
4.2.2	Messdatenanalyse . . . . .	42
4.3	Auswertung . . . . .	46
4.3.1	Frequenzabhängigkeit . . . . .	46
4.3.2	Anpresskraft . . . . .	48
4.3.3	Anregespannung . . . . .	48
4.3.4	Phase zwischen den Anregespannungen . . . . .	49
4.4	Zusammenhang zwischen Motor- und Frequenzverhalten . . . . .	50
4.5	Fazit der experimentellen Untersuchungen . . . . .	52
<b>5</b>	<b>Generisches Minimalmodell für reibungsbasierte Antriebe</b>	<b>53</b>
5.1	Modellbildung . . . . .	53
5.2	Systemgleichungen . . . . .	55
5.3	Transiente Parameterstudien . . . . .	56
5.4	Berechnung des eingeschwungenen Motorverhaltens . . . . .	62

5.5	Form der Anregung . . . . .	65
5.6	Übertragung auf ein Anwendungsbeispiel . . . . .	68
5.7	Fazit . . . . .	71
<b>6</b>	<b>Einfluss von Kontaktvorgängen auf die Schwingungsform des Stators</b>	<b>72</b>
6.1	Referenzsystem . . . . .	72
6.2	Modellbildung . . . . .	73
6.3	Analyse als fremderregtes System . . . . .	76
6.3.1	Einfluss der Kontaktsteifigkeit . . . . .	78
6.3.2	Einfluss der Lagersteifigkeit . . . . .	78
6.3.3	Einfluss der statischen Anpresskraft . . . . .	79
6.3.4	Einfluss der Anregefrequenz . . . . .	81
6.4	Analyse als selbsterregtes System . . . . .	82
6.4.1	Modellbasierte Untersuchung . . . . .	84
6.4.2	Experimentelle Untersuchung . . . . .	88
6.4.3	Vergleich mit einem linearen Ersatzsystem . . . . .	89
6.5	Fazit . . . . .	90
<b>7</b>	<b>Gesamtmodell des Stehwellenantriebs</b>	<b>92</b>
7.1	Verwendete Elemente . . . . .	93
7.1.1	Einfaches Stabelement . . . . .	93
7.1.2	Stabelement mit Querkontraktionseinfluss . . . . .	96
7.1.3	Elektromechanisches Stabelement . . . . .	98
7.1.4	Piezoelektrisches Stabelement mit Querkontraktionseinfluss . . . . .	103
7.1.5	TIMOSHENKO-Balkenelement . . . . .	104
7.1.6	Kombiniertes Längsbiegeelement . . . . .	106
7.1.7	Diskrete Masse-Feder-Dämpfer-Masse Elemente . . . . .	108
7.2	Aufbau und Berechnung der Systemgleichungen . . . . .	108
7.3	Analyse des Stators . . . . .	111
7.3.1	Prinzipieller Einfluss von Querkontraktion und Schubkräften . . . . .	112
7.3.2	Einzelschwinger . . . . .	116
7.3.3	Stator . . . . .	118
7.4	Kontaktformulierung . . . . .	122
7.4.1	Erweiterung des Punktkontaktmodells . . . . .	124
7.4.2	Integration in das FE-Modell . . . . .	126
7.5	Analyse des Antriebsvorgangs . . . . .	127
7.6	Fazit . . . . .	131
<b>8</b>	<b>Diskussion der Ergebnisse</b>	<b>132</b>
<b>9</b>	<b>Zusammenfassung und Ausblick</b>	<b>136</b>
<b>A</b>	<b>Bild-Tafeln</b>	<b>138</b>
	<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>152</b>

# 1 Einleitung

Innovative Klein- und Kleinstantriebe gewinnen in der heutigen Zeit stetig an Bedeutung. Die immer weiter voranschreitende Automatisierung und Technisierung benötigt für viele Aufgaben, die traditionell mit manuell zu betätigenden mechanischen Armaturen gelöst wurden, kleine Motoren. Viele dieser Aufgaben sind Stell- und Komfortaufgaben, bei denen eine bestimmte Position eingestellt und dann für einige Zeit gehalten werden soll. Insbesondere steigt in diesem Kontext auch der Anteil an linearen Verfahrbzw. Stellaufgaben. In den heutzutage verbauten Lösungen werden häufig traditionelle elektromagnetische oder elektrodynamische rotatorische Gleichstrommotoren eingesetzt. Diese Motoren haben allerdings einen entscheidenden Nachteil: sie stellen ihre Leistung bei sehr hohen Drehzahlen bereit, und benötigen daher häufig zusätzliche Getriebe, um die hohe Drehzahl zu reduzieren und das benötigte Drehmoment bereitstellen zu können. Weiterhin ist das stabile Halten der erreichten Position nur mit Hilfe von zusätzlichen Bauteilen wie Bremsen oder Getrieben realisierbar. Auch zur Lösung translatorischer Stellaufgaben werden meistens die rotatorischen Antriebe verwendet, wobei dann ein Getriebe zur Wandlung der Bewegungsrichtung verwendet werden muss. Auch steigen mit abnehmender Baugröße die (prozentualen) Verluste, damit sinkt der Wirkungsgrad.

Aus den genannten Gründen rücken alternative Antriebskonzepte seit einigen Jahrzehnten immer mehr in den Mittelpunkt des Interesses von Technik und Forschung. Mit den piezoelektrischen Schwingungsantrieben bietet sich ein Konzept mit zum Teil deutlichen Vorteilen gegenüber den konventionellen Antrieben an. Fasst man die schon erreichten und erwarteten Vorteile dieser Antriebe aus der reichhaltig vorhandenen Literatur zusammen, ist leicht zu erkennen, warum diese Antriebe für viele Anwendungen interessant sind:

- Einfacher Aufbau ohne bewegliche Teile
- Geräuschloser Betrieb
- Gutes Start-Stopp-Verhalten
- Hohe Positioniergenauigkeit
- Hohe Kraftdichte
- Hohe Haltekraft ohne Energieversorgung
- Hohes Drehmoment/Kraft bei niedriger Drehzahl/Geschwindigkeit

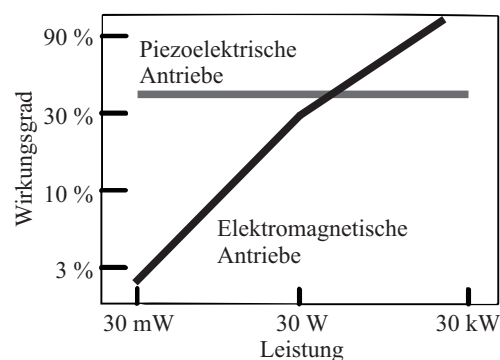
- Hoher Wirkungsgrad
- Geringe Probleme mit elektromagnetischer Strahlung
- Gute Vakuum-Tauglichkeit

Auch die Nachteile piezoelektrischer Schwingungsantriebe sollen hier genannt werden:

- Hohe Betriebsfrequenz
- Reibschluss, daher auch Schlupf
- Verschleiß im Reibkontakt
- Empfindlichkeit gegen Verschmutzung
- Frequenznachführung notwendig

Der mechanisch einfache Aufbau, verbunden mit der Möglichkeit einen Direktantrieb (rotatorisch oder auch translatorisch) zu realisieren, macht diese Motoren auch für Produkte mit großen Stückzahlen interessant, da infolge der vergleichsweise geringen Anzahl an Komponenten Einsparpotentiale zu erwarten sind. In den letzten Jahren sind hier insbesondere Anwendungen im Bereich der Kleinstantriebe untersucht und umgesetzt worden. Sehr kleine piezoelektrische Antriebe werden beispielsweise zur Bildstabilisierung in Digitalkameras eingesetzt. Auch für die Autofokus- und Zoomfunktionalität in Mobiltelefonkameras sind die Schwingungsantriebe schon diskutiert worden. Ein häufig als entscheidend angebrachter Vorteil ist die hohe erreichbare Effizienz bei kleinsten Bauformen. Abbildung 1.1 zeigt eine grobe prinzipielle Gegenüberstellung zwischen konventionellen und piezoelektrischen Antrieben. Neben den sehr kleinen Antrieben ist auch bei Antrieben in der mittleren Leistungsklasse, in der Größenordnung einiger zehn Watt, wie sie für viele Anwendungen in der Automatisierungstechnik interessant sind, der Effizienzvorteil von piezoelektrischen Motoren gegenüber Elektromotoren ersichtlich. Dabei ist neben dem Verzicht auf Getriebe die hohe (stromlose) Haltekraft ein wichtiges Argument.

Insgesamt bieten Ultraschallmotoren auf dieser Grundlage ein hohes Potential für den Einsatz als Antriebe im kleinen und kleinsten Leistungsbereich. Als Ultraschallmotoren



**Abbildung 1.1:** Vergleich des theoretischen Wirkungsgrads nach UCHINO [1]

werden sowohl Wanderwellen- als auch Stehwellenmotoren bezeichnet. Aufgrund ihrer speziellen Eigenschaften bieten sich besonders letztere als kompakte Linearantriebe an. Obwohl es in der Vergangenheit schon eine Vielzahl von Untersuchungen zu solchen Motoren gegeben hat, ist die Literatur bis heute eine umfassende modellbasierte und experimentelle Untersuchung des Antriebsprozesses schuldig geblieben. Insbesondere gibt es nur wenige Arbeiten die einen Versuch einer ganzheitlichen Modellierung, insbesondere unter Berücksichtigung der Kontaktvorgänge, unternehmen.

Diese Lücken sollen im Rahmen dieser Arbeit geschlossen werden. Dazu werden die folgenden Teilaufgaben formuliert: Um das Verständnis für das eigentliche Antriebsprinzip zu vertiefen, werden zunächst experimentelle Untersuchungen an einem exemplarischen Antrieb durchgeführt, und dabei der Einfluss wesentlicher Parameter untersucht. Anschließend werden ein möglichst einfaches Modell zur Beschreibung des auf einem Reibkontakt basierenden Antriebsprozesses aufgestellt und die Parametereinflüsse ausführlich untersucht. Dem schließt sich eine modellbasierte Betrachtung der mechanischen Rückwirkung des Kontaktprozesses auf die Schwingungsform des Stators an. Abschließend wird ein Finite-Elemente Verfahren vorgestellt, um den Motor mit allen wesentlichen Geometrie- und Materialeinflüssen zu beschreiben.

In dieser Arbeit werden die folgenden Punkte bearbeitet:

- Experimentelle Ermittlung der Kontaktpunkttrajektorie für einen Stehwellenantrieb mittels berührungsloser Lasermesstechnik
- Erstellung und Untersuchung eines generischen Minimalmodells für Schwingungsantriebe mit Reibkontakt
- Experimentelle und modellbasierte Untersuchung der Schwingungsform eines vereinfachten Stators unter Einfluss eines longitudinalen Stoßkontaktes
- Erstellung eines elektromechanischen, auf finiten Elementen basierenden Gesamtmodells unter Berücksichtigung der elektromechanischen Kopplung und hochfrequenter Kontaktvorgänge

## 2 Schwingungsantriebe

Schwingungsantriebe sind schon seit vielen Jahrzehnten Gegenstand von Forschung und Entwicklung. Nach den wegweisenden Anfängen von WILLIAMS UND BROWN [2] mit dem ersten patentierten, piezoelektrischen Antrieb, haben sich insbesondere Forscher aus der ehemaligen Sowjetunion, Japan und der Deutschen Demokratischen Republik an vielfältigen Forschungs- und Entwicklungsprojekten beteiligt. Aus diesen mannigfaltigen Erfahrungen sind unzählige Patente, Veröffentlichungen und Dissertationen entstanden. Dabei sollen die Bücher von LAVRINENKO ET AL. [3], RAGULSKIS ET AL. [4], SASHIDA ET AL. [5] und UEHA ET AL. [6] hier besonders hervorgehoben werden, da diese die Breite des Wissens über piezoelektrische Schwingungsantriebe sehr gut abdecken. Neben diesen zum Teil etwas älteren Monographien seien noch einige aktuellere Übersichtsartikel, die in den letzten Jahren erschienen sind, genannt. FLEISCHER [7], UCHINO [8, 1], HEMSEL UND WALLASCHEK [9] und SPANNER [10] geben einen aktuelleren Überblick über die Trends und Tendenzen, die in den zuvor genannten Büchern noch nicht abgedeckt sind. Da die allermeisten Schwingungsantriebe piezoelektronische Materialien verwenden, sei zur Vertiefung die einschlägige Literatur wie z.B. CADY [11], MASON [12], JAFFE ET AL. [13], IKEDA [14] oder LENK [15, 16, 17] genannt.

In diesem Kapitel wird zunächst eine Klassifizierung von piezoelektrischen Schwingungsantrieben nach ihrem Bewegungsablauf und der Erzeugung der Bewegung vorgenommen. Im zweiten Teil des Kapitels wird auf die Funktionsweise von Schwingungsantrieben eingegangen, wobei experimentelle und modellbasierte Ansätze zur Beschreibung des später verwendeten Prinzips – dem Stehwellenantrieb – im Fokus stehen.

### 2.1 Klassifizierung von piezoelektrischen Schwingungsantrieben

Als *Schwingungsantrieb* bezeichnet man einen elektromechanischen Motor, der aus einem Stator<sup>1</sup> und einem Rotor besteht, wobei die Strukturschwingungen von einem oder beiden Teilen für den Antriebsprozess maßgeblich sind. Die Kraftübertragung zwischen Stator und Rotor finden in der Regel mittels Reibschluss statt, daher ist ein Kontaktprozess

---

<sup>1</sup>Die Bezeichnungen Stator und Rotor sagen aus, ob es sich um ein ortsfestes und ein bewegtes Teil handelt. Es wird keine Aussage über die Bewegungsart, also translatorisch oder rotatorisch getroffen.

meistens ein elementarer Bestandteil des Funktionsprinzips.

Eine Einordnung der verschiedenen piezoelektrischen Antriebe lässt sich anhand verschiedener Merkmale durchführen. Zunächst wird hier eine Einteilung nach der jeweiligen Betriebsfrequenz vorgenommen. Dabei ergeben sich die folgenden Klassen, die über das Verhältnis zwischen Betriebsfrequenz  $f_b$  und der ersten relevanten (mit dem Piezoelement anregbaren) Resonanzfrequenz  $f_r$  definiert werden:

**Quasistatischer Betrieb** Hier gilt  $\frac{f_b}{f_r} \ll 1$ , das bedeutet, dass alle für den Aktor relevanten (Massen- und Dreh-) Trägheiten keinen wesentlichen Anteil an der Funktion der Bewegungserzeugung haben und daher in der Modellierung vernachlässigt werden dürfen. Auch eine mögliche Wellenausbreitung im Aktor ist für den Betrieb unerheblich.

**Dynamischer Betrieb** Alle Antriebe, bei denen die Trägheiten einen nicht zu vernachlässigenden Einfluss haben, gehören in diese Gruppe. Eine exakte quantitative Abgrenzung zum quasistatischen Betrieb ist nicht möglich, da in einem Übergangsbereich beide Modellvorstellungen (je nach Anspruch) hinreichend genau sein können. Sobald jedoch Wellenausbreitungseffekte einen signifikanten Anteil am Funktionsprinzip der Bewegungserzeugung haben, handelt es sich um dynamischen Betrieb.

**Resonanter Betrieb** Ein hervorzuhebender Sonderfall des dynamischen Betriebs ist der Betrieb in oder sehr nahe einer Resonanzfrequenz des Schwingers (meistens des Stators). Hierbei wird die deutliche Amplitudenüberhöhung im Frequenzgang ausgenutzt, um eine möglichst hohe Bewegungsamplitude zu erzeugen. Dadurch wird die klare Ausprägung einer oder seltener auch mehrerer *Eigenschwingungsformen* genutzt. Die resonanten Antriebe lassen sich in mehrere Untergruppen einteilen:

**Nutzung einer einzelnen Eigenschwingungsform** Hierbei wird der Schwinger so ausgelegt, dass die genutzte Eigenschwingungsform eine für den Antriebsprozess geeignete Bewegung des Kontaktpunktes erzeugt.

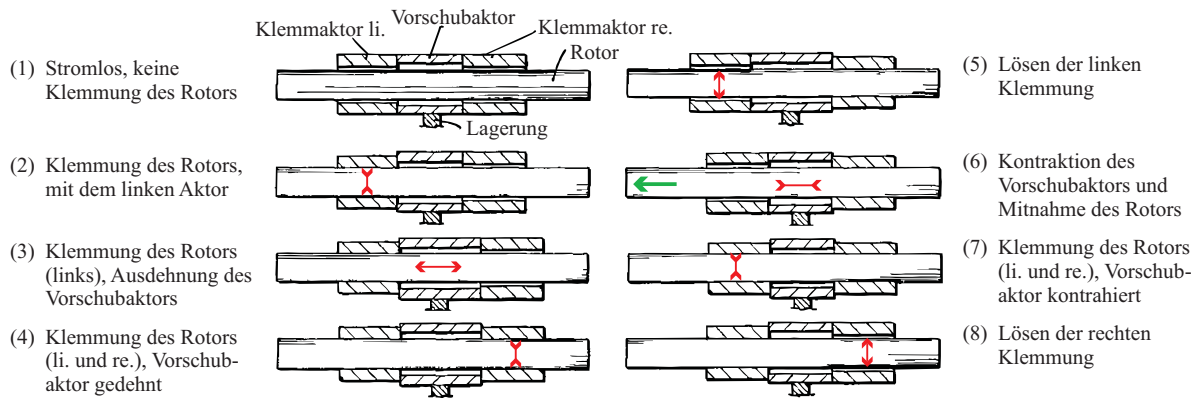
#### **Kombination von Eigenschwingungsformen mit Ziel einer stehende Welle**

Hierbei wird die zum Antrieb genutzte Bewegung durch die gezielte Überlagerung bzw. Kombination von mindestens zwei Eigenschwingungsformen erzeugt. Hierbei lassen sich häufig die (x- und y-) Komponenten der Bewegung des Kontaktpunktes den einzelnen Schwingungsformen zuordnen. So können beispielsweise Längs- und Biegeschwingungen angeregt werden, um eine elliptische Bewegung des Kontaktpunktes zu erzeugen.

#### **Überlagerung von Eigenschwingungsformen mit Ziel einer wandernden Welle**

Hierbei werden auch mindestens zwei Eigenschwingungsformen (stehende Wellen) angeregt, die einen räumlichen und zeitlichen Phasenversatz haben. Durch diese Überlagerung entsteht eine wandernde Welle im Schwinger.

Eine weitere mögliche Einteilung der Antriebe orientiert sich an der Kraftübertragung zwischen Stator und Rotor. Allerdings wird bis auf wenige Ausnahmen, z.B. in den



**Abbildung 2.1:** Funktionsprinzip eines Motors nach dem *Klemmen und Schieben*-Prinzip. Der gezeigte Antrieb wird häufig mit dem Markennamen *Inchworm-Motor* bezeichnet. Wenn mehr als ein Schrittverfahren werden soll wiederholt sich die Folge 3-8. Darstellung nach MAY [22].

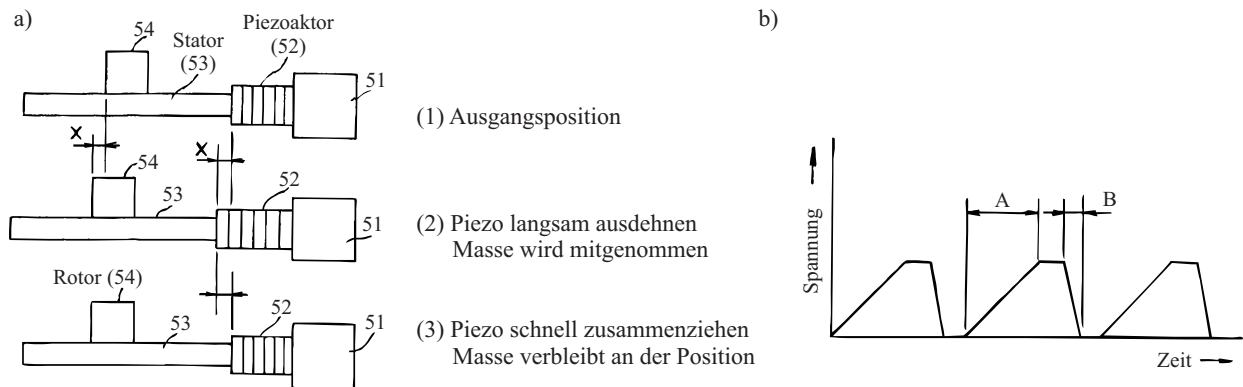
formschlüssigen Antrieben von WILLIAMS UND BROWN [2] oder KAPPEL ET AL. [18], bei piezoelektrischen Antrieben die Kraft mittels Reibkraftschluss übertragen. Dadurch ist die maximal übertragbare Kraft durch die Materialpaarung und die Anpresskraft begrenzt. Umfangreiche Untersuchungen zu den Materialpaarungen wurden unter anderem von ISHII ET AL. [19] und REHBEIN [20] durchgeführt. Sie geben konkrete Hinweise für die Materialauswahl für die verschiedenen Motortypen. Der Einfluss der geometrischen Form der Kontaktpartner wurde zum Beispiel von KO ET AL. [21] untersucht.

Für die reibkraftschlüssigen Antriebe ist es sinnvoll, eine weitere Unterteilung nach dem Bewegungsablauf des Rotorantriebs einzuführen. Hierbei lassen sich die Antriebe wieder in Gruppen zusammenfassen:

**Klemmen und Schieben** Antriebe diesen Typs funktionieren nach einem klar strukturierten und getakteten Bewegungsablauf. Dieser ist nach MAY [22] in der Abbildung 2.1 dargestellt. Ein typischer Aufbau besteht wie dargestellt aus zwei Klemmaktoren und einem Vorschubaktor. Um den schrittweisen Ablauf zu gewährleisten, werden die Aktoren in Antrieben dieser Klasse normalerweise quasistatisch betrieben. Daher ist die Modellierung des Bewegungsablaufs zumeist taktweise mit wenigen Federn und Kräften möglich. Diese Antriebe sind prinzipiell für große Kräfte bei kleinen Geschwindigkeiten geeignet. Ihr mechanischer Aufbau ist häufig verhältnismäßig komplex.

**Haften und Gleiten** Hierbei zerteilt sich der Bewegungsablauf in 2 Phasen; Eine Haftphase, in der der Stator den Rotor mitnimmt und in eine Gleitphase, in der der Stator unter dem Rotor wieder in seine Ausgangslage zurück rutscht. Der Ablauf ist in Abbildung 2.2 illustriert. Im dargestellten einfachsten Fall bewegt sich der Stator mit einem dem Sägezahn ähnlichen Bewegungsprofil. Während der flacheren Steigung des Bewegungsprofils haftet der Rotor auf dem Stator, da die Beschleunigungskräfte nicht ausreichen, um die Haftkräfte zu überwinden. In der steileren





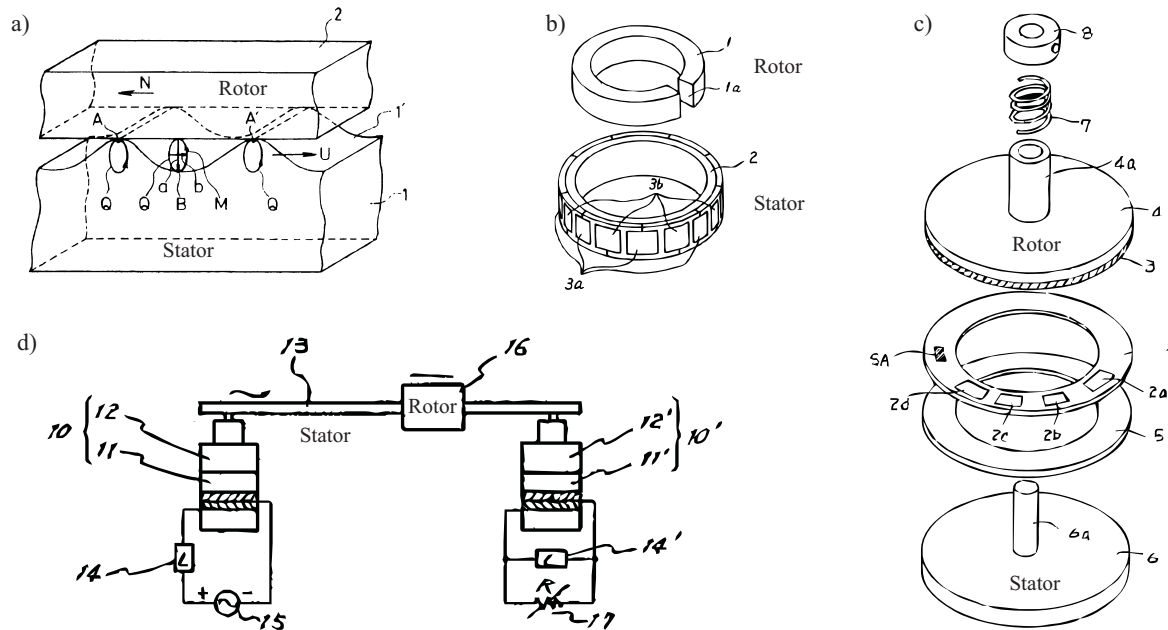
**Abbildung 2.2:** Funktionsprinzip eines Motors nach dem *Haften und Gleiten*-Prinzip. Darstellung nach MIZUMOTO [23]. Der gezeigte Antrieb wird häufig als *Stick-Slip-Motor*, *Impact-Drive* oder *Trägheitsmotor* bezeichnet. **a)** Typischer Aufbau und Bewegungsablauf **b)** Charakteristisches Ansteuersignal

Phase des Bewegungsablaufs sind die Trägheitskräfte größer als die Haftkräfte und es ergibt sich eine Relativbewegung zwischen Rotor und Stator. Neben dem Sägezahn werden auch andere Bewegungsprofile sehr erfolgreich eingesetzt. Da insbesondere die Trägheit des Rotors und der Last einen signifikanten Anteil haben, wird dieser Antriebstyp zu den dynamisch betriebenen gezählt. Modelltechnisch ist es hier fast immer zulässig den Kontakt auf einen Punkt zu reduzieren. Diese Antriebe zeichnen sich durch ihren vergleichsweise einfachen Aufbau, die relativ kleinen Maximalkräfte und mittleren Geschwindigkeiten aus.

**Haften, Gleiten und Separieren an Kontaktpunkten** In diesen Antrieben werden Eigenschwingungsformen ausgenutzt, um die elliptische Bewegung des Kontaktpunktes zu erzeugen, vergleiche Abbildung 2.4. Hierbei ist jede Kontaktfläche klein gegenüber der Wellenlänge, daher können die Bewegungen der Kontaktbereiche in erster Näherung als einzelne Punktbewegungen aufgefasst werden. Da diese Bewegung durch eine bestimmte Eigenschwingungsform<sup>2</sup> des Stators erzeugt wird, ist die freie Bewegung des Stößels harmonisch. Erst der Kontaktvorgang kann dies verändern. Zur Auslegung und zur Beschreibung der Funktion wird in der Literatur häufig diese freie harmonische Schwingung zu Grunde gelegt. Je nach Schwingertyp eignen sich diese Antriebe besonders für kleine und mittlere Kraft- respektive Momentbereiche.

**Haften, Gleiten und Separieren an Kontaktflächen** Bei diesen Antrieben ist die Kontaktfläche in der Größenordnung einer oder mehrerer Wellenlängen, daher darf nicht mehr von einem einzelnen diskreten Kontaktpunkt pro Kontaktfläche ausgegangen werden, Abbildung 2.3a. Tatsächlich ist es so, dass im Betrieb Teile der Kontaktfläche in Kontakt sind, während andere Teile derselben Fläche separiert sind (vgl. auch Klassifizierung nach WALLASCHEK [28]). Auch die Verteilung von Haft-

<sup>2</sup>Um nur eine einzige Eigenschwingungsform anzuregen, ist eine sinusförmige Anregung vorteilhaft, andernfalls können weitere Eigenformen signifikant mit angeregt werden und sich eine Überlagerung mehrerer Eigenschwingungsformen ergeben.



**Abbildung 2.3:** Das *Haften, Gleiten und Separieren an Kontaktflächen*-Prinzip **a)** Darstellung der Funktion nach SASHITA [24]; eine durch den Stator laufende Welle nimmt den Rotor mit, da immer wechselnde kurze Statorabschnitte auf elliptischen Trajektorien mit dem Rotor in Kontakt kommen. Die Antriebsrichtung läuft entgegen der Wellenausbreitungsrichtung. **b)** Ringförmiger Wanderwellenantrieb mit innenliegendem Rotor (rotatorischer Antrieb) nach KANEDA [25]. **c)** Aufbau eines Wanderwellenmotors zum rotatorischen Antrieb mit scheibenförmigem Stator und Rotor nach UJIY-OU UND KANEDA [26] **d)** Linearer Wanderwellenmotor mit Schwingungsquelle und Absorber zur Wellenerzeugung. Die Wanderwelle wird durch den balkenförmigen Stator geleitet und nimmt den viel kürzeren Rotor mit, nach UEHA ET AL. [27]

und Gleitregionen ändert sich im Betrieb, je nach Belastung. Daher müssten viele Kontaktpunkte zur Beschreibung einer Kontaktfläche oder über die Fläche mitbewegte Kontaktpunkte angenommen werden. Zur Erzeugung der wellenförmigen Bewegung des Stators werden zwei stehende Wellen geeignet überlagert, wobei sich bei zyklischen Strukturen die Resonanzüberhöhung ausnutzen lässt. Alternativ wird mit Wellenquellen und Wellenabsorbern gearbeitet, was in der Theorie beliebige Betriebsfrequenzen ermöglicht, aber die Nutzung der Resonanzeffekte ausschließt, Abbildung 2.3d. Ein besonderer Vorteil dieser Gruppe von Antrieben ist das hohe Drehmoment (auf das Motorvolumen bezogen) bei geringen Geschwindigkeiten.

Mit den aufgezeigten Bewegungsabläufen und den Betriebsmodi lassen sich die piezoelektrischen Antriebe mit Reibkraftschluss einordnen. In den letzten zwei Jahrzehnten standen insbesondere Wanderwellenmotoren, also solche, die nach dem *Haften, Gleiten und Separieren an Kontaktflächen*-Prinzip funktionieren, im Mittelpunkt des Interes-

ses, wohl auch weil es hier die ersten erfolgreichen kommerziellen Antriebe gab. Dabei waren Anfang der 1980er Jahre japanische Firmen wie beispielsweise CANON und SHINSEI treibende Kräfte, was sich gut an der großen Zahl an Patentanmeldungen u.a. [25, 29, 30, 27, 24, 26, 31, 32] ablesen lässt. Nach den ersten Erfolgen in Japan beschäftigten sich Wissenschaftler in der ganzen Welt mit den Wanderwellenmotoren, so wurden auch in Deutschland eine große Anzahl an Dissertationen zu diesen Antrieben geschrieben. So entstanden an der Universität Stuttgart die Arbeiten von FRÖSCHLE [33], HERZOG [34], HERMANN [35] und HAUG [36] in denen aufbauend auf der Untersuchung eines kommerziellen Motors und dem Entwurf einer Entwicklungsmethodik ein linearer Wanderwellenmotor entstand. An der Universität Darmstadt wurde die Modellierung der Wanderwellenmotoren in den Arbeiten von CHEN [37], HAGEDORN UND WALLASCHEK [38, 39] SCHMIDT [40], BERG [41] und SATTEL [42] und in einem BMBF-Forschungsprojekt [43] voran getrieben. An der Universität Paderborn wurden in den Arbeiten von MAAS [44] und SCHULTE [45] Regelungs- und Ansteuerkonzepte und in den Arbeiten von KROME [46] und STORCK [47] die Modellierung der Wanderwellenmotoren erweitert. Neben den drei genannten Universitäten beschäftigte sich SCHWENKE [48], als einer der ersten in Deutschland, an der TU Berlin mit der Drehzahl- und Lageregelung der Rotationsantriebe. Auch international, besonders in der Schweiz (z.B. BULLO [49]), Frankreich (z.B. GIRAUD [50]) und den USA (z.B. FLYNN [51]) aber auch noch in weiteren Ländern entstanden sehr viele Arbeiten, deren Nennung hier den Rahmen sprengen würde.

Schon seit dem Beginn der Forschungs- und Entwicklungsarbeiten an piezoelektrischen Motoren ist das *Klemmen und Schieben*-Prinzip verfolgt worden. Nennenswert ist hier die Firma BURLEIGH, die den Motor nach dem Inchworm<sup>3</sup> benannte und den Motor patentierte (MAY [22]). Auch in der Wissenschaft sind diese Antriebe häufig untersucht worden. So entstanden in der ehemaligen DDR einige Arbeiten zu diesen Motoren, mit ausgeprägter Klemmung, wie sie oft bezeichnet wurden, z.B. von NEUBERT [52], ROSCHER [53], oder MÜLLER [54]. Aus diesen Untersuchungen ist auch das Buch von PFEIFER [55] entstanden. GALANTE ET AL. [56] haben die Entwicklungsgeschichte der Inchworm-Antriebe von 1960 bis 1996 zusammengefasst. Auch in den letzten Jahren hat es immer wieder Veröffentlichungen zu diesem Thema gegeben, wie zum Beispiel DUONG [57], VAUGHAN UND LEO [58], LIESS [59] oder LOVERICH [60].

Auch Antriebe mit dem *Haften und Gleiten*-Prinzip sind in den letzten Jahren erfolgreich umgesetzt worden. Insbesondere sind sie für die Fokussierung und Bildstabilisierung in Kameras und Handykameramodulen im Einsatz, da hier insbesondere die kleine Bauform wichtig ist. Für diesen Einsatzzweck sind die Antriebe beispielsweise von MINOLTA [23, 61, 62] oder der koreanischen Firma PIEZOTECH [63] kommerzialisiert worden. In der Arbeit von BREGUET [64] ist die Modellierung eines solchen Antriebs beschrieben. Auch LIU ET AL. [65] beschäftigten sich mit der Modellierung, hier wird die Berechnung eines Antriebs mit dem kommerziellen FEM Programm ANSYS gezeigt. Verglichen mit den anderen Konzepten gibt es zu dem *Haften und Gleiten*-Prinzip vergleichsweise wenig

---

<sup>3</sup>engl. für Spannerraupe

Publikationen.

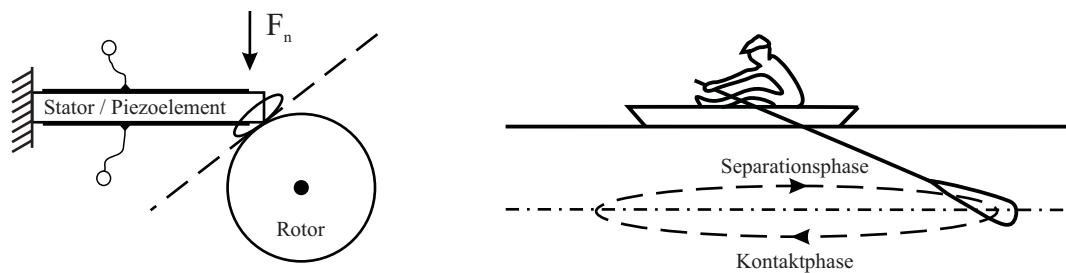
Für diese Arbeit sind aufgrund ihrer guten Eignung als direkter Linearantrieb und durch die erreichbaren Kräfte in der Größenordnung einiger 10 N die Stehwellenantriebe mit diskretem Kontaktpunkt, also Antriebe die das *Haften, Gleiten und Separieren an Kontaktpunkten*-Prinzip nutzen interessant. Im Folgenden werden diese näher beschrieben.

## 2.2 Stehwellenmotoren

Anfang der 1970er Jahre wurden sowohl von LAVRINENKO als auch von BARTH erste funktionierende piezoelektrische Motoren vorgestellt, bei denen mittels Längsschwingungen ein Rotor in Rotation versetzt werden konnte. Für jede Laufrichtung ist ein einzelner Schwinger vorgesehen, welcher in etwa tangential auf den Rotor stößelt. Um die Schwingungsamplitude zu erhöhen, wird der Schwinger in der Resonanzfrequenz seiner ersten Längsschwingung betrieben. Die Einfachheit des Aufbaus war so bestechend, dass viel Zeit und Energie in die Weiterentwicklung dieser Antriebe gesteckt wurde. Da insbesondere der Aufbau mit piezoelektrischen Balkenelementen sehr einfach war, entstanden eine Reihe von Ideen und Umsetzungen für solche Motoren (siehe z.B. HEY-WANG UND GUNTERS DORFER [66], VISHNEVSKY ET AL. [67, 68], RAGULSKIS ET AL. [4]). In Abbildung 2.4 ist dieses bemerkenswert einfache Aufbauprinzip gezeigt. Im Betrieb in der ersten Longitudinalresonanz schwingt der Stator, aufgrund seiner fest-freien Randbedingung in einer  $\lambda/4$ -Mode<sup>4</sup>. In der Vorwärtsbewegung trifft die Spitze auf den Rotor, nimmt ihn mit und prallt dabei ab, so dass zu der Längskomponente der Bewegung eine Querkomponente entsteht. Im eingeschwungenen Zustand stellt sich dann – in dieser einfachen Vorstellung – eine Ellipse ein, wobei nur während eines Teils der Ellipse die Spitze in Kontakt mit dem Rotor ist. Aufgrund dieser zwei Phasen (Kontakt und Separation) und der elliptischen Bewegung wird dieses Prinzip manchmal auch *Ruderprinzip* genannt.

Einen wichtigen Schritt, hin zu leistungsfähigeren Motoren erreichten VASILJEV ET AL. [69, 70, 72] durch die Nutzung von vorgespannten Längsschwingern. Wie sie zum Beispiel beim Ultraschallschweißen üblich sind. Diese Schwinger sind beispielsweise als Antrieb für Plattenspieler zum Einsatz gekommen, vgl. Abbildung 2.5b. Bemerkenswert ist die (eigentlich fälschlicherweise) sogenannte  $3/4 \lambda$  Auslegung des Schwingers. Diese Benennung rührt daher, dass die in Abbildung 2.5a dargestellte Schwingungsform, so aussieht als würde sich an eine volle Halbwelle noch eine Viertelwelle anschließen. Tatsächlich handelt es sich aber um eine einzige Halbwelle, bei der sich durch den sehr großen Impedanzsprung (hier in Form einer Durchmesseränderung) eine starke Ampli-

<sup>4</sup>Die erste Eigenschwingungsform in Längsrichtung, bei der sich eine Stehwelle mit einer viertel Wellenlänge im Stator ausbildet. Da stehende Wellen je nach Randbedingung vielfache von viertel Wellen sind, werden die Schwinger häufig nach der Anzahl der viertel Wellen benannt. Besonders häufig hört man in der Ultraschalltechnik von  $\lambda/2$ -Schwingern, die mit frei-freien Randbedingungen schwingende Stäbe in ihrer ersten Längsschwingungsform nutzen.



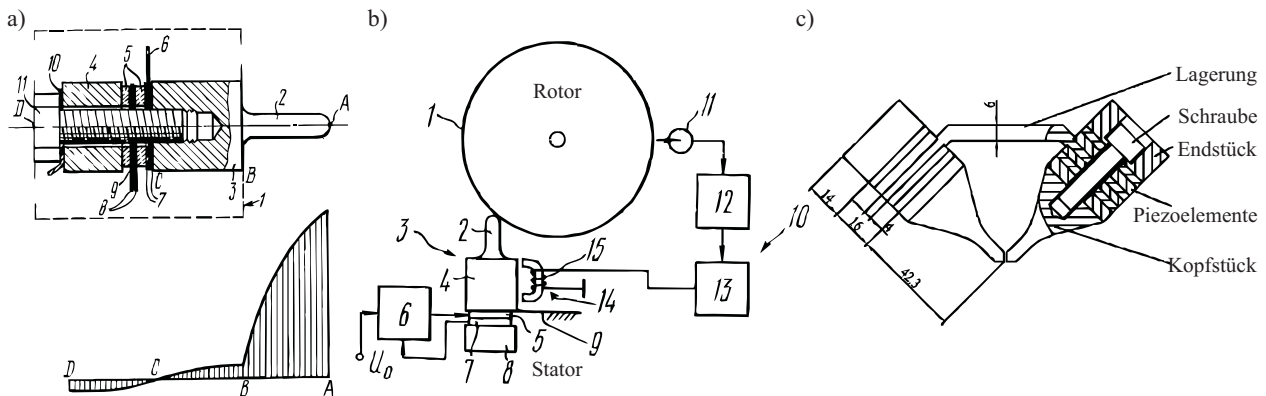
**Abbildung 2.4:** Prinzipieller Aufbau und Darstellung des Ruderprinzips nach LAVRINENKO ET. AL. [3]

tudenvergrößerung ergibt und auch die zusätzliche Länge erklärt. Zu beachten ist weiterhin, dass – wie in der Ultraschalltechnik üblich – die Amplitude der Längsschwingung in der  $y$ -Richtung aufgetragen ist, obwohl es sich um eine Längsschwingung handelt. Außer der Besonderheit des  $3/4 \lambda$  Designs, ist der Schwinger, oft auch Transducer genannt, wie ein gewöhnlicher Ultraschallschwinger aufgebaut. Er besteht aus einer geraden Anzahl von piezoelektrischen Ringen, die mit einem Bolzen zwischen zwei metallischen Endstücken verspannt sind.

Anfang der 1980er Jahre baute SASHIDA [29] einen dem Plattenspielerantrieb ähnlichen Motor, der von ihm *Wedge-Type-Motor* genannt wurde. Dieser Motor ist insofern interessant, als dass SASHIDA viele experimentelle Ergebnisse veröffentlichte, die in Kapitel 2.3 noch aufgegriffen werden (vgl. Abbildung 2.12). Es handelt sich wieder um einen vorgespannten Längsschwinger, mit Amplitudenvergrößerung, der im Gegensatz zum Plattenspielerantrieb auf die Stirnfläche des Rotors stößt und dabei leicht schräggestellt ist. Um den wesentlichen Nachteil dieser geometrisch einfachen Motoren, dass sie nicht reversierbar sind, sie also nur eine Drehrichtung erzeugen können, zu beheben, wurden zum Beispiel von ZHANG ET. AL. [71] (Abbildung 2.5c) oder von LAVRINENKO ET AL. [3] Motoren mit zwei Schwingern vorgeschlagen, von denen nur einer im Eingriff ist.

Als weitere Möglichkeit diesen Nachteil zu beheben, wurde schon früh damit begonnen, die Antriebsellipse direkt zu erzeugen und nicht durch das Abprallen vom Rotor entstehen zu lassen. Hierzu wurde der Aufbau von WILLIAMS UND BROWN [2] wieder aufgegriffen. Ein Patent von KÜNEMUND [73] aus dem Jahr 1965 zeigt die prinzipielle Idee. Der Aufbau ist in Abbildung 2.6 visualisiert. Zur Erzeugung der Ellipse, werden die beiden aufgeklebten Piezoelemente mit einer Sinus- und einer Cosinus-Spannung – also mit  $90^\circ$  Phasenversatz – angeregt, was dazu führt, dass der Balken in beiden Biegevorzugsrichtungen schwingt. Aufgrund des Phasenversatzes in den beiden Biegeschwingungen stellt sich an der Spitze die gewünschte Ellipsenfom ein. Da der Balken einen quadratischen Querschnitt besitzt, sind die beiden Biegeresonanzen frequenzgleich, was wiederum bei gleicher Anregungsamplitude zu gleichen Schwingungsamplituden in beiden Richtungen führt. Der sternförmige Rotor dient zum Antrieb eines nicht gezeigten Getriebes. Ein ganz ähnliches Prinzip wurde später auch von MORITA ET AL. [74, 75] genutzt um einen der kleinsten piezoelektrischen Motoren herzustellen.

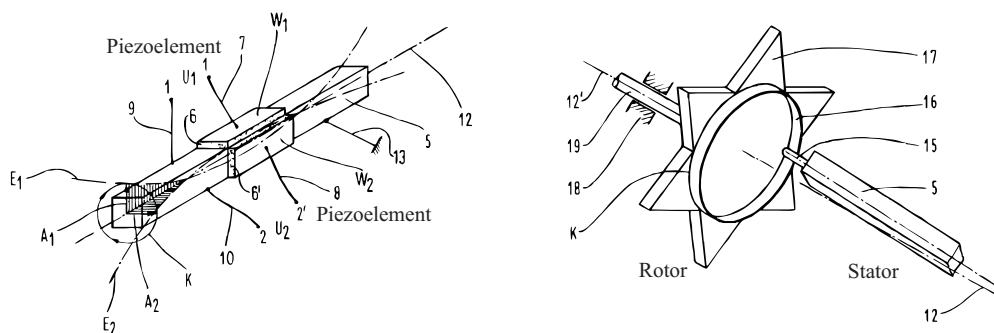
Nicht nur die Kombination zweier Biegeschwingungen in einem Schwinger wurde ge-



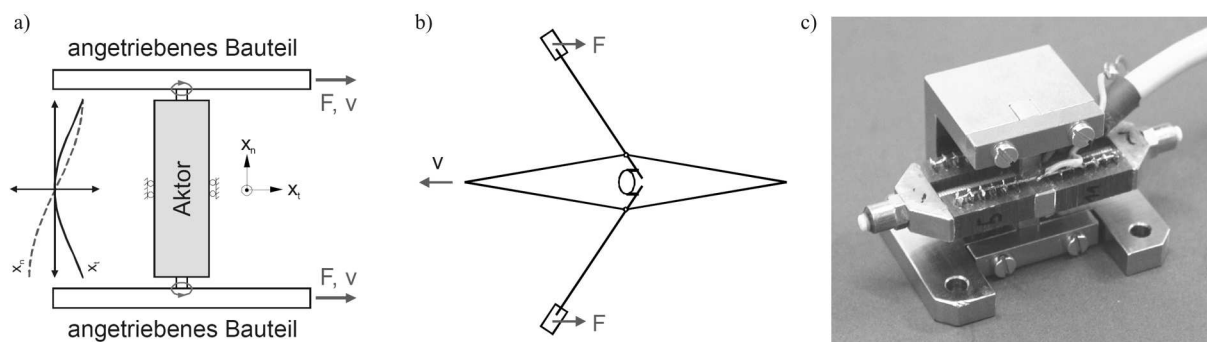
**Abbildung 2.5:** Vorgespannter Ultraschallschwinger als Stator von Schwingungsantrieben. **a)** Stator mit der zugehörigen Schwingungsform nach VASILJEV ET AL. [69]. **b)** Einbauszenario für den Stator (3) in einem Plattenspieler zum Antrieb des Plattentellers (Rotor) (1), nach VASILJEV ET AL. [70]. **c)** Stator für reversierbaren Antrieb nach ZHANG ET AL. [71].

nutzt, sondern auch Kombinationen von Längs- und Biegeschwingungen. FLEISCHER ET AL. [76, 77] stellten einen solchen Schwinger vor. Die Schwierigkeit hierbei ist die Kompatibilität der Schwingungsformen. So muss eine Möglichkeit zur Lagerung des Stators gefunden werden, was im Idealfall in einem gemeinsamen Knoten aller genutzten Schwingungsformen geschieht, da sonst ein Teil der Energie über das Lager in die Umgebung abgeleitet wird und dem Antriebsprozess folglich nicht mehr zur Verfügung steht. Wichtig ist weiterhin, dass die genutzten Moden nicht zu stark ineinander einkoppeln.

Um die Leistungsfähigkeit der Antriebe zu steigern, wurden am Heinz Nixdorf Institut verschiedene Konzepte mit zwei parallel angeordneten gestapelten piezoelektrischen Aktoren von JENDERY [78] und HEMSEL [79, 80] untersucht. Die Analysen führten zu einem symmetrisch aufgebauten Motor bei dem die Piezostapel vorgespant wurden. Namenspathe des Antriebs war erneut der Ruderer, er wird *Paderborner Ruderer Motor* genannt, diesmal aber aufgrund der zwei gegenüberliegenden Kontaktpunkte zur Kraftübertragung. Dieser Aufbau – gezeigt in Abbildung 2.7 – hat den Vorteil, dass sich der Schwin-



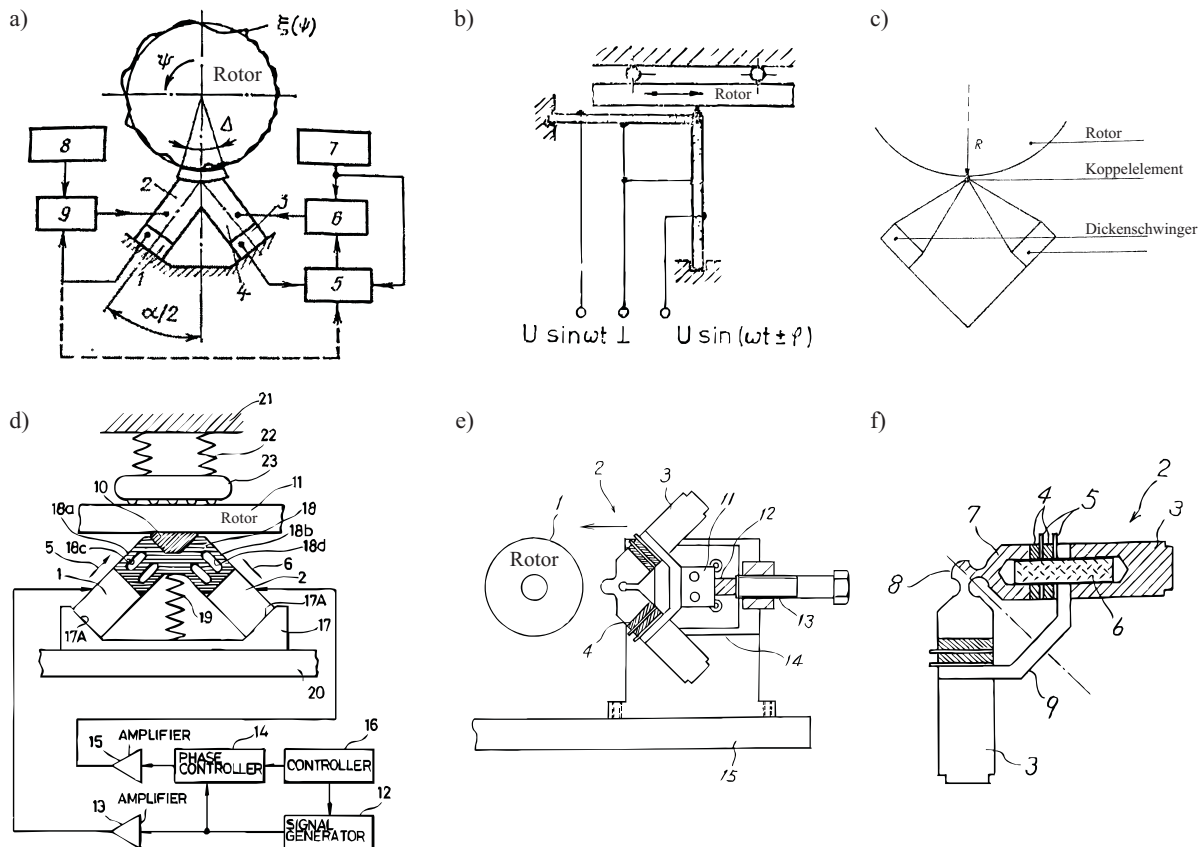
**Abbildung 2.6:** Zweiphasiger Piezoantrieb von KÜNEMUND [73]. Der Stator (**links**), besteht aus einem Balken mit aufgeklebten piezoelektrischen Elementen. Im Gesamtaufbau (**rechts**) wird der Rotor (17) durch die elliptische Bewegung des Stators (5) mitgenommen.



**Abbildung 2.7:** Paderborner Ruderer Motor von HEMSEL [80]. **a)** Schematischer Aufbau mit Andeutung der Schwingungsform. **b)** Funktionsprinzip. **c)** Vorgespannter Schwinger.

ger sehr energieeffizient lagern lässt, da die Lagerung aufgrund der symmetrischen Belastung kaum Momente aufnehmen muss. Zur Erzeugung der beiden Abtriebsellipsen werden wie zuvor zwei Schwingungsformen überlagert, in diesem Fall ist es die erste Längsschwingung und die erste Biegeschwingung.

Da die Abstimmung von Längs- und Biegemoden in der Praxis, besonders an Schwingern die aus vielen Komponenten bestehen, schwer reproduzierbar und damit auch teuer ist, wurden verschiedene Ansätze verfolgt, zwei Längsschwinger zur Erzeugung der Ellipsen zu verwenden. Erste Konzepte dieser Art sind in den frühen 1980er Jahren zum Beispiel bei BANSEVICIUS UND RAGULSKIS [81], MARTH [82] oder KRAUSE [83] zu finden. Diese Konzepte wurden sowohl von MORI ET. AL. [84, 85] Anfang der 1990er Jahre als auch von KUROSAWA ET. AL. [86, 87] knapp 10 Jahre später wieder aufgegriffen. Beide haben zwei in etwa rechtwinklig zueinander angeordnete und vorgespannte Längsschwinger, die an der Spitze biegeweich miteinander verbunden sind, so dass die Kopplung zwischen den Schwingern möglichst klein beziehungsweise möglichst nur über den Kontaktprozess vorhanden ist. Die Abbildung 2.8a zeigt den von MORI konstruierten Motor inklusive eines Blockschaltbilds der Ansteuerung, wie sie typisch für zweiphasige Stehwellenmotoren ist. Da diese Motoren resonant bzw. resonanznah betrieben werden sollen ist eine Nachführung der Frequenz unerlässlich, um die Verschiebung der Resonanzfrequenz im Betrieb zu kompensieren. In der genannten Quelle finden sich weitere interessante Bauformen, bei denen kombinierte Längsauslenkungen die Ellipse erzeugen. Der ebenfalls abgebildete Motor von KUROSAWA verwendet ein ähnliches Prinzip, er superponiert zwei Schwingungsmoden, die dicht zusammenliegen. Dabei ist es gerade so, dass eine Mode für die Querbewegung (Vorschubrichtung) und die andere für die Normalbewegung zuständig ist. Der schematische Aufbau des Schwingers ist in Abbildung 2.8c zu erkennen. Die piezoelektrischen Elemente sind hier über einen Bolzen vorgespannt. Über die Lagerung, die sich nahe der Schwingungsknoten befindet, sind die beiden Längsschwinger miteinander verbunden. Die experimentellen Untersuchungen bescheinigen dem Antrieb eine gute Performance. Allerdings ist der benötigte Bauraum relativ groß. Auch in den Arbeiten von BAUER [88], LOPEZ [89] wird das Prinzip wieder aufgegrif-

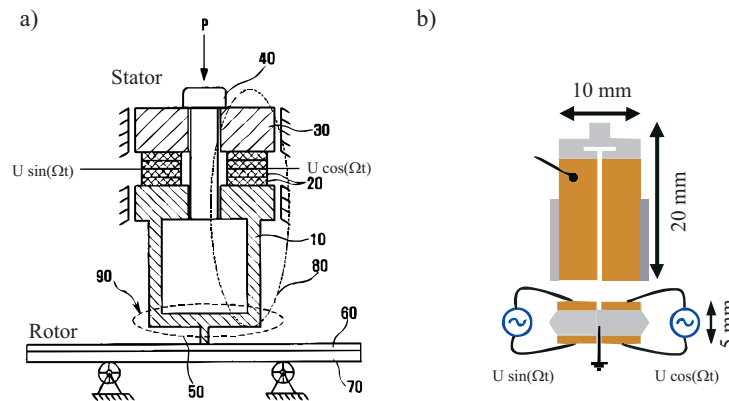


**Abbildung 2.8:** Antriebe mit Kombination zweier Längsschwingungen, zweiphasiger Betrieb **a)** Antrieb nach BANSEVICIUS UND RAGULSKIS [81] **b)** Konzept eines Linearantriebs nach MARTH [82] **c)** Vorschlag eines Motoraufbaus mit zwei Dickenschwingern von KRAUSE [83] **d)** Linearantrieb nach MORI ET AL. [84] **e-f)** Antrieb nach KUROSAWA ET AL. [87] mit dem Gesamtaufbau (e) einschließlich des Rotors (1) und der Detailzeichnung des Stators (f)

fen. Wie auch in den Arbeiten von DEVOS [90] und VAN DE VIJVER [91, 92], die in der Entwicklung des *Leuven-Motors*, der von REYNAERTS [93] zum Patent angemeldet wurde, mündeten.

Eine weitere Variante der zweiphasig betriebenen Motoren ist der *Shaking-Beam-Motor* – siehe Abbildung 2.9 – dieser wurde von VASILJEV ET AL. [94, 95, 96] entworfen. Hier werden zwei Longitudinalschwinger biegeweich mit einem ideal biegesteifen Querelement verbunden, dabei ist das Kontaktelement mittig auf dieser Querverbindung positioniert. In erster Näherung wird das Verbindungselement als masselos betrachtet, also ohne eigenes dynamisches Verhalten. Wenn jetzt die beiden Schwinger  $90^\circ$  phasenversetzt angeregt werden, stellt sich am Kontaktpunkt eine Ellipse ein. Durch die biegeweiche Kopplung der beiden Längsschwinger ist die Wechselwirkung zwischen ihnen sehr gering. Dies erlaubt es, dass die Längsschwinger nach den bekannten Gesichtspunkten der Ultraschalltechnik ausgelegt werden. Neben der vorgespannten Variante die den piezoelektrischen Effekt in Polarisationsrichtung nutzt, ist auch eine *Low-Cost-Version* aufgebaut worden,

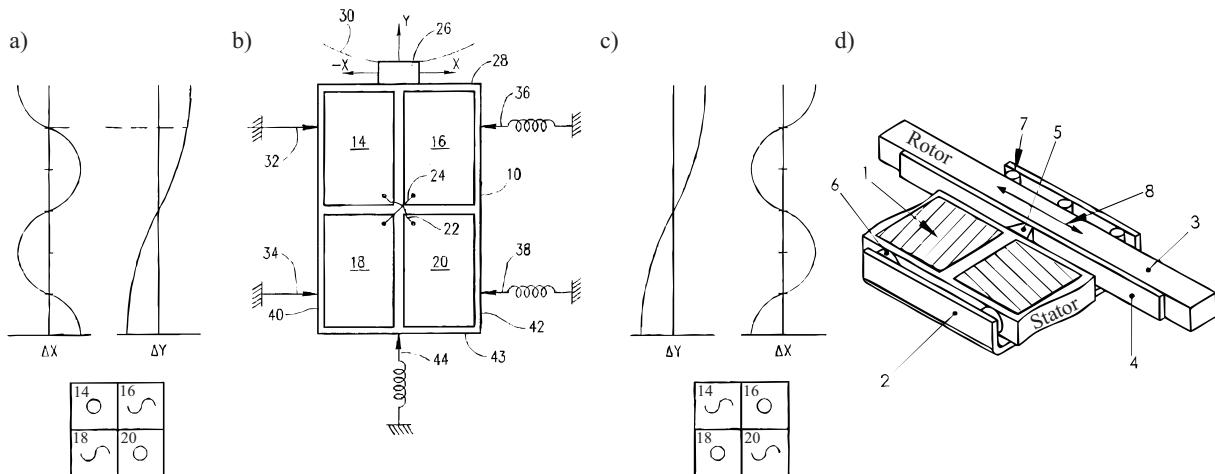




**Abbildung 2.9:** Skizzenhafte Darstellung eines *Shaking-Beam-Motors*: **a)** Aufbau der Vorspannten Version mit dem Stator unter anderem bestehend aus piezoelektrischen Elementen (20), der Vorspannschraube (40) und dem Querelement mit Stößel (90). Der linear ausgeführte Rotor besteht aus einer Kontaktschicht (60) und einem Träger (70). YOON ET AL. [95] **b)** Aufbau des Stators einer flachen, geklebten Version HEMSEL ET AL. [97]

bei der die piezoelektrischen Elemente mit dem Grundkörper verklebt wurden. Bei dieser Variante wird der Querkontraktionseffekt ausgenutzt, das heißt die Polarisationsrichtung steht senkrecht auf der genutzten Bewegungsrichtung. Der Grundkörper ist deutlich einfacher zu fertigen und auch die Montage gestaltet sich unproblematischer, da das Vorspannen der Schwinger eine recht große Erfahrung voraussetzt.

Neben den zweiphasig angesteuerten Stehwellenantrieben, die zwei Schwingungsformen nutzen, gibt es auch solche, bei denen die zwei genutzten Schwingungsformen mit einer einzigen Signalquelle angeregt werden. Die wohl bekannteste Ausführung ist ein Motor, der von der Firma NANOMOTION [98, 99, 100, 101] hergestellt und vertrieben wird. Um die Kraft des Antriebs zu erhöhen, werden bis zu acht piezoelektrische Schwinger in einem Gehäuse integriert, deren acht Stößel dann auf einer gemeinsamen Abtriebsschiene arbeiten. Seit einiger Zeit arbeitet NANOMOTION auch an einer Multilayerversion des Motors (GANOR [102]). Zur Erzeugung der elliptischen Bewegung wurden auf dem rechteckigen piezoelektrischen Element die vier Elektroden aufgebracht, die diagonal verbunden sind, siehe Abbildung 2.10. Durch eine sinusförmige Anregung der diagonal verbundenen Elektroden stellt sich in Längsrichtung ( $y$ ) eine  $\lambda/2$ -Schwingung und in der Biegerichtung ( $x$ ) eine  $3/2\lambda$ -Schwingung ein. Je nach dem welche Elektroden angeregt werden, stellt sich die Drehrichtung der Ellipse ein. Da sowohl die Längsschwingung als auch die Biegeschwingung in der Mitte einen Schwingungsknoten haben, kann der Motor in der Mitte gelagert werden. Gegenüber den zuvor vorgestellten Typen hat er die Nachteile, dass der  $d_{31}$ -Effekt, also der Querkontraktionseffekt, genutzt wird und dass die Piezokeramik nicht vorgespannt werden kann. Einen ähnlichen Motor, der auch kommerziell bei der Firma PHYSIK INSTRUMENTE erhältlich ist, haben auch WISCHNEWSKIY UND WISCHNEWSKIY [103, 104] vorgestellt. Die Geometrie dieses Schwingers ist so ausgelegt, dass bei Anregung einer Schwingerhälfte sowohl eine Längs- als auch eine Bieeresonanz ange-

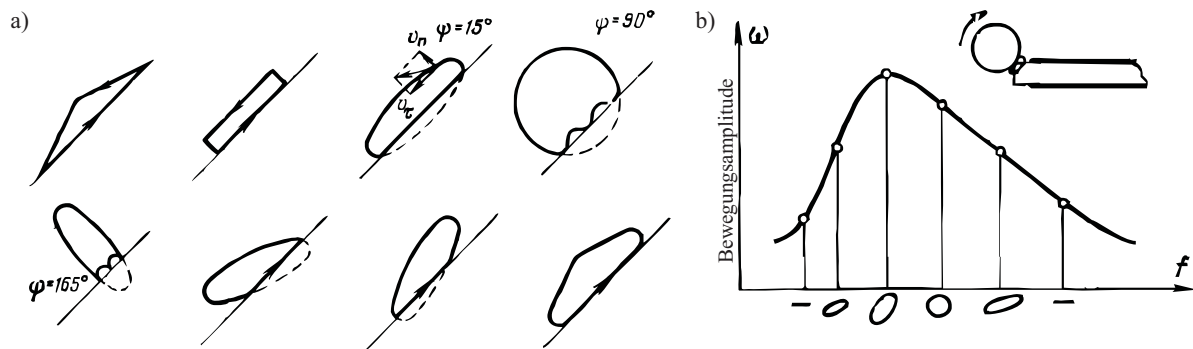


**Abbildung 2.10:** a-c) Skizzenhafte Darstellung des Stators eines *Nanomotion-Motors*: b) Schematische Darstellung des Stators mit dem Stößel (26) und den vier Elektroden (14, 16, 18, 20) a) Oben: Schwingungsform der überlagerten Moden. Unten: Beschaltung der Elektroden, hier werden die Elektroden (16) und (18) mit einer sinusförmigen Spannung angeregt. c) Wie a nur andere Antriebsrichtung. (a-c) nach ZUMERIS [98], d) Piezoelektrischer Antrieb nach WISCHNEWSKIY UND WISCHNEWSKIJ [104] bestehend aus linearem Rotor (8) und dem Stator (1) mit Stößel (5).

regt werden.

Weiterhin ist der Motor der Firma ELLIPTEC erwähnenswert, hierbei wurde ein Multilayer Piezoaktor in einer einfach, durch Strangpressen, herzustellenden metallischen Struktur platziert. Die Struktur wurde so ausgelegt, dass es jeweils bei etwa 80 kHz und 100 kHz eine komplexe Schwingungsform gibt, bei denen sich der Kontaktpunkt auf einer jeweils gegenläufigen elliptischen Bahn bewegt. Das von ELLIPTEC genutzte Prinzip eignet sich insbesondere für kleine Antriebe.

Die vorgestellten Antriebe zeigen exemplarisch die Entwicklung der Stehwellenmotoren, allerdings kann in keinem Sinne ein Anspruch auf Vollständigkeit erhoben werden. Dennoch ist eine repräsentative Auswahl an monofrequenten Konzepten erfasst. Obwohl das Antriebsprinzip mit dem Ruderprinzip nach LAVRINENKO ET. AL. [3] (vgl. Abbildung 2.4) leicht vorstellbar ist, spiegelt dieses zunächst nur eine stark idealisierte Beschreibung wider. Hierbei wird stets von einer idealen Ellipse während des Motorbetriebs ausgegangen. Um eine ideale Ellipse garantieren zu können, müssen im Modell einige Vereinfachungen getroffen werden. Zunächst muss die Bahn des Kontaktpunktes eingepreßt sein, was bedeutet, dass eine unbegrenzte Kraft gestellt werden können muss. Dies führt dazu, dass die Dynamik des Schwingers nicht mit betrachtet werden kann, aber auch nicht muss. Weiterhin wird stets ein eingeschwungenes Verhalten des Antriebs vorausgesetzt. Es ist offensichtlich, dass diese Bedingungen in der Praxis nicht einzuhalten sind. Nichtsdestotrotz wird in der Literatur zur Auslegung und Charakterisierung der Motoren die nicht belastete, also freie, Trajektorie des Kontaktpunktes betrachtet.



**Abbildung 2.11:** a) Mögliche Bewegungstrajektorien des Kontaktpunktes. b) Frequenzabhängigkeit der freien Trajektorie. Jeweils nach LAVRINENKO ET AL. [3].

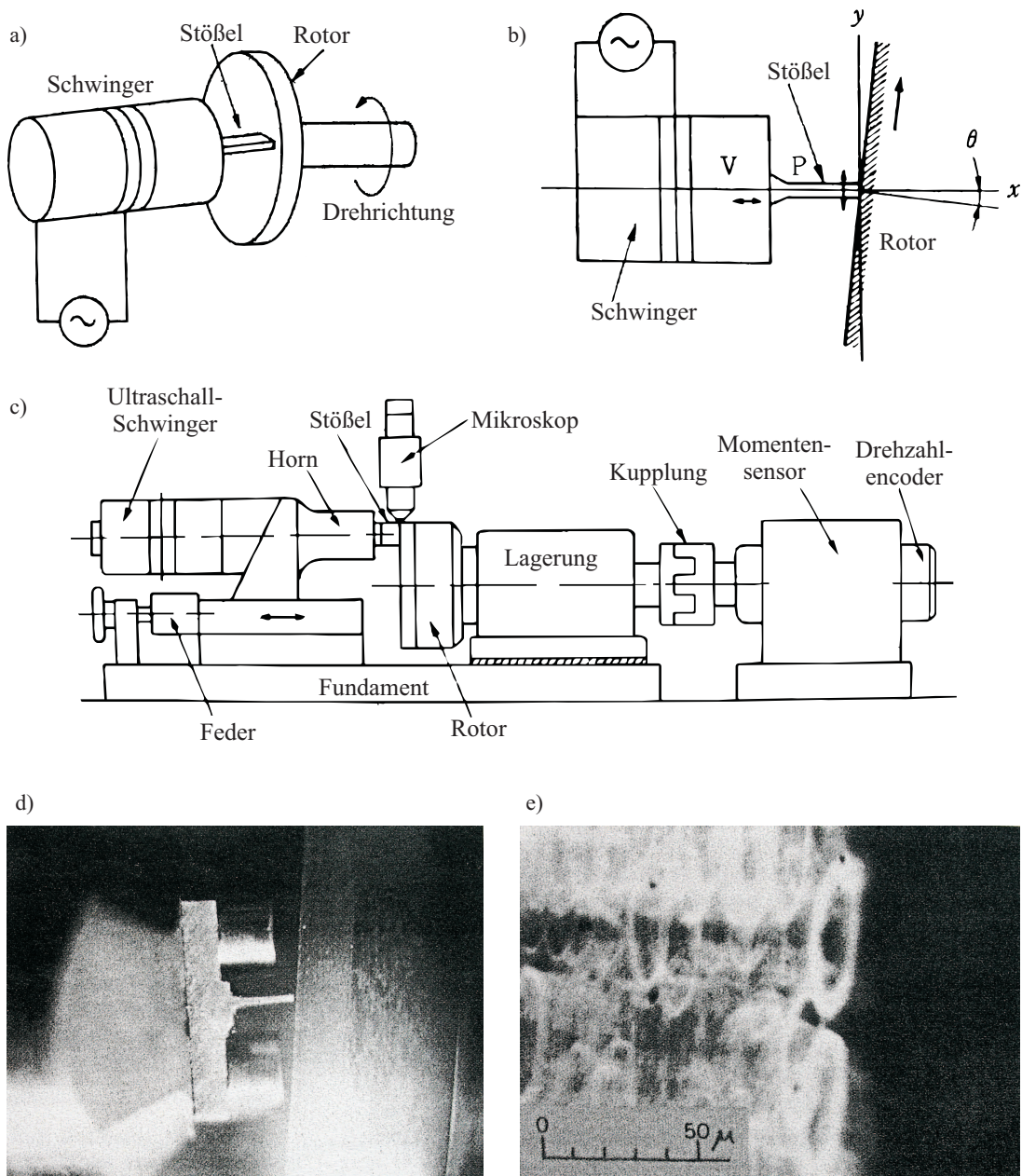
## 2.3 Experimentelle Untersuchungen

Bei der Durchsicht der Literatur fällt auf, dass es noch nicht sehr viele experimentelle Untersuchungen gibt, die auf einer mikroskopischen Zeitskala<sup>5</sup> die Bewegung des Kontaktpunktes beschreiben. Vielmehr gibt es sehr häufig Messungen der Motorcharakteristik, in der makroskopische Geschwindigkeiten (bzw. Drehzahl) und Kräfte (bzw. Drehmomente) gemessen werden. Die dort gemessenen Kennlinien sind für den späteren Anwender wichtig und dienen der Auswahl eines geeigneten Antriebs. Allerdings können mit diesen Messungen noch nicht alle Aspekte des Funktionsprinzips hinreichend erklärt werden.

Nach der Vorstellung von LAVRINENKO ET AL. [3] bewegt sich der Kontaktpunkt auf einer Trajektorie, wie in Abbildung 2.11a zu sehen. Dabei ist die Bewegungsellipse des Kontaktpunktes am freien Schwinger seiner Hypothese nach stark deformiert, wenn der Stator in Kontakt mit dem Rotor kommt, wobei mehrere mögliche Fälle dargestellt sind. Weiterhin ist die Form der Bahn sowie die Größe der Amplitude frequenzabhängig, wie in 2.11b dargestellt.

Relativ häufig wird die Bewegung des Kontaktpunktes am freien Stator mit Hilfe von Laserinterferometern beziehungsweise Laservibrometern gemessen, so z.B. von IJIMA ET AL. [105], TAKANO ET AL. [106], FUNAKUBO UND TOMIKAWA [107] SUZUKI ET AL. [108], MUNEISHI UND TOMIKAWA [109] oder LUCINSKIS ET AL. [110]. Dabei wird jedoch stets die nicht deformierte, vom Kontaktvorgang unbeeinflusste Trajektorie aufgezeichnet, häufig auch nur eine Komponente der Bewegung. Die hier gewonnenen Ergebnisse zeigen die erwarteten relativ glatten Ellipsen und auch die Frequenzabhängigkeiten lassen sich mit diesen Messungen zeigen. Daneben werden in neueren Literaturstellen auch häufig 2D bzw. 3D Scanning-Laser-Vibrometer Messungen der freien Schwingungsform des Stators wie beispielsweise von WISCHNEWSKI [111] oder VASILJEV ET AL. [112] gezeigt. TSUJINO ET AL. [113] haben an ihrem vorgestellten Rotationsantrieb die Bewegung zweier Punkte in der Nähe des Kontaktpunktes gemessen und daraus eine rela-

<sup>5</sup>Hiermit sind Messungen mit Abtastfrequenzen  $\gg$  der Betriebsfrequenz gemeint, um die wesentlichen Effekte aufzulösen.



**Abbildung 2.12:** a-b) Aufbau des *Wedge-Type-Motors*, der Motor besteht aus einem schräggestellten Ultraschallschwinger, der axial gegen einen Rotor stößt. c) Prüfstand zur Messung der Drehzahl-Drehmoment-Kurven und zur Visualisierung der Stößelbewegungen. d) Fotografie des Stößels in Kontakt mit der Rotorscheibe. e) Trajektorie des Stößels bei einer Betriebsfrequenz von 28 kHz und einer Rotorgeschwindigkeit von 3,6 m/s. Jeweils nach SASHIDA UND KENJO [5].

tiv glatte Ellipse rekonstruiert. Allerdings stellt der Antrieb, der aus einem geschlitzten Longitudinal-Schwinger aufgebaut ist und durch die Schlitze eine kombinierte Längs- und Torsionsschwingung an einer großen ringförmigen Kontaktfläche erzeugt, aufgrund dieser Geometrie der Kontaktfläche einen Sonderfall dar. Ganz ähnliche Messungen, allerdings an dem freien Stator, stellt auch PALMER [114] in seiner Arbeit vor, sein Motor besteht aus einem Ultraschalllängsschwinger bei dem die Längsschwingungen über ein Zwischenstück teilweise in Torsionsschwingungen gewandelt werden.

Vergleichsweise umfangreiche Untersuchungen wurden von SASHIDA UND KENJO [5] an dem *Wedge-Type-Motor* durchgeführt. Die Abbildung 2.12 zeigt den einfachen Aufbau des Antriebs. Die Ähnlichkeit zu dem Vorbild, dem Plattenspielerantrieb von VASILJEV ET AL., ist deutlich zu erkennen. Im Gegensatz zu diesem ist die Kontaktfläche axial am Rotor angebracht; um einen Antriebseffekt zu erzielen, ist der vorgespannte Ultraschallschwinger leicht schräg gestellt. Für die Messung von Drehzahl-Drehmoment-Kurven ist der skizzierte Prüfstand verwendet worden. Dieser bietet zusätzlich die Möglichkeit, die Stößelbewegung durch ein Lichtmikroskop hindurch beobachten zu können. Natürlich lässt sich nicht eine einzelne Bewegung des mit etwa 28 kHz angeregten Stößels beobachten, allerdings lassen sich Bilder, wie in Abbildung 2.12e gezeigt, aufnehmen. Hier lässt sich gut erkennen, dass sich eine leicht abgeflachte deformierte Ellipse einstellt. Weiterhin kann eine Aussage über die Größe der Amplitude gemacht werden.

Daneben finden sich in der Literatur keine weiterreichenden experimentellen Untersuchungen zur Stößelbewegung. Allerdings gibt es einige mathematische Modellvorstellungen, die im Folgenden näher erläutert werden.

## 2.4 Modellierung

Zur mathematischen Beschreibung von Stehwellenantrieben gibt es eine Reihe von Möglichkeiten, die in diesem Abschnitt vorgestellt werden. Dabei wird zunächst sehr knapp auf die analytischen Möglichkeiten zur Strukturmodellierung der Statoren eingegangen. Dem schließt sich die Beschreibung der Modellierung mit Hilfe der Finiten-Elemente-Methode an. Der Abschnitt schließt mit der Vorstellung von elektromechanischen Minimalmodellen und modalen Ersatzmodellen zur Beschreibung der Stehwellenmotoren.

### 2.4.1 Analytische Berechnung der Strukturdynamik

Um die Dynamik des schwingenden Körpers zu beschreiben, wird der Körper als Kontinuum betrachtet. Dazu bieten sich Stäbe und Balken als mechanische Grundmodelle an, wobei mit Stäben nur Longitudinal- und mit Balken nur Biegeverformungen beschrieben werden können. Diese eindimensionalen Modelle können genutzt werden, um die Bewegungsgleichungen aufzustellen, was auf orts- und zeitabhängige partielle Differentialgleichungen

chungen führt. Diese können für diese stark vereinfachten Modelle recht einfach gelöst werden. Das genaue Vorgehen kann in gängigen Schwingungslehrebüchern nachgelesen werden, z.B. MAGNUS UND POPP [115] oder noch weiterführender bei WAUER [116]. Allerdings lassen sich so nur geometrisch sehr einfache Strukturen sinnvoll handhaben.

Zur Abbildung komplizierterer Strukturen ist die Methode der Übertragungsmatrizen entwickelt worden, siehe PESTEL [117] und GASCH UND KNOTHE [118]. Dazu werden die zuvor genannten mechanischen Modelle wie Saiten, Stäbe, Balken, Membrane oder Platten benutzt. Um damit eine komplexere Struktur zu beschreiben, wird diese in Abschnitte zerlegt, für die jeweils eines der Modelle eine hinreichend gute Abbildung darstellt. Die Verbindung zwischen den Abschnitten wird dann über die Randbedingungen der einzelnen Modelle eingearbeitet. Diese Bedingungen werden, da sie innerhalb des modellierten Körpers sind und ihre Größen a priori noch nicht bekannt sind, sondern nur in welcher Beziehung sie zu den Randbedingungen der andern angrenzenden Abschnitte stehen, Übergangsbedingungen genannt. Zur Vereinfachung der Anwendung dieses Verfahrens ist es zweckmäßig, für die einzelnen Ersatzmodelle (Stäbe, Balken, ...) die Lösung mit beliebigen, also allgemeinen, Randbedingungen zu bestimmen. Weiterhin werden harmonische Schwingungen und ein lineares Materialverhalten angenommen. Dies erlaubt es, dass die resultierenden Gleichungen der einzelnen Elemente besonders übersichtlich und zweckmäßig in Matrixform aufgeschrieben werden können. Werden nun die allgemeinen Randbedingungen geschickt sortiert, können alle Unbekannten und auch die Werte der Übergänge durch wenige Matrixoperationen bestimmt werden. Aufgrund der Matrixdarstellung wird dieses Verfahren auch *Übertragungsmatrizenverfahren* genannt. Neben der Abbildung der rein mechanischen Grundelemente lassen sich auch piezoelektrische Abschnitte mit einbinden, siehe z.B. FU [119] oder MASON [12]. Daneben lassen sich auch lineare elektrische Netzwerke problemlos als Übertragungsmatrix darstellen und mit einbinden. Das schon recht alte Verfahren wird auch heute noch oft zur Auslegung von Ultraschallsystemen genutzt. Allerdings gibt es keine weit verbreiteten kommerziellen Programme, die dieses Verfahren nutzen.

Da dieses Verfahren harmonische und lineare Größen voraussetzt, eignet es sich nicht, um den Kontaktvorgang des Antriebs zu beschreiben, da dieser einen nichtlinearen Vorgang darstellt. Daneben stößt das Verfahren der Übertragungsmatrizen an seine Grenzen, wenn eine sehr genaue Abbildung der Geometrie erforderlich ist oder die Verformungen nicht mehr durch die einfachen, den Kontinuumsmodellen zugrunde liegenden Elementarfällen, beschrieben werden können .

## 2.4.2 Numerische Berechnung der Strukturdynamik

Um diese Nachteile zu überkommen, können die Schwinger mit der Finiten-Elemente-Methode (FEM) modelliert werden. Auch hierbei wird der Körper in einzelne Abschnitte (Elemente) zerteilt, die Geometrie von jedem dieser Elemente ist über Punkte (Knoten) auf der Umrandung (Eck- und Zwischenpunkte) definiert. Aneinander grenzende Ele-

mente nutzen dabei die gleichen Knoten, daher sind die Elemente über die geometrischen Verschiebungen verkoppelt. Das Verhalten der Elemente wird auch hier vorher für den allgemeinen Fall bestimmt und dann in einem Modell genutzt. Für die Finiten-Elemente wird in der Regel ein einfacher (Verschiebungs-)Ansatz – linear, quadratisch oder kubisch – gewählt und die Steifigkeitsbeziehung zwischen den einzelnen Elementknoten bestimmt. Ebenso wird die Masse des Elementes über den Ansatz auf die einzelnen Knoten verteilt. Die so entstandenen Elemente sind viel allgemeiner als die Übertragungsmatrizen, allerdings aufgrund der einfacheren Ansatzfunktion weniger genau. Dadurch ist es notwendig, eine relative hohe Anzahl von Elementen zur Diskretisierung zu verwenden. Weiterhin können neben eindimensionalen auch zwei- und dreidimensionale Elemente genutzt werden. Auch ist es möglich, ein komplexes (nichtlineares) Verformungsverhalten zu berücksichtigen.

Als Ergebnis der Modellbildung ist der Körper mit Gesamtsteifigkeits-  $\mathbf{K}$ , Gesamtmassen-  $\mathbf{M}$  und Gesamtdämpfungsmatrix  $\mathbf{D}$  sowie einem Verschiebungsvektor  $\mathbf{x}$  mit allen Knotenfreiheitsgraden beschrieben. Jetzt lässt sich leicht die Bewegungsgleichung in Matrixform aufschreiben:

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{D} \dot{\mathbf{x}} + \mathbf{K} \mathbf{x} = \mathbf{f}. \quad (2.1)$$

Dabei ist  $\mathbf{f}$  der Vektor, der auf die einzelnen Knotenfreiheitsgrade wirkenden Kräfte. Geometrische Randbedingungen können nun eingearbeitet werden, indem die Knotenfreiheitsgrade geeignet sortiert werden. Danach lässt sich das System aufspalten, und das verbleibende System nimmt wieder die Form von Gleichung 2.1 an. Genauer ist die Methode der Finiten-Elemente in der einschlägigen Standardliteratur nachzulesen, etwa in BATHE [120], WISSMANN UND SARNES [121], LINK [122] oder in STEINKE [123]. Neben den rein mechanischen Elementen gibt es in der FEM gekoppelte Elemente, die die Berechnung von piezoelektrischen Materialien ermöglichen, siehe z.B. eine der ersten Umsetzungen von ALLIK UND HUGHES [124]. BENJEDDOU [125] gibt in seinem Übersichtsbeitrag einen guten Eindruck über die verschiedenen Implementierungsansätze für piezoelektrische Finite-Elemente.

Die für die Strukturdynamik wichtigen Eigenfrequenzen und die dazugehörigen Eigenformen lassen sich mit Hilfe der Modalanalyse, unter Berücksichtigung sowohl der mechanischen als auch der elektrischen<sup>6</sup> Randbedingungen, bestimmen. Im einfachsten Fall, für das ungedämpfte (lineare) System müssen die nicht trivialen Nullstellen ( $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ ) der Gleichung:

$$\left( -\omega^2 \mathbf{M} + \mathbf{K} \right) \hat{\mathbf{x}} = \mathbf{0} \quad (2.2)$$

gefunden werden. Die gefundenen  $\omega_i$  sind die Eigenkreisfrequenzen (Resonanzfrequenzen). Der jeweilige zugehörige Vektor  $\mathbf{x}_i$  beschreibt die Eigenform, also die Schwingungs-

---

<sup>6</sup>Je nach dem, ob die Klemmen an einem piezoelektrischen System offen oder kurzgeschlossen betrachtet werden, ergeben sich die Resonanz- oder die Anti-Resonanzfrequenzen.

form<sup>7</sup> dieser Frequenz. Um eine hinreichende Genauigkeit zu erreichen, ist eine gute Diskretisierung notwendig, das heißt die Anzahl der Freiheitsgrade muss groß genug sein.

Ob die ermittelten Eigenformen überhaupt mit den in das Modell eingeleiteten Kräften angeregt werden können, kann mit einer harmonischen Analyse überprüft werden. Diese ermittelt die eingeschwungene Antwort des Systems auf eine harmonische Anregung. Hierfür wird wieder ein lineares Systemverhalten vorausgesetzt. Es wird die partikuläre Lösung der Gleichung 2.1 für eine bestimmte Frequenz gesucht. Zur Berechnung wird der *Ansatz vom Typ der rechten Seite* gewählt. Es wird also eine harmonische Antwort auf die harmonische Anregung erwartet. Für Knotenfreiheitsgrade wird

$$\mathbf{x} = \hat{\mathbf{x}} e^{j\varphi} e^{j\Omega t} = \underline{\hat{\mathbf{x}}} e^{j\Omega t} \quad (2.3)$$

mit der komplexen Amplitude  $\underline{\hat{\mathbf{x}}}$  – die Amplituden- und Phaseninformation beinhaltet – gewählt. Für den Kraftvektor wird derselbe Ansatz verwendet. Eingesetzt in 2.1 und umgestellt nach  $\underline{\hat{\mathbf{x}}}$  folgt

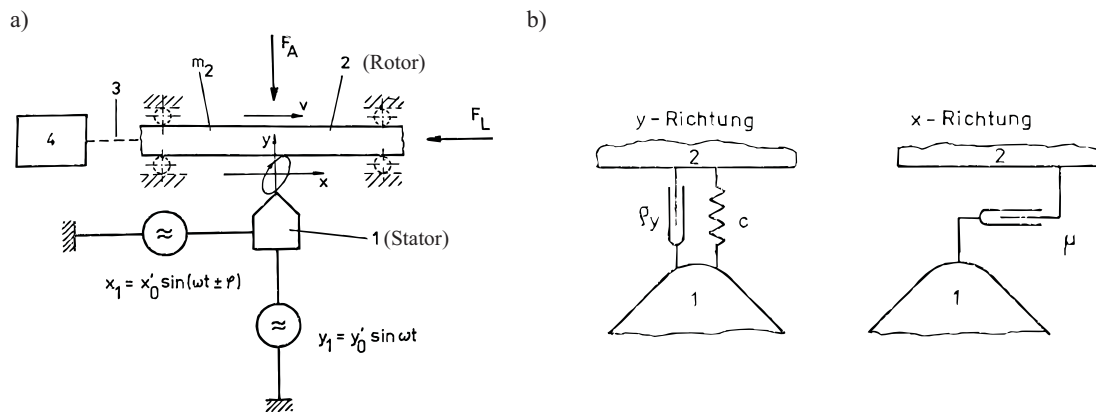
$$\underline{\hat{\mathbf{x}}} = \left( -\Omega^2 \mathbf{M} + j \Omega \mathbf{D} + \mathbf{K} \right)^{-1} \underline{\hat{\mathbf{f}}}. \quad (2.4)$$

Damit sind Amplitude und Phase eines jeden Freiheitsgrades bekannt. Diese Ergebnisse sind prinzipiell mit denen der Übertragungsmatrizenmethode vergleichbar. Beide Methoden haben den Nachteil, dass sie sich in dieser Form nur für lineare Systeme eignen. Eine etwaige Belastung des schwingenden Körpers lässt sich nur mittels linearen Ersatzelementen einbinden. Die FEM hat im direkten Vergleich den Vorteil, dass die Geometrie genauer abgebildet werden kann. Wogegen bei den Übertragungsmatrizen die Lösung eines jeden Abschnitts genauer ist, da die Wellengleichung mathematisch exakt gelöst wurde. Wie auch die Übertragungsmatrizenmethode, ist die FEM sowohl mit der Modalanalyse als auch mit der harmonischen Analyse Standardwerkzeug bei der Auslegung von Schwingungsantrieben. Insbesondere die FEM hat sich hier etabliert, wohl auch, weil gute und ausgereifte kommerzielle Softwaresysteme zur Verfügung stehen. Für die Auslegung und Analyse von Schwingungsantrieben und auch anderen Ultraschallsystemen, wird häufig nur die freie Schwingung – unter der Annahme, dass sich diese nur marginal ändert – berücksichtigt. Beispielhaft sei hier der Beitrag von MAZEIKA UND BANSEVICIUS [126] genannt. BOUCHILLOUX UND UCHINO [127] gehen sogar soweit, die FEM mit einem genetischen Algorithmus, dem so genannten Evolutionären Algorithmus zu kombinieren, um einen optimierten Motor zu berechnen.

Sollen nichtlineare Vorgänge mit betrachtet werden, und hierzu zählen insbesondere wechselnde Randbedingungen, ist dies auch mit der FE-Methode möglich, indem die Lösung der Gleichung 2.1 mittels Zeitschrittintegration und Anfangswerten berechnet wird. In modernen FEM Paketen können eine ganze Reihe von nichtlinearen Effekten mit berücksichtigt werden, hierzu zählen insbesondere Effekte, die aufgrund von Kontaktvorgängen, Geometrieveränderungen oder durch das Materialverhalten auftreten. Genauere Informationen zur allgemeinen nichtlinearen FEM finden sich beispielsweise bei

<sup>7</sup>Damit ist nur die Form der Bewegung, nicht aber die Bewegungsamplitude bestimmt.





**Abbildung 2.13:** Mechanisches Ersatzmodell des Schwingungsantriebs von MARTH [82].  
 a) Struktur des Vibrationsantriebs b) Beschreibung der Kontaktstelle

WRIGGERS [128] oder RUST [129]. Prinzipiell lässt sich mit den bereitgestellten Methoden auch ein kompletter Schwingungsantrieb simulieren. Allerdings sind die Rechenzeiten so hoch, dass allenfalls die Analyse, keinesfalls jedoch die Auslegung oder Optimierung eines Schwingungsantriebs wirtschaftlich möglich ist. Nichtsdestotrotz haben sich schon einige Forscher mit dieser Thematik beschäftigt. FLEISCHER ET AL. [130] stellen ein sehr stark reduziertes FE Modell eines Antriebs, ähnlich dem Plattenspielerantrieb aus Abbildung 2.5, vor. Damit können sie die Stoßwellen, die in den Stator laufen, berechnen. Der sich bewegende Rotor wird hierbei nicht berücksichtigt. FUNG ET AL. [131, 132] stellen in ihrem Beitrag die Modellierung und Simulation eines Längsbiegemotors vor, wobei sie sich insbesondere mit einem Algorithmus zur Zeitschrittintegration mit adaptiver Schrittweite beschäftigen. Wohl aufgrund der großen Rechenzeit werden in den Ergebnissen nur einzelne Einschwingvorgänge diskutiert. Auch der Beitrag von PARK ET AL. [133] stellt die transiente Berechnung eines Stehwellenmotors vor, wobei die Simulation aufgrund der großen Rechenzeiten nur mit einer sehr groben zeitlichen Auflösung durchgeführt werden kann. Die Autoren schlagen in ihrer Zusammenfassung vor, aus diesem Grund in Zukunft reduzierte Modelle zu nutzen. WEERAYUTH [134, 135] präsentiert in seiner Arbeit die Modellierung und Ergebnisse eines mit ANSYS berechneten Motors, mit der Berücksichtigung einer viskoelastischen Kontaktschicht. Auch hier sind die benötigten Simulationszeiten sehr groß. POTTHAST [136] hat in seiner Arbeit zu einem Ultraschall-Stoß-Schwinger eine Simulation eines chaotischen longitudinalen Kontaktvorgangs mit umfangreichen Ergebnissen vorgestellt, die mit ANSYS berechnet wurden. Allerdings war der Zeitaufwand das zentrale Problem, teilweise wurden mehrere Wochen Rechenzeit benötigt.

### 2.4.3 Minimalmodelle für Stehwellenantriebe

Der Kontaktvorgang vom Stehwellenantrieb wird schon seit vielen Jahren untersucht. So führte schon MARTH [82] erste systematische Untersuchungen an dem in Abbildung 2.13 dargestellten Minimalmodell durch. Der Kontakt wurde in Normalrichtung mit einer



die Modellierung eines planaren Stehwellenantriebs. Für die Kontaktmodellierung nutzt er ein aus drei Massen bestehendes Minimalmodell unter Annahme von Haft-, Gleit und Separationszuständen. Mit Messungen der Motorkennlinie, validiert er sein Modell. JIN UND ZHAO [144] zeigen ein Modell zur Berechnung eines rotatorischen Antriebs, dabei nehmen sie nur Haft- und Separationszustände an. HOUBEN ET AL. [145] nutzen zur Beschreibung des *Leuven-Motors* ein Minimalmodell mit einer als Roll-Reibkontakt ausgeführten Kontaktstelle, das sie um die Berücksichtigung von Verschleißeinflüssen erweitert haben.

#### 2.4.4 Modale Ersatzsysteme

Während in den Modellen des vorigen Abschnitts im wesentlichen die Systemgrenze eng um den Kontaktpunkt gezogen ist und gleichzeitig der dynamische Kontakt recht genau beschrieben wurde, soll hier das elektromechanische System als Ganzes<sup>8</sup> untersucht werden. Dazu muss ein Modell erstellt werden, welches zwei Domänen umfasst. Um diese in einer einheitlichen Sprache zu beschreiben, bedient man sich elektromechanischer Analogien. Diese Technik ist schon seit langer Zeit bekannt. Sie ist zum Beispiel in dem Lehrbuch von OLSON [146] ausführlich auch für andere Domänen beschrieben. Diese Analogien können aufgrund der Ähnlichkeit zwischen den Differentialgleichungen der verschiedenen Domänen, nicht aber aufgrund einer physikalischen Ähnlichkeit, genutzt werden. Auch existieren zwei verschiedene – richtige – mögliche Analogien für die Beschreibung elektromechanischer Systeme, die sich je nach Anwendungsfall unterschiedlich gut eignen, vgl. FIRESTONE [147] oder HÄHNLE [148]. Der Wechsel zwischen zwei Domänen in einem Modell wird jeweils über einheitenbehafte Übertrager (z.B Hebel oder Transformator) implementiert. Für piezoelektrische Schwingungswandler hat sich die Modellierung nach dem Ersatzsystem von MASON [149, 150] etabliert. Abbildung 2.15 zeigt die äquivalente Darstellung eines Piezoschwingers in der mechanischen und elektrischen Domäne. Dabei sind die mechanischen Parameter und Freiheitsgrade als modale<sup>9</sup> Größen aufzufassen. Dies führt dazu, dass die genutzten Parameter nur in einem eingeschränkten Frequenzbereich um die betreffende Resonanz hinreichend genau sind. Wenn ein größerer Frequenzbereich über mehrere Resonanzen hinweg modelliert werden soll, kann dies durch mehrere kombinierte Ein-Massen-Schwinger erreicht werden.

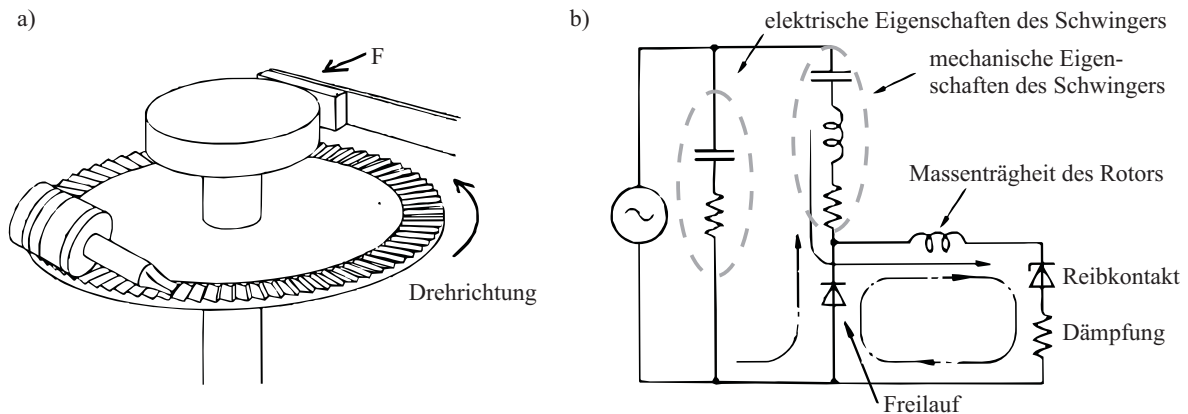
Die Parameter für solche Modelle können entweder aus Messungen identifiziert oder auch aus den mathematischen Modellen abgeleitet werden. So können die Parameter beispielsweise aus den Übertragungsmatrizen mittels Koeffizientenvergleich gewonnen werden. Eine weitere interessante Möglichkeit ist die Parameterbestimmung mit Hilfe der Finiten-Elemente-Analyse. Sowohl PIEFORT [152] als auch KROL [153] geben hierfür ein Verfahren an. Diese bieten sich insbesondere bei komplexeren Geometrien an.

---

<sup>8</sup>Hier ist das System Schwinger mit piezoelektrischem Wandler und Rotor gemeint, teilweise auch mit mechanischer Last.

<sup>9</sup>Eine modale Größe ist eine Ersatzgröße oder effektive Größe, die für eine bestimmte Eigenschwingung identifiziert oder berechnet wurde, um diese Mode mit einem Ein-Massen-Schwinger nachzubilden.

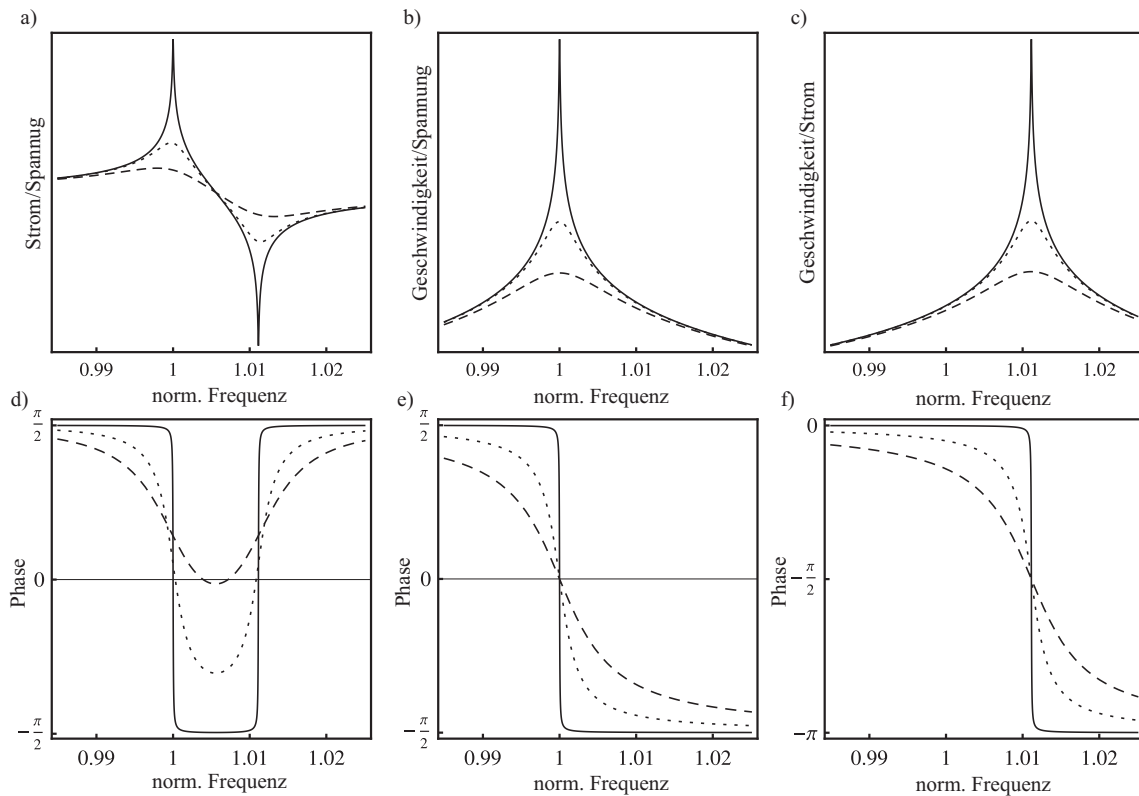




**Abbildung 2.16:** Modellierung eines rotatorischen Stehwellenantriebs mit Formschluss nach SASHIDA UND KENJO [5]. **a)** Elektromechanisches System. **b)** Ersatzmodell in elektrischer Darstellungsform.

LE LETTY ET AL. [160] zeigen die Methode zur Berechnung von Schwingungsantrieben unter Nutzung eines modalen Ersatzsystems, in dem die Parameter direkt aus der FEM gewonnen werden. Sie zeigen Beispiele mit einem Wanderwellenmotor, einem Motor nach dem *Haften und Gleiten*-Prinzip und einem Stehwellenmotor. In diesem Beitrag wird auch eine wesentliche Einschränkung des Ansatzes unterstrichen, da die modalen Parameter für einen ganz bestimmten Fall (also mit bestimmten Randbedingungen wie zum Beispiel frei schwingend) bestimmt wurden, können diese keine veränderte Bewegungsform abbilden. Eine solche Änderung ist aber durchaus zu erwarten, was die Nutzbarkeit dieser Modelle deutlich einschränkt.

Mit den hier gezeigten experimentellen Arbeiten und Modellierungsansätzen wurde versucht, einen repräsentativen Überblick zu geben. Dabei wurde der Fokus auf Arbeiten begrenzt, die sich direkt mit der Modellierung von Stehwellenmotoren befassen. Allgemeinere Arbeiten der nichtlinearen Dynamik wie beispielsweise HAGEDORN [161], BABITSKY [162] der sich mit dynamischen Stoßkontakten beschäftigt, oder SEXTRO [163] der dynamische Reibungsprozesse untersucht und viele andere wurden hier genauso wenig gesondert aufgeführt, wie Werke zur allgemeinen Kontaktmodellierung beispielsweise von JOHNSON [164]. Zusammenfassend kann man sagen, dass es eine wirklich komplette und in akzeptabler Zeit berechenbare Beschreibung der Stehwellenmotoren nicht gibt. Unter anderem auch, weil für rechenbare Modelle viele Vereinfachungen getroffen werden müssen oder die Modelle so komplex sind, dass der Berechnungsaufwand zu groß ist.



**Abbildung 2.17:** Frequenzverhalten eines piezoelektrischen Systems um die Resonanz (durchgezogene Linie: schwach gedämpft; gepunktete Linie: mittlere Dämpfung; gestrichelte Linie: starke Dämpfung). **a,d)** Amplitudengang bzw. Phasengang: Eingangsstrom zu Eingangsspannung. **b,e)** Amplitudengang bzw. Phasengang: Schwinggeschwindigkeit zu Eingangsspannung **c,f)** Amplitudengang bzw. Phasengang: Schwinggeschwindigkeit zu Eingangsstrom.

## 2.5 Betrieb und Frequenzverhalten von Stehwellenmotoren

Da bei Stehwellenmotoren die Eigenschwingungen ausgenutzt werden sollen, müssen diese Antriebe in der dazugehörigen Resonanzfrequenz betrieben werden. Abbildung 2.17 zeigt das lineare Verhalten von piezoelektrischen Schwingern im Bereich um ihre Resonanz, wie es mit dem Modell aus Abbildung 2.15 beschrieben werden kann. Insbesondere für den Kleinsignalbereich<sup>11</sup> eignet sich dieses Modell sehr gut. Je nach Topologie und Anwendung des Schwingers gelten die linearen Annahmen auch im Betrieb und rechtfertigen somit den Einsatz dieses einfachen Modells.

Die dargestellten Übertragungsfunktionen charakterisieren den Schwinger in seinen Eigenschaften. Im Verlauf der elektrischen Admittanz (Strom/Spannung) sind deutlich Re-

<sup>11</sup>Der Kleinsignalbereich ist ein zahlenmäßig nicht genau abgegrenzter Bereich der (Anregungs-) Amplitude, in dem sich der Schwinger linear verhält. Die quantitative Grenze wird in den verschiedenen Quellen unterschiedlich definiert.

sonanz und Anti-Resonanz zu erkennen. Diese beiden Frequenzen eignen sich prinzipiell für den Betrieb, wie dieses auch an den beiden anderen Übertragungsfunktionen zu erkennen ist. In der Resonanz<sup>12</sup> gibt es eine Geschwindigkeitsüberhöhung bezogen auf die Eingangsspannung. In der Anti-Resonanz gibt es diese Überhöhung bezogen auf den Eingangsstrom. Bei Systemen mit schwacher und mittlerer Dämpfung fallen die Frequenzen der Überhöhungen und die Phasennulldurchgänge zusammen, was jeweils dazu führt, dass der elektromechanische Schwinger aus elektrischer Sicht bei genau dieser Frequenz eine OHMSche Last darstellt. Daher muss beim Betrieb in dieser Frequenz keine Blindleistung zur Verfügung gestellt werden, wodurch auch insgesamt weniger Leistung bereitgestellt werden muss. Folglich ist eine kleinere und günstigere Leistungselektronik ausreichend.

Das Abbildung 2.17 zu Grunde liegende Modell kann nur lineare Lasten abbilden. Dargestellt ist der Einfluss einer zusätzlichen Dämpfung. Wird alternativ eine Steifigkeit als Last eingeführt ergibt es sich, dass sich die gezeigte Kurve als Ganzes nach rechts, also zu höheren Frequenzen hin verschiebt. Unabhängig von diesen Effekten lässt sich festhalten, dass die Resonanzfrequenz eines piezoelektrischen Systems keine Konstante ist. Sie ist von vielen Faktoren abhängig. Dabei gibt es langfristige/dauerhafte Effekte wie zum Beispiel Alterungserscheinungen, Vorspannverluste, Setzungseffekte und Ermüdungserscheinungen. Veränderungen aufgrund dieser Effekte geschehen eher langsam, man kann sie daher auch als quasistatisch bezeichnen. Daneben gibt es auch kurzzeitige Effekte, wie Temperatureinflüsse oder Laständerungen, die zum Teil sehr schnell oder sogar schlagartig auftreten können. Daneben gibt es amplitudenabhängige Material-Nichtlinearitäten, die die Steifigkeit des Schwingers verringern und somit zu einer Verringerung der Resonanzfrequenz führen können. An dieser Stelle soll nicht genauer auf die Nichtlinearitäten der piezoelektrischen Keramik eingegangen werden, dafür sei hier auf die einschlägige Literatur verwiesen, z.B. auf einen Übersichtsartikel von HALL [165].

Alle genannten nichtlinearen Effekte haben eine Auswirkung auf das Verhalten des Schwingers. Ohne genauer auf die Herkunft und Auswirkung der verschiedenen Effekte einzugehen, soll hier an einem klassischen akademischen Beispiel die mögliche Auswirkung der amplitudenabhängigen Effekte auf das Frequenzverhalten und damit auf die Ansteuerung des Schwingers gezeigt werden. Als Beispielsystem soll ein gedämpfter und krafterregter Ein-Massen-Schwinger mit nichtlinearer Feder untersucht werden. Wird dabei angenommen, dass sich die Federsteifigkeit kubisch mit der Amplitude ändert, erhält man einen Schwinger der sich nach MAGNUS UND POPP [115] mit der DUFFING-Differenzialgleichung beschreiben lässt. Mit dieser Gleichung lassen sich sowohl die

---

<sup>12</sup>Die Definition der Resonanzfrequenz ist nicht eindeutig. Dabei kann die elektromechanische Resonanz über ein Betragsmaximum in der Admittanz, über den Phasennulldurchgang oder den maximalen Realteil der Admittanz definiert werden. Das gleiche gilt auch für die Anti-Resonanz wenn anstelle der Admittanz die Impedanz betrachtet wird. Die Definition der mechanischen Resonanzen kann ebenfalls analog vorgenommen werden. Für schwache Dämpfung fallen jeweils alle Resonanzen zusammen auf die gleiche Frequenz. Mit steigender Dämpfung entfernen sich die Frequenzen wobei für lineare Systeme immer gilt, dass die Frequenz des Betragsmaximums kleiner ist als die des maximalen Realteils, die wiederum kleiner ist als die des Phasennulldurchgangs.

versteifenden Effekte – beispielsweise aufgrund von Kontaktvorgängen – als auch die erweichenden Effekte – beispielsweise infolge der Material-Nichtlinearitäten – prinzipiell abbilden.

$$x'' + Dx' + x + \alpha x^3 = x_0 \cos(\eta\tau) \quad (2.5)$$

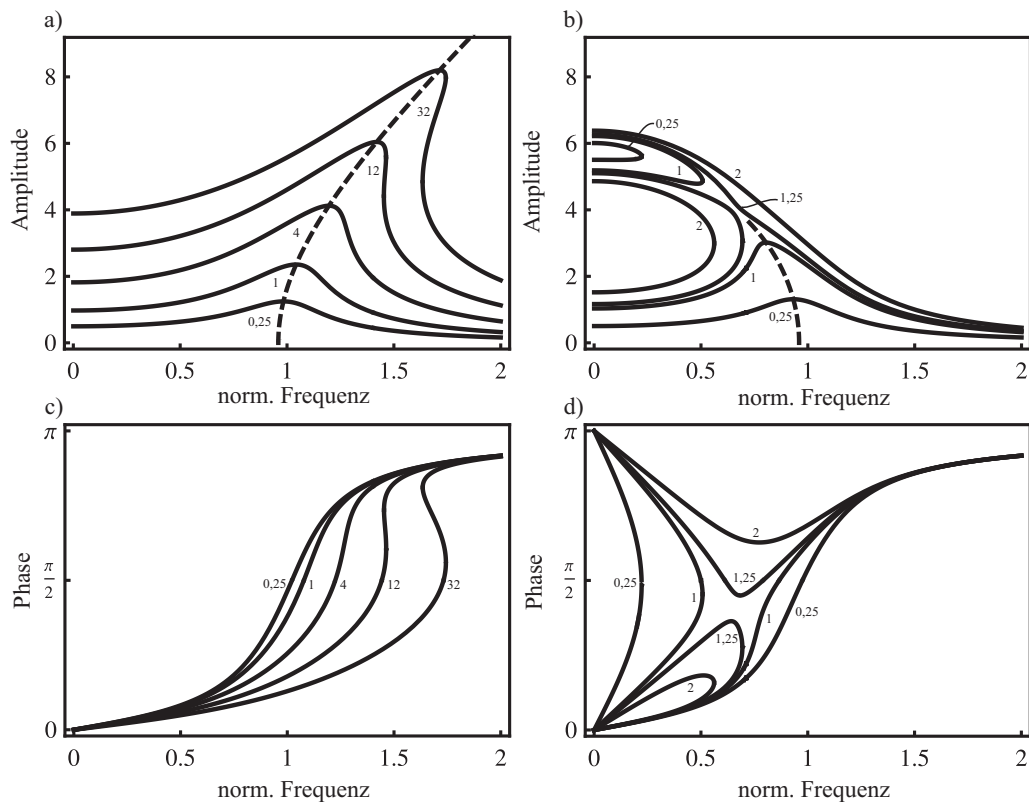
Hierbei ist  $D$  das Dämpfungsmaß,  $\eta$  die auf die ungedämpfte Resonanz normierte Frequenz,  $\tau$  die auf eine Schwingungsperiode in ungedämpfter Resonanz des linearen Systems normierte Zeit und  $\alpha$  die Änderungsrate der Federsteifigkeit; ist sie positiv, so wird die Feder härter mit steigender Amplitude. Weiterhin ist  $x$  die Auslenkung der Masse und  $x_0$  die Erregeramplitude. Löst man die Gleichung näherungsweise mit der harmonischen Balance (ebenfalls nach MAGNUS UND POPP [115]), so ist das Frequenzverhalten beschrieben. In der Abbildung 2.18 sind exemplarische Frequenzverläufe gegeben. Dort ist deutlich zu erkennen, dass bei den nichtlinearen Kennlinien Bereiche vorhanden sind, in denen das Ergebnis mehrdeutig ist. Welche dieser Lösungen sich in der Realität einstellt, hängt von den Anfangsbedingungen und der Stabilität der Lösung ab. Es kann auch passieren, dass das System aufgrund einer Störung von der einen in die andere Lösung springt. Wenn ein solches System im Experiment vermessen<sup>13</sup> werden soll, kommt es zu so genannten *Sprung-Effekten*. Wenn keine äußeren Störungen auftreten, passiert dies bei dem Frequenzschritt, in dem ein Frequenzbereich mit mehreren Lösungen verlassen wird. Weiterhin wird deutlich, dass bei sich versteifenden Systemen die Resonanz zu höheren Frequenzen wandert, wohingegen die Resonanzen der Systeme mit abnehmender Steifigkeit zu niedrigeren Frequenzen tendieren. Auch in den Phasengängen sind das nichtlineare Verhalten und die mehrdeutigen Bereiche deutlich sichtbar.

Abbildung 2.18 zeigt weiterhin den für den Betrieb der Schwinger wichtigen Zusammenhang zwischen Frequenzverhalten und Erregeramplitude. Bei beiden betrachteten Systemen wird die Nichtlinearität sehr deutlich; bei steigender Amplitude fällt das nichtlineare Verhalten des Schwingers stärker ins Gewicht. Insbesondere wenn die Anregeamplitude im Betrieb geändert werden soll, hat dies erhebliche Auswirkungen auf die Ansteuerung. Die gestrichelt in den Amplitudengang eingezeichnete Kurve, stellt das amplitudenabhängige Maximum dar, also die Bahn auf der sich die Resonanzfrequenz mit steigender Anregung bewegt. Diese Kurve wird auch als *Backbone*-Kurve bezeichnet.

Auch wenn dieses Beispiel – insbesondere von den Zahlenwerten her – akademischer Natur ist, macht es deutlich, welche Unwägbarkeiten bei der Ansteuerung zu beachten sind. In jedem Fall ist es einsichtig, dass eine Regelung nötig ist, um einen Schwinger in der Resonanz zu betreiben. Hierzu stehen in der Praxis nach KAUCZOUR [166] mehrere Methoden zur Verfügung: eine Phasenregelung, eine Strommaximumsregelung und die selbsterregte Ansteuerung. Daneben werden insbesondere Labormuster oft auch mit einer festen Frequenz betrieben. Beim Einschalten wird dann ein Frequenzgang gemessen

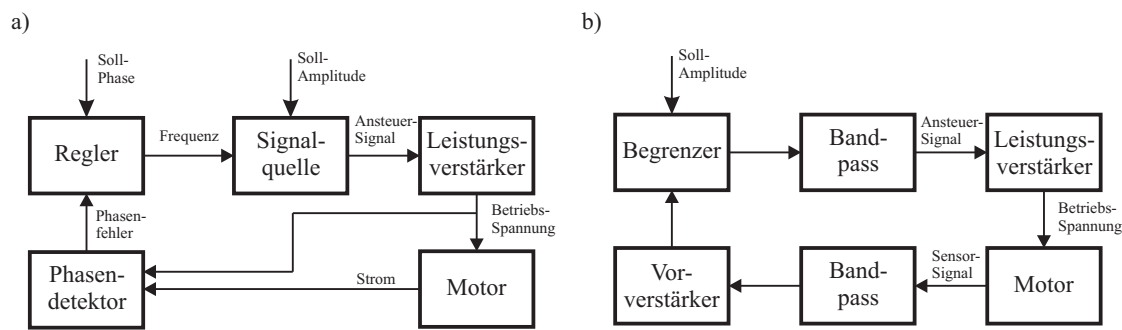
<sup>13</sup>Zur experimentellen Messung wird das System schrittweise im Frequenzbereich durchfahren und bei jeder Frequenz werden die Messwerte aufgezeichnet. Aufgrund des Sprung-Effekts werden bei nichtlinearen Systemen wenigstens zwei Durchläufe gemessen. Einmal wird mit steigender und dann mit fallender Frequenz gemessen, sogenannte *Up- und Down-Sweeps*.





**Abbildung 2.18:** Frequenzverhalten eines nichtlinearen Ein-Massen-Schwingers für verschiedene Erregeramplituden ( $D = 0, 2$ ). Die gestrichelte Linie gibt den Verlauf des Maximums an. **a,c)** Amplitudengang bzw. Phasengang mit kubisch steifer werdender Feder. **b,d)** Amplitudengang bzw. Phasengang mit kubisch weicher werdender Feder.

und daraus die Antriebsfrequenz ermittelt. In der Literatur kommen meistens die Phasenregelung, die überwiegend nach dem aus der Nachrichtentechnik bekannten Prinzip der PLL (*Phase-Locked-Loop*) arbeitet, z.B. VAN DER BRÖCK UND SCHAAF [167] oder BRIOT [168], oder die Selbsterregung zum Einsatz z.B. CHEN ET AL. [169] oder KUSAKABE ET AL. [170, 171]. Im Falle der Phasenregelung wird ein Regelkreis mit einer eigenständig steuerbaren Signalquelle ein Spannungssignal erzeugt, welches dann über einen Leistungsverstärker in den Aktor gespeist wird. Am Aktor wird der Strom gemessen und die Phase zur Anregespannung ermittelt. Diese Phasendifferenz stellt den Regelfehler dar, der dann ausgeglichen wird, vgl. Abbildung 2.19a. Dieser Typ der Regelung ist heute der Stand der Technik und wird in den meisten Fällen zum resonanten Betrieb eingesetzt. Eine solche Phasenregelung hat allerdings Schwierigkeiten, wenn es aufgrund von Dämpfung keinen Phasennulldurchgang mehr gibt, da der Sollwert in der Regel  $0^\circ$  Phasendifferenz ist. In dem Fall kann dann beispielsweise die Strommaximumsregelung genutzt werden, die im einfachsten Fall nach dem *Hill-Climbing*-Prinzip arbeitet. Die Frequenz wird dabei solange schrittweise verändert, bis die Amplitude sinkt, dann wird die Schrittrichtung gewechselt und der Vorgang wiederholt. Daher wandert eine solche Regelung über dem Maximum hin und her. Beide Regler sind ungeeignet für den Fall überhängender Frequenzkennlinien, da durch die *Sprung-Effekte* ein unstetiges Verhalten



**Abbildung 2.19:** a) Blockschaltbild eines Phasenregelkreises. b) Blockschaltbild einer selbsterregten Ansteuerung.

der Regelstrecke vorliegt. Daher könnte das Maximum nur von einer bestimmten Seite aus angefahren werden. Häufig liegt der Phasennulldurchgang im instabilen Ast und ist somit von der PLL nicht zu erreichen.

Bei dem in Abbildung 2.19b dargestellten selbsterregten Schwingkreis<sup>14</sup> handelt es sich um eine Technik, die in den 1960er und 1970er Jahren die Standardregelung in der Leistungs-Ultraschalltechnik war. Aus verschiedenen Gründen haben sich in diesem Bereich jedoch andere Regelkonzepte, insbesondere die PLL, durchgesetzt. Aber auch heute haben die selbsterregten Schwingkreise noch eine große technische Bedeutung, da sie in den meisten Taktgebern (ein in Resonanz schwingender piezoelektrischer Quarz) für elektronische Geräte verwendet werden. Dazu wird ein geschlossener Regelkreis mit einer positiven Rückkopplung aufgebaut, der ohne die integrierte Begrenzung instabil ist. Durch diesen Aufbau wird der Schwinger selbst zum Taktgeber und hält sich selbst in der Resonanz. Durch die integrierte Begrenzung sind die Ansteuersignale nicht mehr harmonisch. Ein besonders hervorzuhebender Vorteil dieser Regelung ist, dass sich auch bei nichtlinearen Schwingern mit Sprungeffekten die Resonanz halten kann, also der *Backbone*-Kurve folgen kann. Allerdings ist die Regelung recht empfindlich gegen äußere Störungen. Der Einschaltprozess eines selbsterregten Schwingers ist ziemlich undefiniert. Der transiente Einschaltvorgang stößt den Schwinger an und dieser schwingt dann in eine Eigenschwingungsform ein. Damit die nicht zufällig die falsche, also ungewollte Eigenschwingungsform getroffen wird, kann die Bandbreite über die optionalen Bandpässe begrenzt werden.

Die vorgestellten Regelungen dienen nur dem Betrieb des Schwingers in Resonanz. Soll noch eine Geschwindigkeits- oder Lageregelung durchgeführt werden, wird ein zusätzlicher überlagerter Regelkreis benötigt.

<sup>14</sup>Ein einfaches allgemein bekanntes Beispiel für einen selbsterregten Schwingkreis ist eine Rückkopplung in der Audiotechnik, z.B. wenn eine E-Gitarre direkt vor dem Lautsprecher angeschlagen wird.

## 3 Aufgabenstellung

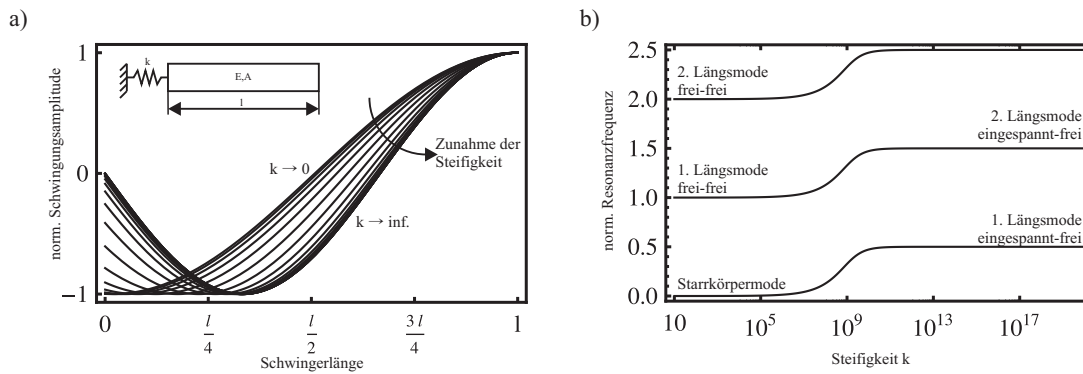
Aus dem derzeitigen Stand der Technik lassen sich direkt einige offene Fragen ablesen. Während es viele funktionierende und teilweise auch kommerzialisierte Bauformen von Stehwellenantrieben gibt, sind noch viele grundlegende Fragen zum Antriebsprinzip ungeklärt. Insbesondere fehlt bis heute eine detaillierte Erklärung zu Kinematik und Kinetik des Mikro-Stoß-Kontaktes

### 3.1 Analyse des Stands der Technik

Im vorigen Kapitel wurde aufgezeigt, dass die bekannten experimentellen Untersuchungen fast ausschließlich auf einer makroskopischen Zeitskala durchgeführt wurden. Die Bewegungen des Kontaktpunktes wurden nicht auf derselben Zeitskala wie die Anreignale aufgelöst. Die weitverbreiteten Messungen der Motorkennlinien (Drehzahl-Drehmoment oder Geschwindigkeit-Kraft) eignen sich nicht zur Validierung der Modellvorstellungen mit zeitlich aufgelösten Kontaktvorgängen. Außer der Arbeit von SASHIDA UND KENJO [5] sind aus der vorliegenden Literatur keine experimentellen Untersuchungen zur Ermittlung der Kontaktpunkttrajektorie bekannt. Dies ist zum größten Teil dem Umstand geschuldet, dass solche Messungen sehr aufwendig sind. Allerdings würde das Wissen über die Bewegungsabläufe während des Antriebsprozesses wichtige Rückschlüsse auf die notwendige Modellierungstiefe zulassen. Vor allem wäre es möglich, Modelle auf Plausibilität zu prüfen und zu validieren.

Für eine erste Beschreibung eines Stehwellenantriebs ist ein Modell geringer Komplexität sinnvoll. Dazu wurden in den Kapiteln 2.4.3 und 2.4.4 die verschiedenen Ansätze vorgestellt. Diese sind zumeist erfolgsversprechend, beziehungsweise wurden und werden erfolgreich eingesetzt. Allerdings wurde noch kein Modell diskutiert, mit dem die verschiedenen vorgestellten Antriebskonzepte mit einem einheitlichen Ansatz abgebildet werden können. Wenn ein solches Modell konzentriert auf den Reibungsantriebsprozess implementiert werden könnte, würden sich Möglichkeiten zur weiteren Integration in komplexere Modelle, die nicht nur auf einen einzigen speziellen Antriebstyp begrenzt sind, auf tun.

Die Rückwirkung des Kontaktprozesses auf das schwingende System stellt eine Frage dar, die bisher unbeantwortet geblieben ist. Hierbei ist insbesondere eine mögliche Verände-



**Abbildung 3.1:** Einfluss einer Federsteifigkeit am Rand auf die **a)** Erste frei-freie Längsschwingungsform eines Stabes und **b)** dessen ersten drei Resonanzfrequenzen.

zung der Schwingungsform zu nennen. Im Folgenden soll die Relevanz dieses Effektes an einem einfachen Beispiel demonstriert werden. Dazu wird ein einseitig elastisch gelagerter Stab betrachtet. Für den Anfang genügt es einen uniformen Stab zu untersuchen. Der Kontakt des Stabes an der Einspannung wird hierbei als lineare Feder modelliert. Die Lösung dieses einfachen Falls kann in Standardtabellenwerken wie z.B. BLEVINS [172] nachgelesen werden. Wenn die Steifigkeit der Feder über einen großen Bereich variiert wird, stellen sich für die Längsrichtung Schwingungsformen zwischen den Extremfällen frei-frei und frei-ingespannt ein. Die Schwingungsform verschiebt sich soweit, dass sie im steif eingespannten Fall einen Schwingungsknoten am Stabende aufweist und somit einen Knoten mehr als im freien Fall hat. Die Verläufe sind in Abbildung 3.1 dargestellt. Daneben verschiebt sich auch die Resonanzfrequenz beträchtlich. Auffällig ist, dass sich die im frei-freien Fall vorhandene Starrkörperverschiebung zu einer Schwingungsform wandelt. Für die Auslegung von Ultraschallschwingern ist die Lage des Schwingungsknotens von Interesse, da hier eine effektive Möglichkeit zur Lagerung besteht. Wie die Abbildung deutlich zeigt, wandert die Lage der Schwingungsknoten bei einer Veränderung der Kontaktsteifigkeit erheblich.

Das optimale Antriebsmodell könnte einen piezoelektrischen Stehwellenantrieb mit all seinen geometrischen Feinheiten, der elektromechanischen Kopplung und dem Stator-Rotor-Kontakt beschreiben und effizient berechnen. Allerdings ist noch kein entsprechendes Modell bekannt. Den wenigen ganzheitlichen FEM-Ansätzen zum Trotz wird weiterhin in den allermeisten Fällen aufgrund der hohen Rechenzeiten die Auslegung und der Entwurf von piezoelektrischen Motoren mit Hilfe der freien, unbelasteten Schwingungsformen durchgeführt. Dabei werden viele wichtige Effekte (Kontaktvorgänge, Änderung der Schwingungsform, ...) vernachlässigt, auf die der eigentliche Antriebsprozess zurückzuführen ist. Dabei wäre es wünschenswert die piezoelektrischen Antriebe intensiv am Modell zu untersuchen, um Auslegungsrichtlinien abzuleiten oder aber um die Geometrie- und Materialparameter modellbasiert zu optimieren. Hierzu wäre es notwendig, wirtschaftlich effektiv den Motor mit den verschiedensten Parametern zu berechnen. Ein Weg dahin wäre die direkte (zeitsparende) Berechnung des eingeschwingenen

Zustandes des Antriebs, beispielsweise mit dem Schießverfahren, einem Anstückelverfahren oder mit der höheren harmonischen Balance, bei der in einer Abwandlung nach CAMERON UND GRIFFIN [173] der lineare Teil des Problems im Frequenzbereich und der nichtlineare Teil im Zeitbereich gelöst werden kann. Daneben kann auch die Reduktion der Freiheitsgrade entscheidend zur schnelleren Lösung des Problems beitragen. Verschiedene mathematische Verfahren machen es möglich, unter bestimmten Voraussetzungen, die Anzahl der Freiheitsgrade sehr stark zu reduzieren. Das bekannteste Verfahren ist hier die modale Reduktion, bei der die Systemgleichungen auf die wesentlichen Schwingungsmoden und damit die Ordnung des Systems signifikant reduziert werden können. Allerdings hat insbesondere dieses Verfahren den wesentlichen Nachteil, dass alle Bewegungen aus den freien Schwingungsmoden superponiert werden, daher können veränderte Randbedingungen nicht vollständig mit berücksichtigt werden. BRÖKELMANN [174] kombiniert in seiner Arbeit frei-freie und frei-feste Moden. Weiterhin können Modelle mit elektrischen Freiheitsgraden nicht ohne gesonderte Behandlung modal reduziert werden. Allerdings existieren weitere Reduktionsverfahren beispielsweise nach HURTY [175] oder nach CRAIG UND BAMPTON [176] die sehr erfolgsversprechend für die Abbildung von piezoelektrischen Stehwellenantrieben erscheinen. Eine grundsätzliche Herausforderung bei der Umsetzung der beschriebenen Ansätze stellt die Überprüfung der berechneten Daten dar. Um einen sinnvollen Vergleich anzustellen, wäre es wünschenswert, ein Referenzmodell das im Zeitbereich berechnet werden kann, zu nutzen. Grundsätzlich ist es möglich, ein solches dreidimensional in der FEM nachzubilden, allerdings haben solche Modelle das Problem, dass die notwendige Rechenzeit sehr hoch ist. Ein anderer Ansatz, der zu einer vergleichsweise geringen Anzahl an Freiheitsgraden führt, ist die Verwendung von Elementen geringer Dimension. So lässt sich beispielsweise ein typischer Ultraschallschwinger in guter Näherung mit Stäben nachbilden. Da auch viele Ultraschallantriebe in der Form an typische Ultraschallschwinger erinnern, lässt dies den Schluss zu, dass eine Modellierung auf Basis einfacher mechanischer Elemente zulässig sein kann. Ein Finite-Elemente-Modell, das eindimensionale<sup>1</sup> Elemente nutzt, die Längs- und Biegebewegungen abbilden können, scheint vielversprechend zu sein. Mit einem solchen Modell könnte ein guter Kompromiss zwischen Recheneffizienz und Detailtreue gefunden werden, um dem optimalen Modell einen Schritt näher zu kommen.

## 3.2 Ziele der Arbeit

Aus der obigen Analyse und den andiskutierten Lösungskonzepten werden die Ziele für die vorliegende Arbeit abgeleitet. Im Zentrum der Untersuchungen soll die Funktionsweise von Stehwellenantrieben stehen. Dabei soll vor allem der Antriebsvorgang untersucht und modelltechnisch beschrieben werden. Als Ergebnis der Arbeit soll das Handwerkszeug zur Analyse und Auslegung von Stehwellenantrieben bereitgestellt werden.

---

<sup>1</sup>Ein eindimensionales Element ist ein Element, dass sich entlang einer Dimension erstreckt. Daher ist zur Beschreibung der Ruhelage eines Knotens genau eine Koordinate notwendig.

Weiterhin soll eine Modellbasis geschaffen werden, auf der aufbauend effizientere Werkzeuge für die modellbasierte Optimierung von Stehwellenantrieben erstellt werden können. Insbesondere sollen die erarbeiteten Modelle als Referenzlösung für die nächsten Modellgenerationen zum Einsatz kommen können.

Im Detail sollen in den experimentellen Untersuchungen die Bewegungen des Kontaktpunktes ermittelt und auf ihre Parameterabhängigkeit untersucht werden. Die Experimente sollen Aufschluss über die mikroskopischen Zeitverläufe der wichtigen Größen, wie zum Beispiel der Bewegung des Kontaktpunktes und den elektrischen Klemmgrößen, geben.

Der Modellierung fällt in dieser Arbeit eine große Bedeutung zu. Zunächst soll ein generisches Minimalmodell entworfen und implementiert werden, dieses Modell soll es ermöglichen, die verschiedenen reibungsbasierten Antriebe zu beschreiben. Hierbei soll insbesondere auf eine effiziente Umsetzung Wert gelegt werden, da es zur Durchführung von ersten Parameterstudien eingesetzt werden soll, wobei es auf möglichst kurze Rechenzeiten ankommt. Weiterhin soll das Minimalmodell eingesetzt werden, um erste Rückschlüsse auf Geometrieinflüsse aufzuzeigen. Der zweite Modellierungsabschnitt soll sich mit der Rückwirkung des Kontakts insbesondere auf die Schwingungsform befassen. Hierfür soll ein Mehr-Massen-Modell genutzt werden. Die Kontaktmodellierung soll dabei auf die Erfahrungen mit dem Minimalmodell aufbauen. Das Modell soll genutzt werden, um die Einflüsse wesentlicher Parameter aufzuzeigen. In diesem Zusammenhang soll auch eine besonders effektive Berechnungsmethode, die autoresonante Berechnung des Systems, untersucht werden. Weiterhin sollen in diesem Abschnitt experimentelle Untersuchungen zu den mit dem Modell diskutierten Fragestellungen durchgeführt werden. Im finalen Schritt soll ein ganzheitliches Modell entworfen werden, dabei soll die Methode der Finiten Elemente zur Anwendung kommen. Im Fokus steht hierbei wieder ein möglichst schlankes Modell, daher soll auf die Nutzung von Zwei-Knoten-Elementen (Balken und Stäbe) gesetzt werden. Um eine hohe Abbildungsgüte zu erreichen, werden bei der Implementierung auch Querkontraktions- und Schubspannungseffekte berücksichtigt. Weiterhin soll auch die elektromechanische Kopplung in einem Zwei-Knoten-Element implementiert werden. Auch der Stator-Rotor-Kontakt soll über eine zweckdienliche Einbindung des Minimalmodells integriert werden. Da selbst weit entwickelte kommerzielle Software wie beispielsweise ANSYS diese Anforderungen nicht erfüllt, soll das Modell in MATLAB umgesetzt werden.

Zusammenfassend ergeben sich die folgenden Fragestellungen:

- Wie sieht die Bewegung des statorseitigen Kontaktpunktes aus?
- Wie sieht ein Minimalmodell für den Antriebsprozess aus?
- Wie relevant sind die Veränderungen der Schwingungsform?
- Wie wird ein Stehwellenantrieb unter Berücksichtigung von Geometrie-, Material- und Lastparametern recheneffizient beschrieben?

### 3.3 Lösungsweg

Für die im vorangegangenen Abschnitt herausgearbeitete Aufgabenstellung wird im Folgenden der verfolgte Lösungsweg aufgezeigt. Dazu wird dieser in Arbeitspakete untergliedert:

**Experimentelle Untersuchung der Stößelbewegung** Zur Erhöhung des Verständnisses, wird die Stößelbewegung eines *Shaking-Beam*-Motors experimentell untersucht. Der Einfluss von Parametern wie Anpresskraft, Frequenz, Phase zwischen den Anregesignalen sowie die Höhe der Anregespannung wird ermittelt. Dafür wird ein Versuchsstand entworfen und aufgebaut, der zur Messung der Bewegung ein 3D-Laservibrometer nutzt.

**Erstellen eines generischen Motormodells** Um eine möglichst einfach nachvollziehbare und effektiv zu simulierende Beschreibung des Antriebsprinzips zu haben, wird ein auf wenige Parameter beschränktes Modell, also ein Minimalmodell, aufgestellt. Dabei wird zunächst ein Differentialgleichungsmodell erstellt. Mit der zusätzlichen Vorstellung eines masselosen Kontaktpunktes wird das Modell noch weiter auf ein algebraisches Modell vereinfacht, so dass die Berechnungsgeschwindigkeit gesteigert werden kann. Anhand des Minimalmodells werden erste Rückschlüsse für die beispielhaft untersuchte Statorgeometrie gezogen.

**Untersuchung des Einflusses der Stoßkontaktvorgänge auf die Schwingungsform**

Um den Einfluss des Kontakts auf die Eigenschaften des Stators nachzuweisen, wird zweigleisig vorgegangen. Dies wird beispielhaft an einem Ultraschall-Längsschwinger geschehen. Zunächst wird der Schwinger mit einem diskreten Mehr-Massen-Modell nachgebildet. Daneben soll ein experimenteller Aufbau entworfen werden, der geeignet ist, das Modell zu validieren. Dabei wird sowohl für die Simulation als auch für den experimentellen Betrieb ein Verfahren gefunden, um das System in Resonanz zu betreiben.

**Integration des generischen Motormodells in ein FE-Modell** Zur besseren Auslegung und Analyse zukünftiger Motoren wird das generische Motormodell in einen FEM Programmcode integriert und untersucht. Um ein Modell mit einer kleinen Anzahl von Freiheitsgraden zu erreichen, werden eindimensionale Elemente verwendet. Damit soll ein effektiver Algorithmus zur Integration des Kontaktvorgangs implementiert und untersucht werden, um eine möglichst kurze Rechenzeit zu erreichen.

Alle Untersuchungen, die sich auf einen konkreten Stehwellenantrieb beziehen, werden an einem am Institut für Dynamik und Schwingungen aufgebauten Motorprototypen vom *Shaking-Beam*-Typ durchgeführt. Insbesondere für den experimentellen Teil wird die Motorgeometrie zur besseren Messbarkeit adaptiert. Eine Optimierung hinsichtlich der besten Leistungsmerkmale wird nicht stattfinden.

## 4 Experimentelle Untersuchungen an einem Schwingungsantrieb

Die Recherchen zum Stand der Technik haben gezeigt, dass es nur sehr wenige Untersuchungen zum Bewegungsverhalten der Stößelspitze eines Mikrostoßmotors gibt. Jedoch ist gerade dieses Verhalten wesentlich für das Verständnis des Antriebsprozesses. Um nicht gleich mit einem stark abstrahierten Modell zu starten, ohne eine genaue Idee zu haben wie das Ergebnis aussehen könnte, soll zunächst mit der experimentellen Untersuchung an dem Prototyp eines *Shaking-Beam-Motors* begonnen werden. Zunächst wird der in dieser Arbeit entstandene Versuchsaufbau erläutert, dem schließt sich eine ausführliche Erläuterung der Versuchsdurchführung und der Methode zur Auswertung der gewonnenen Daten an. Die Auswertung schließt das Kapitel ab, hier werden Rückschlüsse auf die Bewegung des Kontaktpunktes gezogen.

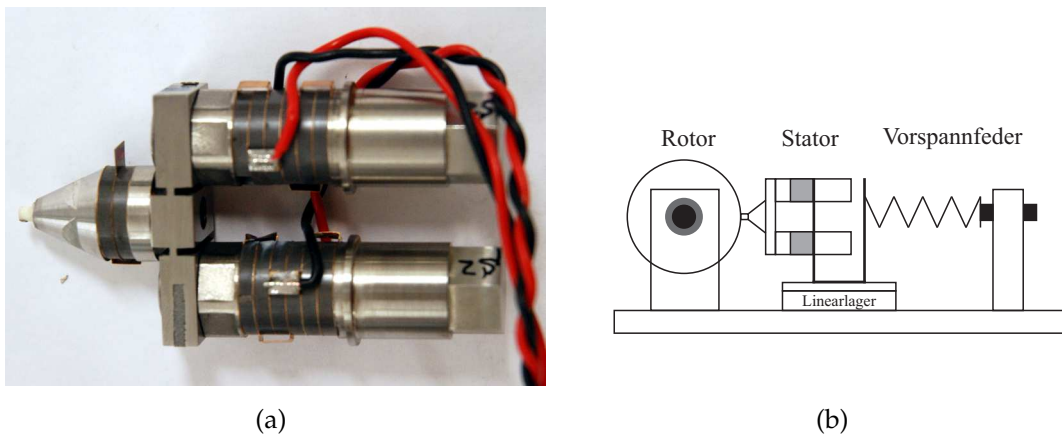
### 4.1 Versuchsaufbau

In der Abbildung 4.1a ist der im untersuchten Motor verwendete Schwinger dargestellt. Die funktionalen Einheiten sind die zwei vorgespannten Einzelschwinger, nach der Bauweise von LANGEVIN-Transducern. Diese für Ultraschallschwinger typische Bauform besteht aus einem Piezostapel, der über einen Gewindebolzen vorgespannt ist. Die beiden Endstücke bestehen aus Stahl. In dieser konkreten Ausführung ist der Durchmesser aller Bauteile in etwa gleich. Dadurch und durch die ähnlichen Wellengeschwindigkeiten der verwendeten Materialien sind die Schwingungsamplituden an den freien Einzelschwingern an beiden Enden ungefähr gleich groß.

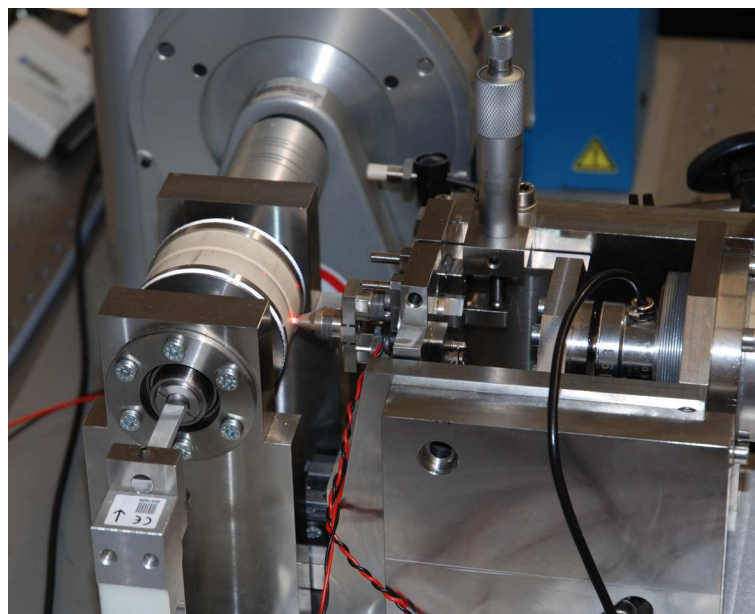
Die Einzelschwinger sind über eine Kopfkinematik miteinander verbunden, welche die Längsbewegungen der Einzelschwinger in eine elliptische Bewegung des Stößels übersetzt. Die Form der Kopfkinematik ist so angepasst, dass ein freier Sichtkegel auf den Stößel entsteht. Dies ist notwendig, um die Stößelbewegung mit einem dreidimensionalen Laservibrometer zu messen.

Der Schwinger, der in diesem Aufbau gleichzeitig der Stator ist, wird zusammen mit dem angetriebenen Element, dem Rotor, zu einem Motor. In diesem Aufbau besteht der Rotor aus einer, in einem rotatorischen Prüfstand (vgl. Abb. 4.1b und 4.2) verbauten, Keramikwelle. Der Schwinger ist in einer aufwändigen Linearführung gelagert, die eine genaue Ausrichtung in allen relevanten Raumrichtungen erlaubt. Die statische Anpresskraft wird





**Abbildung 4.1:** a) Darstellung des untersuchten Stators. b) Schematische Darstellung des Prüfstands zur Untersuchung des Motors.



**Abbildung 4.2:** Fotografie des Prüfstandes

über die Vorspannung einer weichen Feder realisiert, um Schwankungen in der Kraft zu minimieren. Die Abtriebswelle ist mit einer Bremse, einem Drehmomentmessgerät und einem Drehzahlmesser verbunden. Zusätzlich lassen sich die Kraft der Vorspannfeder (nicht zu verwechseln mit der Vorspannung der piezoelektrischen Elemente im Einzelschwinger) sowie eine möglicherweise erzeugte, aber nicht erwünschte, Querkraft messen.

An dieser Stelle ist es sinnvoll, einheitliche Bezeichnungen für die Richtungen am Motor zu definieren. Dabei ist die *Normalrichtung*, die Richtung in Richtung der Vorspannfeder, bzw. die Hauptkontaktrichtung. Die *Tangentialrichtung* ist die Hochachse. Die Nutzkraft des Schwingers wirkt ebenfalls in dieser Richtung. Die dritte Raumrichtung, die *Querrichtung* steht senkrecht auf den anderen beiden, eine Kraftwirkung des Schwingers in diese Richtung ist nicht gewünscht.

Zur Ansteuerung der piezoelektrischen Aktoren dienen Breitband-Verstärker und ein Mehrkanalfunktionsgenerator, die mit einem LABVIEW-Programm über einen Computer angesteuert werden. Die Aufzeichnung der Daten ist mit zwei Vier-Kanal-Speicheroszilloskopen und einer Vier-Kanal-Messkarte realisiert.

## 4.2 Versuchsdurchführung

In den experimentellen Untersuchungen soll insbesondere die Bewegung des Stößels analysiert werden. Dazu wird ein 3D-Laservibrometer so installiert, dass die drei Messstrahlen von oben auf den der Keramikwelle zugewandtem Rand des Stößels gerichtet sind. Die in den Strahlrichtungen gemessenen Geschwindigkeiten, werden automatisch vom Messverstärker in ein kartesisches Koordinatensystem transformiert. Um die genaue Drehzahl der angetriebenen Welle zu ermitteln, wird ein weiteres Laservibrometer für eine *In-Plane*-<sup>1</sup>Geschwindigkeitsmessung eingesetzt. Diese vier Messgrößen werden mit einem der zwei Speicheroszilloskope aufgezeichnet, die mit bis zu 2,5 GS/s eine hohe zeitliche Auflösung und gleichzeitig eine hohe Speicherkapazität (max. 10 MS/Kanal) bieten. Weiterhin werden die elektrischen Größen, Strom und Spannung, an den Klemmen der beiden Einzelschwinger mit dem anderen Speicheroszilloskop aufgezeichnet. Die Kraft der Vorspannfeder, ein zweites Drehzahlsignal (gemessen in der Bremse) und das Drehmoment an der Bremse wird mit der Vier-Kanal-Messkarte aufgezeichnet, allerdings mit einer deutlich geringeren Abtastrate (max. 10 Ms/s).

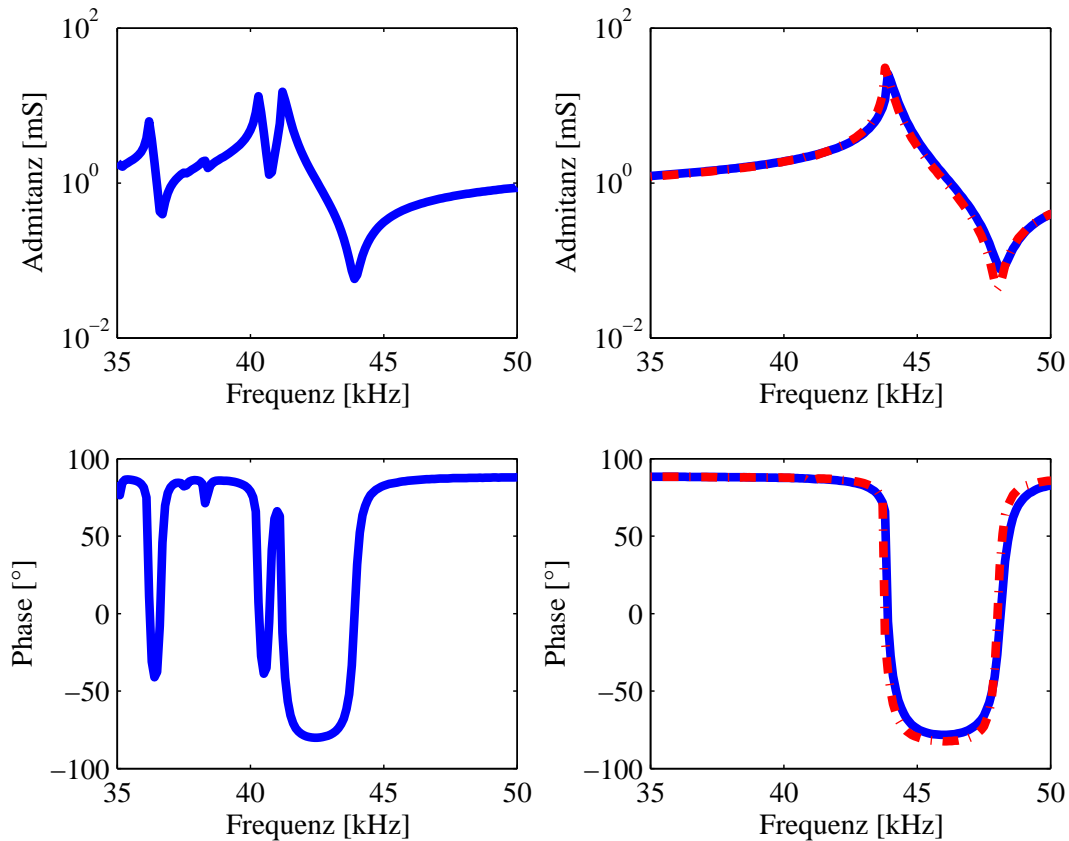
### 4.2.1 Versuchsplanung

In den folgenden Untersuchungen werden verschiedene Parameter variiert, um deren Einfluss auf die Bewegung der Stößelspitze zu evaluieren. Es werden die Parameter Betriebsfrequenz, Spannungsamplitude, Phase zwischen den Anregespannungen der beiden Einzelschwinger und Vorspannkraft betrachtet. Da der vorhandene Motor aufgrund des sehr weit vorstehenden Stößels, nur für kleinste Drehmomente bzw. Kräfte geeignet ist, ist die Bremskraft nicht variiert und somit immer die Leerlaufgeschwindigkeit aufgezeichnet worden. Eine deutlich kürzere Stößelgeometrie ist aufgrund des benötigten Platzes für die Laserstrahlen des 3D-Laservibrometers nicht möglich.

Um ein möglichst gutes Bild des Einflusses der einzelnen Parameter zu gewinnen, wird für die Versuche immer nur ein Parameter verändert. Selbstverständlich sind die Parameterbereiche in denen der Motor die Welle antreiben kann am interessantesten, daher ist die Schrittweite der Parametervariation in diesen Bereichen verkleinert. Dazu wurde wie

---

<sup>1</sup>Messung auf einer ebenen Fläche in der Richtung der Fläche.



**Abbildung 4.3:** Frequenzantwort eines frei-frei gelagerten Stators: **Links)** Zusammengebauter Motor mit Kopfkkinematik. **Rechts)** Antwort der individuellen Einzelschwinger.

folgt vorgegangen:

1. Festlegen der Phase und der Amplitude zwischen den beiden Einzelschwingern.
2. Festlegen der Federvorspannkraft auf 10 N oder 30 N.
3. Variation der Betriebsfrequenz.
4. Mit der Frequenz, bei der die größte Drehzahl erreicht wurde, wird dann zusätzlich die Federvorspannkraft in kleineren Schritten variiert.
5. Bei derselben Frequenz wird die Spannungsamplitude variiert.

Da die Resonanzfrequenz der ersten Längsschwingung der Einzelschwinger etwa bei 40 kHz liegt, soll die Betriebsfrequenz, die in jeder einzelnen Untersuchung konstant gehalten wird, in dem Bereich von 38 kHz bis 42 kHz variiert werden. Die bei den meisten Versuchen eingesetzten Verstärker haben eine maximale Ausgangsspannung von  $100 V_{\text{RMS}}$ . Da eine hohe Spannung zu größeren Bewegungsamplituden führt, wird in den Versuchen immer mit dieser Maximalspannung begonnen.

Die Funktionsweise des verwendeten Motors vom *Shaking-Beam*-Typ ist schon im Ka-

pitel 2.2 beschrieben. In der Idealvorstellung haben beide Einzelschwinger die gleiche Resonanzfrequenz, und koppeln ohne Rückwirkung aufeinander in die Kopfkinematik ein. In der Realität gibt es aber keine getrennten Resonanzfrequenzen der Einzelschwinger (nach deren Montage zum Schwinger), sondern nur noch Resonanzfrequenzen des gesamten Schwingers, da die Kopplung zwischen Kopfkinematik und Einzelschwinger trotz der beiden, vergleichsweise weichen, Festkörpergelenke hinreichend steif ist. Ein weiteres Problem liegt im Prototyp-Status der Einzelschwinger. Sie sind in Handarbeit aufgebaute Einzelstücke, was dazu führt, dass ihre elektromechanischen Eigenschaften nur ähnlich, aber nicht gleich sind. Die Frequenzgänge der zwei Einzelschwinger sind in Abbildung 4.3 dargestellt. Nach der Verbindung mit der Kopfkinematik ändert sich das Verhalten grundlegend, weitere Resonanzen werden sichtbar, aber jede einzelne Resonanzüberhöhung für sich ist kleiner als bei den Einzelschwingern.

Weiter verändert sich die lokale Kontaktgeometrie ständig, aufgrund von Rotorbewegung und Verschleiß. Auch wenn der Prüfstand schon mit sehr hoher Präzision gefertigt wurde, gibt es kleine Ungenauigkeiten im Rundlauf, die sich insbesondere beim Anfahren bemerkbar machen können. Auch wenn der Anfahrvorgang hier nicht speziell untersucht wird, kann dieser Effekt eine Auswirkung auf das Ergebnis haben. Im Speziellen kann es vorkommen, dass beim schrittweise Durchlaufen des Parameterbereichs eine ungünstige Lage der Welle keinen Antriebsprozess zulässt.

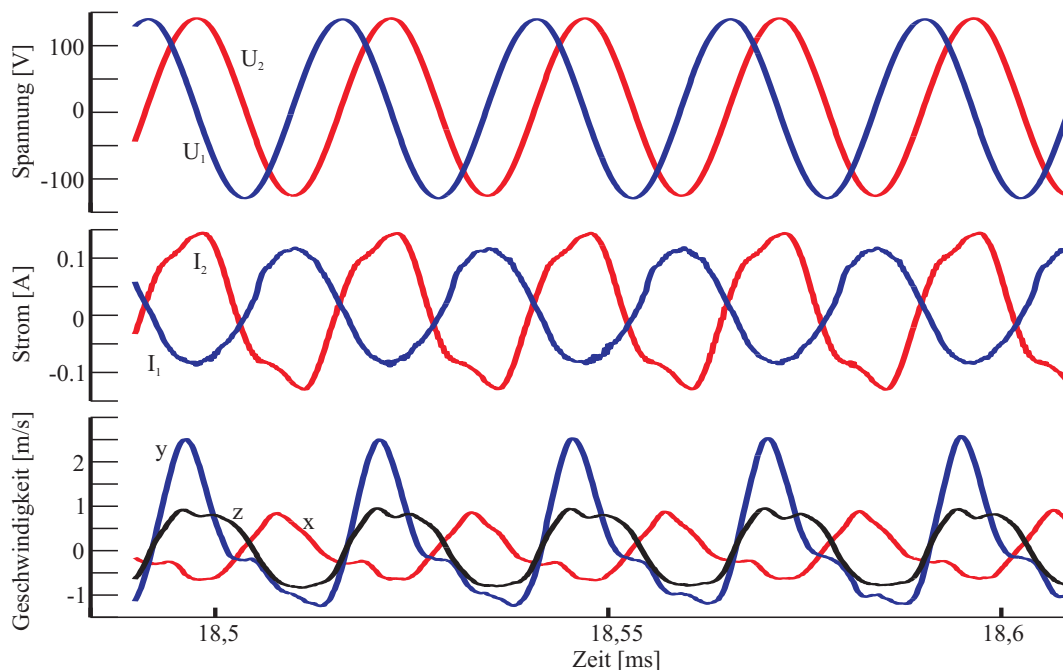
Zusammenfassend soll an dieser Stelle schon einmal festgestellt werden, dass trotz all der genannten Einflüsse auf das Ergebnis die Untersuchung ihren eigentlichen Zweck, zu zeigen, wie der Antriebseffekt funktioniert, und zu beschreiben, wie sich der Stößel bewegt, gut erfüllt.

## 4.2.2 Messdatenanalyse

Um sicherzustellen, dass die Messungen einen weitgehend eingeschwungenen Zustand widerspiegeln, betrug die Aufzeichnungsdauer zumeist 2 Sekunden, ein beispielhafter Signalausschnitt<sup>2</sup> der elektrischen und mechanischen Größen, Strom, Spannung und Geschwindigkeit, ist in Abbildung 4.4 gezeigt. Um die Konstanz der Signale über die gesamte Messdauer aufzuzeigen, ist eine Kurzzeit-FOURIER-Transformation durchgeführt worden. Um ein möglichst genaues Ergebnis zu erzielen und gleichzeitig den Rechenaufwand klein zu halten, sind die Daten wie folgt verarbeitet worden: Da durch die hohe Abtastrate bedingt, die Datenmenge sehr groß ist, lässt sie sich nicht effektiv als Ganzes bearbeiten. Es wird davon ausgegangen, dass sich die Messung wenn überhaupt nur langsam über der Zeit ändert. Dadurch ist es ausreichend nur jeden n-ten Ausschnitt zu untersuchen. Um es bei der Auswertung zu ermöglichen, auch niederfrequente Anteile zu

---

<sup>2</sup>Im hier gezeigten Zeitsignal ist zu erkennen, dass die Anregespannungen  $90^\circ$  Phasenversatz haben. Dagegen ist in dem ebenfalls gemessenen Stromsignalen ein viel größerer Phasenunterschied festzustellen. Dies ist darauf zurückzuführen, dass das Übertragungsverhalten der beiden Einzelschwinger nicht identisch ist.



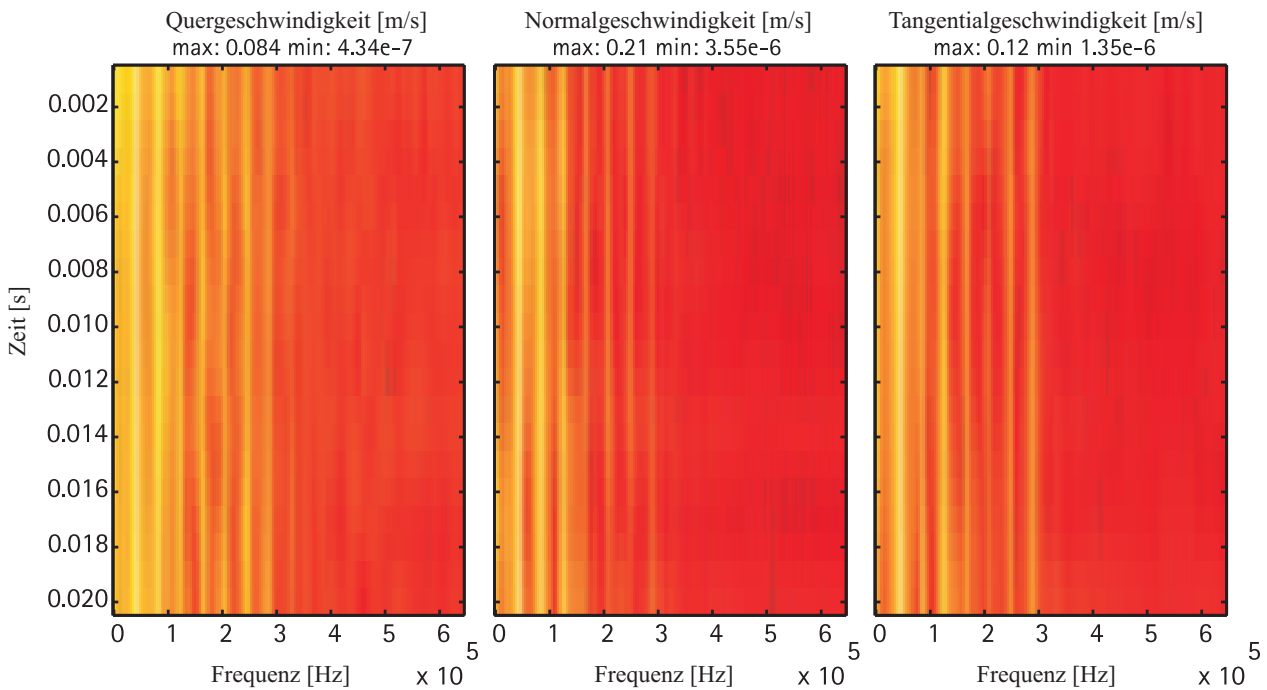
**Abbildung 4.4:** Ausschnitt aus den Zeitsignalen einer Messung

erkennen, wird immer ein Abschnitt der Länge von 10 Anregeperioden ausgewertet. Für die Genauigkeit ist es wichtig, zu gewährleisten, dass die bekannte Anregefrequenz eine Frequenzstützstelle der durchzuführenden FFT<sup>3</sup> ist. Deshalb muss der Signalabschnitt auf eine neue Zeitskala transformiert werden. Diese Transformation hat den positiven Nebeneffekt, dass die Anzahl der auszuwertenden Datenpunkte erheblich reduziert werden kann, ohne dass die Genauigkeit für die relevanten Frequenzanteile signifikant reduziert wird. Dieses *Resampling* wird für jeden einzelnen Abschnitt wiederholt. Damit können die Daten visualisiert werden, siehe beispielhaft Abbildung 4.5. Hier ist die Zeit auf der Y-Achse aufgetragen, die Frequenz auf der X-Achse und die Beträge sind farblich codiert. In diesem Diagramm ist deutlich zu erkennen, dass sich über den untersuchten Zeitraum weder die Frequenzanteile noch deren Amplituden signifikant ändern. Daher lässt sich darauf schließen, dass der Motor in dem gesamten aufgenommenen Zeitraum in einem weitgehend eingeschwungenen Zustand war.

Die in Abbildung 4.5 exemplarisch gezeigte Messung gibt ein für die durchgeführten Messungen typisches Verhalten wieder. In den Geschwindigkeitsmessungen mit dem Laservibrometer sind deutlich höherfrequente Anteile zu erkennen, die durch den Kontaktprozess zwischen der angetriebenen Welle und dem Stößel hervorgerufen werden. Diese höherfrequenten Anteile, treten gleichermaßen in allen drei Messrichtungen auf. Im – hier nicht gezeigten – Fall freier Schwingungen ist ausschließlich die Anregefrequenz sichtbar.

Die wichtigste Information aus den Messungen sind die Bewegungstrajektorien an der Stößelspitze. Dazu müssen die aufgenommenen Geschwindigkeitsverläufe integriert werden. Bevor dies jedoch gemacht wird, ist es zweckdienlich das Geschwindigkeitssignal

<sup>3</sup>Fast-FOURIER-Transformation

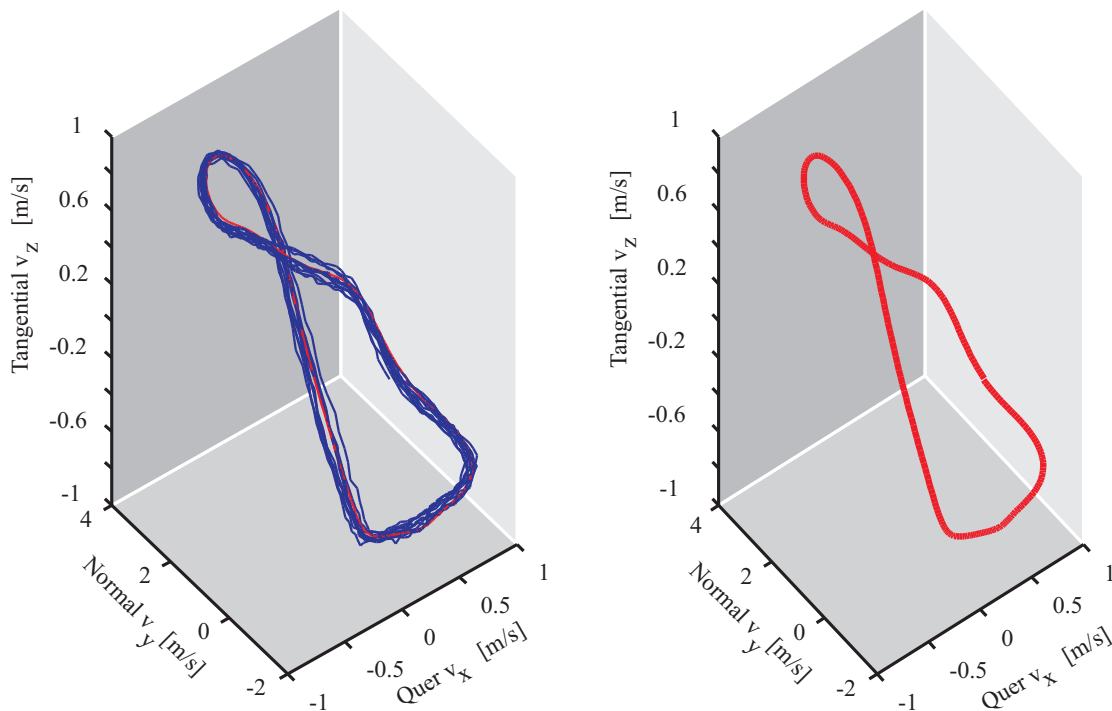


**Abbildung 4.5:** Kurzzeit-FOURIER-Transformation einer Messung.

vom Messrauschen und eventuellen überlagerten niederfrequenten Anteilen durch einen geeigneten Filter zu befreien. Da insbesondere Signalanteile der harmonischen Anregung sowie höherharmonische Anteile zu erwarten sind, bietet sich eine adaptive Filterung im Frequenzbereich an. Mit einer solchen Filterung ist es möglich, selektiv Frequenzanteile auszuwählen, ohne dabei einen Phasen- oder Amplitudenfehler zu machen. Dazu wird von dem betrachteten Ausschnitt eine FOURIER Transformation durchgeführt, nachdem das Signal wie bereits zuvor auf eine neue Zeitbasis, passend zur Anregefrequenz transformiert wurde. Aus den berechneten Frequenzanteilen werden dann die zehn betragsstärksten Frequenzen selektiert, eine inverse FOURIER-Transformation dieser Anteile ergibt dann das gefilterte Geschwindigkeitssignal. Abbildung 4.6 zeigt die übereinander aufgetragenen Geschwindigkeitssignale vor und nach der Filterung. Eine Auswertung quer über alle Messreihen hat ergeben, dass es bei einer Betrachtung der zehn betragsstärksten Anteile eine hinreichend gute Übereinstimmung zwischen gefilterten und ungefilterten Daten gibt. Diese Erkenntnis ist auch für zukünftige Modelle wichtig. Da die Integration zur Berechnung der Wegtrajektorie im Frequenzbereich deutlich einfacher<sup>4</sup> ist als im Zeitbereich, wird diese aus den jeweils zehn selektierten Frequenzanteilen der Geschwindigkeiten berechnet. Die Integration hat zur Folge, dass die Auswirkung der höheren Frequenzanteile deutlich geringer ist als die Auswirkung derer mit niedriger Frequenz. Dadurch werden die Wegtrajektorien im Vergleich zu den Geschwindigkeitstrajektorien deutlich runder. An dieser Stelle soll darauf hingewiesen werden, dass das verwendete Messsystem seine Eckfrequenz<sup>5</sup> bei etwa 250 kHz hat und daher höhere Frequenzanteile auch schon im Geschwindigkeitssignal ab der Knickfrequenz mit ca. 10 dB/Dekade

<sup>4</sup> $\hat{x} = \hat{v}/(j\Omega)$

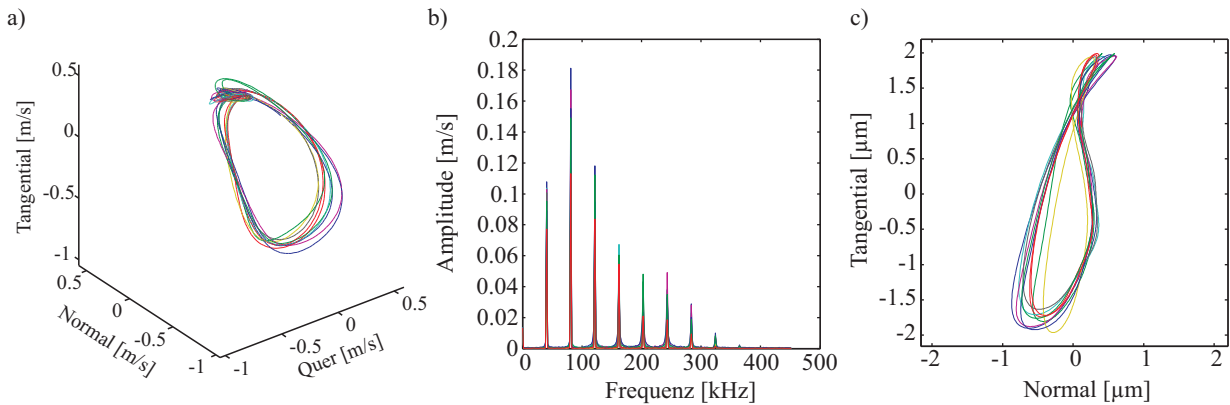
<sup>5</sup>3 dB Abfall im Frequenzgang



**Abbildung 4.6:** Filterung des Geschwindigkeitssignals **Links)** Ungefiltertes und gefiltertes Signal. **Rechts)** Gefiltertes Signal.

abgeschwächt sind. Dadurch kann es dazu kommen, dass Frequenzanteile höherer Frequenz nicht gemessen werden können. In allen Messungen fallen jedoch die Beträge der Frequenzanteile spätestens mit der dritten Höher-harmonischen stark ab, daher ist dieser Einfluss durch das Messgerät weitgehend vernachlässigbar.

In Abbildung 4.7 ist ein exemplarisches Beispiel einer Auswertung gezeigt. Dazu wurden 10 äquidistant verteilte Proben (Ausschnitte) aus der Messreihe ausgewertet und jede ist in einer eigenen Farbe dargestellt. Es ist gut zu erkennen, dass die jeweilig gefilterten Geschwindigkeitstrajektorien nur wenig voneinander abweichen, also das System weitgehend eingeschwungen ist. Die Signale in der nicht gefilterten Frequenzdarstellung lassen deutlich erkennen, dass die Berücksichtigung der zehn betragstärksten Frequenzanteile hinreichend ist, um das Signal gut zu beschreiben und um die Wegtrajektorien zu bestimmen. Bei deren Betrachtung fällt – wie zuvor beschrieben – auf, dass die höheren Frequenzanteile nur einen kleinen Einfluss haben. Da die Integrationskonstante unbekannt ist, lässt sich die Nulllage des Wegs mit dieser Messung nicht bestimmen. Daher ist in den folgenden Darstellungen auf eine entsprechende Achsenbeschriftung verzichtet worden, stattdessen wird ein Maßstab angegeben. Auch wenn die genaue Nulllage unbekannt ist, kann festgehalten werden, dass der Rotor auf der rechten Seite des Diagramms positioniert ist. Ungeachtet dieser Einschränkung lassen sich mit der beschriebenen Methode die Bewegungen am Kontaktpunkt sichtbar machen. Im Folgenden werden verschiedene Einflüsse diskutiert.



**Abbildung 4.7:** Auswertung einer Messung. **a)** Trajektorie der Geschwindigkeit. **b)** Dazugehöriges Frequenzspektrum. **c)** Ermittelte Wegtrajektorie in der Normal-Tangential (Antriebsebene) Ebene.

## 4.3 Auswertung

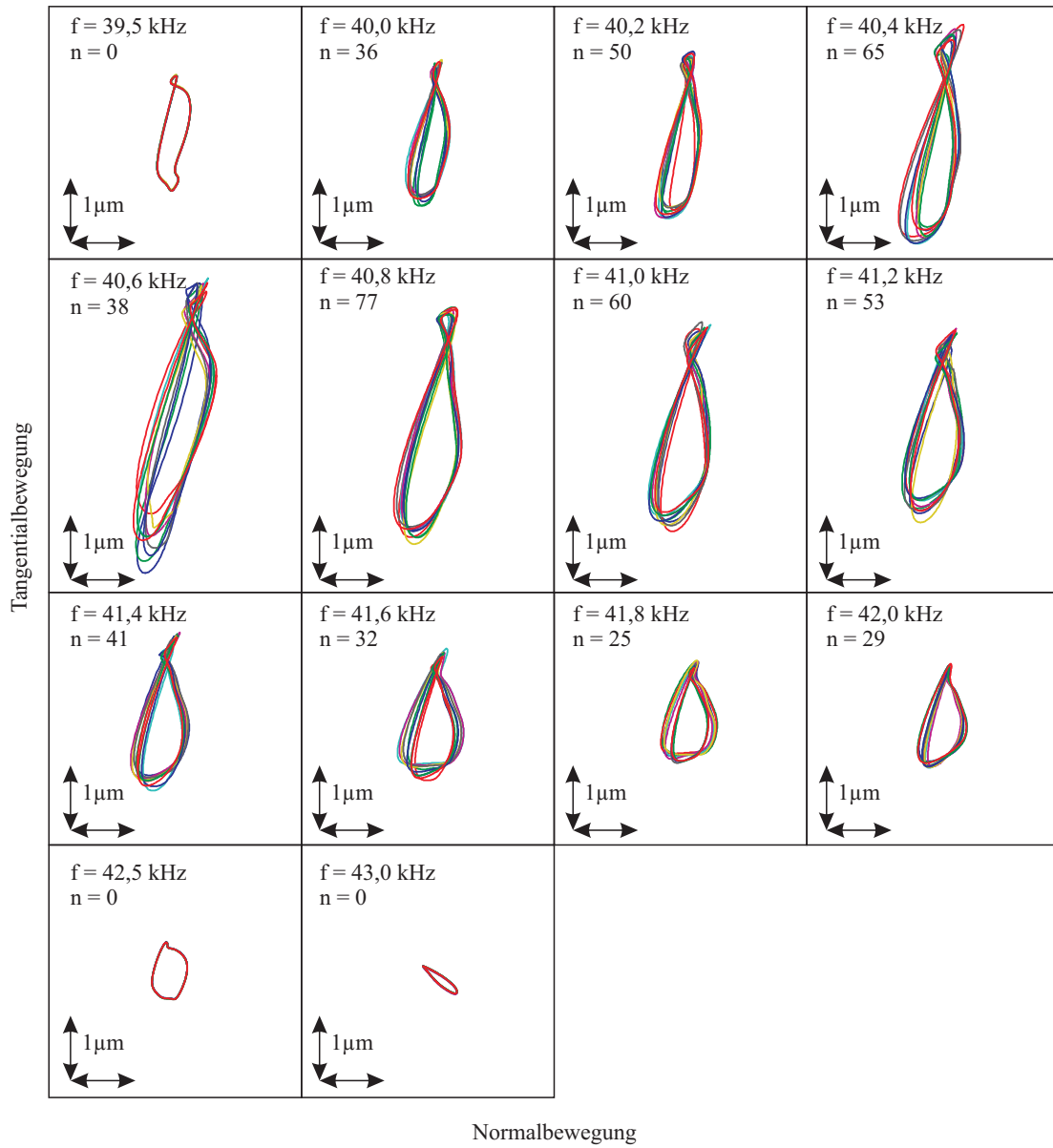
In diesem Abschnitt werden die Einflüsse der verschiedenen wichtigen Parameter dargestellt, darunter die Phasenlage zwischen den beiden Anregesignalen, die Anregfrequenz, die statische Anpresskraft zwischen Stator und Rotor und die Höhe der elektrischen Anregspannung. Wie zuvor beschrieben, werden für jede einzelne Messung alle Parameter, einschließlich der Frequenz konstant gehalten. Mit Hilfe der systematisch aufgenommenen Daten werden Rückschlüsse auf die Bewegung des statorseitigen Kontaktpunktes gezogen. Dabei ist insbesondere die Form der Trajektorie von Interesse, da es keine aus der Literatur bekannten Untersuchungen hierzu gibt.

### 4.3.1 Frequenzabhängigkeit

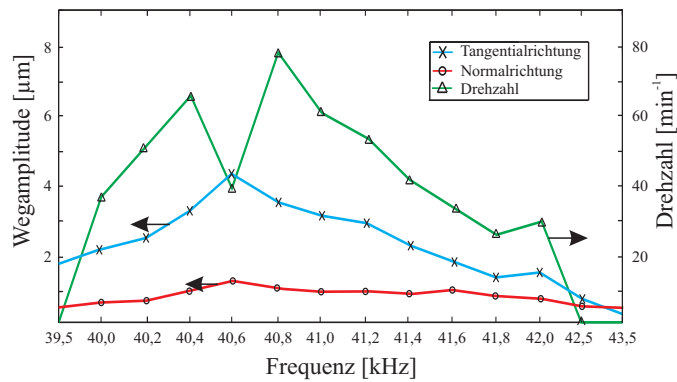
Als erstes wird der Einfluss der Anregfrequenz auf die Stößelbewegung untersucht. Dazu wurde der Stator mit 10 N Anpresskraft gegen den Rotor gedrückt und die beiden Einzelschwinger mit einer sinusförmigen  $100 V_{\text{RMS}}$  Spannung und  $90^\circ$  Phasenversatz angesteuert. Abbildung 4.8 zeigt die resultierenden Bewegungsbahnen des Stößels. Zusätzlich zur Frequenz ist in jedem Bild die Drehzahl  $n$  mit angegeben. Es ist deutlich zu erkennen, dass mit steigender Tangentialamplitude die Rotorgeschwindigkeit zunimmt. In fast allen Fällen ist das Verhalten des Antriebs über den Zeitraum der Messung recht eingeschwungen, was an den jeweils fast deckungsgleichen Bahnen<sup>6</sup> zu erkennen ist. Nur in der Messung bei 40,6 kHz streuen die Trajektorien etwas weiter. Diese Schwankungen führen vermutlich auch dazu, dass die Rotorgeschwindigkeit der großen Tangentialamplitude zum Trotz vergleichsweise gering ist. Daneben ist in den Messungen ohne Rotorbewegung gut zu erkennen, dass alle ermittelten Trajektorien aufeinander fallen, was auf die stets gleichen Kontaktbedingungen zurückzuführen ist. Währenddessen ändern sich bei den an-

<sup>6</sup>In dieser, wie auch in den folgenden Darstellung sind wieder 10 über die Messung äquidistant verteilte Abschnitte gezeigt. Wobei jeder Abschnitt in einer anderen Farbe dargestellt ist.





**Abbildung 4.8:** Wegtrajektorien in der Antriebsebene des Stößels bei verschiedenen Anregesfrequenzen, gemessen bei 90° Phase zwischen den Anregesignalen (100  $V_{RMS}$  Spannung, 10 N Anpresskraft).



**Abbildung 4.9:** Frequenzgang zu Abbildung 4.8

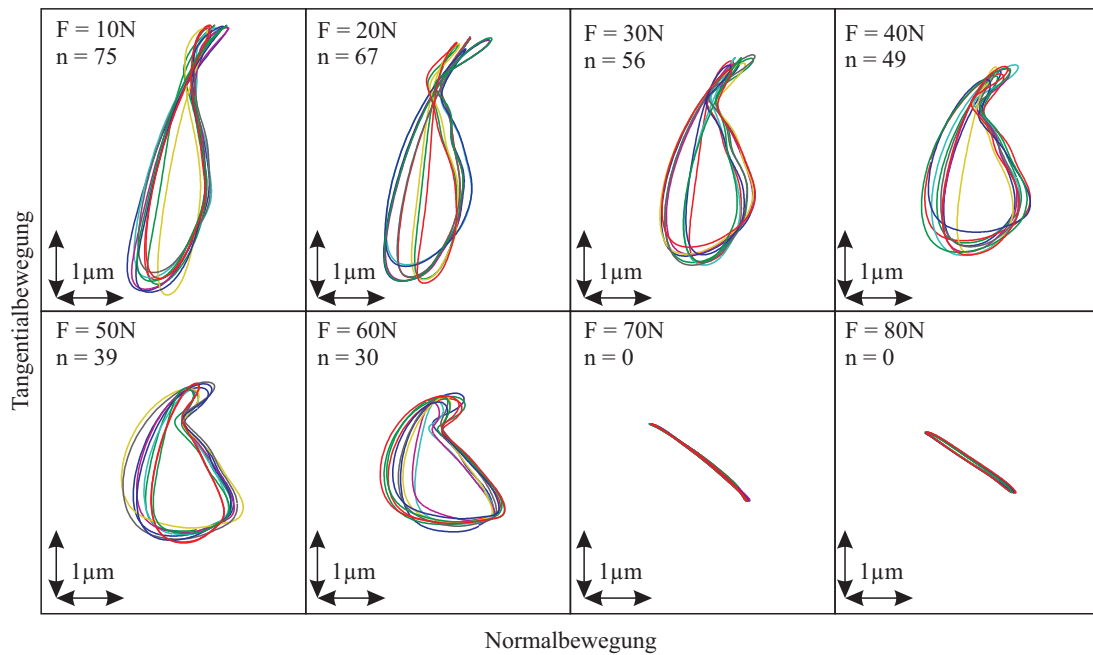
deren Messungen die lokalen Kontaktbedingungen über die Drehung hinweg. Dies kann zum Beispiel aufgrund unterschiedlicher Abnutzung, Verschmutzung, oder auch durch eine Unrundheit des Rotors und der damit verbundenen Schwankung der Anpresskraft auftreten. In der Abbildung 4.9 ist der Zusammenhang zwischen Schwingungsamplitude und Drehzahl über der Frequenz visualisiert. Diese Messungen verdeutlichen die Frequenzabhängigkeit des Antriebsprozesses, unterstreichen aber auch die Notwendigkeit einer großen tangentialen Schwingungsamplitude.

### 4.3.2 Anpresskraft

Der offensichtlich wichtige Parameter der statischen Kraft zwischen Stator und Rotor, ist als nächstes untersucht worden. Hierfür sind die Anpresskräfte in einem Bereich von 10 N bis 80 N variiert worden. Die Anregespannung betrug wieder  $100 V_{\text{RMS}}$  bei  $90^\circ$  Phasenverschiebung zwischen beiden Ansteuersignalen. Die gemessenen und aufbereiteten Ergebnisse sind in der Abbildung 4.10 dargestellt. Hierbei ist gut zu erkennen, dass insbesondere die Tangentialamplitude mit steigender Kraft deutlich abnimmt. Die gleiche abnehmende Tendenz zeigt die Rotordrehzahl. Weiterhin kann man in den dargestellten Daten erkennen, dass sich die Normalamplitude nur wenig ändert. Die Form der gesamten Trajektorie ändert sich dadurch deutlich. Die steigende Anpresskraft scheint einen Einfluss auf die Konstanz der lokalen Kontaktbedingungen zu haben. Die Trajektorien der verschiedenen untersuchten Zeitabschnitte der Messungen liegen weniger gut aufeinander. Sobald die Statorbewegung nicht mehr ausreicht um den Rotor anzutreiben, liegen alle Kurven wieder fast deckungsgleich übereinander. Damit zeigen die Messungen im Wesentlichen das erwartete Verhalten; eine größere Tangentialamplitude führt zu einer höheren Rotorgeschwindigkeit. Allerdings darf nicht die Schlussfolgerung gezogen werden, dass die kleinste Anpresskraft zum besten Antriebsverhalten führt, da die maximal zu erreichende Antriebskraft direkt von der Anpresskraft abhängt.

### 4.3.3 Anregespannung

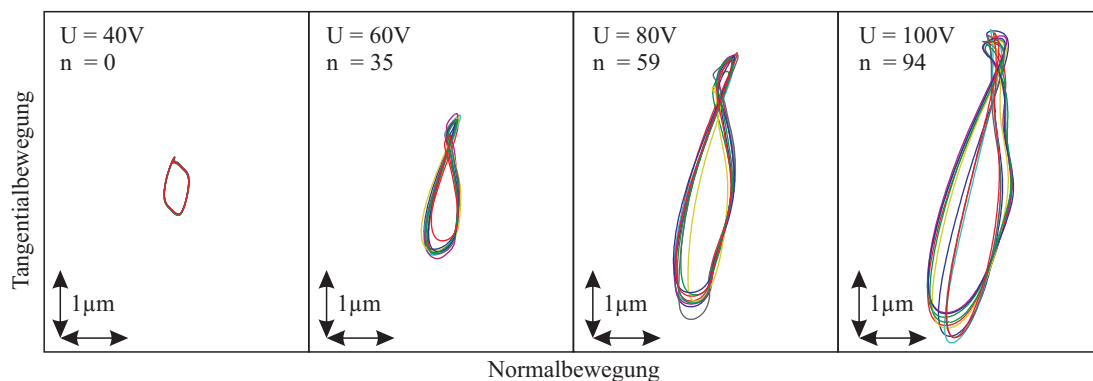
Der Einfluss der Anregespannung ist in der Abbildung 4.11 dargestellt. Erwartungsgemäß steigen Normal- und Tangentialamplituden mit der Spannung. Die Form der Trajektorie ändert sich in allen Fällen mit der Rotordrehung relativ wenig. Ebenso verhält sich die Drehzahl des Rotors, diese steigt mit der Spannung. Auch hier stellten sich mit steigender Rotorgeschwindigkeit größere Streuungen zwischen den einzelnen betrachteten Abschnitten der jeweiligen Messungen ein.



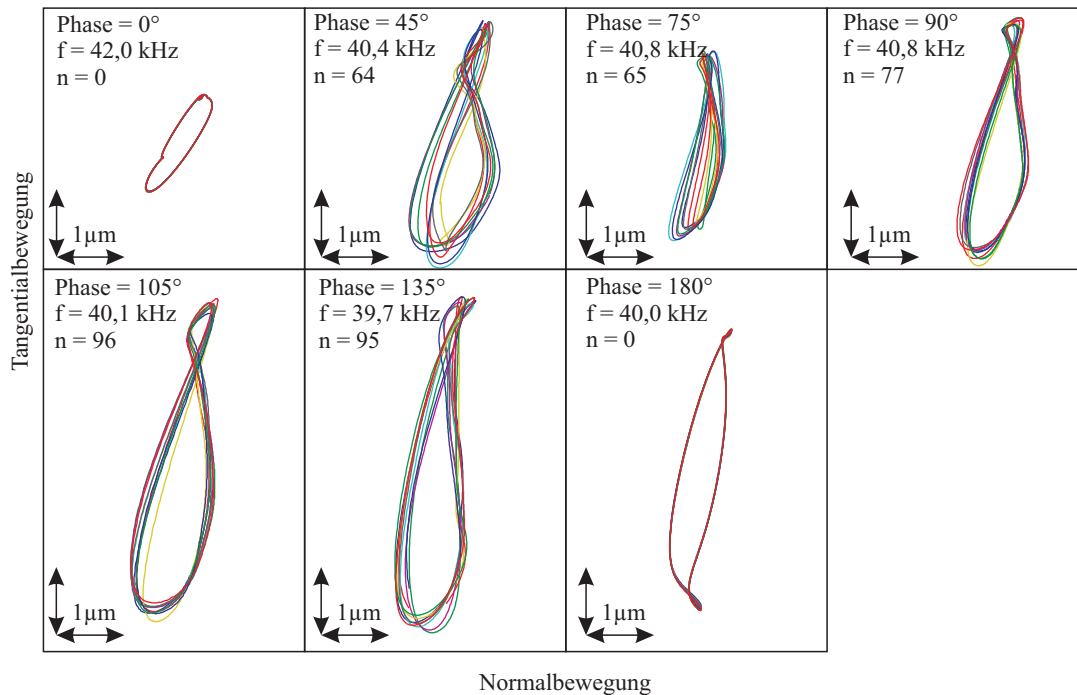
**Abbildung 4.10:** Wegtrajektorien in der Antriebsebene des Stößels bei verschiedenen Anpresskräften, bei  $90^\circ$  Phase zwischen den Anregesignalen

#### 4.3.4 Phase zwischen den Anregespannungen

Auch wenn für *Shaking-Beam*-Antriebe aufgrund der prinzipiellen Idee immer  $90^\circ$  Phasenversatz zwischen den anregenden Spannungssignalen vorliegen soll, wurden verschiedene Phasenunterschiede getestet. Dabei wurde die Phase des zweiten Einzelschwingers von  $0^\circ$  bis  $180^\circ$  variiert. Die Ergebnisse sind in Abbildung 4.12 dargestellt. Hierfür wurde aus den Messungen, die für jede Phaseinstellung mit verschiedenen Frequenzen durchgeführt wurden, die jeweils betragsgrößte ausgewählt und dargestellt. In den Diagrammen ist dies angegeben. Die Änderung der Betriebsfrequenz liegt in etwa im Bereich von einem kHz. Die geringe Änderung der Trajektorienform lässt vermuten, dass die beiden Einzelschwinger nicht perfekt gleich sind und einer der beiden das Gesamtverhalten dominiert. In der Folge stellt sich für fast jede Phasenlage die gleiche Schwingungsform ein.



**Abbildung 4.11:** Wegtrajektorien in der Antriebsebene des Stößels in Abhängigkeit der Anregespannung



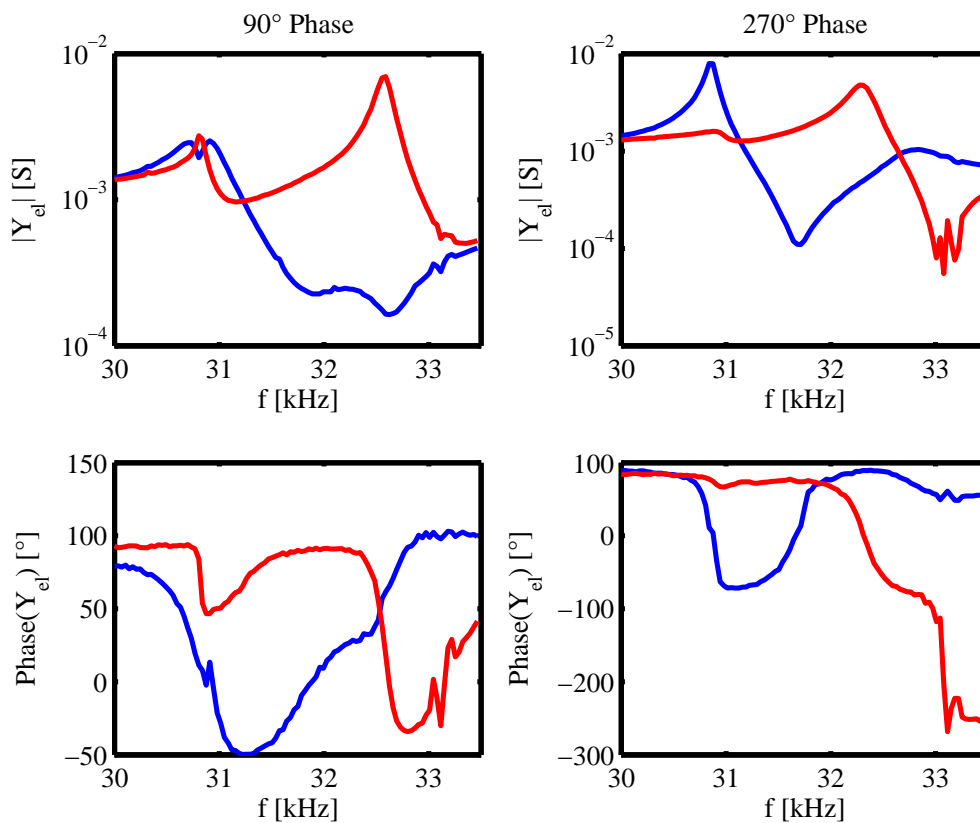
**Abbildung 4.12:** Wegtrajektorien in der Antriebsebene des Stößels in Abhängigkeit der Phase zwischen den Anrege­spannungen

Dennoch gibt es deutliche Unterschiede in der Amplitudenhöhe und der Rotordrehzahl, wobei die größten Amplituden und Drehzahlen zwischen  $105^\circ$  und  $135^\circ$  erzielt wurden.

## 4.4 Zusammenhang zwischen Motor- und Frequenzverhalten

Neben den gezeigten Untersuchungen an dem abgewandelten *Shaking-Beam-Motor* sind zur Überprüfung der Ergebnisse Untersuchungen an einem zweiten Motor-Typ durchgeführt worden. Aufgrund der rechtwinklig zueinander angeordneten Längsschwinger bietet sich der Antrieb von KUROSAWA ET. AL. [86] an, siehe Abbildung 2.8e-f. Das Funktionsprinzip dieses Antriebs basiert auf der Überlagerung von zwei Schwingungsformen, von denen eine die Normal- und die andere die Tangentialbewegung erzeugt. Zur Untersuchung der Stößelbewegung ist ein aus Literaturangaben nachgebautes Exemplar verwendet worden. Im Rahmen dieser Untersuchungen ist insbesondere auch der freischwingende Fall untersucht worden. Dabei wurde das Frequenzverhalten bei phasenversetzter Anregung aufgezeichnet und in Abbildung 4.13 gezeigt. Es ist hierbei eine deutliche Wechselwirkung zwischen den beiden Einzelschwingern zu erkennen.

Zusätzlich zur Untersuchung des freien Stators, ist auch der komplette Antrieb untersucht worden. Abbildung 4.14 zeigt das elektrische Frequenzverhalten der Einzelschwinger bei einer Anpresskraft von 40 N. Die dargestellten Messungen weisen deutliche

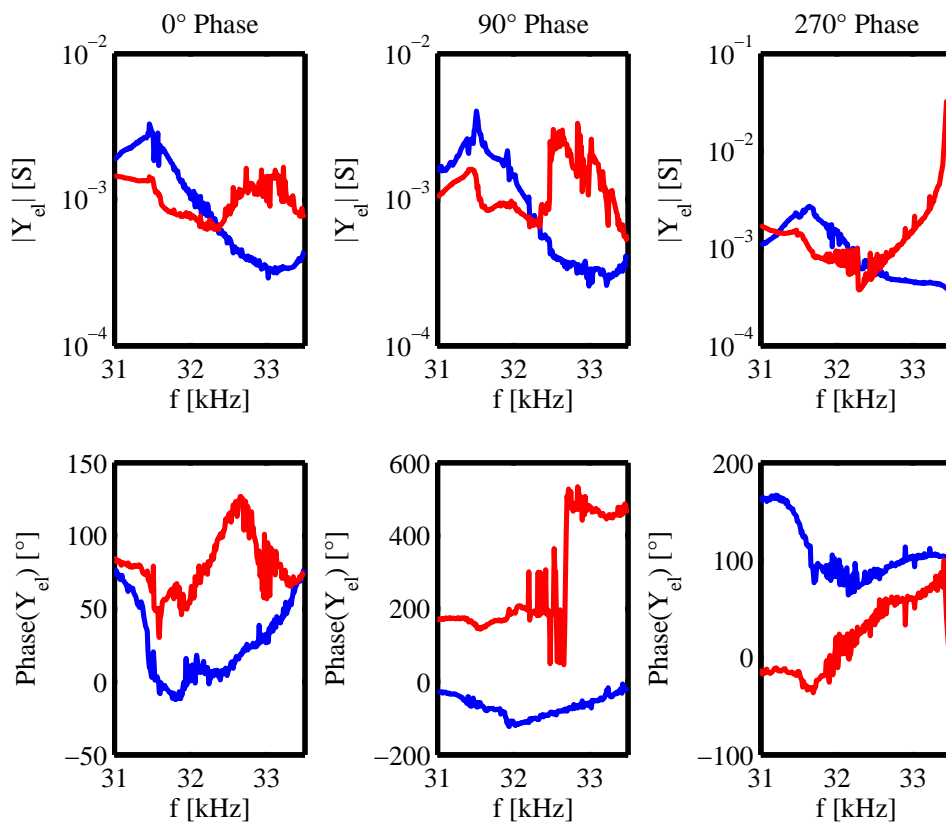


**Abbildung 4.13:** Frequenzverhalten der beiden Piezostapel im freien Stator des Antriebs nach KUROSAWA aus Abbildung 2.8e-f. **Links)** 90° Phasenversatz zwischen den Anregespannungen. **Rechts)** 270° Phasenversatz zwischen den Anregespannungen.

Rauschanteile auf, da die Frequenzgänge mit (nicht konstanter) Betriebsspannung<sup>7</sup> und freier Abtriebswelle aufgenommen wurden. Dabei wurde während der Messung beobachtet in welchen Bereichen die Welle gut angetrieben werden konnte. Interessanter Weise sind die besten Bereiche nicht bei den Spitzenwerten der Admittanz auszumachen. Deutlich zu erkennen ist, dass der Phasenunterschied zwischen den Signalen eine signifikante Auswirkung auf das Übertragungsverhalten hat. Bemerkenswert ist auch der Unterschied zwischen 90° und 270°. Anhand der aufgenommenen Kurven ließ sich kein eindeutiger Zusammenhang zwischen Frequenzgang und Antriebsverhalten ableiten.

Weiterhin sind auch an diesem Antrieb die Stößelbewegungen im Betrieb gemessen worden, dazu wurde ein Vorgänger des vorgestellten Prüfstands verwendet. Die Ergebnisse entsprechen prinzipiell denen des abgewandelten *Shaking-Beam-Motors*. Auch hier ist der deutliche Einfluss der höherfrequenten Anteile ersichtlich. Allerdings ergaben sich aufgrund des weniger steifen und auch nicht so genau gefertigten Prüfstands wesentlich größere Störeinflüsse als bei den gezeigten Messungen des *Shaking-Beam-Motors*.

<sup>7</sup>Die verwendeten Verstärker hatten weder näherungsweise strom- noch spannungseinprägendes Verhalten, und es wurde auch keine überlagerte Regelung eingesetzt. In sehr grober Näherung kann von einer konstanten Leistung ausgegangen werden.



**Abbildung 4.14:** Frequenzverhalten der Einzelschwinger des Antriebs mit 40 N Anpresskraft nach KUROSAWA aus Abbildung 2.8e-f. **Links)**  $0^\circ$  Phasenversatz zwischen den Anregespannungen. **Mitte)**  $90^\circ$  Phasenversatz zwischen den Anregespannungen. **Rechts)**  $270^\circ$  Phasenversatz zwischen den Anregespannungen.

## 4.5 Fazit der experimentellen Untersuchungen

In den durchgeführten Messungen konnte die Parameterabhängigkeit des Antriebsverhaltens gezeigt werden. Die diskutierten Drehzahl-Parameter-Abhängigkeiten entsprechen im Wesentlichen den Erwarteten. So führt eine steigende Spannung zu einer Erhöhung der Schwingungsamplituden, eine Vergrößerung dieser vor allem in Tangentialrichtung führt zu einer größeren Motordrehzahl. Ganz deutlich konnte gezeigt werden, dass sich am Kontaktpunkt keine perfekte Ellipse einstellt. Stattdessen müssen zur Darstellung der Geschwindigkeitssignale mit einer FOURIER-Reihe die zehn betragsstärksten Amplituden berücksichtigt werden, um eine gute Übereinstimmung zu erhalten. Für die Wegsignale würden schon drei bis vier Frequenzanteile ausreichen, um diese in guter Näherung zu beschreiben, da die höherfrequenten Anteile hier nicht so sehr ins Gewicht fallen. Diese Erkenntnisse müssen auch in der Modellierung berücksichtigt werden.

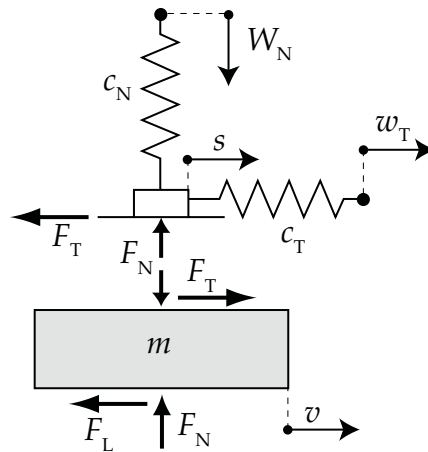
## 5 Generisches Minimalmodell für reibungsbasierte Antriebe

Nachdem die experimentellen Untersuchungen gezeigt haben, dass die Bewegungstrajektorie eine wichtige Einflussgröße bei den Stehwellenantrieben ist, soll in diesem Kapitel ein Minimalmodell entwickelt und untersucht werden, bei dem die Bewegung des Kontaktpunktes vorgegeben werden kann. Dabei soll das Modell nicht auf Stehwellenantriebe begrenzt sein, sondern prinzipiell für alle reibungsbasierten Antriebe geeignet sein. Zunächst wird ein Modell mit einem massebehafteten Abtriebselement beschrieben und untersucht. Um eine effizientere Berechnung zu ermöglichen, wird das Modell weiter vereinfacht, so dass sich der eingeschwungene Zustand sehr schnell berechnen lässt. Mit diesem Modell wird der Einfluss der Kontaktpunkttrajektorie untersucht. Dabei wird der Kontaktpunkt selbst als masselos angenommen und über jeweils eine Feder in Normal- und Tangentialrichtung angeregt. Im ersten Schritt werden die Bewegungen an den Federfußpunkten als harmonische Bewegung angenommen, zusammengenommen ergibt dies eine elliptische Anregung, parametrisiert durch Achsenverhältnis und Phasenversatz der Ellipse. Aus dieser Anregung resultiert eine nicht-harmonische Bewegung des Kontaktpunktes. Insbesondere wird auch der Einfluss der Anregung auf die Motorkennlinie untersucht. Abschließend wird in diesem Kapitel die Bedeutung der gewonnenen Ergebnisse für die Motorgeometrie eines *Shaking-Beam*-Motors diskutiert.

### 5.1 Modellbildung

Um ein möglichst allgemeingültiges Modell zu entwickeln, das für die unterschiedlichen, im Stand der Technik vorgestellten, Motortypen anwendbar ist, wird das Hauptaugenmerk zunächst auf den Kontaktvorgang selbst gelegt. Das herausragende Unterscheidungsmerkmal zwischen den Motortypen ist der Bewegungsablauf des Kontaktpunktes. Daher wird hier ein Modell entwickelt, bei dem sich die Anregungstrajektorie des Kontaktpunktes einprägen lässt und deren Auswirkung auf das Antriebsverhalten sichtbar wird.

Das Modell besteht aus einem massebehafteten, anzutreibenden Element (dem Rotor) und einem idealisierten masselosen Kontaktpunkt, der über jeweils eine Feder in Normal- und Tangentialrichtung bewegt werden kann. Am Fußpunkt der beiden Federn wird der jeweilige Anteil der Trajektorie des Kontaktpunktes eingepreßt. Die Federn repräsentie-



**Abbildung 5.1:** Allgemeines Antriebsmodell

ren in diesem Modell die Kontaktsteifigkeit in Normal- respektive in Tangentialrichtung.

Für das Modell sollen die folgenden, im Freischnitt auf Abbildung 5.1 dargestellten Parameter, verwendet werden.  $W_N(t) = \bar{w}_N + w_N(t)$  ist die Verschiebung des Federfußpunktes in Normalrichtung, wobei  $\bar{w}_N$  ein statischer Anteil ist, und  $w_N(t)$  der in der Regel periodische, dynamische Anteil der Fußpunkterregung. Mit dem statischen Anteil lässt sich die mittlere Anpresskraft einstellen. In der tangentialen Richtung ist kein statischer Anteil notwendig, daher ist hier direkt die dynamische Verschiebung  $W_T(t) = w_T(t)$  eingetragen. Die Kontaktsteifigkeiten in normaler und tangentialer Richtung sind mit  $c_N$  und  $c_T$  bezeichnet. In tangentialer Richtung hat der idealisierte Kontaktpunkt die Koordinate  $s$ , wogegen in normaler Richtung keine zusätzliche Koordinate notwendig ist. Eine solche Koordinate würde immer den Wert  $W_N(t)$  im Fall der Separation und null im Fall von Kontakt annehmen. Die Kräfte zwischen angetriebenem Objekt und idealisiertem Kontaktpunkt sind mit  $F_N$  in normaler und  $F_T$  in tangentialer Richtung benannt. Das angetriebene Objekt der Masse  $m$  hat keine explizite Wegkoordinate, sondern nur die Geschwindigkeit  $v$ . Des Weiteren greift eine Lastkraft  $F_L$  an dem Objekt an.

Die Interaktion zwischen idealisiertem Kontaktpunkt und angetriebenem Element kann drei verschiedene Zustände beschreiben: Separation, Gleiten und Haften. Für die Kontaktvorgänge wird angenommen, dass das Reibmodell von COULOMB, also ein konstanter Reibwert, gilt. Weiterhin wird vorausgesetzt, dass der Haftkoeffizient gleich dem Reibwert ist ( $\mu_R = \mu_H = \mu$ ). In der Tabelle 5.1 sind die Übergangsbedingungen für eine numerische Implementierung zwischen den Zuständen angegeben. Zur bequemeren Rechnung ist außer der Reibung zwischen angetriebener Masse und idealisiertem Kontaktpunkt keine weitere Dämpfung berücksichtigt.

Da das Modell die Trajektorie der Kontaktpunktanregung als Eingangsgröße verwendet, können Einflüsse die aus der Struktur resultieren, nicht berücksichtigt werden. Durch diese Einschränkung bleiben alle Effekte, die sich direkt aus der Strukturmechanik ergeben, wie z.B., Resonanzeffekte, unberücksichtigt. Auch die Geschwindigkeit der Trajektorie und die zurückgelegte Strecke des idealisierten Kontaktpunktes sind kein Resultat der



**Tabelle 5.1:** Transitionsbedingungen zwischen den möglichen Zuständen für die numerische Implementierung.

von $\rightarrow$ nach $\downarrow$	Separation	Haften	Gleiten
Separation	-	$W_N \leq 0$	$W_N \leq 0$
Haften	$W_N > 0 \wedge  c_T \dot{w}_T  < \mu \dot{F}_N$	-	$\dot{s} - v = 0$
Gleiten	$W_N > 0 \wedge  c_T \dot{w}_T  \geq \mu \dot{F}_N$	$F_T > \mu F_N$	-

elektromechanischen Anregung, sondern hängen direkt von der eingepprägten Federfußpunktanregung ab. Dieser Nachteil wird aber durch eine sehr breite Einsatzmöglichkeit für die verschiedenen Arten von piezoelektrischen Antrieben ausgeglichen.

## 5.2 Systemgleichungen

Bevor die verschiedenen Parametereinflüsse und Einsatzbereiche untersucht werden können, ist das vorgeschlagene Modell mathematisch zu beschreiben. Die Geschwindigkeit des angetriebenen Körpers (vgl. Abbildung 5.1) folgt mit dem Impulssatz:

$$m\dot{v} = F_T - F_L \quad (5.1)$$

Die Kräfte  $F_N$  und  $F_T$  lassen sich abhängig vom Kontaktstatus berechnen:

Haften:

$$F_T = (w_T - s)c_T \quad (5.2)$$

$$F_N = c_N W_N \quad (5.3)$$

Gleiten:

$$F_T = \mu F_N \operatorname{sgn}(\dot{s} - v) \quad (5.4)$$

$$F_N = c_N W_N \quad (5.5)$$

Separation:

$$F_T = 0 \quad (5.6)$$

$$F_N = 0 \quad (5.7)$$

Mit Ausnahme der Separation, in der die Masse mit der konstanten Last konstant beschleunigt wird, ist das System mit der Masse  $m$  schwingfähig. Daher ist, wie auch in der Realität, ein transienter Einschwingvorgang zu erwarten.

Dieses Modell wurde unter Nutzung obiger Gleichungen und den Übergangsbedingungen aus Tabelle 5.1 in MATLAB implementiert und kann zur Berechnung des Motorverhaltens bei eingepprägten Trajektorien herangezogen werden. Hierzu wurde der auf

dem RUNGE-KUTTA Verfahren basierende MATLAB Standard Solver ODE45 genutzt. Zur möglichst genauen Bestimmung der Übergangszeitpunkte wurden sogenannte *event*-Funktionen definiert, die die Schrittweite der Berechnung automatisch zum gesuchten Zeitpunkt (Nulldurchgang) hin verfeinern.

### 5.3 Transiente Parameterstudien

Mit dem implementierten Modell sollen jetzt erste Parameterstudien durchgeführt werden. Dazu werden zunächst verschiedene Trajektorien untersucht, um die breite Anwendbarkeit des einfachen Modells zu zeigen. Wie bereits im Kapitel 2.1 beschrieben, unterscheiden sich die verschiedenen Typen von piezoelektrischen Antrieben maßgeblich durch die Bewegung des Kontaktpunktes. Im ersten Schritt wird die Trajektorie des Kontaktpunktes am Stehwellenmotor untersucht. Die typischerweise erwartete Bewegung der Stößelanregung verläuft auf einer elliptischen Bahn

$$W_N(t) = \hat{w}_N \sin(\Omega t) + \bar{w}_N \quad (5.8)$$

$$w_T(t) = \hat{w}_T \sin(\Omega t + \varphi) \quad (5.9)$$

so wie sie exemplarisch in Abbildung 5.2 für drei Fälle dargestellt ist.

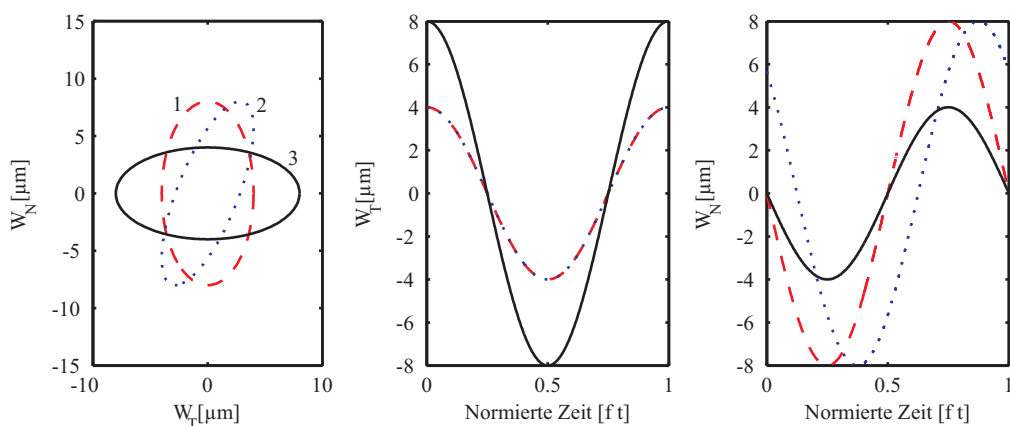
Diese drei Fälle sollen nun beispielhaft untersucht werden. Die gesamten Parameter der drei Fälle sind identisch, mit Ausnahme der Schwingungsamplituden, respektive der Phasenverschiebung, der Anregesignale. Zwischen den Fällen 1 und 2 wurde die Phasenverschiebung  $\varphi$  von  $90^\circ$  auf  $45^\circ$  verschoben und die Fälle 1 und 3 unterscheiden sich durch das Vertauschen der Amplituden von  $\hat{w}_N$  und  $\hat{w}_T$ .

Im ersten Schritt soll das Einschwingverhalten untersucht werden. Die angetriebene Masse ist zum Beginn der Berechnung in Ruhe und muss auf ihre Endgeschwindigkeit beschleunigt werden. Abbildung 5.3 zeigt den Verlauf der Geschwindigkeit der Masse über der Zeit. Es ist deutlich zu erkennen, dass eine große Anzahl von Schwingungsperioden (in diesem Fall mehr als 300) notwendig ist, bis sich ein stabiler Zustand einstellt. Die linke und rechte Abbildung zeigen jeweils einen Ausschnitt des Geschwindigkeitsverhaltens beim Anfahren und der quasistationären Endgeschwindigkeit, normiert auf die jeweilige Maximalgeschwindigkeit.

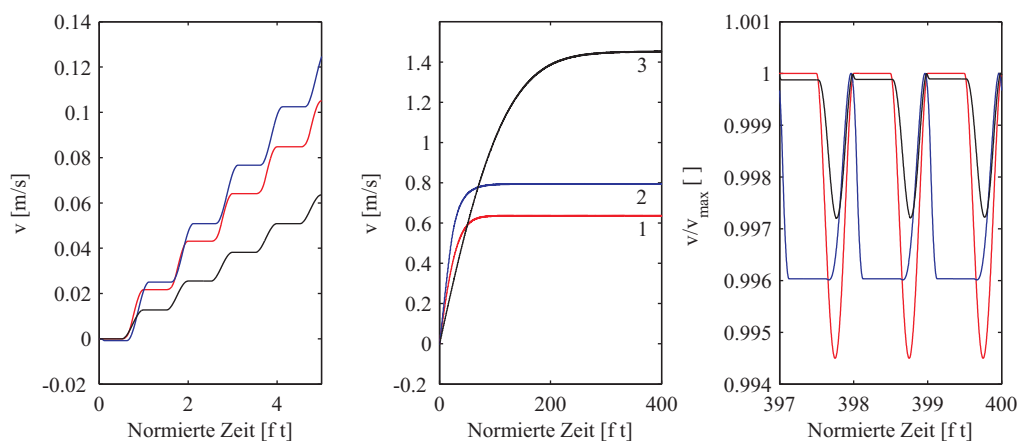
Wenn dieser Zustand erreicht ist, wird der Mittelwert der Tangentialkraft  $\bar{F}_T$  in der Theorie konstant und entspricht betragsmäßig der äußeren Kraft, die auf den angetriebenen Körper wirkt.

$$F_L = \bar{F}_T = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} F_T(t) dt \quad (5.10)$$

Bevor dieser Zustand erreicht ist, ist die gemittelte Tangentialkraft in den betrachteten Beispielen betragsmäßig größer als  $F_L$ , dies führt dazu, dass der Körper an Geschwindigkeit gewinnt. Werden für einen Zeitabschnitt nach Erreichen der quasistationären Endge-



**Abbildung 5.2:** Untersuchte idealisierte Anregung des Kontaktpunktes eines Stehwellenmotors



**Abbildung 5.3:** Geschwindigkeit der angetriebenen Masse. **Links)** Darstellung der ersten vier Perioden des Anfahrvorgangs. **Mitte)** Gesamter Anfahrprozess bis zum Erreichen einer quasistationären Endgeschwindigkeit. **Rechts)** Ausschnitt bei der erreichten Endgeschwindigkeit.

schwindigkeit die Tangentialkraft  $F_T$  über der Anregungsbewegung in tangentialer Richtung  $w_T$  aufgetragen (Abbildung 5.4), so wird zum einen offensichtlich, dass die drei Systeme im gezeigten Zeitbereich eingeschwingen sind, da die Kurven geschlossen sind. Zu der Größe der Kräfte sei an dieser Stelle darauf hingewiesen, dass die eingeprägte Trajektorie zusammen mit den vorgegebenen Kontaktsteifigkeit zu hohen Werten führt. Da die eingeprägte Trajektorien in der Theorie eine unendliche Kraft bereitstellen, sofern diese notwendig ist. In der Praxis geht man davon aus, dass der Stator *aufschwimmt*<sup>1</sup>, was hier durch eine entsprechende Vorgabe des statischen Verschiebungsanteils in Normalrichtung berücksichtigt werden kann. Das Aufschwimmen selbst kann mit diesem Minimalmodell nicht berechnet werden, dazu ist ein komplexeres Modell notwendig, das später untersucht wird. Die statische Anpresskraft entspricht dem Mittel der Kontaktkraft

<sup>1</sup>Wenn der Stator aufschwimmt, nimmt seine mittlere Position eine neue stationäre Mittellage an, bei der sich der mittlere Abstand zum Rotor vergrößert hat.

in Normalrichtung und kann mit

$$F_{\text{Anpress}} = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} (W_N(t) c_N(W_N)) dt \quad \text{mit} \quad \begin{cases} c_N(W_N) = 0 & \text{für } W_N \leq 0 \\ c_N(W_N) = c_N & \text{für } W_N > 0 \end{cases} \quad (5.11)$$

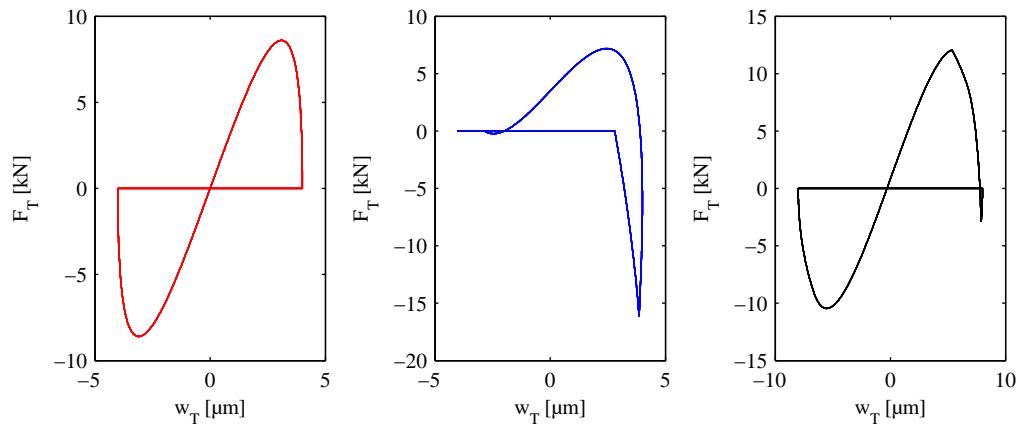
bestimmt werden. Dies hat zur Folge, dass die Steifigkeit  $c_N$  ein sehr wichtiger Parameter wird.  $c_N$  bestimmt wesentlich die Kontaktdauer pro Schwingungsperiode. Unglücklicherweise ist genau dieser Parameter experimentell sehr schwer zu bestimmen. Zusätzlich setzt sich diese Kontaktsteifigkeit in der Regel aus mehreren Komponenten zusammen. Neben dem häufig als *Penalty*<sup>2</sup>-Steifigkeit bezeichneten Wert, der nur mathematisch eingeführt wird und gegen unendlich streben sollte, werden oft noch Struktursteifigkeiten in der Kontaktsteifigkeit mit abgebildet. Wenn versucht wird, die Kontaktsteifigkeit über die Steifigkeit des angetriebenen Objektes abzuschätzen, ergibt dies in der Regel einen Wert in der Größenordnung  $10^3 \text{ N}/\mu\text{m}$  bis  $10^5 \text{ N}/\mu\text{m}$ . Was dann bei Anpresskräften im Bereich von 1 N bis 200 N zu einer Kompression der Feder von  $10^{-5} \mu\text{m}$  bis  $0.2 \mu\text{m}$  führt und nur ein sehr kleiner Anteil der freien Amplitude eines typischen Schwingers in Normalrichtung von etwa  $1 \mu\text{m}$  bis  $10 \mu\text{m}$  ist.

Eine weitere interessante Betrachtung ergibt sich, wenn die tangentiale Bewegung der Anregung  $w_T$  mit der tangentialen Bewegung des idealisierten Kontaktpunktes  $s$  verglichen wird, siehe Abbildung 5.5. Beide Koordinaten sind über der Bewegung in Normalrichtung  $W_N$  aufgetragen. In der tangentialen Richtung sind im Kontakt die Bewegungen des idealisierten Kontaktpunktes  $s$  und der eingepprägten Trajektorie  $w_T$ , durch das Reibgesetz und die bewegliche Masse nicht mehr deckungsgleich. Während bei den noch zu beschleunigenden Systemen nach einer sehr kurzen (im Diagramm fast unsichtbaren) Gleitphase eine kurze Haftphase und dann eine dominante Gleitphase folgt, ist bei den eingeschwungenen Systemen in der Regel (für den dargestellten Fall  $F_L = 0$ ) die Haftphase dominant. Die prozentuale Aufteilung der Kontaktzustände wird für den eingeschwungenen Zustand im Anschluss noch genauer untersucht.

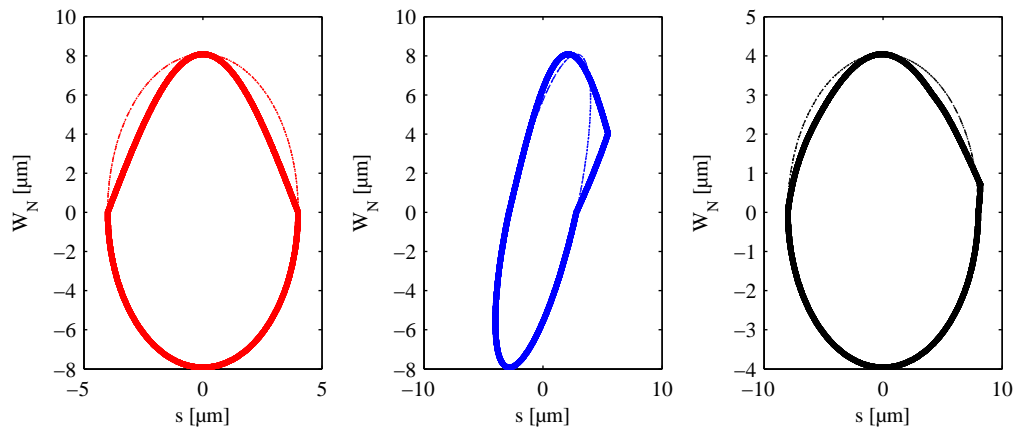
Die Verteilung der Separations-, Haft- und Gleitphasen lässt sich auch mit dem gezeigten Modell auswerten. In Abbildung 5.6 ist zu erkennen, dass erwartungsgemäß zunächst die Gleitanteile dominieren, aber langsam bis zu einem stationären Grenzwert abnehmen und die Haftanteile entsprechend zunehmen. Die Separationsphasen sind aufgrund der wegeingepprägten Anregung konstant.

Das für das makroskopische Systemverständnis wichtigste Diagramm ist die Motorkennlinie, die sich auch mit dem vorgestellten Algorithmus berechnen lässt. Die Kennlinien sind in Abbildung 5.7 dargestellt. Die Berechnungsdauer ist aufgrund der relativ langen Einschwingzeit noch nicht ideal. Sie dauert auf einem gut ausgestatteten handelsüblichen Rechner ungefähr eine halbe Stunde.

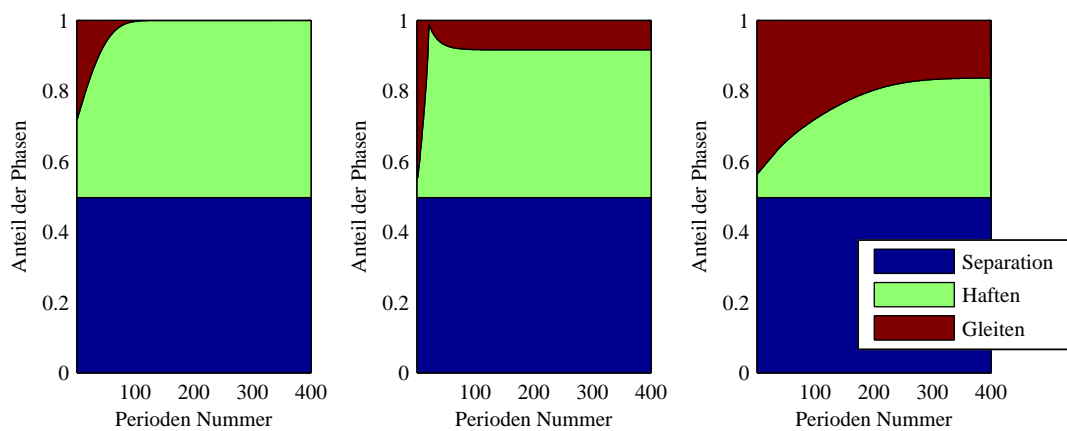
<sup>2</sup>Diese Steifigkeit soll ein Durchdringen zweier Körper verhindern. Allerdings führt eine, auf die übrigen Steifigkeiten im System bezogen, sehr hohe *Penalty*-Steifigkeit beim Finden und Verlassen des Kontakts mathematisch zu Problemen, so dass immer ein Kompromiss zwischen Genauigkeit und Rechenzeit gefunden werden muss.



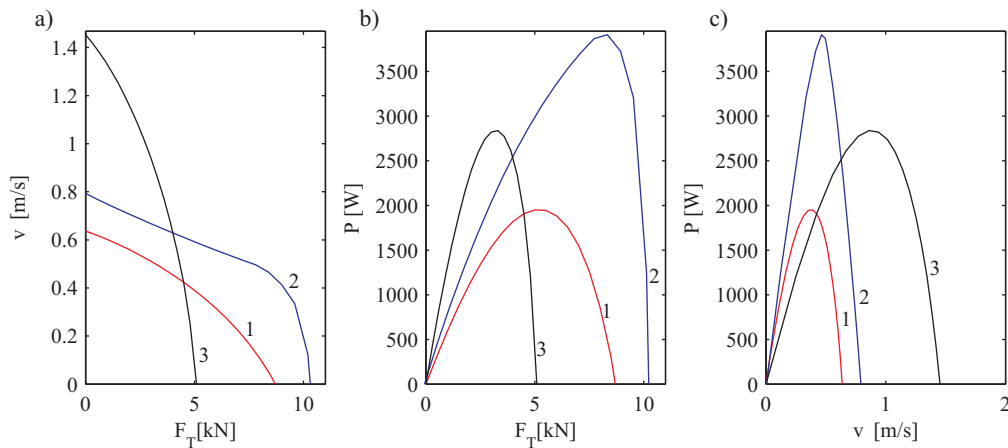
**Abbildung 5.4:** Tangentialkraft  $F_T$  nach Erreichen der quasistationären Endgeschwindigkeit über der Koordinate  $w_T$  des Kontaktpunktes in Tangentialrichtung. (Links: Fall 1, Mitte: Fall 2, Rechts: Fall 3)



**Abbildung 5.5:** Bewegung des idealisierten Kontaktpunktes bei elliptischer Anregung nach Erreichen der quasistationären Endgeschwindigkeit. Die gestrichelte Linien stellen  $w_T$  dar. (Links: Fall 1, Mitte: Fall 2, Rechts: Fall 3)



**Abbildung 5.6:** Verteilung der Haft-, Gleit- und Separationsanteile. (Links: Fall 1, Mitte: Fall 2, Rechts: Fall 3)



**Abbildung 5.7:** Motorcharakteristiken zu den untersuchten Parametern. **a)** Geschwindigkeits-Kraft-Kennlinien. **b)** Leistungs-Kraft-Kennlinien. **c)** Leistungs-Geschwindigkeits-Kennlinie.

Neben einer elliptischen Trajektorie lassen sich auch beliebige andere Anregungen vorgeben. So ist bei den Antrieben nach dem *Haften- und Gleiten*-Prinzip eine nahezu sägezahnförmige Bewegung in tangentialer Richtung bei einer konstanten Position in normaler Richtung üblich (vgl. Abbildung 2.2). Im Folgenden soll anhand einer beispielhaften Rechnung gezeigt werden, dass sich auch dieser Motortyp mit dem Modell abbilden lässt. Die Abbildung 5.8 zeigt die verwendete Trajektorie. Die dreieckförmige Anregung mit einer vergleichsweise langsamen Bewegung in die eine Richtung und einer schnellen Bewegung in (1 %, 10 % und 20 % der Periodendauer) die andere Richtung, führt dazu dass sich beim Wechsel von der langsamen zur schnellen Bewegung zunächst eine kurze Haftphase ausbildet. Bevor sich der idealisierte Kontaktpunkt losreißt und sich dann in einer Gleitphase weiterbewegt bis die schnelle Bewegung wieder von der langsamen abgelöst wird. Das transiente Startverhalten der drei untersuchten Trajektorien ist in Abbildung 5.9 dargestellt. Dabei ist die Geschwindigkeitssteigerung erwartungsgemäß bei der Trajektorie mit der schnellsten Rückbewegung am größten und gleichzeitig die erreichbare Geschwindigkeit am geringsten. Ist der eingeschwungene Zustand erreicht, schwankt in allen drei Fällen die Geschwindigkeit um weniger als ein Prozent. Während des Anfahrens dominieren die Gleitanteile, danach dominiert das Haften, wie in Abbildung 5.10 dargestellt.

Die bis hierher gezeigten Berechnungen sind ein deutliches Indiz für die Plausibilität des vorgestellten Modells. Neben den obengenannten Vereinfachungen ist es sehr gut geeignet, das Funktionsprinzip eines Schwingungsantriebs mit verschiedenen Kontaktzuständen zu erklären. Dabei ist das Modell nicht auf einen einzigen Motortyp eingeschränkt. Neben den hier gezeigten lassen sich prinzipiell alle denkbaren reibungsbasierten Antriebsprinzipien mit dem Modell abbilden. Die typische Implementierung des Modells macht es allerdings unpraktikabel, sehr viele Kontaktpunkte zu berechnen, so dass sich der hier verwendete Code eher für ein bis maximal zwei im System vorhandene Kontaktpunkte eignet. Dies stellt für die vorliegende Arbeit allerdings keine Einschränkung

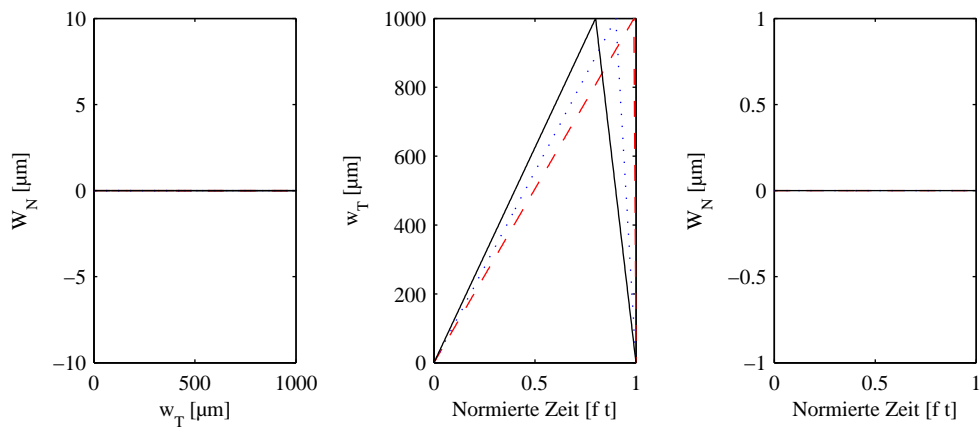


Abbildung 5.8: Antriebstrajektorien eines Stick-Slip Antriebs

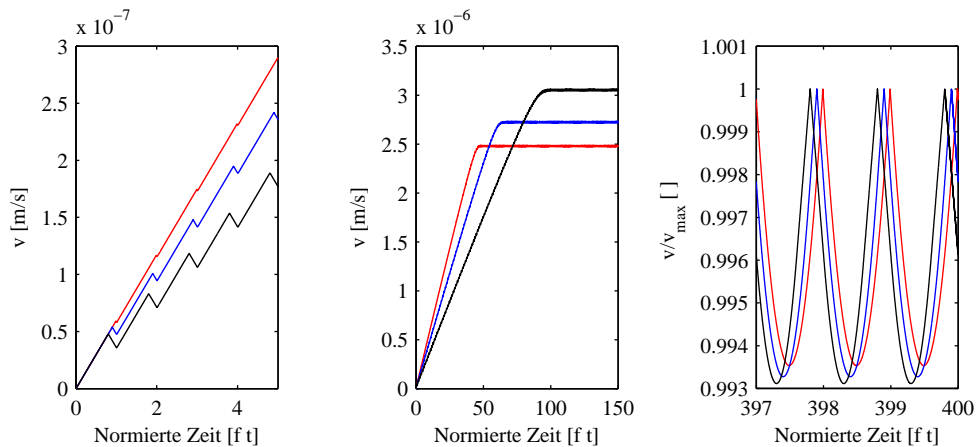


Abbildung 5.9: Transientes Verhalten der untersuchten Stick-Slip Antriebe

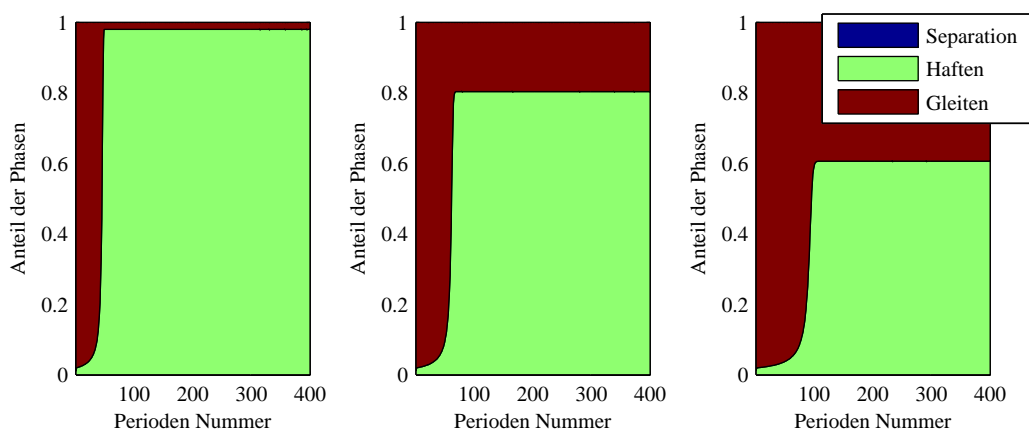


Abbildung 5.10: Verteilung der Haft-, Gleit und Separationsanteile. **Links)** Schnelle Rückstellung. **Mitte)** Mittelschnelle Rückstellung. **Rechts)** langsame Rückstellung.

dar, vielmehr ist hier der begrenzende Faktor die Nutzbarkeit für umfangreichere Parameterstudien, die relativ viel Zeit benötigen. Dieses soll im folgenden Abschnitt erheblich verbessert werden.

## 5.4 Berechnung des eingeschwungenen Motorverhaltens

Für umfangreiche Parameterstudien ist das im vorangegangenen Abschnitt eingeführte Modell noch zu rechenintensiv. Der Grund hierfür liegt im Wesentlichen in der langen Zeit (viele Schwingungsperioden) die der Motor benötigt, um seine Endgeschwindigkeit zu erreichen. Dieses gewinnt insbesondere dann an Bedeutung, wenn das angetriebene Objekt eine große Massenträgheit besitzt. Im Allgemeinen ist dieser Einschwingvorgang bei der Motorauslegung nicht von allergrößtem Interesse, da das Verhalten im (eingeschwungenem) Betriebszustand dominiert. Daher liegt es nahe, das Modell weiter zu vereinfachen, und anstelle des massebehafteten angetriebenen Körpers einen Körper (beliebiger Masse) mit vorgegebener Geschwindigkeit zu betrachten. Damit ist nicht mehr die Geschwindigkeit das gesuchte Ergebnis, sondern die Kontaktkräfte über die dann auf die Lastkräfte geschlossen werden kann. Dieses bedeutet natürlich, dass keine Bewegungsänderung des Objektes mehr sichtbar wird und die Masse jetzt keinen Einfluss auf das Motorverhalten hat. Wenn das gleiche Verhalten in dem zuvor vorgestellten Modell gezeigt werden soll, muss die Massenträgheit des angetriebenen Objektes sehr groß werden. Dieser Ansatz eignet sich besonders für hochfrequente Antriebe, bei denen aufgrund der Betriebsfrequenz das Zeitintervall zwischen den Kontaktphasen sehr klein ist. In der kurzen kontaktlosen Phase verhindert die Massenträgheit des angetriebenen Objektes eine deutliche und sofortige Änderung seiner Geschwindigkeit. Als Skizze für das Modell dient weiterhin die Abbildung 5.1.

Eine weitere Beschleunigung und Stabilisierung der Rechnung verspricht die Änderung der mathematischen Problemformulierung. Anstelle der bisher verwendeten differentiellen Formulierung wird nun ein inkrementelles Schema gewählt. In der englischsprachigen Literatur wird das Verfahren gelegentlich *time merging procedure* genannt. Dieses Verfahren wurde ausführlich von POUDOU [177] vorgestellt und mit der differentiellen Formulierung verglichen.

Die wesentliche Idee des Verfahrens ist der Verzicht auf die Nutzung eines Integrators. Das hier benutzte und beschriebene Verfahren unterscheidet sich wesentlich von dem von POUDOU beschriebenen. Hier wird anstelle des komplett a priori bekannten Zeitvektors mit konstanter Zeitschrittweite der Zeitvektor mit adaptiver Schrittweite zur Laufzeit erstellt, um die Umschaltzeitpunkte zwischen den Kontaktzuständen deutlich genauer aufzulösen. Die Berechnung läuft in einer Schleife, die beendet wird, sobald die vorher festgelegte Endzeit erreicht ist. Ein einzelner Schleifendurchlauf wird im Folgenden beschrieben:

1. **Trajektorienbestimmung:** Im ersten Schritt wird die Auslenkung und die Ge-



schwindigkeit des Federfußpunktes des idealisierten Kontaktpunktes für den aktuellen Zeitschritt berechnet. Hier am Beispiel einer elliptischen Trajektorie, wobei aber anzumerken ist, dass diese im Allgemeinen beliebig sein kann:

$$W_{N,(i)} = \hat{w}_N \sin(\Omega t_{(i)}) + \bar{w}_N \quad (5.12)$$

$$w_{T,(i)} = \hat{w}_T \cos(\Omega t_{(i)} + \varphi_T) \quad (5.13)$$

$$\dot{w}_{N,(i)} = \hat{w}_N \Omega \cos(\Omega t_{(i)}) \quad (5.14)$$

$$\dot{w}_{T,(i)} = -\hat{w}_T \Omega \sin(\Omega t_{(i)} + \varphi_T) \quad (5.15)$$

2. **Normalkraftberechnung:** Die Normalkraft wird dann mit der folgenden Gleichung bestimmt. An dieser Stelle sei nochmals daran erinnert, dass hier mit einem wegeinprägten und dämpfungsfreien Modell gearbeitet wird und daher die Erkennung des Kontakts allein von der Wegkoordinate abhängt.

$$F_{N,(i)} = \begin{cases} 0 & \text{für } W_{N,(i)} < 0 \\ c_N W_{N,(i)} & \text{für } W_{N,(i)} \geq 0 \end{cases} \quad (5.16)$$

- 3a. **Initialisierung:** Für den Fall, dass dies der inertielle Schleifendurchlauf ist, werden die ersten Werte mit den unten angegebenen initialisiert. Nach diesem Schritt wird dann direkt zu Schritt 6 gesprungen. Die Formulierung mit dem Kleiner-Gleichzeichen für  $F_N$  ergibt sich aus der numerischen Implementierung. In einer exakten Formulierung müssten Gleichzeichen eingesetzt werden.

$$stat_{(1)} = \begin{cases} \text{Separation} & \text{für } F_{N,(1)} \leq 0 \\ \text{Haften} & \text{für } F_{N,(1)} > 0 \end{cases} \quad (5.17)$$

$$s_{(1)} = w_{T,(1)} \quad (5.18)$$

- 3b. **Haftannahme:** In allen folgenden Durchläufen wird getestet, ob im aktuellen Zeitschritt Kontakt vorherrscht oder nicht. Falls es ein Schritt mit Kontakt ist, wird zunächst angenommen, dass Haften vorliegt. Damit folgen die Werte:

$$stat_{(i)} = \begin{cases} \mathbf{Separation} & \text{für } F_{N,(i)} \leq 0 \\ \mathbf{Haften} & \text{für } F_{N,(i)} > 0 \end{cases} \quad (5.19)$$

$$F_{T,(i)} = \begin{cases} 0 & \text{für } F_{N,(i)} \leq 0 \\ c_T (w_{T,(i)} - s_{(i-1)}) & \text{für } F_{N,(i)} > 0 \end{cases} \quad (5.20)$$

$$s_{(i)} = \begin{cases} w_{T,(i)} & \text{für } F_{N,(i)} \leq 0 \\ s_{(i-1)} + v_{(i-1)} \Delta t_{(i-1)} & \text{für } F_{N,(i)} > 0 \end{cases} \quad (5.21)$$

4. **Überprüfung und Korrektur:** Ist in Schritt 3b Haften angenommen worden, muss nun überprüft werden, ob Haften tatsächlich der korrekte Status ist, oder ob stattdessen der Status Gleiten vorliegt, wofür die Ungleichung  $|F_{T,(i)}| > \mu F_{N,(i)}$  genutzt wird. Ist die Ungleichung wahr, müssen die zuvor angenommenen Werte korrigiert werden. Die Kraft in tangentialer Richtung lässt sich mit  $|F_T| = \mu F_N$  bestimmen. Die Verschiebung des idealisierten Kontaktpunktes ergibt sich aus der umgestellten Gleichung 5.20 für den Haftfall.

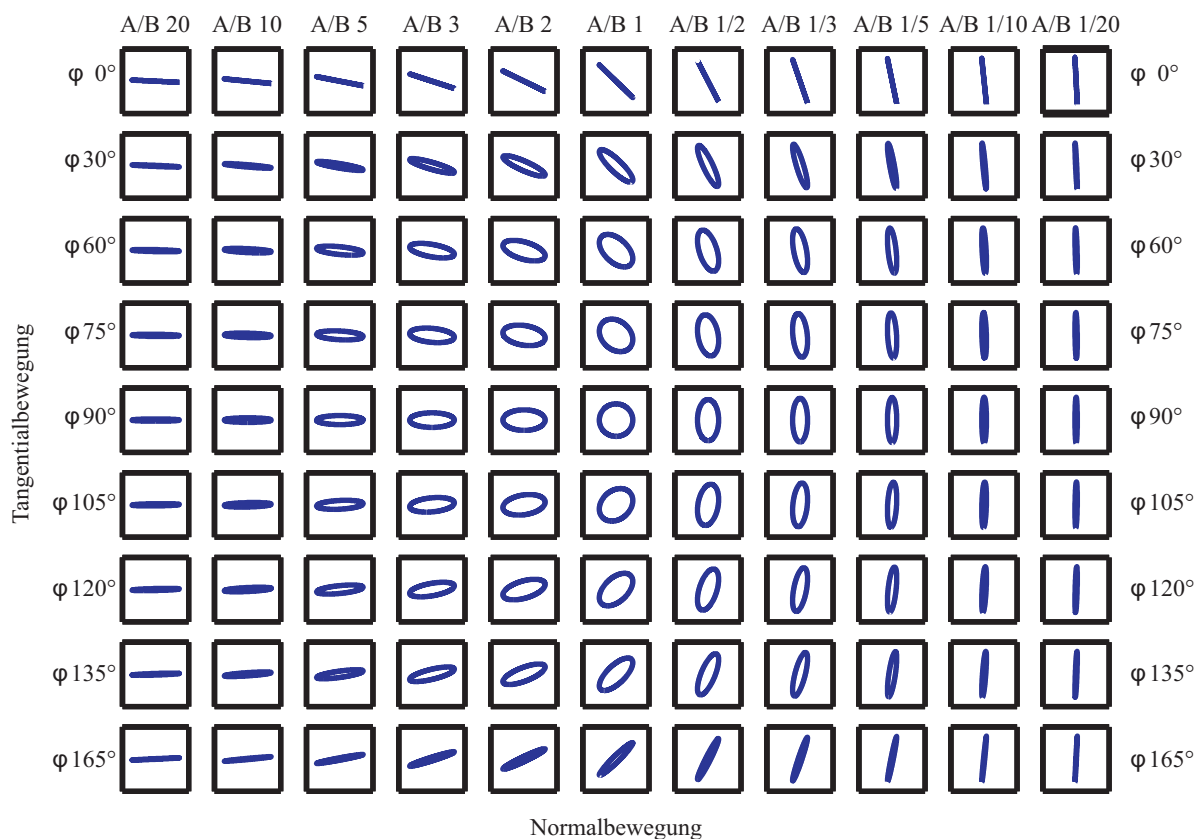
$$stat_{(i)} = \mathbf{Gleiten} \quad (5.22)$$

$$F_{T,(i)} = \begin{cases} \mu F_{N,(i)} \operatorname{sign}(\dot{w}_{T,(i-1)} - v_{(i-1)}) & \text{für } stat_{(i-1)} = \mathbf{Separation} \\ \mu F_{N,(i)} \operatorname{sign}(F_{T,(i-1)}) & \text{sonst} \end{cases} \quad (5.23)$$

$$s_{(i)} = w_{T,(i)} - \frac{w_{T,(i)}}{c_T} \quad (5.24)$$

5. **Schrittverfeinerung:** Nachdem jetzt für den Zeitschritt  $t_{(i)}$  alle Kräfte korrekt bestimmt sind, soll noch überprüft werden, ob ein Wechsel des Kontaktstatus stattgefunden hat und gegebenenfalls soll eine Verfeinerung der Schrittweite durchgeführt werden muss. Dazu wird mit der Ungleichung  $stat_{(i)} \neq stat_{(i-1)}$  auf den Statuswechsel getestet. Hat ein solcher stattgefunden und ist die minimale Schrittweite (aktuelle Zoomstufe  $z_{(i)}$ , und maximale Zoomstufe  $z_{max}$ ) noch nicht erreicht, wird der Zeitpunkt  $t_{(i)}$  mit  $t_{(i)} = t_{(i-1)} + \frac{\Delta t}{z_{(i)}+1}$  neu gesetzt. Die bisher für diesen Schritt berechneten Werte werden verworfen und für das neue  $t_{(i)}$  bestimmt, indem direkt zu Schritt 1 zurückgesprungen wird.
6. **Speichern des Zeitschritts:** In diesem letzten Schritt des Schleifendurchgangs wird der Zähler  $i$  hochgezählt und das  $t_{(i+1)}$  mit  $t_{(i+1)} = t_{(i)} + \frac{\Delta t}{z_{(i+1)}}$  bestimmt. In dem Fall, dass dies der erste Schritt in einem neuen Kontaktstatus ist, wird die Zoomstufe  $z_{(i+1)}$  um 1 verringert, dies geschieht in allen folgenden Schleifendurchläufen, bis die Zoomstufe 1 erreicht ist oder eine erneute Verfeinerung notwendig wird.

Das Verfahren wurde ebenfalls in MATLAB implementiert. Beispielhafte Vergleichsrechnungen zum zuvor untersuchten Modell haben gezeigt, dass die Ergebnisse übereinstimmen. Aufgrund der viel höheren Auswertegeschwindigkeit wird im Folgenden eine Pa-



**Abbildung 5.11:** Untersuchter Parameterraum der Antriebsellipsen am Federfußpunkt, mit  $A/B = \hat{w}_N/\hat{w}_T$

parameterstudie unter Verwendung dieses numerischen Verfahrens durchgeführt, um ein grundlegendes Verständnis für die wichtigsten beziehungsweise empfindlichsten Parameter zu schaffen.

## 5.5 Form der Anregung

Mit dem implementierten Rechenverfahren werden jetzt grundlegende Zusammenhänge des Einflusses von Form und Lage der Antriebstrajektorie auf die Motorkennlinie aufgezeigt. Dafür wird eine rein harmonische Bewegung der Federfußpunkte angenommen. Ihre Komponenten genügen den Zusammenhängen

$$x_T = \hat{w}_T \cos(\Omega t + \varphi) \text{ und} \quad (5.25)$$

$$x_N = \hat{w}_N (\cos(\Omega t) + W_N^*) \text{ mit } W_N^* \geq -1. \quad (5.26)$$

Dabei ist  $W_N^*$  die auf die Normalamplitude  $\hat{w}_N$  bezogene Verschiebung der Nulllage der Normalbewegung. Gilt  $W_N^* = -1$ , dann tangiert die Kontakttrajektorie das angetriebene Objekt, für  $W_N^* = 0$  ergibt sich 50% Kontaktzeit, steigt  $W_N^*$  über 1 ist der Stößel ständig in Kontakt.  $\hat{w}_T$  ist die Tangentialamplitude und  $\varphi$  die Phasenverschiebung zwischen den beiden Komponenten und bestimmt die Verdrehung der Ellipse. Um die Ergebnisse ver-

gleichbar zu halten, wird mit der Forderung

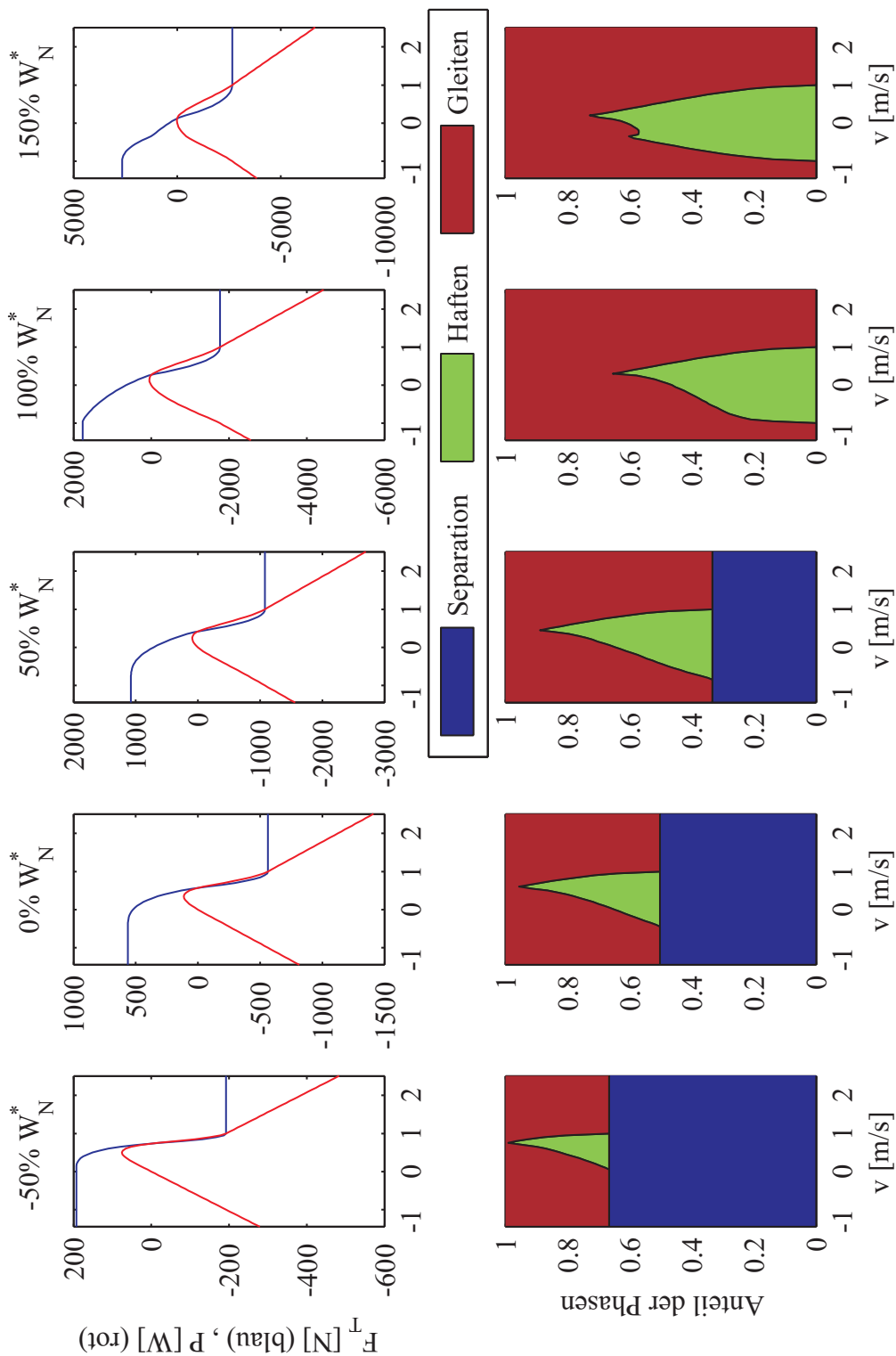
$$\hat{w}_N^2 + \hat{w}_T^2 = \text{konstant} \quad (5.27)$$

ein annähernd konstanter Umfang der Trajektorie sichergestellt. Um die Anzahl der Parameter weiter einzuschränken, wird das Verhältnis  $\hat{w}_N/\hat{w}_T$  anstatt der einzelnen Amplituden variiert. Diese drei ( $\hat{w}_N/\hat{w}_T$ ,  $\varphi$  und  $W_N^*$ ) Parameter sollen nun näher untersucht werden. Abbildung 5.11 zeigt die Formen der untersuchten Ellipsen.

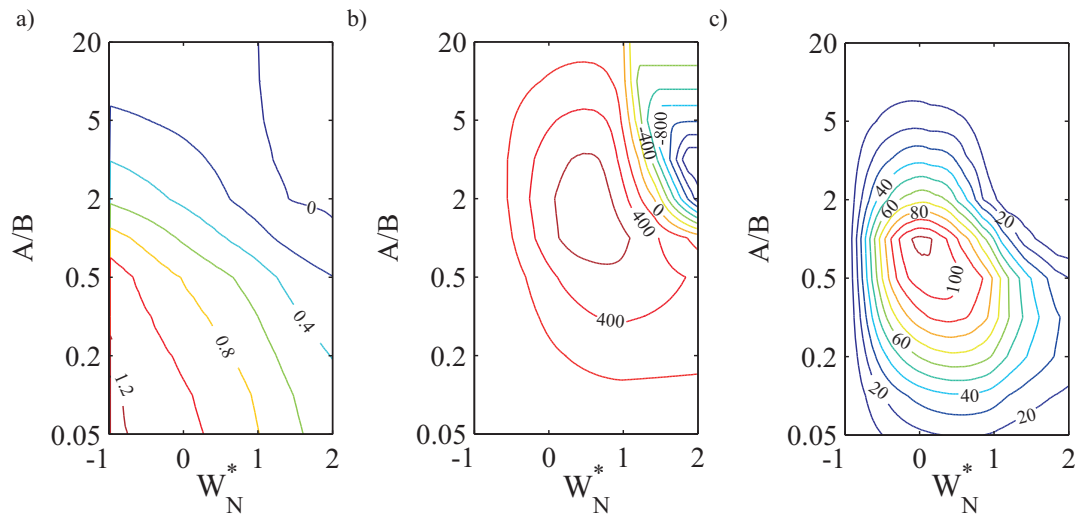
Mit dem Rechenverfahren aus dem letzten Abschnitt lassen sich die charakteristische Kennlinien unter Vorgabe der Objektgeschwindigkeit bestimmen. In der Abbildung 5.12 sind diese dargestellt. Die gewählte Darstellung ist etwas ungewöhnlich, denn es ist nicht nur der obere rechte Quadrant dargestellt, der der Standarddarstellung (vgl. Abbildung 5.7) entspricht, sondern alle vier Quadranten. Dies hat den Vorteil, dass direkt eine Plausibilitätsüberprüfung anhand der Maximalwerte der Kraft möglich ist. Für hohe positive und negative Objektgeschwindigkeiten strebt dieser Wert gegen den erwarteten Endwert, der dem Produkt aus Normalkraft und Reibwert entspricht. Die ebenfalls dargestellte Leistungskennlinie nimmt nur im klassischerweise dargestellten Bereich, also dem ersten Quadranten, positive Werte an. Im Falle negativer Werte kann die Bremsleistung abgelesen werden. Die fünf Kennlinien sind alle mit den Parametern  $\hat{w}_N/\hat{w}_T = 1$ ,  $\varphi = 90^\circ$  und der jeweilig angegebenen Mittellage berechnet. Neben der Kennlinie sind jeweils auch die Aufteilung in Haft-, Gleit- und Separationsphasen dargestellt. Aufgrund der eingepprägten Trajektorie ist der Separationsanteil jeweils konstant, der Haftanteil hat ein Maximum bei der Leerlaufgeschwindigkeit (also dem gemeinsamen Nulldurchgang der Kraft- und Leistungskurve) des Antriebs.

Um den gesamten Parameterraum zu analysieren, sollen die drei charakteristischen Kennwerte Leerlaufgeschwindigkeit, Blockierkraft und die maximale Leistung<sup>3</sup> aufgetragen werden. Da drei Parameter variiert werden, ist eine graphische Darstellung in einem einzigen Diagramm nicht sinnvoll möglich. In der Abbildung 5.13 ist die Variation von zwei Parametern dargestellt, dem Amplitudenverhältnis  $\hat{w}_N/\hat{w}_T$  und der Mittellage  $W_N^*$ . Die größte Leerlaufgeschwindigkeit  $v_0$  erhält man erwartungsgemäß bei einer großen Tangentialamplitude und einer möglichst kurzen Kontaktzeit ( $W_N^* \rightarrow -1$ ). Die größte Blockierkraft  $F_B$  ergibt sich für ein Amplitudenverhältnis von 2, also doppelt so große Normal- wie Tangentialamplitude, und einem  $W_N^*$  von 0.5, was einer Separationsdauer in etwa einer viertel Anregeperiode entspricht. Die größte Leistung ist mit einer kreisrunden Trajektorie zu erzielen, mit einem  $W_N^*$  knapp über 0. Mit Hilfe der gezeigten Diagramme lässt sich je nach Anwendungsfall eine geeignete Trajektorie auswählen. Soll beispielsweise die maximale Leistung erzielt werden, ist ein Amplitudenverhältnis  $\hat{w}_N/\hat{w}_T = 1$  und die Mittellage  $W_N^* = 0.1$  eine geeignete Wahl. Berechnungen für weitere Parameterkombinationen finden sich im Anhang auf den Abbildungen A.1 bis A.4.

<sup>3</sup>Die maximale Leistung ist nur im Fall einer linearen Kennlinie gleich  $\frac{1}{2}F_B v_0$ , hier wird sie für jede einzelne Kraft- Geschwindigkeitskombination berechnet.



**Abbildung 5.12: Oben)** Kraft- und Leistungskennlinie. **Unten)** Aufteilung der Haft-, Gleit- und Separationsphase. Mit den Parametern  $\hat{w}_N/\hat{w}_T = A/B = 1$  und  $\varphi = 90^\circ$  mit variiertem  $W_N^*$ .



**Abbildung 5.13:** Variation der Parameter  $A/B = \hat{w}_N/\hat{w}_T$  und  $W_N^*$  bei konstantem  $\varphi = 90^\circ$ . **a)** Leerlaufgeschwindigkeit [m/s] **b)** Blockierkraft [N] **c)** Maximale Leistung [W]

## 5.6 Übertragung auf ein Anwendungsbeispiel

In den Parameterstudien ist der Einfluss der Ellipsenform auf das Motorverhalten untersucht und diskutiert worden. Dabei wurde noch nicht beachtet, inwieweit es überhaupt möglich ist, mit der Schwingergeometrie eine derartige Ellipse zu erzeugen. Dieser Abschnitt greift genau diese Frage auf und beantwortet sie beispielhaft unter Zuhilfenahme eines rein geometrischen/kinematischen Modells der Kopfgeometrie des Motors, wie er in den Experimenten in Kapitel 4 verwendet wurde. In Abbildung 5.14 ist die verwendete Geometrie skizziert, wobei die Stößellänge  $\ell_s$  und die Breite  $b$  die wesentlichen Parameter der Geometrie darstellen. Der Stößel steht immer senkrecht auf der Querverbindung zwischen den beiden Ankoppelpunkten zu den Einzelschwingern. Diese beiden Punkte werden mit einer eingepprägten Bewegung

$$x_1(t) = \hat{x}_1 \cos(t) \quad (5.28)$$

$$x_2(t) = \hat{x}_2 \cos(t + \varphi_A) \quad (5.29)$$

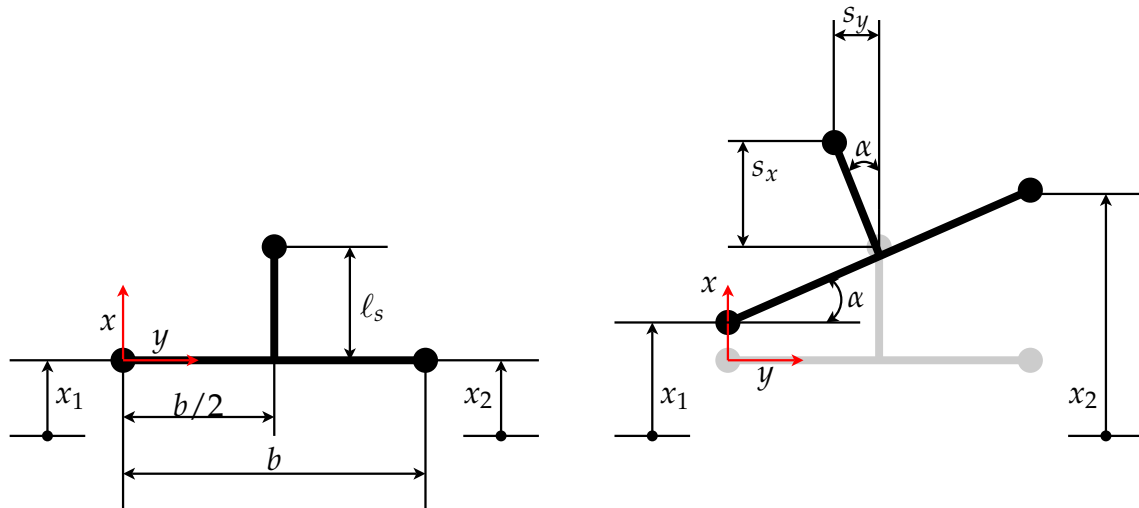
angeregt. Mit Hilfe der beiden Ankoppelpunktverschiebungen und der Breite lässt sich der Verdrehwinkel der Kopfgeometrie

$$\tan \alpha(t) = \frac{x_2(t) - x_1(t)}{b} \quad (5.30)$$

bestimmen. Die Koordinaten  $s_x$  und  $s_y$  beschreiben den Abstand des Stößels zu seiner Nulllage, mit der Annahme, dass sich der Stößel immer in der Mitte der Querverbindung befindet und sich dieser in  $y$ -Richtung nicht verschiebt:

$$s_x(t) = x_1(t) + \ell_s (\cos(\alpha(t)) - 1) + \frac{b}{2} \sin(\alpha(t)) \quad (5.31)$$

$$s_y(t) = -\ell_s \sin(\alpha(t)). \quad (5.32)$$



**Abbildung 5.14:** Skizze der Kopfgeometrie des Schwingers. Die linke Skizze zeigt den unausgelenkten Fall, die rechte zeigt einen übertrieben dargestellten ausgelenkten Fall.

Einsetzen von  $\alpha$  in die obige Gleichung gibt einen offensichtlich nichtlinearen Zusammenhang. Diese Nichtlinearität hat für kleine Auslenkungen, wie sie im Fall des Schwingungsmotors vorliegen, nur geringe Auswirkungen. Um die Ergebnisse des geometrischen Zusammenhanges mit den zuvor untersuchten Trajektorien, die immer die Form<sup>4</sup>

$$x_s(t) = \hat{x}_s \cos(t) \quad (5.33)$$

$$y_s(t) = \hat{y}_s \cos(t + \varphi_s) \quad (5.34)$$

hatten, zu vergleichen, kann eine Fourier Transformation von  $s_x(t)$  und  $s_y(t)$  durchgeführt werden. Die vier Koeffizienten für die Anregungsfrequenz ergeben sich dann zu:

$$x_{s,s}(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} s_x(\Omega t) \sin(\Omega t) d\Omega t \quad (5.35)$$

$$x_{s,c}(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} s_x(\Omega t) \cos(\Omega t) d\Omega t \quad (5.36)$$

$$y_{s,s}(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} s_y(\Omega t) \sin(\Omega t) d\Omega t \quad (5.37)$$

$$y_{s,c}(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} s_y(\Omega t) \cos(\Omega t) d\Omega t. \quad (5.38)$$

Mit diesen Koeffizienten lassen sich die drei Parameter für die Ellipse bestimmen, wobei die Amplituden mit

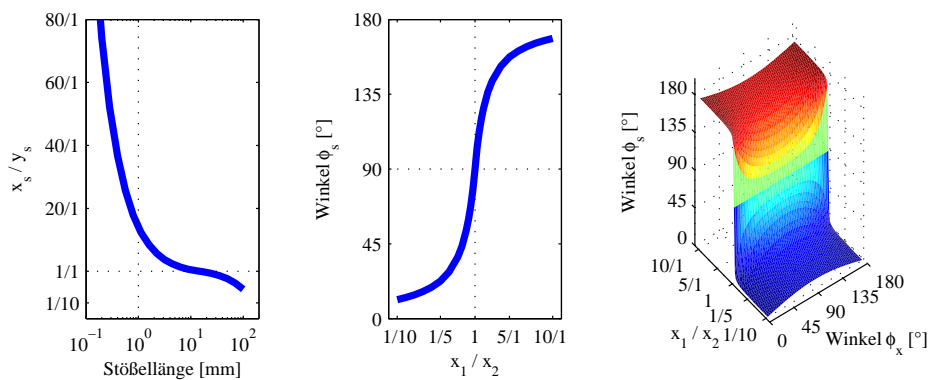
$$\hat{x}_s = \hat{w}_N = \sqrt{x_{s,s}^2 + x_{s,c}^2} \quad (5.39)$$

$$\hat{y}_s = \hat{w}_T = \sqrt{y_{s,s}^2 + y_{s,c}^2} \quad (5.40)$$

beschrieben werden und sich die Phasendifferenz zu

$$\varphi_s = \arctan \frac{y_{s,s}}{y_{s,c}} - \arctan \frac{x_{s,s}}{x_{s,c}} \quad (5.41)$$

<sup>4</sup>Unter Vernachlässigung des statischen Verschiebungsanteils



**Abbildung 5.15:** **Links)** Abhängigkeit des Amplitudenverhältnisses  $\hat{x}_s/\hat{y}_s$  von der Länge des Stößels, bei konstanter Breite (30 mm). **Mitte)** Abhängigkeit der Phase  $\varphi_s$  vom Amplitudenverhältnis der Anregung  $\hat{x}_1/\hat{x}_2$ . **Rechts)** Abhängigkeit der Phase  $\varphi_s$  vom Amplitudenverhältnis der Anregung  $\hat{x}_1/\hat{x}_2$  und der Anregephase  $\varphi_A$ .

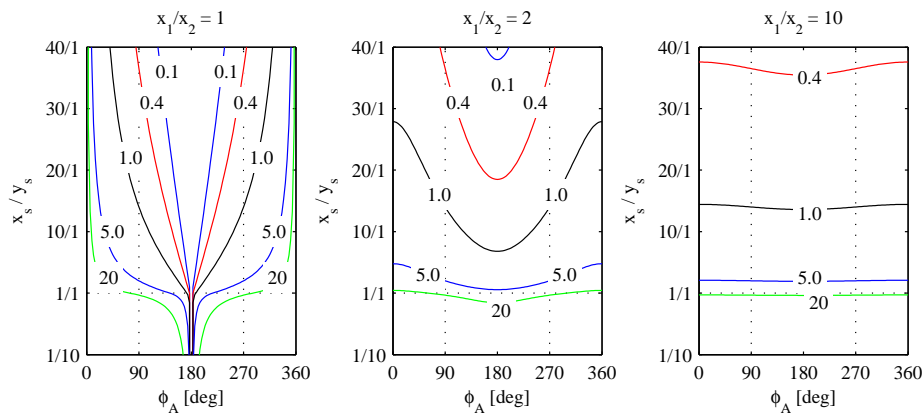
ergibt. Die Integrale werden aufgrund des zeitabhängigen Winkels  $\alpha$  numerisch berechnet. Um die Abhängigkeit der Ellipsenparameter von den Geometrieparametern zu zeigen, sind verschiedene Einflüsse untersucht worden. In Abbildung 5.15 (links) ist als erstes der Zusammenhang zwischen Stößellänge und Amplitudenverhältnis der Antriebsellipse untersucht worden, dafür ist die Breite (30 mm) und die Anregephase ( $90^\circ$ ) konstant gehalten. Für das Verhältnis der Anregeamplituden gilt stets

$$\sqrt{\hat{x}_1^2 + \hat{x}_2^2} = konst. \quad (5.42)$$

Es fällt auf, dass Ellipsen mit großer Normalkomponente für realistische Stößellängen dominieren, selbst für sehr große Stößellängen kommt man bei der betrachteten Phasenlage nur auf ein maximales Amplitudenverhältnis von etwa 1/10. Interessanterweise hat das Verhältnis der Anregeamplituden keinen wesentlichen Einfluss auf dieses Ergebnis. Wogegen die Phase der Antriebsellipse genau davon stark abhängt, von der Stößellänge aber weitestgehend unbeeinflusst ist (Abbildung 5.15 (Mitte)). In Abbildung 5.15 (Rechts) fällt auf, dass die Phasen der Antriebsellipse viel stärker von dem Amplitudenverhältnis der Anregung als von der Phase der Anregung abhängt. Weiterhin ist offensichtlich, dass eine Phase von  $90^\circ$  am geeignetsten ist, um die Antriebsphase feinfühlig einzustellen.

Da sich herausgestellt hat, dass das Amplitudenverhältnis der Antriebsellipse von entscheidender Bedeutung für den Antriebsprozess ist (vgl. Kapitel 5.5), soll genau diesem Parameter besondere Aufmerksamkeit geschenkt werden. In Abbildung 5.16 ist es für drei verschiedene Anregeamplitudenverhältnisse dargestellt. Jede Linie steht für eine Stößellänge (in mm), für die das Antriebsamplitudenverhältnis in Abhängigkeit der Anregephase berechnet worden ist. Sehr deutlich ist zu erkennen, dass es wesentlich leichter ist, einen großen x-Anteil in der Antriebsellipse zu erzeugen. Erst mit sehr langen Stößeln ist es möglich einen dominanten Tangentialanteil zu generieren, der verglichen zu den maximal möglichen Normalanteilen immer noch klein bleibt.





**Abbildung 5.16:** Abhängigkeit des Amplitudenverhältnisses  $\hat{x}_s/\hat{y}_s$  von der Anregephase  $\varphi_A$  und der Stößellänge in mm bei konstantem Anregeamplitudenverhältnis  $\hat{x}_1/\hat{x}_2$ . **Links)**  $\hat{x}_1/\hat{x}_2 = 1$ . **Mitte)**  $\hat{x}_1/\hat{x}_2 = 2$ . **Rechts)**  $\hat{x}_1/\hat{x}_2 = 10$ .

Zusammenfassend kann festgestellt werden, dass die Antriebsellipse in Amplitudenverhältnis und Phasendifferenz über die drei wichtigen Parameter Stößellänge, Amplitudenverhältnis der Anregung und Phasenversatz zwischen den Anregesignalen gut eingestellt werden kann, wobei Ellipsen mit dominantem x-Anteil für realistische Baugrößen die Regel sind. Weiterhin fällt auf, dass die Abhängigkeit von den Parametern sehr sensitiv ist, was in der Modellierung kein Problem ist, aber in der Praxis einen großen Einfluss auf das erzielte Ergebnis hat. Besonders wenn man bedenkt, dass nicht alle Parameter direkt einstellbar sind, sondern von vielen konstruktiven Randbedingungen insbesondere auch den Fertigungs- und Montagetoleranzen abhängen.

## 5.7 Fazit

Mit dem in diesem Kapitel vorgestellten Modell lassen sich auf einfache Weise reibungsbasierte Antriebe beschreiben. Dabei wurde das Problem auf die wesentlichen Parameter reduziert. Viele Effekte sind dabei vernachlässigt worden und es ist damit gelungen ein einfaches respektive schnell rechenbares und gut nachvollziehbares Modell zu erhalten, welches für beliebige vorgegebene Bahnen der Kontaktpunktanregung die Berechnung von Motorkennlinien ermöglicht.

Mit den erstellten Modellen konnte gezeigt werden, dass die Berechnung verschiedener Antriebstypen möglich ist. Insbesondere die Untersuchung des Einflusses der Trajektorie des Kontaktpunktes konnte Aufschluss über die Auswirkungen auf die Antriebscharakteristik geben. Diese Ergebnisse wurden beispielhaft mit einem rein geometrischen/kinematischen Modell auf die Motorgeometrie des *Shaking-Beam*-Motors übertragen. Damit ist es möglich, für diese Applikation die geeignete Geometrie zu wählen.

Im nächsten Kapitel soll aufbauend auf den bisherigen Erkenntnissen der Einfluss von Kontaktvorgängen auf die Schwingungsform untersucht werden.

## 6 Einfluss von Kontaktvorgängen auf die Schwingungsform des Stators

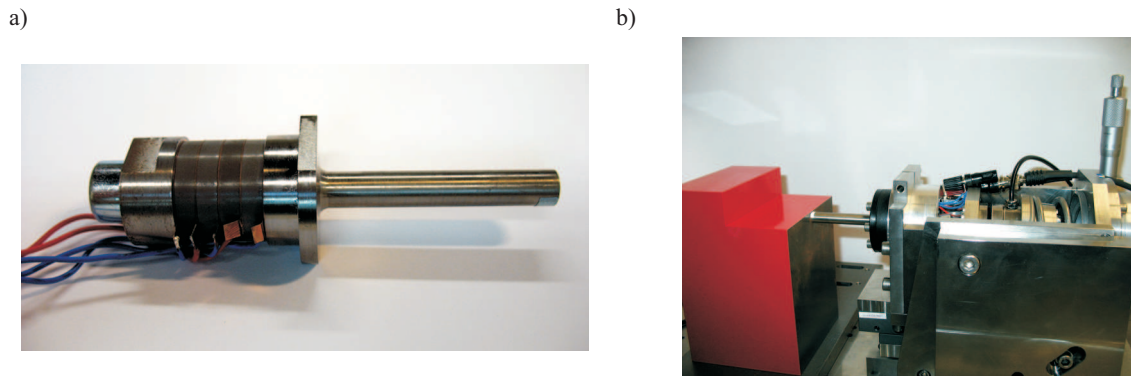
Bei der üblichen Auslegung von Ultraschallschwingern, also in diesem Fall des Stators, wird davon ausgegangen, dass sich die Schwingungsform im Betrieb nicht ändert, und sich nur die Amplitude abhängig von der *Lastdämpfung* ändert. Diese Annahme hat sich als gute Näherung für viele Applikationen bewährt. Dabei wird in der Regel der Lasteinfluss mit einem linearen Dämpfungsterm in das einfache modale Ersatzmodell (vgl. Kapitel 2.4.4) integriert.

Aus den in Kapitel 3.1 dargelegten Gründen wird in diesem Kapitel der Einfluss von Kontaktvorgängen auf die Schwingungsform des Stators untersucht. Dazu wird ein Referenzsystem beschrieben, welches hinreichend komplex ist, um die wesentlichen Effekte zu untersuchen, aber noch einfach genug, um diese Einflüsse weitgehend isoliert zu betrachten. Zu diesem System wird zunächst ein Modell mit konzentrierten Parametern und  $n$  Freiheitsgeraden untersucht. Für eine erste Modellvalidierung werden ein experimenteller Aufbau vorgestellt und Messungen an diesem durchgeführt.

### 6.1 Referenzsystem

Für die Untersuchung des transienten Lastverhaltens soll ein eindimensionaler Stoßkontakt untersucht werden, der zwischen einem Ultraschallschwinger und einem elastischen Untergrund stattfindet. Als Ultraschallsystem ist ein LANGEVIN-Transducer (vgl. Abbildung 6.1a) aufgebaut worden. Dieser Schwinger besteht aus einem Stufenhorn aus Titan, vier piezoelektrischen Ringelementen (hartes PZT, PIC181) und einer Endmasse aus Stahl. Die vergleichsweise große Stufe ist zum einen vorgesehen, um eine große Ausgangsamplitude zu erzeugen. Zum anderen um das System empfindlich gegen äußere Lasten zu machen, so dass der zu untersuchende Effekt einen signifikanten Anteil am Verhalten hat. Der Schwinger ist, wie für diesen Typ üblich, mit einer Schraube auf eine Spannung von ca. 30 MPa in den piezoelektrischen Elementen vorgespannt.

Der Kontaktpartner ist ein massiver Stahlblock. Für die experimentellen Untersuchungen ist ein Prüfstand aufgebaut worden, siehe Abbildung 6.1b. Er ermöglicht es, die Schwingung nahe des Kontaktpunktes mittels eines Laservibrometers zu messen. Um während der Versuche eine möglichst konstante Anpresskraft zu gewährleisten, wird der Schwinger in seiner Lagerung über eine sehr weiche Feder gegen den Stahlblock gedrückt. Mit



**Abbildung 6.1:** a) Untersucher LANGEVIN-Transducer. b) Aufbau des Stoßkontakt Prüfstands.

einer Kraftmessdose kann die Anpresskraft während der Versuche gemessen werden. Um eine mögliche axiale Bewegung nicht zu beeinträchtigen, ist die Lagerung für den Schwinger auf einem Linearrollenkugellager montiert. Die Lagerung des Schwingers ist aus einem Kunststoff aufgebaut, um bei einer leichten Verschiebung der Knotenebene<sup>1</sup> die Schwingung nur in geringem Maße zu beeinflussen.

## 6.2 Modellbildung

In diesem Abschnitt wird der Einfluss von hochfrequenten Stoßkontakten<sup>2</sup> auf die Schwingungsform untersucht. Das oben dargestellte System soll dazu in ein Mehr-Massen-Modell diskretisiert werden. In der Abbildung 6.2 sind zum leichteren Verständnis der Diskretisierungsmethode die relevanten Parameter des Schwingers in Abhängigkeit der Position skizziert. Weiterhin ist der Schwinger in  $n$  äquidistante Abschnitte zerlegt.

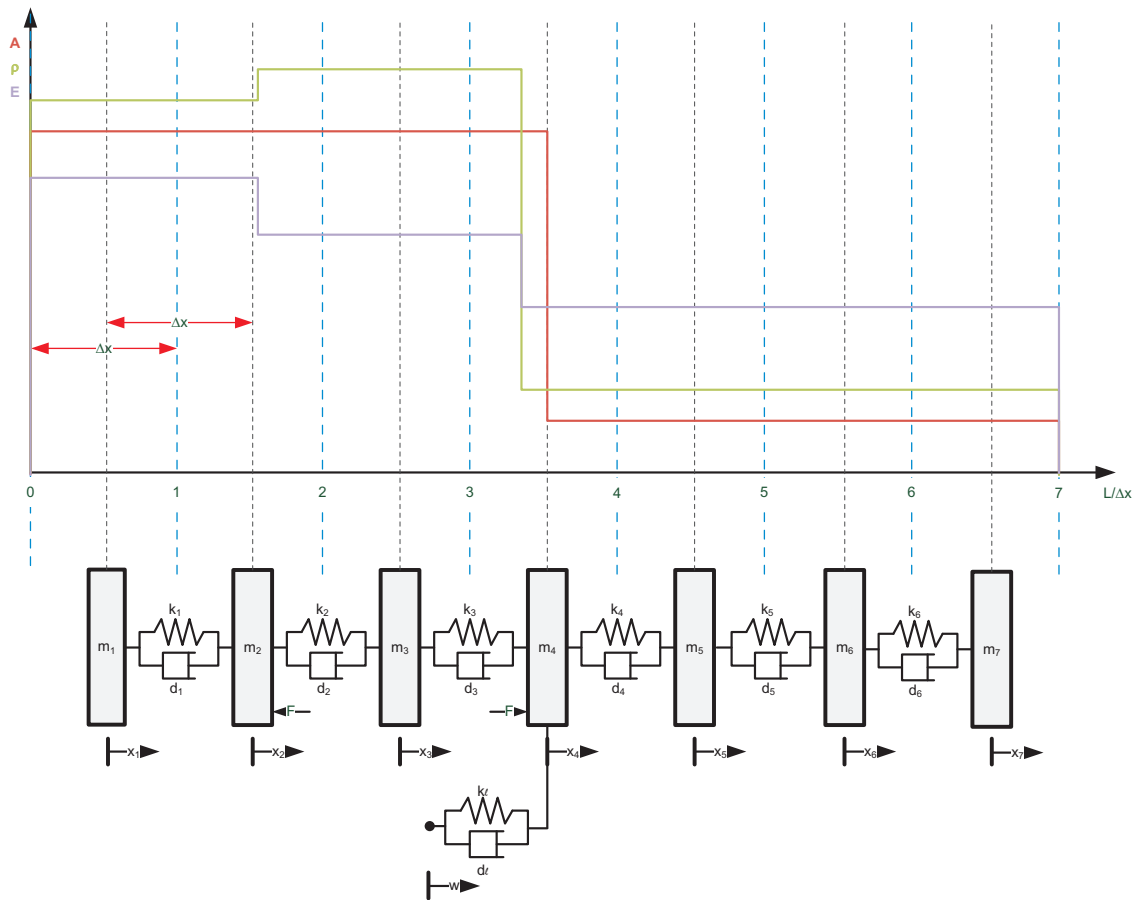
Mit dem Modell und der Annahme eines linearen Parameterverlaufs in jedem Abschnitt lassen sich die  $n$  konzentrierten Massen zu

$$m_i = \frac{\rho_{i-1} + \rho_i}{2} \frac{A_{i-1} + A_i}{2} \Delta X, \quad \text{mit } i = 1 \dots n \quad (6.1)$$

bestimmen. Dabei ist  $A_i$  die diskrete Querschnittsfläche an der rechten Grenze des  $i$ -ten Abschnittes,  $\rho_i$  die korrespondierende Dichte und  $\Delta X$  die Länge des Abschnittes. Damit stimmt die Gesamtmasse mit der physikalischen Masse des Schwingers überein. Der einzige Freiheitsgrad der Massen, die Verschiebung entlang der Achse, wird als  $x_i$  beschrieben und im Vektor  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_i, \dots, x_n)^T$  zusammengefasst. Für die Steifigkeiten  $k_j$  wird der Schwinger in  $n - 1$  Abschnitte von Massenpunkt zu Massepunkt zerteilt. Damit be-

<sup>1</sup>Mit der Knotenebene ist die gedankliche Schnittebene durch den Schwingungsknoten bezeichnet.

<sup>2</sup>Hochfrequente Stoßkontaktvorgänge werden im englischen oft als *vibro-impact* bezeichnet.



**Abbildung 6.2:** Beispielhafter Verlauf der diskretisierungsrelevanten Parameter und Zuordnung zu den einzelnen konzentrierten Parametern.

rechnet sich die einzelne Steifigkeit zu

$$k_j = \frac{\frac{E_j + E_{j+1}}{2} \frac{A_j + A_{j+1}}{2}}{\Delta X}, \quad \text{mit } j = 1 \dots n - 1. \quad (6.2)$$

Dabei wurde wieder ein linearer Verlauf der Parameter angenommen. Dabei ist  $A_j$  die Querschnittfläche an der  $j$ -ten Massenkoordinate und  $E_j$  der dazugehörige E-Modul. Aufgrund der zwei halben, nicht betrachteten, Randabschnitte stimmt die Gesamtsteifigkeit des Modells nicht genau mit der Steifigkeit des Schwingers überein. Der resultierende Fehler wird aber vernachlässigbar klein für hinreichend große  $n$ . Für die Massen- und Steifigkeitsmatrix des frei schwingenden Konverters, ohne Kontakt, folgen

$$\mathbf{M}_{\text{frei}} = \begin{pmatrix} m_1 & & \\ & \ddots & \\ & & m_n \end{pmatrix} \quad (6.3)$$



**Tabelle 6.1:** Geometrie- und Materialparameter des modellierten Systems

Abschnitt	1	2	3	4
Länge [mm]	25	20	15	63
Durchmesser [mm]	25	25	25	9
Dichte [ $\text{kg}/\text{m}^3$ ]	7800	7800	4500	4500
E-Modul [GPa]	210	160	120	120

dingung ermitteln

$$\mathbf{x}_0 = \begin{cases} \mathbf{K}_{\text{kontakt}}^{-1} \mathbf{w} k_\ell & \text{für } \mathbf{w}_{(\ell)} > 0 \\ \mathbf{K}_{\text{frei}}^{-1} \mathbf{w} k_\ell & \text{für } \mathbf{w}_{(\ell)} \leq 0 \end{cases} . \quad (6.10)$$

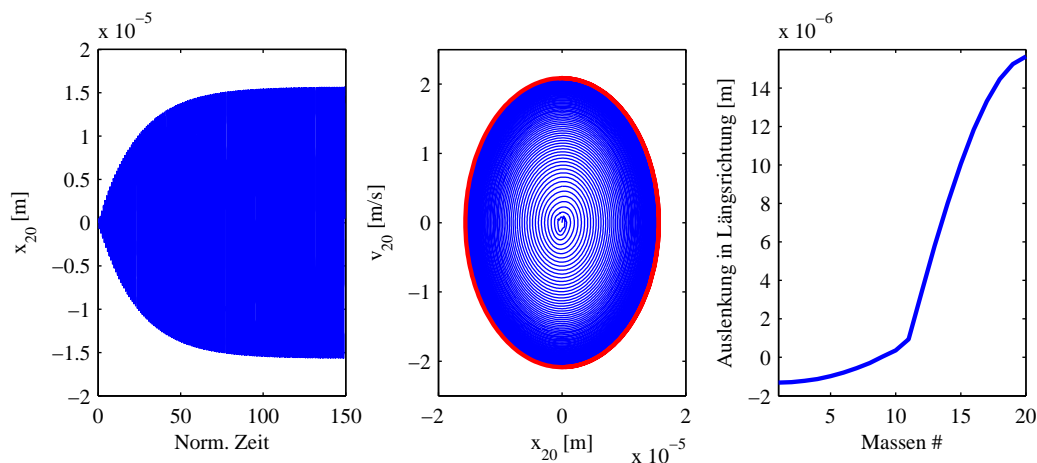
Aus der statischen Auslenkung  $\mathbf{x}_{0,(n)}$  ergibt sich im Kontaktfall die statische Anpresskraft

$$F_{\text{stat}} = \mathbf{x}_{0,(n)} k_{\text{kontakt}}. \quad (6.11)$$

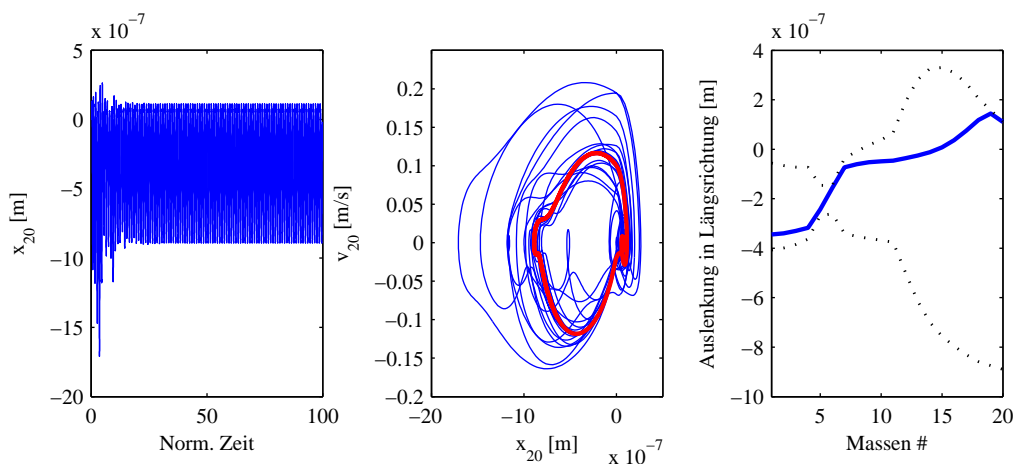
### 6.3 Analyse als fremderregtes System

Zur Evaluierung des Schwingverhaltens des in Abbildung 6.1 skizzierten Schwingers, wird dieser zunächst zur Plausibilitätsprüfung ohne Kontakt untersucht. Dazu ist in Abbildung 6.3 der Einschwingvorgang des freien Schwingers dargestellt, wobei im linken Diagramm der zeitliche Verlauf der Verschiebung am rechten Schwingerende, also dem Ende, welches später in Kontakt kommen wird, dargestellt ist. Im mittleren Diagramm ist das Phasendiagramm mit dem sich einstellenden Grenzykel zu sehen. Die sich einstellende Schwingungsform im rechten Diagramm zeigt, das zu erwartende Verhalten eines gestuften Longitudinalschwingers. Dieser ist für die gezeigte, wie auch für alle folgenden Rechnungen mit 20 konzentrierten Massen diskretisiert. Die Parameter der untersuchten Struktur sind in Tabelle 6.1 zusammengestellt. Die Piezokraft greift an den Grenzflächen zwischen den Abschnitten 1 und 2 bzw. zwischen 2 und 3 mit jeweils 1000 N Amplitude mit entgegengesetzter Richtung an. Die Anregungsfrequenz entspricht der freien Resonanzfrequenz. Der Schwingungsknoten liegt ein wenig links von der Mitte, nahe des neunten Massenpunkts. Daher wird das Feder-Dämpfer-Element für die Lagerung an dieser Masse angebunden, wobei die Federsteifigkeit (sofern nicht anders angegeben)  $10 \text{ N}/\mu\text{m}$  beträgt.

Nachdem gezeigt ist, dass das Model für den freien Fall plausible Ergebnisse liefert, wird auch die Kontaktsteifigkeit mit integriert (Größenordnung  $10^3 \text{ N}/\mu\text{m}$ ), und genau wie zuvor im freien Fall der Einschwingvorgang berechnet und visualisiert (vgl. Abbildung 6.4). Links ist wieder die Bewegung der Masse, die in Kontakt kommen kann, dargestellt. Es fällt auf, dass die Schwingung in den ersten Perioden unregelmäßiger ist als im freien Fall, sich dann aber deutlich schneller in einem eingeschwungenen Zustand befindet. Im Gegensatz zur freien Schwingung gibt es keine ausgeprägte Schwingungsform mehr. Daher sind in der rechten Darstellung die obere und untere Einhüllende, der Bewegung



**Abbildung 6.3:** Transientes Verhalten des freien Schwingers, Anregung in Resonanz



**Abbildung 6.4:** Transientes Verhalten des Schwingers mit Kontakt

im eingeschwungenen Zustand, eingetragen. Zusätzlich ist noch die Schwingungsverteilung zum Zeitpunkt der maximalen Auslenkung an der Schwingerspitze  $x_{20}$  gezeigt. An den Einhüllenden ist gut zu erkennen, dass der Schwinger *aufgeschwommen* ist, das heißt er hat eine neue stationäre Mittellage erreicht, mit der er sich von der Kontaktstelle entfernt. Auch ist gut zu erkennen, dass sich die Position mit der kleinsten Schwingung<sup>3</sup> weiter nach links verschoben hat. Vergleicht man die Größe der Schwingungsamplitude mit dem freien Fall, wird eine deutliche Reduktion der Auslenkung um etwa eine Größenordnung sichtbar.

Diese exemplarischen Untersuchungen zeigen, dass die Stoßkontakte einen großen Einfluss auf das Schwingverhalten haben und weiterhin wichtig für die Auslegung des Schwingers sein können. Daher soll im Folgenden der Einfluss der drei interessantesten Parameter Kontaktsteifigkeit, Lagersteifigkeit und statische Anpresskraft systematisch untersucht werden. Die Abbildungen zu den einzelnen Parameterstudien sind aus Gründen der Lesbarkeit im Anhang abgedruckt. Dort ist jeweils sowohl der Grenzykel als

<sup>3</sup>Da es sich nicht mehr um eine lineare Schwingung handelt, wird nicht mehr von Schwingungsknoten und -bäuchen gesprochen.

auch die Amplitudenverteilung angeben.

### 6.3.1 Einfluss der Kontaktsteifigkeit

Um den Einfluss der Kontaktsteifigkeit sichtbar zu machen, wurde diese im Bereich von  $1 \text{ N}/\mu\text{m}$  bis  $10^5 \text{ N}/\mu\text{m}$  variiert. Für diese Berechnungen ist die Lagersteifigkeit konstant gehalten und die statische Vorspannung null. In der Ausgangslage berühren sich die Spitze und der Untergrund gerade kraftlos ( $\Rightarrow \mathbf{w}_{(\ell)} = 0$ ). Am auffälligsten ist, dass die Größe der Schwingung mit einer steigenden Kontaktsteifigkeit stark abnimmt, also ein großer Teil der Schwingung für die Kompression und Dekompression der Kontaktsteifigkeit benötigt wird. Weiterhin wird auch die Trajektorie im Phasendiagramm (Abbildung A.5) bei größeren Kontaktsteifigkeiten deutlich komplexer. So erfolgen innerhalb einer Erregerperiode mehrere Kontaktwechsel, das sogenannte Prellen. An dieser Stelle sei nochmal daran erinnert, dass der Kontakt geschlossen ist, wenn  $x_{20}$  größer oder gleich null ist. Der Einschwingvorgang verlängert sich bei größeren Kontaktsteifigkeiten. Nicht immer muss der eingeschwingene Zustand dieselbe Frequenz haben, wie die Anregung. Im Falle der Kontaktsteifigkeit von  $10^5 \text{ N}/\mu\text{m}$  tritt hier eine zweiperiodische Lösung auf. Die Lösung wiederholt sich also mit der halben Anregungsfrequenz.

Nach den Phasendiagrammen der Kontaktpunkte soll nun das Schwingungsverhalten gezeigt werden. Hierfür sind wieder die Einhüllenden des eingeschwingenen Zustands in Abbildung A.6 gezeigt. Erwartungsgemäß schwimmt der Schwinger umso weiter auf, je steifer der Kontakt modelliert wird. Ist der Kontakt deutlich weicher als der Schwinger selbst, ist der Einfluss vernachlässigbar klein. Wenn der Bereich der kleinsten Schwingung, also im linearen Fall der Schwingungsknoten, betrachtet wird, so wandert dieser von seiner ursprünglichen Position an der neunten Masse weiter nach links, von der Lagerung in Richtung des freien Endes. In der Folge ist die Lagerung schlechter positioniert, und behindert so die Schwingung, da ein Teil der Energie dem Prozess nicht mehr zur Verfügung steht, sondern über die Lagerung abfließt bzw. in ihr gespeichert wird.

### 6.3.2 Einfluss der Lagersteifigkeit

Neben der Kontaktsteifigkeit ist die Steifigkeit der Lagerung ein essentieller Parameter. Für die folgenden Untersuchungen ist die Lagersteifigkeit im Bereich von  $1 \text{ N}/\mu\text{m}$  bis  $10^5 \text{ N}/\mu\text{m}$  variiert worden. Dabei wurde die Kontaktsteifigkeit konstant bei  $10^3 \text{ N}/\mu\text{m}$  und die Lagerfußpunktauslenkung konstant bei null gehalten.

Bei der Betrachtung der Ergebnisse, dargestellt in den Phasendiagrammen (Abbildung A.7) und der Schwingungsverteilung (Abbildung A.8) fällt wieder auf, dass mit größer werdender Steifigkeit die Größe der Schwingung abnimmt. Die Position mit der geringsten Schwingung nach links, hin zum freien Ende wandert. Das Aufschwimmen ist hier besonders gut zu erkennen, wenn die Lagersteifigkeit klein ist, dann verlagert

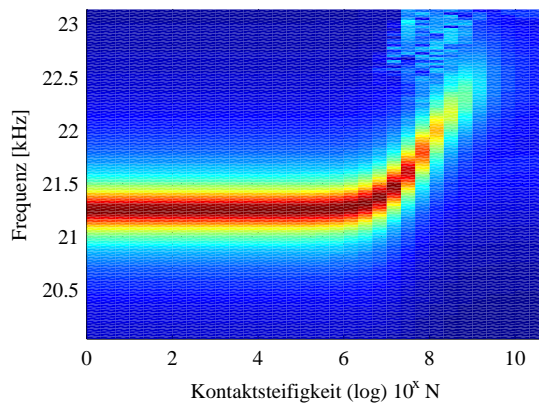


sich die stationäre Mittelposition des Schwingers so weit weg vom Untergrund, dass die Kontaktmasse den Untergrund nur noch fast kraftlos tangiert und die Kontaktfeder quasi nicht komprimiert wird. Mit zunehmender Lagersteifigkeit wird das Aufschwimmen weniger, bis die Lagersteifigkeit so groß ist, dass sie als feste Einspannung wirkt. Dabei wird so gut wie keine Schwingung auf die Schwingerspitze übertragen. Eine Besonderheit ist für den Fall mit der Steifigkeit  $10^4 \text{ N}/\mu\text{m}$  zu beobachten. Der Schwinger als Starrkörper kommt mit der Lagersteifigkeit in Resonanz, dadurch kommt es trotz der hohen Lagersteifigkeit zu recht großen Bewegungen am Kontaktpunkt.

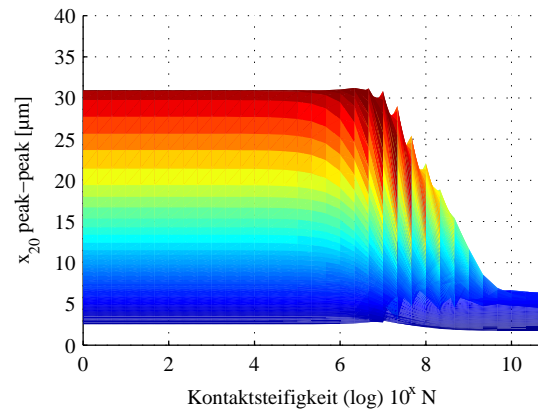
### 6.3.3 Einfluss der statischen Anpresskraft

Alle vorigen Untersuchungen sind ohne zusätzliche statische Anpresskraft bzw. ohne Verschiebung des Lagerfederfußpunktes ( $\mathbf{w}_{(\ell)} = 0$ ) durchgeführt worden. Dieser Parameter ist der im Experiment am einfachsten zu variierende. Sowohl die Lagersteifigkeit als auch die Kontaktsteifigkeit sind direkt über Geometrie und Material festgelegt, und somit sehr aufwendig zu ändern. Neben dieser experimentellen Relevanz ist die statische Anpresskraft auch besonders für kontaktbasierte Schwingungsantriebe wesentlich, da in grober Näherung eine obere, nicht erreichbare Grenze für die maximale Vortriebskraft  $F_{\max} \leq \mu F_N$  bestimmt werden kann. Es stellt sich daher die Frage, wie groß die maximal zulässige Anpresskraft ist, bei der noch eine nennenswerte Schwingungsamplitude an der Kontaktstelle auftritt. Zur Darstellung ist der Parameter  $\mathbf{w}(\ell)$  variiert worden, dabei sind für den Fall eines Spalts (im ausgeschalteten Zustand)  $15 \mu\text{m}$ ,  $10 \mu\text{m}$  und  $5 \mu\text{m}$  gewählt, und für den Fall des initialen Kontaktes die äquivalenten Kräfte (nach Gleichung 6.11) im Bereich von 0 N bis 150 N vorgeben worden.

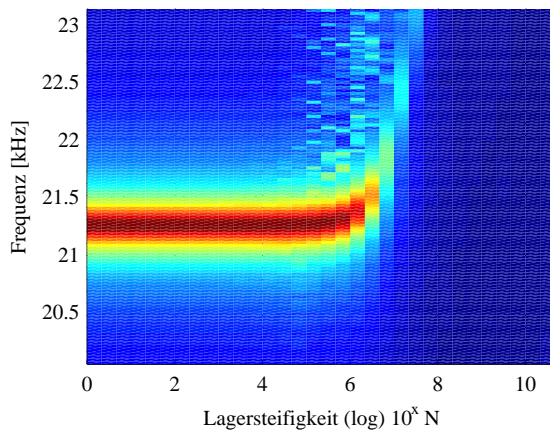
Für die Auswertung sind die bekannten Phasendiagramme in Abbildung A.9 und die Einhüllenden des Schwingungsverhaltens in Abbildung A.10 dargestellt. Die Phasendiagramme zeigen, dass bei einem großen Spalt (in der Größenordnung der freien Schwingungsamplitude) nur eine sehr kurze Kontaktdauer pro Periode auftritt. Dies ähnelt dem Verhalten des Schwingers mit sehr geringer Lagersteifigkeit, bzw. dem freien Schwinger. Nimmt das Spaltmaß ab, so wird die Schwingungsgröße deutlich reduziert und das Phasendiagramm zeigt kein harmonisches Verhalten mehr. Dieses wird ausgeprägter mit abnehmendem Spalt respektive steigender Anpresskraft  $F_{\text{stat}}$ . Besonders interessant ist das Schwingungsverhalten zwischen 20 N und 30 N Anpresskraft; In diesem Bereich findet – für das untersuchte System – der Wechsel von längerer Separationsphase zu längerer Kontaktphase statt. In diesem Bereich finden sich auch wieder mehrperiodische Lösungen. Bei weiter steigenden Anpresskräften findet dann keine Separation mehr statt und die Schwingungsamplitude an der Spitze nimmt weiter stetig ab.



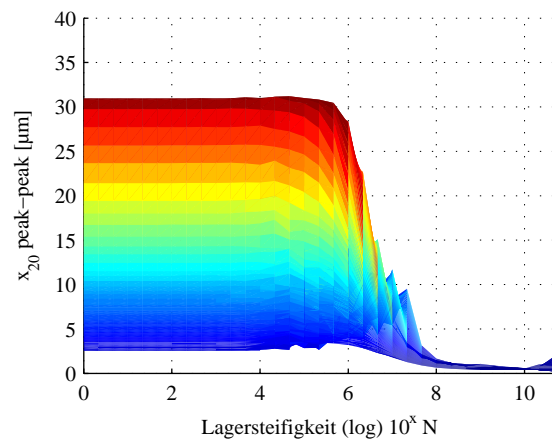
(a) Frequenzverschiebung



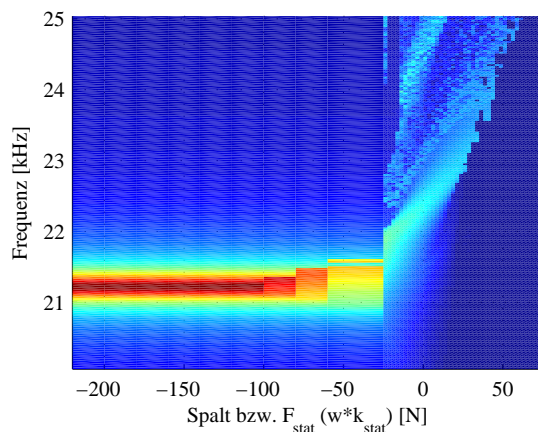
(b) Schwingungsamplitude

**Abbildung 6.5:** Frequenzverhalten des Schwingers bei veränderter Kontaktsteifigkeit

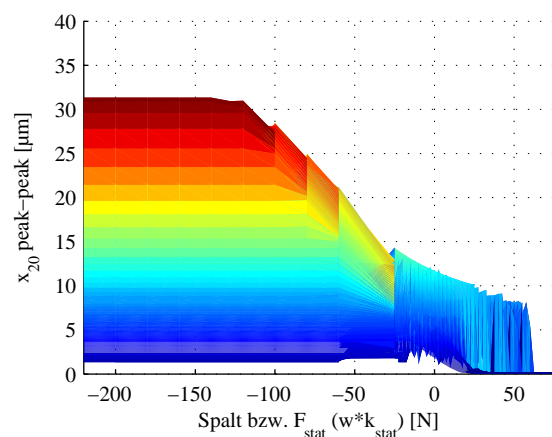
(a) Frequenzverschiebung



(b) Schwingungsamplitude

**Abbildung 6.6:** Frequenzverhalten des Schwingers bei veränderter Lagersteifigkeit

(a) Frequenzverschiebung



(b) Schwingungsamplitude

**Abbildung 6.7:** Frequenzverhalten des Schwingers bei veränderter statischer Anpresskraft bzw. Spalt

### 6.3.4 Einfluss der Anregefrequenz

Da die Frequenzen für die vorangegangenen Parameteruntersuchungen konstant gehalten wurden, sind Veränderungen der Resonanzfrequenz nicht hinreichend berücksichtigt worden. Wird zusätzlich zu den untersuchten Parametern noch die Frequenz verändert, kann die Resonanz (mit der Auflösung der Frequenzschritte) verfolgt werden und die maximale Schwingungsamplitude beobachtet werden. An dieser Stelle sind wieder alle drei Parameter untersucht worden. Für die Analyse sind für jeden Parametersatz und jede Frequenz 250 Perioden berechnet worden, um einen eingeschwungenen Zustand zu erreichen.

Zunächst soll der Einfluss der Kontaktsteifigkeit, bei konstanter Lagersteifigkeit und Anpresskraft, untersucht werden. In den Diagrammen von Abbildung 6.5 ist die Kontaktsteifigkeit logarithmisch auf der X-Achse aufgetragen. Es ist deutlich zu erkennen, dass sich die Frequenz mit der größten Amplitude über einen weiten Bereich nicht ändert und auch die erreichbare Amplitude am Kontaktpunkt in demselben Bereich quasi konstant bleibt. Ab der Kontaktkraft, die eine Frequenzänderung hervorruft, fällt auch die Amplitude stark bis auf einen sehr niedrigen Wert ab.

Ein ähnliches Verhalten zeigt sich in Abbildung 6.6 für die Änderung der Lagersteifigkeit. Mit dem wesentlichen Unterschied, dass für sehr große Steifigkeiten die Schwingung am Kontaktpunkt ganz verschwindet, da die Lagerebene dann wie eine feste Einspannung wirkt und die Wellen komplett reflektiert werden. Wobei festgehalten werden soll, dass ein solcher Effekt in der Realität nicht mit dieser Deutlichkeit auftritt, da es keine Lagerung gibt, die eine ganze Ebene im Schwinger ideal festhalten kann. Dies stellt eine Einschränkung der eindimensionalen Modellierung dar.

Die statische Anpresskraft wird wieder über die Position des Federfußpunktes des Lagers vorgegeben. Als Beschriftung der X-Achse ist das Produkt der vorgegebenen Federfußpunktverschiebung  $w_\ell$  und der Kontaktsteifigkeit  $k_{\text{kontakt}}$  aufgetragen. Bei negativen Werten gibt es einen Spalt in der Ruhelage (im Betrieb kann es zum Kontakt kommen). In Abbildung 6.7 ist gut zu erkennen, dass die Resonanzfrequenz zunächst stabil bei einem Wert liegt, dann aber recht stark ansteigt. Die Amplituden nehmen auch in diesem Fall deutlich ab. Das Diagramm lässt vermuten, dass es bei großen Anpresskräften keine Resonanzüberhöhungen mehr gibt.

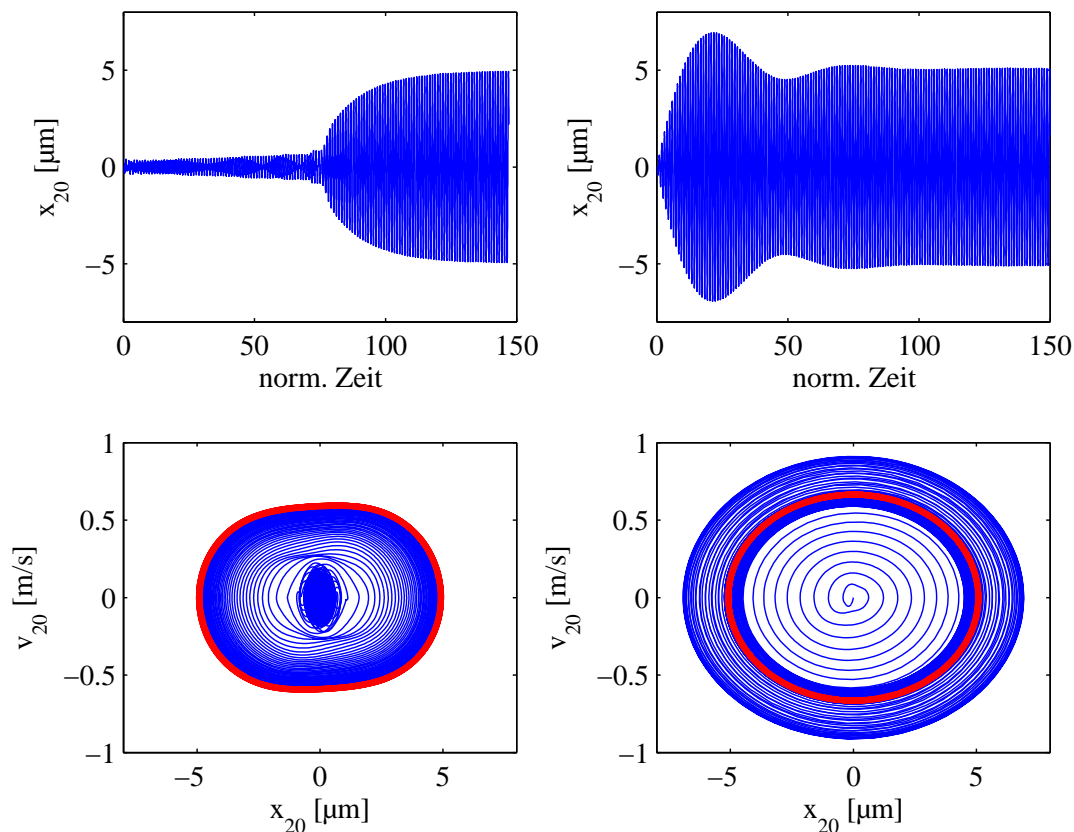
Diese Berechnungen zeigen deutlich, dass eine Frequenzverfolgung zwingend notwendig ist, da bei einer Berechnung mit fester Frequenz nicht die maximalen Amplituden über den gesamten Parameterraum zu erreichen sind.

## 6.4 Analyse als selbsterregtes System

Um während der Berechnung eine Frequenzverfolgung zu gewährleisten, soll das Konzept der Selbsterregung (vgl. Kapitel 2.5) angewendet werden. Ähnlich wie in einem Beitrag von VORONINA ET AL. [178] wird hierfür ein Sensor auf dem Schwinger platziert und dessen Messwert wird verstärkt als Anregungssignal zurückgeführt. Dabei wird je nach Position des Sensors, des Aktors und nach der gewünschten Schwingungsform eine positive oder eine negative Verstärkung gewählt. Aus regelungstechnischer Sicht ist das Ergebnis eine positive Rückkopplung oder Mitkopplung. Es wird eine sehr hohe Verstärkung (auch Schleifenverstärkung genannt) gewählt, um einen kurzen Einschwingvorgang zu erreichen. Durch die positive Rückkopplung ist die Schleife instabil, eine Begrenzung verhindert jedoch, dass die Anregungskraft über alle Grenzen wächst. Damit die Schwingung beginnen kann, muss eine Störung auf das System wirken, beispielsweise ein Sprung im Anregesignal. Das System schwingt dann auf eine Resonanzfrequenz ein. Welche Resonanzfrequenz sich einstellt, hängt von den Randbedingungen ab und ist nicht immer direkt vorherzusagen, da die Schwingung über eine im allgemeinen nicht bekannte Störung initiiert wird. Um den Frequenzbereich zusätzlich zu begrenzen, können wie in Abbildung 2.19b angedeutet Bandpässe integriert werden. Mit einem idealen Verstärker lassen sich daher prinzipiell alle Schwingungsformen anregen, die zur gewählten Sensor-Aktor-Anordnung passen. Das System sucht sich selbst die am *leichtesten* anregbare Resonanz aus, welche nicht notwendigerweise die gewünschte ist. Da ein realer Verstärker ein dynamisches, frequenzabhängiges System ist, begrenzt er die Bandbreite. Weiter wirkt für das untersuchte System begünstigend, dass die Schwingungsformen bei niedrigen Frequenzen, z.B. die erste Längsschwingung, leichter anzuregen sind als die höheren.

Es ist leicht einzusehen, dass das in der beschriebenen Schleife erzeugte Signal im Allgemeinen nicht sinusförmig ist, sondern vielmehr – bei hinreichend großer Verstärkung – ein Rechtecksignal ist. In Abbildung 6.8 ist das Einschwingverhalten des Schwingers gezeigt. Dabei ist der selbsterregte Fall dem fremderregten Fall gegenübergestellt. Die Frequenz für die Fremderregung wurde aus dem selbsterregten Betrieb ermittelt. Wird die Einhüllende der beiden Zeitverläufe betrachtet, so ähnelt die Amplitudenzunahme im selbsterregten Fall einem  $PT_1$ -Verhalten, woraus sich schließen lässt, dass das System auf seinen Grenzykel<sup>4</sup> einschwingt. Bei der Fremderregung bei gleicher Frequenz ist dagegen ein  $PT_2$  ähnliches Verhalten zu erkennen, resultierend aus der Schwebung zwischen Resonanzfrequenz und Anregfrequenz. Da die Frequenz der Schwebung gering ist, muss die Anregfrequenz nahe aber nicht gleich der Resonanzfrequenz sein. Offensichtlich ist die Resonanzfrequenz im fremderregten System ungleich der Autoresonanzfrequenz im selbsterregten System. Da der wesentlichste Unterschied im eingeschwingenen Fall die Signalform der Anregung ist, lässt sich der Frequenzunterschied mit großer Wahrscheinlichkeit auf die Signalform zurückführen. Im selbsterregten Fall

<sup>4</sup>Da dieses auf den Grenzykel eingeschwingende Schwingungsverhalten weitgehend dem Verhalten von resonant angeregten Systemen entspricht, wird dieser Zustand auch als Autoresonanz bezeichnet.



**Abbildung 6.8:** Einschwingverhalten des freien Schwingers. Jeweils oben, Zeitverlauf der Auslenkung der Schwingerspitze. Unten Phasendiagramm der Bewegung. Der eingeschwingene Zustand ist rot dargestellt. **Links)** Schwinger autoresonant berechnet. **Rechts)** Schwinger bei Fremderregung mit fester Frequenz berechnet.

ist die recht lange Zeit bis zum Beginn des Aufschwingens auffällig. Dies begründet sich mit dem Einschaltvorgang, bei dem eine Störung dazu führt, dass der Schwingkreis aufschwingt. Die Störung muss sich durch den Schwinger bis zum Sensor fortsetzen und wird dann über die Rückkopplung verstärkt. Weiterhin ist die initiale Störung so klein, dass selbst mit der sehr hoch gewählten Schleifenverstärkung die Anregekräfte bei den zu Anfang sehr kleinen Auslenkungen klein sind. Weiterhin dauert es eine gewisse Zeit bis sich eine Eigenfrequenz durchsetzt, in dem Zeitverlauf ist dies in etwa bei der 74-ten Periode<sup>5</sup> zu erkennen. Bis dahin haben noch höhere Eigenfrequenzen signifikante Anteile im Signal, die auch Auswirkungen auf das Anregesignal haben. Ab dem Zeitpunkt, in dem eine deutliche Amplitude erreicht ist und sich eine Eigenfrequenz durchgesetzt hat, verläuft das Aufschwingen mit derselben Zeitkonstante wie im fremderregten Fall. Hier ist auch deutlich der größte Nachteil bei der Selbsterregung zu erkennen, denn es ist nie a priori bekannt, wann und ob das System aufschwingt. Im gezeigten Beispiel ist der Ein-

<sup>5</sup>Die Zeitachse ist auf die Frequenz der eingeschwingenen Bewegung normiert.

schwingvorgang im fremderregtem Fall viel schneller abgeschlossen, zum größten Teil liegt dies an dem zuvor erläuterten Grund. Ein weiterer Punkt ist, dass im fremderregten Fall neben der Resonanz angeregt wird. Durch die resultierende Kombination der zwei Frequenzanteile (Eigenfrequenz und Anregung) erscheint<sup>6</sup> der Einschwingvorgang hier kürzer. Auch ein Blick auf die Phasendiagramme ist sehr interessant. Während im fremderregten Fall die Form der Trajektorie offensichtlich eine Überlagerung zweier frequenzgleicher Sinussignale ist, lässt sich im selbsterregtem Fall eine deutliche Deformation der elliptischen Trajektorie erkennen, ein deutliches Anzeichen einer nicht-sinusförmigen Bewegung. Dennoch ist die Bewegung periodisch und der Grenzykel wird erreicht. Wie schon im Stand der Technik angedeutet, ist die Definition von Resonanz nicht ganz einfach. Eine mögliche Definition ist: Eine Resonanzfrequenz ist eine Frequenz in der das System ausschwingt<sup>7</sup>, wenn die Anregung abgeschaltet wird. Bei schwach gedämpften Systemen ist diese Frequenz auch gleichzeitig die mit der es aus der Ruhelage ohne Schwebung aufschwingt.

### 6.4.1 Modellbasierte Untersuchung

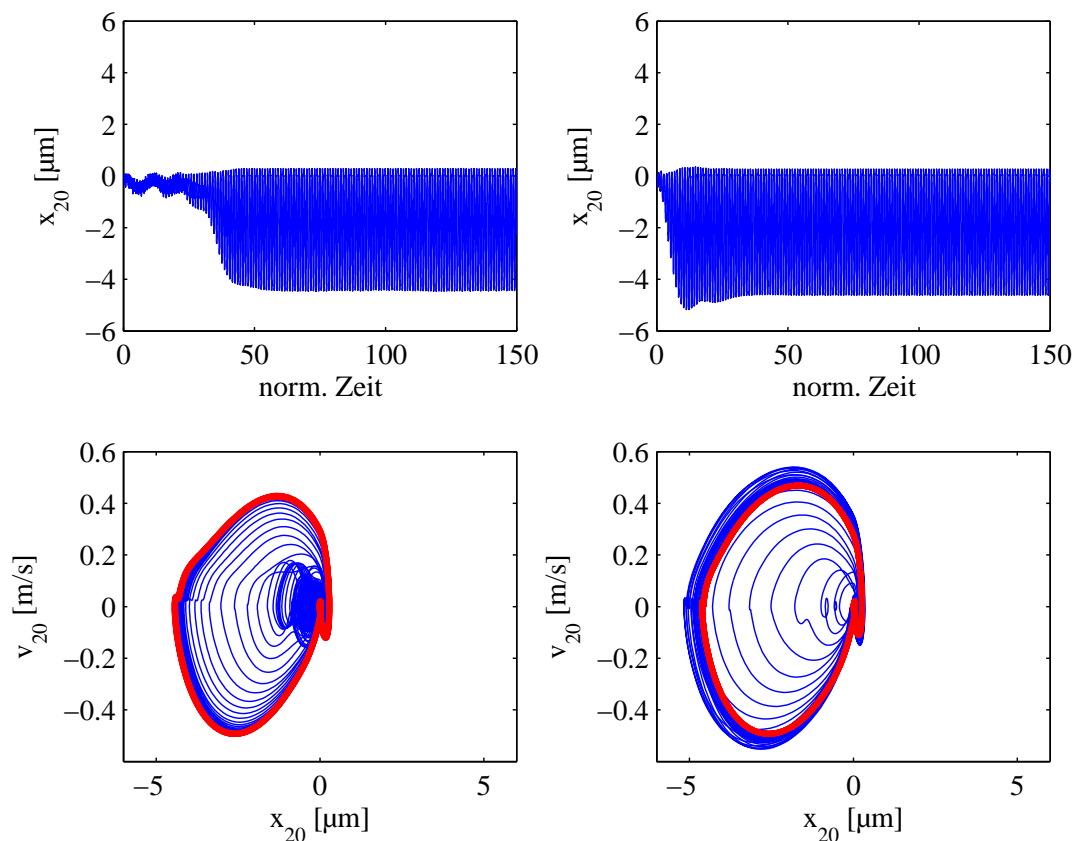
Das transiente Einschwingverhalten des Systems mit Kontakt wird als nächstes betrachtet. In Abbildung 6.9 sind wieder die Zeitdiagramme der Bewegung an der Stößelspitze und die Phasendiagramme derselben für den selbsterregten und den fremderregten Fall gegenübergestellt. Deutlich ist in beiden Fällen das Vorhandensein des Kontaktes zu erkennen. es gibt eine deutliche Verschiebung des Mittelwertes der Bewegung der Stößelkoordinate. Betreffend der Einschwingzeit fällt ein ähnlicher Effekt wie zuvor auf. Das selbsterregte System braucht eine Weile bis nennenswerte Schwingungen erreicht werden, dann hat jedoch die Einhüllende der Schwingung sofort ein Verhalten, wie es für einen in resonant betriebenen fremderregten Schwinger zu erwarten wäre. Dies zeigt, dass der gewünschte Betriebspunkt der Autoresonanz erreicht wird. Im fremderregten Fall ist der Einschwingvorgang wieder etwas schneller abgeschlossen, da das Anregesignal sofort mit voller Amplitude zur Verfügung steht. Die Betriebsfrequenz ist wieder nur resonanznah, deutlich an den Überschwingern der Hüllkurve zu erkennen. Auch in den Phasendiagrammen gibt es ein ähnliches Bild wie im Fall der freien Schwingung.

Zusammenfassend kann festgestellt werden, dass die autoresonante Berechnung auf den gewünschten Betriebszustand führt. Allerdings sind aufgrund der Nichtlinearität in der Regelschleife unterschiedliche Signalformen festzustellen, die zu leichten Unterschieden der optimalen Betriebspunkte führen. Insgesamt überwiegt jedoch der Vorteil, dass jede Rechnung – sofern sie aufschwingt – einen Betriebspunkt in Autoresonanz berechnet, der einem fremderregten Betrieb in Resonanz sehr nahe kommt.

---

<sup>6</sup>Der Einschwingvorgang ist nicht schneller abgeschlossen, die Zeitkonstante ist die gleiche. Allerdings werden schneller hohe Amplituden erreicht.

<sup>7</sup>Wenn eine FFT des ausschwingenden Signals durchgeführt wird, wären Frequenzanteile aller, mit diesem Aktor anregbaren Resonanzen enthalten. Dabei hat die der letzten Betriebsfrequenz nächsten den größten Amplitudenanteil.



**Abbildung 6.9:** Einschwingverhalten des Schwingers mit Kontakt. Jeweils oben, Zeitverlauf der Auslenkung der Schwingerspitze. Unten Phasendiagramm der Bewegung. Der eingeschwingene Zustand ist rot dargestellt. **Links)** Schwinger autoresonant berechnet. **Rechts)** Schwinger bei Fremderregung mit fester Frequenz berechnet.

Um das Einschwingen in die gewünschte Autoresonanz weiter zu verbessern, wurde kein Sprung<sup>8</sup> in der Anregungskraft vorgegeben, sondern ein Vektor für die Startbedingungen gewählt, der im ersten Schritt aus einer resonanznahen Berechnung mit Festfrequenz (fremderregung) stammt. Ein solcher Startvektor führt dazu, dass der Schwinger in seiner Eigenfrequenz ausschlagen würde, wenn keine Anregung vorhanden wäre. Somit schwingt der Schwinger sofort in der richtigen Frequenz und mit einer nennenswerten Amplitude, so dass der Schwingkreis schnell aufschwingen kann. Für alle folgenden Schritte der Parametervariation wird jeweils ein Startvektor aus dem letzten Zeitschritt der vorangegangenen Berechnung genutzt.

Da die Betriebsfrequenz – im Gegensatz zur Fremderregung – kein vorgegebener Parameter ist, muss diese aus den berechneten Daten<sup>9</sup> bestimmt werden. Zu diesem Zweck

<sup>8</sup>Mit einem Sprung würden alle anregbaren Eigenfrequenzen je nach Position und Kopplung angeregt.

<sup>9</sup>In allen durchgeführten Untersuchungen konnte der Effekt der Periodenverdopplung, wie er für einen Einmassenschwinger mit Stoßkontakt beispielsweise von FIDLIN [179] beschrieben wird, nicht beobachtet werden.

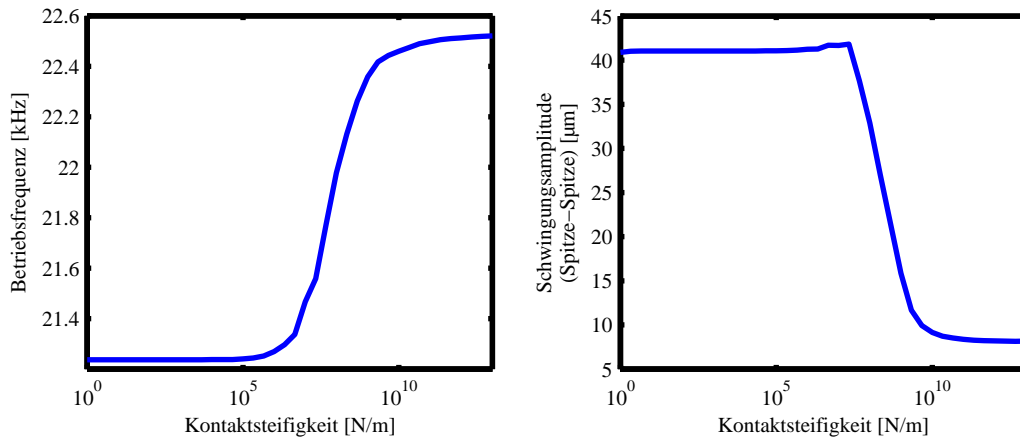


Abbildung 6.10: Berechnung mit Autoresonanz, Variation der Kontaktsteifigkeit

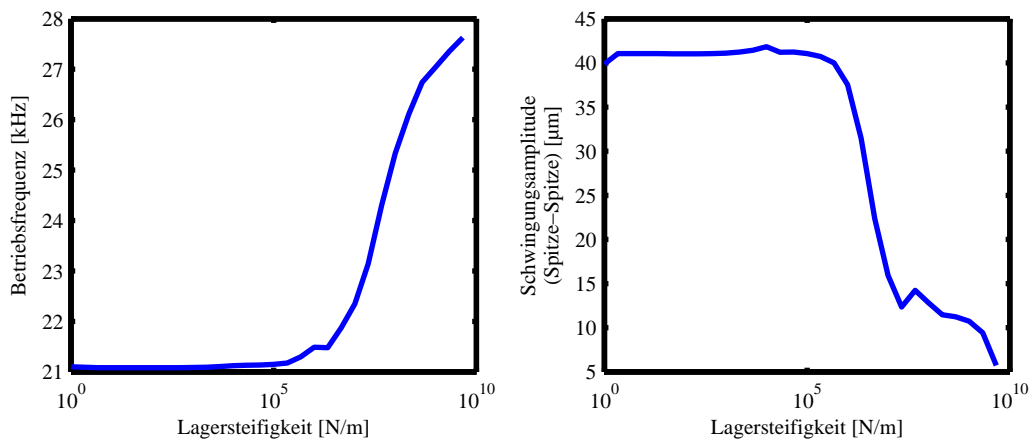


Abbildung 6.11: Berechnung mit Autoresonanz, Variation der Lagersteifigkeit

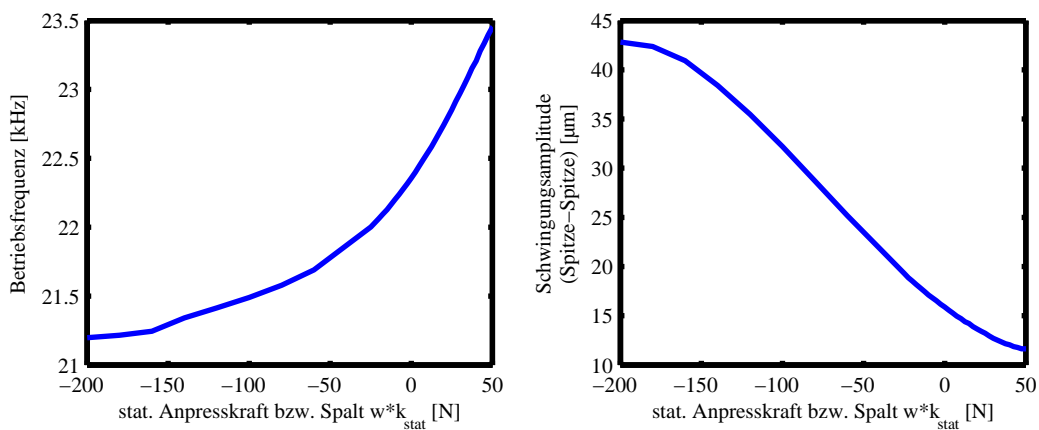


Abbildung 6.12: Berechnung mit Autoresonanz, Variation der statischen Vorspannkraft



sind zwei Verfahren verwendet worden. Zum einen wurden die Nulldurchgänge detektiert, indem die Signumfunktion des Signals bestimmt und nachfolgend die Differenzen gebildet wurden. Positive Werte kennzeichnen dann die steigenden Flanken und die Zeit zwischen zwei steigenden Flanken entspricht der Periodendauer. Um eine höhere Genauigkeit zu erreichen, wurde dieser Wert über mehrere Perioden gemittelt. Die Genauigkeit hängt direkt mit der Zeitschrittweite der Signale zusammen.

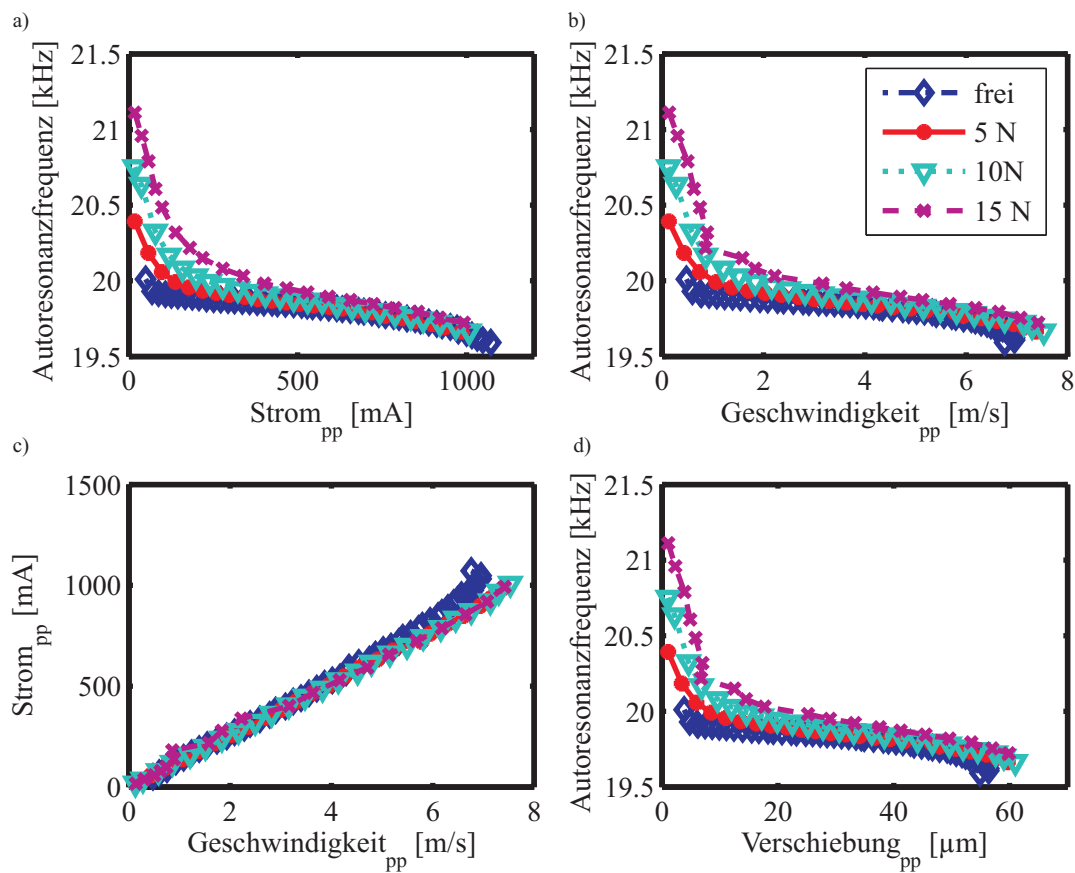
Alternativ wurde die Frequenz über ein Korrelationsverfahren bestimmt. Dabei werden in einer geschachtelten Schleife für das zu testende Signal  $x(t)$  die Frequenzanteile  $X_i$  über den interessanten Bereich mit

$$X_i = \sqrt{\left(\frac{1}{T} \int_0^T (x(t) \sin(\Omega_i t)) dt\right)^2 + \left(\frac{1}{T} \int_0^T (x(t) \cos(\Omega_i t)) dt\right)^2} \quad (6.12)$$

bestimmt. Dabei wird schrittweise der Frequenzbereich um das Maximum verkleinert und die Frequenzauflösung erhöht, bis die gewünschte Frequenzauflösung erreicht ist. Dieses Verfahren bietet gegenüber einer klassischen Fast-FOURIER-Transformation den Vorteil, dass quasi beliebig kleine Frequenzschritte realisierbar sind. Gegenüber dem Zählverfahren hat es den Vorteil, dass es unempfindlich gegen Rauschen bzw. höherfrequenten Anteilen ist, die zusätzliche Nulldurchgänge mit sich bringen. Weiterhin ist die Genauigkeit nicht so stark von der zeitlichen Auflösung abhängig. Aufgrund des NYQUIST-SHANNONSchen Abtasttheorems reichen zwei Stützstellen pro Periode aus, um ein Sinussignal in Betrag und Phase zu identifizieren. Diese Vorteile werden durch eine vergleichsweise große Rechenzeit erkaufte. Sollte das Signal mehrere signifikante Frequenzanteile haben, wird mit diesem Verfahren nur die Amplitude der Grundharmonischen identifiziert. Immer wenn das Signal glatt und genügend hoch aufgelöst ist, ist das Zählverfahren die bessere Wahl.

Nun können auch mit der autoresonanten Berechnung Parameterstudien durchgeführt werden, ohne dass eine feste Frequenz gewählt werden muss oder Frequenzsweeps durchgeführt werden müssen. Abbildung 6.10 zeigt das Ergebnis der Rechnung bei variiertem Kontaktsteifigkeit. Alle Parameter sind identisch zu denen für die Berechnung der Frequenzgänge von Abbildung 6.5. Beim Vergleich der autoresonanten Simulationen mit den frequenzvariierten fremderregten Simulationen zeigt sich, dass die Berechnung mit Autoresonanz die gesuchten Werte liefert<sup>10</sup>: Das Ergebnis liefert direkt den *Bergkamm*, also die Maximalwerte der Schwingungsamplitude und die dazugehörige Frequenz für jede Parameterkombination. Auch die Ergebnisse für die Variation der Lagersteifigkeit (Abbildung 6.11) und der statischen Anpresskraft (Abbildung 6.12) passen sehr gut zu den zuvor berechneten Frequenzgängen. Insbesondere bei der Berechnung mit veränderlicher Vorspannung zeigt sich der große Vorteil der autoresonanten Berechnung. In dem Frequenzsweep ist das Maximum für hohe Kräfte nur sehr schwer auszumachen, die autoresonante Berechnung liefert genau diesen Wert.

<sup>10</sup>Dabei ist zu beachten, dass die Ergebnisse numerisch bestimmt und nur mit visueller Kontrolle des eingeschwingenem Zustands getestet wurden. Wodurch es zu kleinen Ungenauigkeiten kommen kann.

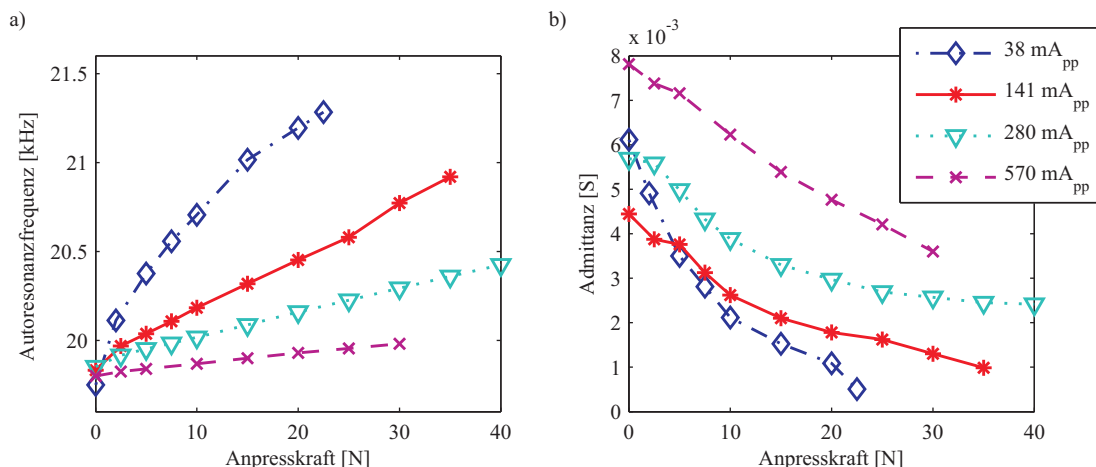


**Abbildung 6.13:** Messung der Frequenzverschiebung infolge einer Amplitudenerhöhung bei konstanter Anpresskraft. **a)** Frequenz-Strom-Diagramm. **b)** Frequenz-Geschwindigkeits-Diagramm. **c)** Strom-Geschwindigkeits-Diagramm. **d)** Frequenz-Amplituden-Diagramm.

## 6.4.2 Experimentelle Untersuchung

Um piezoelektrische Ultraschallsysteme autoresonant zu betreiben, ist am Institut für Dynamik und Schwingungen von MOJRZISCH UND WALLASCHEK [180] eine analoge Regelungshardware aufgebaut worden. Der schematische Aufbau entspricht der Abbildung 2.19b. Der autoresonanten Regelung ist eine Stromregelung, die auf DSPACE-Hardware implementiert ist, überlagert. Über die beiden Bandpässe wird sichergestellt, dass die gewünschte Resonanz angeregt wird und dass der Schwinger mit einem fast sinusförmigen Signal betrieben wird. Die Eckfrequenzen der Bandpässe müssen jeweils von Hand so eingestellt werden, dass zwischen Ein- und Ausgang der Regelhardware kein Phasenversatz besteht.

Auf dem Prüfstand sind Messungen durchgeführt worden. Dabei wurden im ersten Schritt bei jeweils konstanten Anpresskräften die Stromamplituden der Anregung erhöht und Frequenz und Geschwindigkeit des Kontaktpunktes gemessen. In Abbildung 6.13 sind die aufgezeichneten Kurven dargestellt. Die Darstellung der Frequenz über dem An-



**Abbildung 6.14:** Messung der Frequenzverschiebung infolge einer Anpresskrafteerhöhung bei konstanter Amplitude. **a)** Frequenz-Anpresskraft-Diagramm. **b)** Admittanz-Anpresskraft-Diagramm. Die Größe der mechanischen Schwingung betrug  $2,34 \mu\text{m}_{\text{pp}}$  bei  $38 \text{ mA}_{\text{pp}}$ ,  $8,12 \mu\text{m}_{\text{pp}}$  bei  $141 \text{ mA}_{\text{pp}}$ ,  $16 \mu\text{m}_{\text{pp}}$  bei  $280 \text{ mA}_{\text{pp}}$  und  $34 \mu\text{m}_{\text{pp}}$  bei  $570 \text{ mA}_{\text{pp}}$

regestrom zeigt deutlich die abnehmende Frequenz mit steigender Amplitude, auch für den freien Schwinger. Dies ist auf nichtlineare, weicher werdende Effekte im Piezomaterial zurückzuführen, diese Effekte dominieren auch das Verhalten des belasteten Schwingers. Insbesondere bei kleinen Stromamplituden ist eine deutliche Frequenzverschiebung hin zu höheren Frequenzen der belasteten im Vergleich zur unbelasteten Messung zu erkennen. Dies lässt sich auf den Einfluss des Kontakts zurückführen. Wird das Verhältnis zwischen Strom und Geschwindigkeit aufgetragen, so ist gut zu erkennen, dass sowohl die Materialnichtlinearitäten als auch der Kontaktvorgang keinen nennenswerten Einfluss auf die Linearität des Zusammenhangs haben.

In einer zweiten Messreihe wurde der Anregestrom auf einen konstanten Wert geregelt und während des Versuchs die Vorspannung sukzessive erhöht. Wieder wurden die Betriebsfrequenzen und die Geschwindigkeiten des Kontaktpunktes aufgezeichnet. Die Ergebnisse sind in Abbildung 6.14 visualisiert. Infolge der Kraftänderung ändert sich die Frequenz bei allen Anregeamplituden fast linear. Mit steigender Stromamplitude nimmt die Änderungsrate ab. Hier lässt sich vermuten, dass aufgrund der hohen Amplituden die Kontaktzeiten kürzer werden und daher der Einfluss der zusätzlichen Steifigkeit geringer wird.

### 6.4.3 Vergleich mit einem linearen Ersatzsystem

Der Frequenzunterschied zum unbelasteten Fall kann zur Identifikation einer linearen, durchschnittlichen Ersatzsteifigkeit<sup>11</sup> genutzt werden. Unter der Annahme vernachläss-

<sup>11</sup>Dazu wird das in Abbildung 2.15 gezeigte Modell um eine Lastfedersteifigkeit  $c_1$  parallel zur Federsteifigkeit  $c_m$  erweitert. Eine ähnlich einfache Modellierung des Kontakts findet sich bei LITTMANN [181].

sigbarer Dämpfung ist die Resonanz im freien Fall  $\omega_f^2 = c_m/m_m$ , und  $\omega_1^2 = (c_m + c_1)/m_m$  bei Belastung. Durch Umstellen und Einsetzen ergibt sich mit

$$c_1 = m_m \left( \omega_1^2 - \omega_f^2 \right) \quad (6.13)$$

die Ersatzgröße. Durch die Betrachtung der Impedanzänderung über der Kraftänderung können Aussagen über die Prozessdämpfung gemacht werden. In Resonanz lässt sich für das lineare Ersatzsystem (Abbildung 2.15) im Falle schwacher Dämpfung<sup>12</sup> der Dämpfungsparameter aus der elektrischen Impedanz  $Y = 1/Z$  und dem Kopplungsfaktor<sup>13</sup>  $\alpha$  bestimmen. In Abbildung 6.13 ist zu erkennen, dass dieser Parameter  $\alpha$  für alle Messungen konstant ist. Der Dämpfungsparameter ermittelt sich mit der unbelasteten Admittanz in Resonanz  $Z_f$  zu  $d_m = \alpha^2/Z_f$ . Wird für den belasteten Fall ein zusätzlicher, parallel zu  $d_m$  liegender, Dämpfer  $d_1$  in das Modell integriert, ergibt sich mit der belasteten Admittanz  $Z_1$  in Resonanz  $d_1 + d_m = \alpha^2/Z_1$ . Durch Einsetzen und Umstellen ergibt sich der Ersatzparameter für die Dämpfung zu

$$d_1 = \alpha^2 \left( \frac{1}{Z_1} - \frac{1}{Z_f} \right). \quad (6.14)$$

Damit hängt die Ersatzprozessdämpfung linear von der Differenz der Impedanzen ab. Werden beide Effekte verglichen, fällt auf, dass sich Ersatzprozessdämpfung und Ersatzprozesssteifigkeit ähnlich verhalten. Eine Beobachtung, die so auch schon von LITTMANN [181] gemacht wurde.

Vergleicht man die Messungen mit den Berechnungen, fällt sofort auf, dass die in den Messungen dominanten Materialnichtlinearitäten nicht in den Simulationen berücksichtigt wurden. Rechnet man diese heraus bzw. konzentriert sich auf die Messung in Abbildung 6.14, zeigt sich, dass die Tendenzen gut vom Modell abgebildet werden.

## 6.5 Fazit

Zusammenfassend sorgen alle Parameteränderungen, die der freien Schwingung entgegenwirken – also größere Kontaktsteifigkeit, größere Lagersteifigkeit und größere Anpresskraft – für eine deutliche Änderung des Schwingungsverhaltens. Die rein harmonische Schwingung findet so nicht mehr statt. Die Schwingungsamplitude reduziert sich, die Position mit der kleinsten Schwingung verschiebt sich deutlich. Daher ist die Kenntnis dieser Zusammenhänge wichtig, um einen guten Schwingungsantrieb bauen zu können. Für alle drei Parameter muss ein guter technischer Kompromiss gefunden werden, da die gewollten Effekte durchaus gegenläufig sind. So soll zwar in der Regel ein kräftiger Antrieb gebaut werden, wozu die Anpresskraft relativ hoch sein muss. Allerdings ist ohne

<sup>12</sup>In diesem Fall ist die Frequenz der mechanischen und elektrischen Resonanz fast identisch. Weiterhin gibt es keine Phasenverschiebung zwischen Strom und Spannung.

<sup>13</sup>Das Verhältnis zwischen Geschwindigkeit und Strom.

---

eine hinreichend große Schwingungsamplitude, die der hohen Anpresskraft entgegensteht, kein Antrieb möglich.

Überträgt man die Resultate dieser numerischen Untersuchung eines einzelnen, Longitudinalschwingers auf den Bau bzw. das Design von Mikrostoßantrieben, so scheint es leichter, einen schnellen aber schwachen Antrieb zu bauen, als einen kräftigen (und langsamen). Dies ist eine Erkenntnis, die sich mit eigenen Erfahrungen aus dem Experiment, aber auch mit Ergebnissen aus der Literatur deckt.

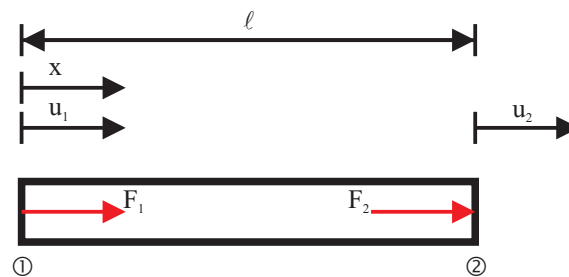
## 7 Gesamtmodell des Stehwellenantriebs

In Kapitel 6 wurde ein Modell für einen einachsigen Stoßkontakt erstellt. Allerdings ist das Einsatzgebiet im Bereich der Schwingungsmotoren auf Prinzipuntersuchungen beschränkt. Fast alle Antriebe nutzen Bewegungen die durch Überlagerungen von Schwingungen in mehreren Richtungen entstehen. Schon der sehr einfache Plattenspielerantrieb (vgl. VASILJEV [69]) benötigt die Kombination von Längs- und Biegebewegungen. Weiterhin wurde die elektromechanische Kopplung bei der Modellierung noch nicht berücksichtigt. Für einen ganzheitlichen Ansatz stellt diese Kopplung jedoch eine wesentliche Komponente dar.

In diesem Kapitel wird ein entsprechend erweitertes Modell zur Beschreibung des Stehwellenmotors entwickelt. Das gesuchte Modell soll sich durch die folgenden Merkmale auszeichnen:

- Berücksichtigung des Kontaktvorgangs zwischen Stößel und angetriebenem Teil
- Berücksichtigung der Strukturschwingung des Stators
- Berücksichtigung der elektromechanischen Kopplung
- Berücksichtigung der Vorspannkraft
- Geringe Anzahl an Freiheitsgraden
- Kurze Rechenzeit

Um diese Ziele zu erreichen, soll ein Finite Elemente Modell entwickelt werden. Im Gegensatz zu den im Kapitel 2.4.2 vorgestellten Arbeiten sollen möglichst einfache Elemente mit wenigen Freiheitsgraden genutzt werden. Da es für die meisten Schwingungsantriebe hinreichend ist, den Antrieb als ebenes Problem aufzufassen, sollen entsprechende Elemente verwendet werden. Insbesondere sollen hierbei Biege- und Längsschwingungen abgebildet werden können. Daher können relativ einfache Zwei-Knoten-Elemente verwendet werden. Allerdings bieten gängige FE-Programme, wie beispielsweise ANSYS, keine entsprechenden Elemente unter Berücksichtigung der elektromechanischen Kopplung an. Da auch weiterhin der Kontaktvorgang auf Basis der in Kapitel 5.4 vorgestellten Berechnungsmethode integriert werden soll und die weit entwickelten kommerziellen FE-Programme, keinen vollen Zugriff auf die Lösungsroutinen bieten, ist ein auf MATLAB basierendes FE-Programm neu entwickelt und zur Berechnung verwendet worden.



**Abbildung 7.1:** Freikörperbild des Stabelementes.

Die Grundlagen der Finite-Elemente-Methode ist in der Fachliteratur hervorragend beschrieben, siehe hierzu die Literaturhinweise im Kapitel 2.4.2. Im folgenden werden deshalb nur die für diese Arbeit wichtigsten Punkte kurz und knapp erläutert.

## 7.1 Verwendete Elemente

Um eine einfache Modellierung mit einer geringen Anzahl von Freiheitsgraden zu erreichen, werden Zwei-Knoten-Stab und Balken-Elemente mit jeweils konstanten Koeffizienten genutzt. Auch die Einbindung der elektromechanischen Kopplung soll mit Zwei-Knoten-Elementen beschrieben werden.

### 7.1.1 Einfaches Stabelement

Das Stabelement lässt sich mit nur einem Freiheitsgrad pro Knoten beschreiben. In der Mechanik ist ein Stab als langes, schlankes Kontinuum definiert, bei dem alle Dehnungs- und Spannungskomponenten die nicht in der Stabachse liegen als vernachlässigbar klein angenommen werden. Eine Skizze<sup>1</sup> des des Stabelementes ist in Abbildung 7.1 gegeben. Die Bestimmung der Elementmatrizen (Steifigkeits- und Massenmatrix) kann über das Prinzip von HAMILTON

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta(T - U) dt + \int_{t_1}^{t_2} W_\delta dt = 0 \quad (7.1)$$

durchgeführt werden. Wobei  $W_\delta$  die virtuelle Arbeit der externen Kräfte,  $U$  die potentielle Energie,  $T$  die kinetische Energie und  $\delta$  der Variationsoperator<sup>2</sup> ist. Da später auch piezoelektrische Materialien genutzt werden, wird die in diesem Zusammenhang typische VOIGTSche Notation verwendet. Die potentielle Energie eines Kontinuums lässt sich

<sup>1</sup>Zur numerisch einfacheren Implementierung sind hier, wie auch für alle folgenden Elemente die Knotenfreiheitsgrade und Knotenreaktionskräfte am linken und rechten Knoten des Elements in der gleichen Ausrichtung gewählt.

<sup>2</sup>Die Variation einer Funktion  $F(u_1, u_2, \dots, u_n)$  berechnet sich mit  $\delta F = \frac{\partial F}{\partial u_1} \delta u_1 + \frac{\partial F}{\partial u_2} \delta u_2 + \dots + \frac{\partial F}{\partial u_n} \delta u_n$ .

mit Hilfe der Spaltenmatrix  $\mathbf{S}$  mit den Komponenten des Dehnungstensors und der Spaltenmatrix  $\mathbf{T}$  mit den Komponenten des Spannungstensors als

$$U = \frac{1}{2} \int_V (\mathbf{S}^T \mathbf{T}) dV \quad (7.2)$$

beschreiben. Die dazugehörige Variation lautet

$$\delta U = \int_V (\delta \mathbf{S}^T \mathbf{T}) dV. \quad (7.3)$$

Die im Volumen gespeicherte kinetische Energie ist

$$T = \frac{1}{2} \int_V (\rho \dot{\mathbf{u}}^2) dV, \quad (7.4)$$

mit der Variation

$$\delta T = \int_V (\rho \dot{\mathbf{u}} \delta \dot{\mathbf{u}}) dV. \quad (7.5)$$

Um das Prinzip von HAMILTON anzuwenden, wird die Variation  $\delta T$  zunächst über der Zeit integriert

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta T dt = \int_{t_1}^{t_2} \int_V (\rho \dot{\mathbf{u}} \delta \dot{\mathbf{u}}) dV dt, \quad (7.6)$$

und eine partielle Integration<sup>3</sup> bezüglich der Zeit durchgeführt

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta T dt = \underbrace{\int_V (\rho \dot{\mathbf{u}} \delta \mathbf{u}) dV}_{=0} \Big|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \int_V (\rho \ddot{\mathbf{u}} \delta \mathbf{u}) dV dt. \quad (7.7)$$

Dabei verschwindet der erste Term, da die Variation definitionsgemäß an den Zeitgrenzen verschwinden muss. Mit den von außen angreifenden Kräften wird die Arbeit berechnet. Da Volumen- und Oberflächenkräfte hier nicht betrachtet werden, bleiben nur Punktkräfte auf dem Rand, somit ist die virtuelle Arbeit

$$W_\delta = \delta \mathbf{u}^T \mathbf{F}. \quad (7.8)$$

Gleichung 7.1 liefert damit

$$\int_{t_1}^{t_2} \int_V (-\rho \delta \mathbf{u}^T \ddot{\mathbf{u}} - \delta \mathbf{S}^T \mathbf{T}) dV dt + \int_{t_1}^{t_2} \delta \mathbf{u}^T \mathbf{F} dt = 0. \quad (7.9)$$

Da bei dem Stab bei der Spannung und der Dehnung nur die  $T_3$  und  $S_3$  Anteile in Stabrichtung auftreten, vereinfacht sich die Gleichung weiter zu

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^{t_2} \int_0^l (-\rho \delta u(x,t) \ddot{u}(x,t) - \delta S_3(x,t) T_3(x,t)) A dx dt \\ + \int_{t_1}^{t_2} F_1(t) \delta u_1(t) dt + \int_{t_1}^{t_2} F_2(t) \delta u_2(t) dt = 0. \end{aligned} \quad (7.10)$$

Hierbei ist  $S_3$  die Dehnung und  $T_3$  die mechanische Spannung, jeweils in Stabrichtung.  $u_i$  sind die Verschiebungen der beiden Ränder,  $F_i$  sind die externen Randkräfte,  $\rho$  die Dichte

---

<sup>3</sup>  $\int_a^b uv' dx = uv|_a^b - \int_a^b u'v dx$



des Materials und  $A$  die Fläche des Stabes. Um den Zusammenhang zwischen Spannung und Dehnung zu beschreiben, wird hier ein lineares Materialverhalten angenommen und folglich das HOOKsche Gesetz  $T_3 = c_{33} S_3$  verwendet. Wobei  $c_{33}$  im isotropen Material das Elastizitätsmodul ist. Die Dehnung kann über die örtliche Ableitung der Verschiebung ausgedrückt werden,  $S_3 = u'(x)$ . Um die Elementmatrizen zu bestimmen, wird das Verfahren von RITZ verwendet. Dabei wird eine Ansatzfunktion für die Ortsabhängigkeit der Verschiebungsfunktion eingesetzt und damit die Gleichung weiter umgeformt. Für den Stab mit zwei Knoten bietet sich ein linearer Ansatz für die Verschiebung an:

$$u(\xi, t) = (1 - \xi)u_1(t) + \xi u_2(t) \quad \text{mit} \quad \xi = \frac{x}{\ell}. \quad (7.11)$$

Die Länge des betrachteten Elementes  $\ell$  wurde dabei mit Hilfe der neuen Koordinate  $\xi$  auf 1 normiert. Die Variation der Verschiebung lautet

$$\delta u(\xi, t) = (1 - \xi)\delta u_1(t) + \xi \delta u_2(t) \quad (7.12)$$

Mit diesem Ansatz lassen sich neben der Verschiebungen auch die Dehnungen und deren Variationen ausdrücken:

$$S_3(\xi, t) = \frac{d u(\xi, t)}{d x} = -\frac{1}{\ell}u_1(t) + \frac{1}{\ell}u_2(t) \quad (7.13)$$

$$\delta S_3(\xi, t) = \delta \frac{d u(\xi, t)}{d x} = -\frac{1}{\ell}\delta u_1(t) + \frac{1}{\ell}\delta u_2(t) \quad (7.14)$$

Alternativ können die letzten vier Gleichungen vektoriell aufgeschrieben werden

$$u(\xi, t) = \begin{bmatrix} 1 - \xi \\ \xi \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{bmatrix} \quad (7.15)$$

$$\delta u(\xi, t) = \begin{bmatrix} 1 - \xi \\ \xi \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \delta u_1(t) \\ \delta u_2(t) \end{bmatrix} \quad (7.16)$$

$$S_3(\xi, t) = \frac{1}{\ell} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{bmatrix} \quad (7.17)$$

$$\delta S_3(\xi, t) = \frac{1}{\ell} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \delta u_1(t) \\ \delta u_2(t) \end{bmatrix} \quad (7.18)$$

Zur besseren Lesbarkeit wird von jetzt an die Zeitabhängigkeit der Knotenfreiheitsgrade und deren Ableitungen nicht mehr explizit angegeben. Eingesetzt in Gleichung<sup>4</sup> 7.10 und

<sup>4</sup>Dabei wurde die Gleichung mit  $-1$  durchmultipliziert. Weiterhin ist zu beachten, dass für in Skalarprodukten von Zeilen- und Spaltenvektoren die Reihenfolge vertauscht werden darf wenn auch der andere Vektor transponiert wird,  $\mathbf{a}^T \mathbf{b} = \mathbf{b}^T \mathbf{a}$ .

mit der Substitution  $dx = \ell d\xi$  folgt

$$\begin{aligned} & \int_{t_1}^{t_2} \int_0^1 \left( \underbrace{Alc_{33} \begin{bmatrix} \delta u_1 \\ \delta u_2 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}}_{\delta S_3(\xi)} \frac{1}{\ell} \underbrace{\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}}_{S_3(\xi)} \frac{1}{\ell} \right) d\xi dt \\ & + \int_{t_1}^{t_2} \int_0^1 \left( Al\rho \underbrace{\begin{bmatrix} \delta u_1 \\ \delta u_2 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 1-\xi \\ \xi \end{bmatrix}}_{\delta u(\xi)} \underbrace{\begin{bmatrix} 1-\xi \\ \xi \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \ddot{u}_1 \\ \ddot{u}_2 \end{bmatrix}}_{\ddot{u}(\xi)} \right) d\xi dt \\ & - \int_{t_1}^{t_2} \begin{bmatrix} \delta u_1 \\ \delta u_2 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix} dt = 0. \end{aligned} \quad (7.19)$$

Werden die Volumenintegrale für konstante Material- und Geometrieparameter berechnet und beachtet, dass das HAMILTONSche Prinzip für beliebige Zeiten gilt, ergeben sich die Elementmatrizen des Stabes

$$\begin{bmatrix} \delta u_1 \\ \delta u_2 \end{bmatrix}^T \left( \underbrace{\frac{Ac_{33}}{\ell} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{K}_{\text{Stab}}} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} + \underbrace{\frac{Al\rho}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}}_{\mathbf{M}_{\text{Stab}}} \begin{bmatrix} \ddot{u}_1 \\ \ddot{u}_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix} \right) = 0. \quad (7.20)$$

Da diese Gleichung für beliebige Variationen  $\delta \mathbf{u}$  erfüllt sein muss folgt, dass der Term in der Klammer gleich null sein muss. Man erhält damit als Bewegungsgleichung des ungedämpften Stabelements

$$\mathbf{M}_{\text{Stab}} \ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{K}_{\text{Stab}} \mathbf{u} = \mathbf{f}. \quad (7.21)$$

Mittels RAYLEIGH-Dämpfung lässt sich eine Dämpfungsmatrix mit den Koeffizienten  $\alpha$  und  $\beta$  bestimmen, die proportional zu  $\mathbf{M}$  und  $\mathbf{K}$  ist.

$$\mathbf{D}_{\text{Stab}} = \alpha \mathbf{M}_{\text{Stab}} + \beta \mathbf{K}_{\text{Stab}}. \quad (7.22)$$

## 7.1.2 Stabelement mit Querkontraktionseinfluss

Da die für die klassische Stabtheorie notwendige Annahme langer und schlanker Strukturen nur im Sonderfall zutrifft, soll das soeben vorgestellte Element erweitert werden. Nach SEEMANN [182] und WAUER [116] lässt sich der Gültigkeitsbereich der Stabtheorie signifikant verbessern, indem der Trägheitseinfluss aufgrund der Querkontraktion mit berücksichtigt wird. Dazu wird ein Ansatz von RAYLEIGH [183] in der von GRAFF [184] vorgeschlagenen Form verwendet. Wie in der Stabtheorie üblich, wird weiterhin ein ein-dimensionaler Spannungszustand angenommen, die Spannungen an den Rändern der Querschnittsebene verschwinden. Der zusätzliche Energieanteil der kinetischen Energie

lautet, wenn die Dehnung konstant über  $y$  und  $z$  ist

$$T_Q = \frac{1}{2} \int_V \rho \left( \underbrace{(y\dot{S}_1)^2}_{v_y^2} + \underbrace{(z\dot{S}_2)^2}_{v_z^2} \right) dV \quad (7.23)$$

Mit der Annahme, dass Längs- und Querbewegung nur über die Querkontraktionszahl<sup>5</sup>  $\nu$  zusammenhängen, lassen sich die Bewegungen in Querrichtung als Funktion der Längsrichtung darstellen:

$$S_1 = S_2 = -\nu S_3 = -\nu u'. \quad (7.24)$$

Weiterhin ist das polare Flächenträgheitsmoment mit

$$I_p = \int_A (y^2 + z^2) dA \quad (7.25)$$

bestimmt. Damit wird Gleichung 7.23 zu

$$T_Q = \frac{1}{2} \int_0^\ell \left( \rho \nu^2 \dot{u}'^2 \int_A (y^2 + z^2) dA \right) dx = \frac{1}{2} \int_0^\ell \left( \rho \nu^2 I_p \dot{u}'^2 \right) dx. \quad (7.26)$$

Um die um diesen Anteil erweiterte kinetische Energie in Gleichung 7.10 einzusetzen, wird die Variation

$$\delta T_Q = \int_0^\ell \left( \rho \nu^2 I_p \dot{u}' \delta \dot{u}' \right) dx \quad (7.27)$$

benötigt. Nach Einsetzen in Gleichung 7.10 wird dieser Term über der Zeit integriert. Mit Durchführung der partiellen Integration über der Zeit ergibt sich

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta T_Q dt = \underbrace{\int_0^\ell \rho \nu^2 I_p u' \delta u' dx}_{=0} \Big|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \int_0^\ell \left( \rho \nu^2 I_p \ddot{u}' \delta u' \right) dx dt, \quad (7.28)$$

wobei der ausintegrierte Term wieder aufgrund der zu den Anfangs- und Endzeitpunkten verschwindenden Variationen null ist. Um den zusätzlichen Anteil für die Massenmatrix des Stabes zu bestimmen, werden in diese Gleichung die vektoriellen Ansatzfunktionen eingesetzt

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta T_Q dt = - \int_{t_1}^{t_2} \int_0^1 \left( \rho \nu^2 I_p \frac{1}{\ell} \underbrace{\begin{bmatrix} \delta u_1 \\ \delta u_2 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}}_{\delta S(\xi)} \underbrace{\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \dot{u}_1 \\ \dot{u}_2 \end{bmatrix}}_{\dot{S}_3(\xi)} \frac{1}{\ell} \right) d\xi dt. \quad (7.29)$$

Nach Integration bei Annahme konstanter Materialparameter folgt der zusätzliche Trägheitsanteil

$$\mathbf{M}_Q = \frac{\rho \nu^2 I_p}{\ell} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad (7.30)$$

<sup>5</sup>Auch POISSON-Zahl genannt

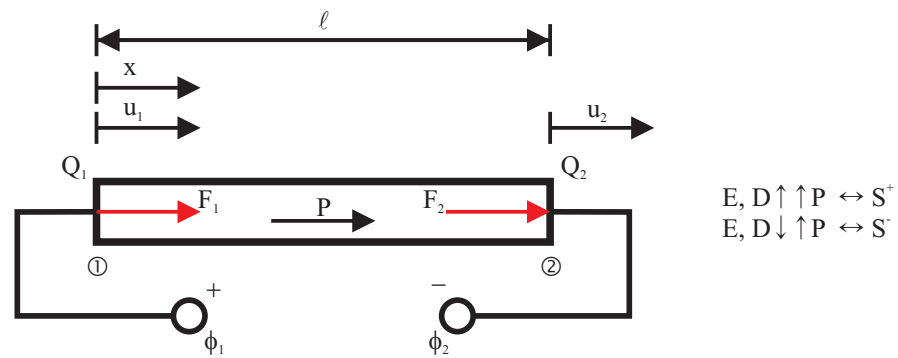


Abbildung 7.2: Freikörperbild des piezoelektrischen Stabes.

der auf den zuvor berechneten Anteil aufaddiert wird. Das positive Vorzeichen ergibt sich analog zu Gleichung 7.19. Damit ist die neue Massenmatrix

$$\mathbf{M}_{\text{Stab}}^* = \mathbf{M}_{\text{Stab}} + \mathbf{M}_Q. \quad (7.31)$$

### 7.1.3 Elektromechanisches Stabelement

Sollen neben den mechanischen Größen auch die elektrischen Eigenschaften mit berücksichtigt werden, muss die Gleichung 7.10 um diese Komponenten erweitert werden. Dabei sollen wie zuvor beim Stab nur die Spannung und Dehnung in Längsrichtung berücksichtigt werden. Dazu kommen noch das elektrische Feld und die dielektrische Verschiebung, die ebenfalls nur in Längsrichtung betrachtet werden. Die Skizze in Abbildung 7.2 zeigt die Definition des Elementes. In der Elektrotechnik ist das elektrische Feld so definiert, dass es von hohen zu niedrigen Potentialen  $\phi$  zeigt. Gleichzeitig ist festgelegt, dass sowohl E-Feld als auch D-Feld von positiven zu negativen Ladungen zeigen<sup>6</sup>. Die Energie eines elektrischen Feldes beträgt

$$U_{\text{el}} = \frac{1}{2} \int_V \mathbf{E} \mathbf{D} \, dV, \quad (7.32)$$

für die Variation folgt

$$\delta U_{\text{el}} = \int_V \delta \mathbf{E} \mathbf{D} \, dV, \quad (7.33)$$

da  $\mathbf{D}$  eine Funktion von  $\mathbf{E}$  ist.

Um das zu berücksichtigende Potential  $U_{\text{ent}}$  zu bestimmen, soll ein Gedankenexperiment durchgeführt werden. Zunächst wird ein statisch stabiler Zustand des konservativen, elektromechanischen Systems angenommen, ohne dass äußere Felder auf das System einwirken. Da weiterhin das Null-Potential frei wählbar ist, soll in diesem Zustand sowohl das Potential des mechanischen Feldes als auch das des elektrischen Feldes gleich null sein. Es wird postuliert, dass für das gleiche System mindestens ein zweiter statisch stabiler Zustand möglich ist, in dem das System reversibel mechanisch deformiert ist. Dabei

<sup>6</sup>Diese Festlegung erfolgt laut STRASSACKER UND SÜSSE [185] aus historischen Gründen.

ist es offensichtlich, dass sich bei unverändertem Nullniveau mechanische in elektrische Energie wandeln muss, oder vice versa. Folglich haben das elektrische und das mechanische Potential unterschiedliche Vorzeichen, daher lässt sich für das zu berücksichtigende thermodynamische Potential (Enthalpie)

$$U_{\text{ent}} = U_{\text{mech}} - U_{\text{el}} = \frac{1}{2} \int_V \mathbf{S} \mathbf{T} dV - \frac{1}{2} \int_V \mathbf{E} \mathbf{D} dV \quad (7.34)$$

schreiben. Die kinetische Energie bleibt unverändert, im Arbeitsterm werden die Punktladungen<sup>7</sup> die über die Rändern zu- oder abgeführt werden mit berücksichtigt, Volumen- und Flächenladungen werden nicht zugelassen. Genau wie bei der potentiellen Energie, geht die Ladung als elektrische Größe mit negativem Vorzeichen in den Arbeitsterm ein. Dies gewährleistet auch die Symmetrie der Elementmatrizen. Allerdings muss das Vorzeichen später beim Festlegen der Randbedingungen wie auch bei der Auswertung berücksichtigt werden. Eingesetzt in Gleichung 7.1 lautet die Beschreibung des betrachteten Systems

$$\int_{t_1}^{t_2} (\delta T - \delta U_{\text{mech}} + \delta U_{\text{el}}) dt + \int_{t_1}^{t_2} W_{\delta} dt = 0. \quad (7.35)$$

Diese Gleichung wird wieder auf die mechanischen und elektrischen Größen in Stabrichtung reduziert, damit folgt

$$\begin{aligned} & \int_{t_1}^{t_2} \int_0^l (-A \rho \delta u(x) \ddot{u}(x) - A \delta S_3 T_3 + A \delta E_3 D_3) dx dt \\ & + \int_{t_1}^{t_2} (+F_1 \delta u_1 + F_2 \delta u_2 - Q_1 \delta \phi_1 - Q_2 \delta \phi_2) dt = 0. \end{aligned} \quad (7.36)$$

Mit  $E_3$  als elektrischem Feld in Stabrichtung und der dielektrischen Verschiebung  $D_3$  in derselben Richtung.  $Q_i$  ist die externe Punktladung auf den Rändern und  $\phi_i$  das elektrische Potential des Rands. Im nächsten Schritt muss ein Materialgesetz eingesetzt werden. Die hier genutzten konstitutiven Gleichungen für das piezoelektrische Material PZT<sup>8</sup> mit Polarisation in 3-Richtung lauten

$$\begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ T_5 \\ T_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11}^E & c_{12}^E & c_{13}^E & 0 & 0 & 0 \\ c_{12}^E & c_{11}^E & c_{13}^E & 0 & 0 & 0 \\ c_{13}^E & c_{13}^E & c_{33}^E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{44}^E & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{44}^E & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{66}^E \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ S_4 \\ S_5 \\ S_6 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & e_{31} \\ 0 & 0 & e_{31} \\ 0 & 0 & e_{33} \\ 0 & e_{15} & 0 \\ e_{15} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{bmatrix} \quad (7.37)$$

<sup>7</sup>An Ladungen wird eine Arbeit verrichtet, wenn sie im elektrischen Feld bewegt werden.

<sup>8</sup>Neben der hier verwendeten Materialklasse gibt es weitere, bei denen andere Koeffizienten in den Matrizen erscheinen, vergleiche zum Beispiel MASON [12].

$$\begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & e_{15} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e_{15} & 0 & 0 \\ e_{31} & e_{31} & e_{33} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ S_4 \\ S_5 \\ S_6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_{11}^S & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{11}^S & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{33}^S \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{bmatrix} \quad (7.38)$$

Da beim Stab nur Effekte in Stabrichtung betrachtet werden, wird auch der piezoelektrische Effekt nur in dieser Richtung betrachtet. Die Polarisationsrichtung wird dabei in Richtung der Stabachse festgelegt, so dass der  $d_{33}$ -Effekt berücksichtigt wird. Mit der Annahme eines einachsigen Spannungszustandes unter Vernachlässigung der Querkontraktion, werden die konstitutiven Gleichungen auf diese Richtung reduziert, damit lautet das lineare Materialgesetz für den piezoelektrischen Stab

$$T_3 = c_{33}^E S_3 - e_{33} E_3 \quad (7.39)$$

$$D_3 = e_{33} S_3 + \varepsilon_{33}^S E_3. \quad (7.40)$$

Dabei ist  $e_{33}$  die piezoelektrische Konstante, die die Kopplung zwischen mechanischen und elektrischen Größen beschreibt.  $\varepsilon_{33}^S$  ist die Permeabilität, bestimmt bei konstanter mechanischer Dehnung.  $c_{33}^E$  ist die Elastizitätskonstante bei konstantem E-Feld. Einsetzen des Materialgesetzes führt auf

$$\begin{aligned} & \int_{t_1}^{t_2} \int_0^l \left( -A \rho \delta u(x) \ddot{u}(x) - A \delta S_3 \left( c_{33}^E S_3 - e_{33} E_3 \right) \right) dx dt \\ & \quad + \int_{t_1}^{t_2} \int_0^l \left( A \delta E_3 \left( e_{33} S_3 + \varepsilon_{33}^S E_3 \right) \right) dx dt \\ & \quad + \int_{t_1}^{t_2} \left( F_1 \delta u_1 + F_2 \delta u_2 - Q_1 \delta \phi_1 - Q_2 \delta \phi_2 \right) dt = 0. \end{aligned} \quad (7.41)$$

Wie zuvor bei dem Stab muss auch hier der Zusammenhang  $S_3 = u'(x)$  und zusätzlich der Zusammenhang zwischen E-Feld und elektrischem Potential  $E_3 = -\phi'(x)$  in die Gleichung 7.41 eingesetzt werden. Neben der weiterhin genutzten Ansatzfunktion 7.11 wird eine zweite lineare Ansatzfunktion für das elektrische Potential gewählt

$$\phi(\xi, t) = (1 - \xi)\phi_1(t) + \xi\phi_2(t) \quad \text{mit} \quad \xi = \frac{x}{\ell}. \quad (7.42)$$

Werden die genannten Zusammenhänge und die Substitution  $dx = \ell d\xi$  genutzt, die Größen  $\delta u(\xi)$ ,  $u(\xi)$ ,  $\delta S_3(\xi)$ ,  $S_3(\xi)$ ,  $\delta \phi(\xi)$ ,  $\phi(\xi)$ ,  $E_3(\xi)$  und  $\delta E_3(\xi)$  vektoriell<sup>9</sup> notiert und

<sup>9</sup>Analog zu den Gleichungen 7.15 bis 7.18, unter Beachtung des negativen Vorzeichens in  $E_3 = -\phi'(x)$

in Gleichung 7.41 eingesetzt, ergibt sich

$$\begin{aligned}
& \int_{t_1}^{t_2} \int_0^1 \underbrace{\left( Alc_{33}^E \underbrace{\begin{bmatrix} \delta u_1 \\ \delta u_2 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \frac{1}{\ell}}_{\delta S_3(\xi)} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}^T \underbrace{\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \frac{1}{\ell}}_{S_3(\xi)} \right)}_{\mathbf{K}_{uu}} d\xi dt \\
& - \int_{t_1}^{t_2} \int_0^1 \underbrace{\left( Ale_{33} \underbrace{\begin{bmatrix} \delta u_1 \\ \delta u_2 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \frac{1}{\ell}}_{\delta S_3(\xi)} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}^T \underbrace{\begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{bmatrix} \frac{1}{\ell}}_{E_3(\xi)} \right)}_{\mathbf{K}_{u\phi}} d\xi dt \\
& - \int_{t_1}^{t_2} \int_0^1 \underbrace{\left( Ale_{33} \underbrace{\begin{bmatrix} \delta \phi_1 \\ \delta \phi_2 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \frac{1}{\ell}}_{\delta E_3(\xi)} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}^T \underbrace{\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \frac{1}{\ell}}_{S_3(\xi)} \right)}_{\mathbf{K}_{\phi u}} d\xi dt \\
& - \int_{t_1}^{t_2} \int_0^1 \underbrace{\left( Ale_{33}^S \underbrace{\begin{bmatrix} \delta \phi_1 \\ \delta \phi_2 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \frac{1}{\ell}}_{\delta E_3(\xi)} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}^T \underbrace{\begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{bmatrix} \frac{1}{\ell}}_{E_3(\xi)} \right)}_{\mathbf{K}_{\phi\phi}} d\xi dt \\
& + \int_{t_1}^{t_2} \int_0^1 \underbrace{\left( Al\rho \underbrace{\begin{bmatrix} \delta u_1 \\ \delta u_2 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 1-\xi \\ \xi \end{bmatrix}}_{\delta u(\xi)} \begin{bmatrix} 1-\xi \\ \xi \end{bmatrix}^T \underbrace{\begin{bmatrix} \dot{u}_1 \\ \dot{u}_2 \end{bmatrix}}_{\ddot{u}(\xi)} \right)}_{\mathbf{M}_{uu}} d\xi dt \\
& - \int_{t_1}^{t_2} \left( \begin{bmatrix} \delta u_1 \\ \delta u_2 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \delta \phi_1 \\ \delta \phi_2 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{bmatrix} \right) dt = 0. \tag{7.43}
\end{aligned}$$

Für die Berechnung der Integrale, unter der Annahme von konstanten Materialparametern, folgen die einzelnen in Tabelle 7.1 dargestellten Elementteilmatrizen.

Mit diesen können die Elementmatrizen aufgebaut werden. Dazu werden zunächst die Freiheitsgrade in einem Vektor zusammengefasst

$$\mathbf{x}_{\text{Piezostab}} = [u_1 \ u_2 \ \phi_1 \ \phi_2]^T, \tag{7.44}$$

**Tabelle 7.1:** Teilmatrizen eines piezoelektrischen Stabes

$\mathbf{K}_{uu} = \frac{Ac^E_{33}}{\ell} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$	$\mathbf{K}_{u\phi} = \frac{Ae_{33}}{\ell} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$
$\mathbf{K}_{\phi u} = \frac{Ae_{33}}{\ell} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$	$\mathbf{K}_{\phi\phi} = \frac{Ac^S_{33}}{\ell} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$
$\mathbf{M}_{uu} = \frac{A\ell\rho}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$	

genau wie auch die externen Kräfte und Ladungen

$$\mathbf{f}_{\text{Piezostab}} = [F_1 \ F_2 \ -Q_1 \ -Q_2]^T. \quad (7.45)$$

Gemäß dieser Vektoren werden die Teilmatrizen zu den Elementmatrizen zusammengesetzt. Somit wird die Steifigkeitsmatrix<sup>10</sup> zu

$$\mathbf{K}_{\text{Piezostab}} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{uu} & \mathbf{K}_{u\phi} \\ \mathbf{K}_{\phi u} & \mathbf{K}_{\phi\phi} \end{bmatrix}. \quad (7.46)$$

Als Konsequenz der als negativ angenommenen externen Ladungen gilt  $\mathbf{K}_{u\phi} = \mathbf{K}_{\phi u}$ . Damit<sup>11</sup> und wegen der Symmetrie der Teilmatrizen ist auch  $\mathbf{K}_{\text{Piezostab}}$  insgesamt symmetrisch. Für die Massenmatrix ergibt sich

$$\mathbf{M}_{\text{Piezostab}} = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{uu} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}. \quad (7.47)$$

Die Dämpfung soll, wie beim Stab zuvor, als RAYLEIGH-Dämpfung abgebildet werden. Dabei wird die Dämpfung auf die mechanischen Elemente der Matrix beschränkt

$$\mathbf{D}_{\text{Piezostab}} = \begin{bmatrix} \alpha\mathbf{M}_{uu} + \beta\mathbf{K}_{uu} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}. \quad (7.48)$$

<sup>10</sup>Diese Matrix wird weiterhin Steifigkeitsmatrix genannt, auch wenn wie hier nicht rein mechanische Größen erfasst werden. Hierbei werden die elektrischen Größen im Sinne der elektromechanischen Analogien behandelt. Genauer müsste man von verallgemeinerten Steifigkeits-, Massen- und Dämpfungsmatrizen sprechen. Auch die Verschiebungs- und Kraftvektoren werden weiter so genannt.

<sup>11</sup>Wären die Ladungen als positiv angenommen worden, hätte  $\mathbf{K}_{\phi\phi}$  vertauschte Vorzeichen. Weiterhin würde  $\mathbf{K}_{u\phi} = -\mathbf{K}_{\phi u}$  gelten und in der Folge wäre die Steifigkeitsmatrix nicht mehr symmetrisch.



### 7.1.4 Piezoelektrisches Stabelement mit Querkontraktionseinfluss

Wie zuvor beim einfachen Stab soll auch das elektromechanische Stabmodell um den Einfluss der kinetischen Energie infolge der Querkontraktion erweitert werden. Dazu wird wieder die von SEEMANN [182] vorgeschlagene Gleichung 7.23 genutzt und in Anlehnung an GAUSMANN [186] für piezoelektrische Stäbe genutzt. Da sich die Querkontraktion aufgrund des anisotropen und gekoppelten Materialverhaltens nicht über die POISSON-Zahl abbilden lässt, muss auf die konstitutiven Gleichungen 7.37 und 7.38 verwiesen werden. Zur Beschreibung des Stabes soll weiterhin angenommen werden, dass die Spannungen  $T_1$  und  $T_2$  sowie alle Schubkräfte vernachlässigbar klein sind, also ein ein-dimensionaler Spannungszustand herrscht. Ebenfalls gilt weiterhin  $E_1 = E_2 = 0$  sowie  $S_1 = S_2$ , damit ergibt sich die Querdehnung aus der ersten Zeile von Gleichung 7.37 zu

$$S_1 = S_2 = \frac{e_{31} E_3 - c_{13} S_3}{c_{11}^E + c_{12}^E}. \quad (7.49)$$

Nach der Zeit abgeleitet und in Gleichung 7.23 eingesetzt, ergibt sich die kinetische Energie der Querkontraktion zu

$$T_Q = \frac{1}{2} \int_0^\ell \left( \frac{\rho I_p}{(c_{11}^E + c_{12}^E)^2} \left( e_{31} \dot{E}_3 - c_{13}^E \dot{S}_3 \right)^2 \right) dx, \quad (7.50)$$

die Variation folgt als

$$\begin{aligned} \delta T_Q &= \int_0^\ell \left( \frac{\rho I_p}{(c_{11}^E + c_{12}^E)^2} \left( e_{31}^2 \dot{E}_3 \delta \dot{E}_3 - c_{13}^E e_{31} \dot{S}_3 \delta \dot{E}_3 \right) \right) dx \\ &+ \int_0^\ell \left( \frac{\rho I_p}{(c_{11}^E + c_{12}^E)^2} \left( -c_{13}^E e_{31} \dot{E}_3 \delta \dot{S}_3 + c_{13}^{E2} \dot{S}_3 \delta \dot{S}_3 \right) \right) dx. \end{aligned} \quad (7.51)$$

Integration nach der Zeit und die Durchführung der partiellen Integration nach derselben führen auf

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^{t_2} \delta T_Q dt &= - \int_{t_1}^{t_2} \int_0^\ell \left( \frac{\rho I_p}{(c_{11}^E + c_{12}^E)^2} \left( e_{31}^2 \ddot{E}_3 \delta E_3 - c_{13}^E e_{31} \ddot{S}_3 \delta E_3 \right) \right) dx dt \\ &- \int_{t_1}^{t_2} \int_0^\ell \left( \frac{\rho I_p}{(c_{11}^E + c_{12}^E)^2} \left( -c_{13}^E e_{31} \ddot{E}_3 \delta S_3 + c_{13}^{E2} \ddot{S}_3 \delta S_3 \right) \right) dx dt. \end{aligned} \quad (7.52)$$

Hier ist schon zu erkennen, dass infolge der Berücksichtigung der Querkontraktion eine voll besetzte Massenmatrix entsteht. Es werden wieder die Ansatzfunktionen für  $x(\xi)$  und  $\phi(\xi)$ , die Substitution und die Beziehungen  $S_3 = u'(x)$  und  $E_3 = -\phi'(x)$  eingesetzt. Nach Integration unter der Annahme konstanter Parameter folgen die zusätzliche Massenanteile unter Einfluss der Querkontraktion als

$$\mathbf{M}_{\text{Piezostab}}^Q = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{uu}^Q & \mathbf{M}_{u\phi}^Q \\ \mathbf{M}_{\phi u}^Q & \mathbf{M}_{\phi\phi}^Q \end{bmatrix} \quad (7.53)$$

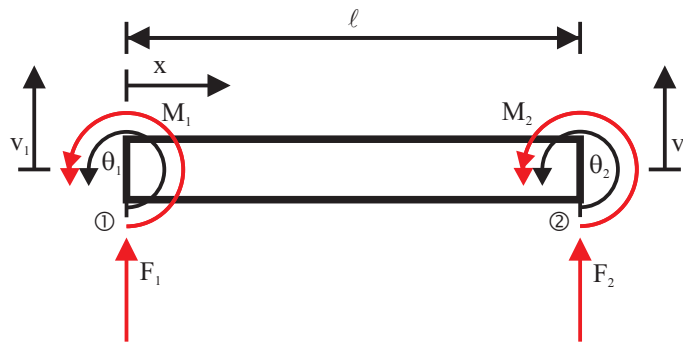


Abbildung 7.3: Freikörperbild des Balkenelementes.

mit den Untermatrizen

$$\mathbf{M}_{uu}^Q = \frac{c_{13}^E{}^2 \rho I_p}{\ell (c_{11}^E + c_{12}^E)^2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (7.54)$$

$$\mathbf{M}_{u\phi}^Q = \mathbf{M}_{\phi u}^Q = \frac{c_{13}^E e_{31} \rho I_p}{\ell (c_{11}^E + c_{12}^E)^2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (7.55)$$

$$\mathbf{M}_{\phi\phi}^Q = \frac{e_{31}^2 \rho I_p}{\ell (c_{11}^E + c_{12}^E)^2} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}. \quad (7.56)$$

Die gesamte neue Massenmatrix ergibt sich aus der Addition

$$\mathbf{M}_{\text{Piezostab}}^* = \mathbf{M}_{\text{Piezostab}} + \mathbf{M}_{\text{Piezostab}}^Q. \quad (7.57)$$

Nach der Bestimmung der Dämpfungsmatrix gemäß Gleichung 7.22 sind alle Elementmatrizen bekannt und können verwendet werden.

### 7.1.5 TIMOSHENKO-Balkenelement

Für den zu untersuchenden Stehwellenantrieb sind neben den mit Stäben beschreibbaren Longitudinalbewegungen auch Biegeschwingungen relevant. Auch hier soll ein Zwei-Knoten-Element genutzt werden, dazu wird die nach TIMOSHENKO benannte Beschreibung eines schubweichen Balkens herangezogen. Der schubweiche Balken wird genutzt, da die Bedingung des langen und schlanken Balkens, die Voraussetzung für den einfacheren schubstarrten Balken nach EULER-BERNOULLI ist, nicht immer eingehalten werden kann. Daneben ist laut WAUER [116] der schubweiche Balken deutlich besser zur Modellierung hochfrequenter Vorgänge geeignet. Dabei ist die Auswertung der Systemmatrizen nur geringfügig aufwendiger, so dass durch die Nutzung des TIMOSHENKO-Balkens keine Nachteile hinsichtlich der Rechenzeit zu erwarten sind. Lediglich das einmalige Aufstellen der Elementmatrizen ist etwas aufwendiger. Dafür soll wieder das Prinzip von HAMILTON verwendet werden. Zunächst sollen angelehnt an WAUER [116] und SATO [187] die Energien aufgestellt werden. Die kinetische Energie lautet

$$T_{\text{Timo}} = \frac{1}{2} \int_0^\ell (\rho A \dot{v}^2) dx + \frac{1}{2} \int_0^\ell (\rho I_{zz} \dot{\varphi}^2) dx, \quad (7.58)$$

mit  $I_{zz}$  als Flächenträgheitsmoment bezüglich der Biegeachse und  $\varphi$  als aus der Biegung resultierende Verdrehung. Die potentielle Energie lässt sich mit

$$U_{\text{Timo}} = \frac{1}{2} \int_0^\ell (c_{33}^E I_{zz} (\varphi')^2) dx + \frac{1}{2} \int_0^\ell (c_{44}^E A_S (v' - \varphi)^2) dx \quad (7.59)$$

bestimmen. Dabei ist  $A_S$  die effektive Schubfläche und  $c_{44}^E$  der Schubmodul. Für die virtuelle Arbeit der äußeren Kräfte und Momente, wenn Flächen- und Volumenkräfte respektive -momente nicht berücksichtigt werden, ergibt sich

$$W_{\delta, \text{Timo}} = -F_1 \delta v_1 - F_2 \delta v_2 - M_1 \delta \varphi_1 - M_2 \delta \varphi_2. \quad (7.60)$$

Wobei  $v' = \varphi + \gamma$  der Gesamtverdrehwinkel ist, bestehend aus  $\varphi$  und einem Anteil  $\gamma$  der auf den Schubeinfluss zurückzuführen ist. Werden die beiden hinteren Terme von Gleichung 7.58 und 7.59, also die Rotationsträgheit und der Schubeinfluss vernachlässigt, führt dies auf die nach EULER und BERNOULLI benannte Balkenmodellierung. Die drei Gleichungen 7.58 bis 7.60 können direkt in das Prinzip von HAMILTON (Gleichung 7.1) eingesetzt werden. Analog zu den anderen Elementen liefert die Gleichung nach partieller Integration, Einarbeitung des genutzten Materialgesetzes sowie der linearen Ansatzfunktionen und längerer Rechnung (vgl. z.B. PREZEMIENIECKI [188]) die Massen- und Steifigkeitsmatrix

$$\mathbf{K}_{\text{Timo}} = \frac{6c_{33}I_{zz}}{(1+v)\ell^2} \begin{bmatrix} \frac{2}{\ell} & 1 & -\frac{2}{\ell} & 1 \\ 1 & \frac{(4+v)\ell}{6} & -1 & \frac{(2-v)\ell}{6} \\ -\frac{2}{\ell} & -1 & \frac{2}{\ell} & -1 \\ 1 & \frac{(2-v)\ell}{6} & -1 & \frac{(4+v)\ell}{6} \end{bmatrix} \quad (7.61)$$

$$\mathbf{M}_{\text{Timo}} = \frac{\rho A \ell}{(1+v)^2} \begin{bmatrix} m_a & m_c & m_b & -m_d \\ m_c & m_e & m_d & -m_f \\ m_b & m_d & m_a & -m_c \\ -m_d & -m_f & -m_c & m_e \end{bmatrix} \quad (7.62)$$

mit den Koeffizienten

$$m_a = \frac{13}{35} + \frac{7}{10}v + \frac{1}{3}v^2 + \frac{6}{5} \left( \frac{\sqrt{I_{zz}}}{\sqrt{A\ell}} \right)^2 \quad (7.63)$$

$$m_b = \frac{9}{70} + \frac{3}{10}v + \frac{1}{6}v^2 - \frac{6}{5} \left( \frac{\sqrt{I_{zz}}}{\sqrt{A\ell}} \right)^2 \quad (7.64)$$

$$m_c = \left( \frac{11}{210} + \frac{11}{120}v + \frac{1}{24}v^2 + \left( \frac{1}{10} - \frac{1}{2}v \right) \left( \frac{\sqrt{I_{zz}}}{\sqrt{A\ell}} \right)^2 \right) \ell \quad (7.65)$$

$$m_d = \left( \frac{13}{420} + \frac{3}{40}v + \frac{1}{24}v^2 + \left( \frac{1}{10} - \frac{1}{2}v \right) \left( \frac{\sqrt{I_{zz}}}{\sqrt{A\ell}} \right)^2 \right) \ell \quad (7.66)$$

$$m_e = \left( \frac{1}{105} + \frac{1}{60}v + \frac{1}{120}v^2 + \left( \frac{2}{15} + \frac{1}{6}v + \frac{1}{3}v^2 \right) \left( \frac{\sqrt{I_{zz}}}{\sqrt{A\ell}} \right)^2 \right) \ell^2 \quad (7.67)$$

$$m_f = \left( \frac{1}{140} + \frac{1}{60}v + \frac{1}{120}v^2 + \left( \frac{1}{30} + \frac{1}{6}v + \frac{1}{6}v^2 \right) \left( \frac{\sqrt{I_{zz}}}{\sqrt{A\ell}} \right)^2 \right) \ell^2 \quad (7.68)$$

und der Abkürzung

$$v = \frac{12c_{33}^E I_{zz}}{c_{44}^E A_S \ell^2}. \quad (7.69)$$

Der dazugehörige Vektor der verallgemeinerten Knotenverschiebungen lautet

$$\mathbf{x}_{\text{Timo}} = [v_1 \ \varphi_1 \ v_2 \ \varphi_2]^T. \quad (7.70)$$

Die Dämpfungsmatrix lässt sich wieder mit Gleichung 7.22 bestimmen.

## 7.1.6 Kombiniertes Längsbiegeelement

Da Längs- und Biegebewegungen in erster Näherung unabhängig voneinander sind, lassen sich die Stäbe und Balken zu Längsbiegeschwingern kombinieren. Dazu können einfach die Elementmatrizen aufgeschrieben werden. Für ein rein mechanisches Element ergibt sich der neue Knotenverschiebungsvektor

$$\mathbf{x}_{\text{LBmech}} = [u_1 \ v_1 \ \theta_1 \ u_2 \ v_2 \ \theta_2]^T. \quad (7.71)$$

Durch einfaches Einsortieren ergibt sich die neue Massenmatrix  $\mathbf{M}_{\text{LBmech}}$

$$\mathbf{M}_{\text{LBmech}} = \begin{bmatrix} M_{\text{Stab}}^{(1,1)} & 0 & 0 & M_{\text{Stab}}^{(1,2)} & 0 & 0 \\ 0 & M_{\text{Timo}}^{(1,1)} & M_{\text{Timo}}^{(1,2)} & 0 & M_{\text{Timo}}^{(1,3)} & M_{\text{Timo}}^{(1,4)} \\ 0 & M_{\text{Timo}}^{(2,1)} & M_{\text{Timo}}^{(2,2)} & 0 & M_{\text{Timo}}^{(2,3)} & M_{\text{Timo}}^{(2,4)} \\ \hline M_{\text{Stab}}^{(2,1)} & 0 & 0 & M_{\text{Stab}}^{(2,1)} & 0 & 0 \\ 0 & M_{\text{Timo}}^{(3,1)} & M_{\text{Timo}}^{(3,2)} & 0 & M_{\text{Timo}}^{(3,3)} & M_{\text{Timo}}^{(3,4)} \\ 0 & M_{\text{Timo}}^{(4,1)} & M_{\text{Timo}}^{(4,2)} & 0 & M_{\text{Timo}}^{(4,3)} & M_{\text{Timo}}^{(4,4)} \end{bmatrix}, \quad (7.72)$$

nach dem gleichen Schema ergeben sich auch die Steifigkeits- und Dämpfungsmatrizen. Diese werden aus Platzgründen nicht explizit angegeben. Damit ist aus den beiden eindimensionalen<sup>12</sup> Elementen ein ebenes, zweidimensionales geworden. Um es in der Ebene beliebig auszurichten, ist es notwendig das Element zu drehen. Dazu werden zunächst die Elementmatrizen, wie in Gleichung 7.72 angedeutet, in 4 Untermatrizen<sup>13</sup> zerlegt, mit Hilfe der Transformationsmatrix

$$\mathbf{T}_{\text{LBmech}} = \begin{bmatrix} \cos \psi & \sin \psi & 0 \\ -\sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (7.73)$$

können die einzelnen Untermatrizen um den Winkel  $\psi$  mit  $\mathbf{T}^T \mathbf{M}_{\text{Untermatrix}} \mathbf{T}$  gedreht werden.

Auch ein piezoelektrisches Längsbiegeelement kann nach obigem Schema zusammengesetzt werden, der dazugehörige Knotenverschiebungsvektor lautet

$$\mathbf{x}_{\text{LBpiez}} = [u_1 \ v_1 \ \theta_1 \ \phi_1 \ u_2 \ v_2 \ \theta_2 \ \phi_2]^T. \quad (7.74)$$

Die Zusammenstellung der Matrizen lautet am Beispiel der Steifigkeitsmatrix

$$\mathbf{K}_{\text{LBpiez}} = \begin{bmatrix} K_{uu}^{(1,1)} & 0 & 0 & K_{u\phi}^{(1,1)} & K_{uu}^{(1,2)} & 0 & 0 & K_{u\phi}^{(1,2)} \\ 0 & K_{\text{Timo}}^{(1,1)} & K_{\text{Timo}}^{(1,2)} & 0 & 0 & K_{\text{Timo}}^{(1,3)} & K_{\text{Timo}}^{(1,4)} & 0 \\ 0 & K_{\text{Timo}}^{(2,1)} & K_{\text{Timo}}^{(2,2)} & 0 & 0 & K_{\text{Timo}}^{(2,3)} & K_{\text{Timo}}^{(2,4)} & 0 \\ K_{\phi u}^{(1,1)} & 0 & 0 & K_{\phi\phi}^{(1,1)} & K_{\phi u}^{(1,2)} & 0 & 0 & K_{\phi\phi}^{(1,2)} \\ K_{uu}^{(2,1)} & 0 & 0 & K_{u\phi}^{(2,1)} & K_{uu}^{(2,2)} & 0 & 0 & K_{u\phi}^{(2,2)} \\ 0 & K_{\text{Timo}}^{(3,1)} & K_{\text{Timo}}^{(3,2)} & 0 & 0 & K_{\text{Timo}}^{(3,3)} & K_{\text{Timo}}^{(3,4)} & 0 \\ 0 & K_{\text{Timo}}^{(4,1)} & K_{\text{Timo}}^{(4,2)} & 0 & 0 & K_{\text{Timo}}^{(4,3)} & K_{\text{Timo}}^{(4,4)} & 0 \\ K_{\phi u}^{(2,1)} & 0 & 0 & K_{\phi\phi}^{(2,1)} & K_{\phi u}^{(2,2)} & 0 & 0 & K_{\phi\phi}^{(2,2)} \end{bmatrix}. \quad (7.75)$$

In der identisch aufgebauten Massen- und Dämpfungsmatrix befinden sich beim einfachen Piezostab (ohne Berücksichtigung der Querkontraktion) in der vierten und achten Spalte respektive Zeile nur Nulleinträge. Diese müssen später gesondert behandelt werden. Für die dazugehörige Transformationsmatrix ergibt sich

$$\mathbf{T}_{\text{LBpiez}} = \begin{bmatrix} \cos \psi & \sin \psi & 0 & 0 \\ -\sin \psi & \cos \psi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (7.76)$$

Damit sind alle Strukturelemente, die für das Modell eines Stehwellenantriebs notwendig sind, beschrieben. Daneben sind noch diskrete Masse-Feder-Dämpfer Elemente im-

<sup>12</sup>Da die bisher besprochenen Elemente sich entlang einer Dimension ausdehnen.

<sup>13</sup>4 Untermatrizen für Elemente mit zwei Knoten. Bei Elementen mit  $n$  Knoten wird die Matrix in  $n^2$  Untermatrizen zerlegt.

plementiert, um die Lagerung abzubilden.

### 7.1.7 Diskrete Masse-Feder-Dämpfer-Masse Elemente

Der Vollständigkeit halber werden hier die Elementmatrizen des diskreten Feder-Dämpfer-Masse Elementes aufgeführt. Der Aufbau ist einfach, es sind zwei Massepunkte über eine Feder und einen Dämpfer verbunden. Liegt alles in einer Koordinatenachse  $u$  ergibt sich die Massenmatrix zu

$$\mathbf{M}_{\text{Feder}} = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (7.77)$$

mit den beiden Punktmassen  $m_1$  und  $m_2$  und den Knotenfreiheitsgraden

$$\mathbf{x}_{\text{Feder}} = [u_1 \ v_1 \ u_2 \ v_2]^T. \quad (7.78)$$

Die Steifigkeitsmatrix ergibt sich mit der Federsteifigkeit  $k$  zu

$$\mathbf{K}_{\text{Feder}} = \begin{bmatrix} k & 0 & -k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -k & 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (7.79)$$

genauso wie die Dämpfungsmatrix mit dem Dämpfungskoeffizienten  $d$  auf

$$\mathbf{D}_{\text{Feder}} = \begin{bmatrix} d & 0 & -d & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -d & 0 & d & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (7.80)$$

führt. Für den Fall, dass das Element nicht in  $u$ -Richtung ausgerichtet sein soll, können die Untermatrizen mit der Transformationsmatrix

$$\mathbf{T}_{\text{Feder}} = \begin{bmatrix} \cos \psi & \sin \psi \\ -\sin \psi & \cos \psi \end{bmatrix} \quad (7.81)$$

um den Winkel  $\psi$  gedreht werden.

## 7.2 Aufbau und Berechnung der Systemgleichungen

Mit den elektromechanischen und mechanischen Längsbiegeelementen kann der Stator abgebildet werden. Dazu werden die Elemente entlang der neutralen Faser platziert und über gemeinsame Knoten miteinander gekoppelt. Die entstehenden Systemmatrizen sind

stets quadratisch und weisen eine Spalte und Zeile je Knotenfreiheitsgrad auf. Die einzelnen Einträge bestimmen sich aus der Addition der in das einheitliche globale Koordinatensystem gedrehten Elementmatrizeneinträge.

Mit den Systemmatrizen lässt sich die Gleichung

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{D} \dot{\mathbf{x}} + \mathbf{K} \mathbf{x} = \mathbf{f} \quad (7.82)$$

aufstellen. Bevor das System berechenbar ist, müssen die Randbedingungen eingearbeitet werden. Dabei ist zwischen verallgemeinerten Kraft- und Verschiebungsrandbedingungen zu unterscheiden. Kräfte, Momente und elektrische Ladungen zählen zu den verallgemeinerten Kräften und Verschiebungen, Rotationen und elektrische Potentiale werden zu den verallgemeinerten Verschiebungsrandbedingungen zusammengefasst. Zweckmäßigerweise werden die Knotenfreiheitsgrade nach solchen, in denen die Verschiebung bekannt ist, und nach solchen in denen die Verschiebung unbekannt ist, sortiert. Bei den bekannten wird zusätzlich unterschieden, ob diese Null  $\mathbf{x}_z$  oder ungleich null  $\mathbf{x}_k$  sind. Aufgrund von Nulleinträgen in der Massenmatrix müssen die unbekanntes Verschiebungen weiter in Freiheitsgrade  $\mathbf{x}_m$ , für die Einträge in der Massen- und Dämpfungsmatrix existieren und in solche  $\mathbf{x}_s$  ohne entsprechende Einträge, aufgespalten werden. Damit lautet der umsortierte Vektor der Knotenfreiheitsgrade

$$\mathbf{x} = [\mathbf{x}_m \ \mathbf{x}_s \ \mathbf{x}_k \ \mathbf{x}_z]^T. \quad (7.83)$$

Für den Kraftvektor folgt entsprechend

$$\mathbf{f} = [\mathbf{f}_m \ \mathbf{f}_s \ \mathbf{f}_k \ \mathbf{f}_z]^T. \quad (7.84)$$

Hierbei ist zu beachten, dass die Indizierung der Kräfte aus der Sortierung der Freiheitsgrade resultiert. Damit das System eindeutig lösbar ist, müssen die Kräfte die zu unbekanntes Freiheitsgraden zugeordnet sind, bekannt sein und vice versa. Die gesuchten Größen sind demnach die Verschiebungen  $\mathbf{x}_m$  und  $\mathbf{x}_s$  und die Reaktionskräfte  $\mathbf{f}_k$  und  $\mathbf{f}_z$ . Die Verschiebungsrandbedingungen – mechanische Verschiebungen und elektrische Potentiale – können über  $\mathbf{x}_k$  und  $\mathbf{x}_z$  vorgegeben werden, wogegen die Krastrandbedingungen – mechanische Kräfte und elektrische Ladungen – über  $\mathbf{f}_m$  und  $\mathbf{f}_s$  gesetzt werden können. Entsprechend der Vektoren werden auch die Systemmatrizen neu sortiert, für die komplette dynamische Gleichung folgt

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M}_{mm} & \mathbf{M}_{ms} & \mathbf{M}_{mk} & \mathbf{M}_{mz} \\ \mathbf{M}_{sm} & \mathbf{M}_{ss} & \mathbf{M}_{sk} & \mathbf{M}_{sz} \\ \mathbf{M}_{km} & \mathbf{M}_{ks} & \mathbf{M}_{kk} & \mathbf{M}_{kz} \\ \mathbf{M}_{zm} & \mathbf{M}_{zs} & \mathbf{M}_{zk} & \mathbf{M}_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{x}}_m \\ \ddot{\mathbf{x}}_s \\ \ddot{\mathbf{x}}_k \\ \ddot{\mathbf{x}}_z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{D}_{mm} & \mathbf{D}_{ms} & \mathbf{D}_{mk} & \mathbf{D}_{mz} \\ \mathbf{D}_{sm} & \mathbf{D}_{ss} & \mathbf{D}_{sk} & \mathbf{D}_{sz} \\ \mathbf{D}_{km} & \mathbf{D}_{ks} & \mathbf{D}_{kk} & \mathbf{D}_{kz} \\ \mathbf{D}_{zm} & \mathbf{D}_{zs} & \mathbf{D}_{zk} & \mathbf{D}_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}}_m \\ \dot{\mathbf{x}}_s \\ \dot{\mathbf{x}}_k \\ \dot{\mathbf{x}}_z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{mm} & \mathbf{K}_{ms} & \mathbf{K}_{mk} & \mathbf{K}_{mz} \\ \mathbf{K}_{sm} & \mathbf{K}_{ss} & \mathbf{K}_{sk} & \mathbf{K}_{sz} \\ \mathbf{K}_{km} & \mathbf{K}_{ks} & \mathbf{K}_{kk} & \mathbf{K}_{kz} \\ \mathbf{K}_{zm} & \mathbf{K}_{zs} & \mathbf{K}_{zk} & \mathbf{K}_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_m \\ \mathbf{x}_s \\ \mathbf{x}_k \\ \mathbf{x}_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_m \\ \mathbf{f}_s \\ \mathbf{f}_k \\ \mathbf{f}_z \end{bmatrix}. \quad (7.85)$$

Zur Berechnung der unbekanntenen Verschiebungen  $\mathbf{x}_m$  und  $\mathbf{x}_s$  vereinfacht sich die Gleichung zu

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{mm} & \mathbf{M}_{ms} \\ \mathbf{M}_{sm} & \mathbf{M}_{ss} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{x}}_m \\ \ddot{\mathbf{x}}_s \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{D}_{mm} & \mathbf{D}_{ms} \\ \mathbf{D}_{sm} & \mathbf{D}_{ss} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}}_m \\ \dot{\mathbf{x}}_s \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{mm} & \mathbf{K}_{ms} \\ \mathbf{K}_{sm} & \mathbf{K}_{ss} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_m \\ \mathbf{x}_s \end{bmatrix} \\ = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_m \\ \mathbf{f}_s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{mk} \\ \mathbf{M}_{sk} \end{bmatrix} \ddot{\mathbf{x}}_k - \begin{bmatrix} \mathbf{D}_{mk} \\ \mathbf{D}_{sk} \end{bmatrix} \dot{\mathbf{x}}_k - \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{mk} \\ \mathbf{K}_{sk} \end{bmatrix} \mathbf{x}_k \end{aligned} \quad (7.86)$$

mit einer bekannten rechten Seite. Zur Berechnung der gesuchten Verschiebung muss die verbleibende Massenmatrix invertierbar sein, da aber alle Einträge in  $\mathbf{M}_{ss}$ ,  $\mathbf{M}_{sm}$  und  $\mathbf{M}_{ms}$  null sind, ist dies noch nicht der Fall. Da alle diese Einträge elektrische Knotenfreiheitsgrade betreffen, und die Ausbreitungsgeschwindigkeit von elektromagnetischen Wellen um einige Größenordnungen größer ist als diese von mechanischen Größen, ist es zulässig diese Knotenfreiheitsgrade statisch zu kondensieren. Dazu kommt das Verfahren von GUYAN [189] zum Einsatz. Für den statischen Fall lässt sich  $\mathbf{x}_s$  in Abhängigkeit von  $\mathbf{x}_k$ ,  $\mathbf{x}_m$  und  $\mathbf{f}_s$  berechnen:

$$\mathbf{x}_s = \mathbf{K}_{ss}^{-1} (\mathbf{f}_s - \mathbf{K}_{sk} \mathbf{x}_k - \mathbf{K}_{sm} \mathbf{x}_m). \quad (7.87)$$

Eingesetzt in die erste Zeile von Gleichung 7.86 ergibt sich die reduzierte Gleichung

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_{mm} \ddot{\mathbf{x}}_m + \mathbf{D}_{mm} \dot{\mathbf{x}}_m + \left( \mathbf{K}_{mm} - \mathbf{K}_{ms} \mathbf{K}_{ss}^{-1} \mathbf{K}_{sm} \right) \mathbf{x}_m = \\ \mathbf{f}_m - \mathbf{K}_{ms} \mathbf{K}_{ss}^{-1} \mathbf{f}_s - \mathbf{M}_{mk} \ddot{\mathbf{x}}_k - \mathbf{D}_{mk} \dot{\mathbf{x}}_k - \left( \mathbf{K}_{mk} - \mathbf{K}_{ms} \mathbf{K}_{ss}^{-1} \mathbf{K}_{sk} \right) \mathbf{x}_k \end{aligned} \quad (7.88)$$

mit einer wiederum bekannten rechten Seite. Auf Basis dieser Gleichung lässt sich das freie System analysieren. Die Eigenfrequenzen und Schwingungsformen des ungedämpften Systems lassen sich mit Hilfe der Modalanalyse bestimmen. Dazu wird angenommen, dass alle  $\mathbf{x}_k$  Freiheitsgrade gleich null sind und keine äußeren Kräfte wirken. Daher muss das Eigenwertproblem der Gleichung

$$\left( -\omega^2 \mathbf{M}_{mm} + \left( \mathbf{K}_{mm} - \mathbf{K}_{ms} \mathbf{K}_{ss}^{-1} \mathbf{K}_{sm} \right) \right) \hat{\mathbf{x}}_m = \mathbf{0} \quad (7.89)$$

gelöst werden. Die Eigenfrequenzen des gedämpften Systems ergeben sich durch die Lösung des quadratischen Eigenwertproblems

$$\left( p^2 \mathbf{M}_{mm} + p \mathbf{D}_{mm} + \left( \mathbf{K}_{mm} - \mathbf{K}_{ms} \mathbf{K}_{ss}^{-1} \mathbf{K}_{sm} \right) \right) \hat{\mathbf{x}}_m = \mathbf{0}. \quad (7.90)$$

Die Lösung enthält konjugiert komplexe Eigenwerte  $p$ . Der Imaginärteil ist die Eigenfrequenz des gedämpften Systems, der Betrag die des ungedämpften. Die im Vergleich zur ungedämpften Modalanalyse numerisch deutlich aufwendigere Berechnung wurde hier mit dem MATLAB-Befehl `polyeig` implementiert. TISSEUR UND MEERBERGEN [190] haben die verschiedenen Algorithmen zur Lösung des quadratischen Eigenwertproblems detailliert untersucht.

Weiterhin lässt sich die harmonische Systemantwort mit der harmonischen Analyse und dem Ansatz  $\mathbf{x} = \hat{\mathbf{x}} e^{j\varphi} e^{j\Omega t} = \underline{\hat{\mathbf{x}}} e^{j\Omega t}$  für alle Knotenfreiheitsgrade und Knotenkräfte bestim-



men. Eingesetzt in die Bewegungsgleichung ergibt sich

$$\hat{\underline{x}}_m = \left( -\Omega^2 \mathbf{M}_{mm} + \Omega j \mathbf{D}_{mm} + \left( \mathbf{K}_{mm} - \mathbf{K}_{ms} \mathbf{K}_{ss}^{-1} \mathbf{K}_{sm} \right) \right)^{-1} \cdot \left( \hat{\underline{f}}_m - \mathbf{K}_{ms} \mathbf{K}_{ss}^{-1} \hat{\underline{f}}_s + \left( \Omega^2 \mathbf{M}_{mk} - j \Omega \mathbf{D}_{mk} - \left( \mathbf{K}_{mk} - \mathbf{K}_{ms} \mathbf{K}_{ss}^{-1} \mathbf{K}_{sk} \right) \right) \hat{\underline{x}}_k \right). \quad (7.91)$$

Für transiente Berechnungen werden die Differentialgleichungen zweiter Ordnung aus Gleichung 7.88 in doppelt so viele Differentialgleichungen erster Ordnung überführt

$$\begin{bmatrix} \ddot{\underline{x}}_m \\ \dot{\underline{x}}_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\mathbf{M}_{mm}^{-1} \mathbf{D}_{mm} & -\mathbf{M}_{mm}^{-1} \left( \mathbf{K}_{mm} - \mathbf{K}_{ms} \mathbf{K}_{ss}^{-1} \mathbf{K}_{sm} \right) \\ \mathbf{E} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\underline{x}}_m \\ \underline{x}_m \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \underline{f}_m \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{ms} \mathbf{K}_{ss}^{-1} \underline{f}_s \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{mk} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \ddot{\underline{x}}_k - \begin{bmatrix} \mathbf{D}_{mk} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \dot{\underline{x}}_k - \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{mk} - \mathbf{K}_{ms} \mathbf{K}_{ss}^{-1} \mathbf{K}_{sk} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \underline{x}_k. \quad (7.92)$$

Dabei ist  $\mathbf{E}$  die Einheitsmatrix. Damit ist das System mittels Zeitschrittintegration und unter Vorgabe von Anfangswerten berechenbar.

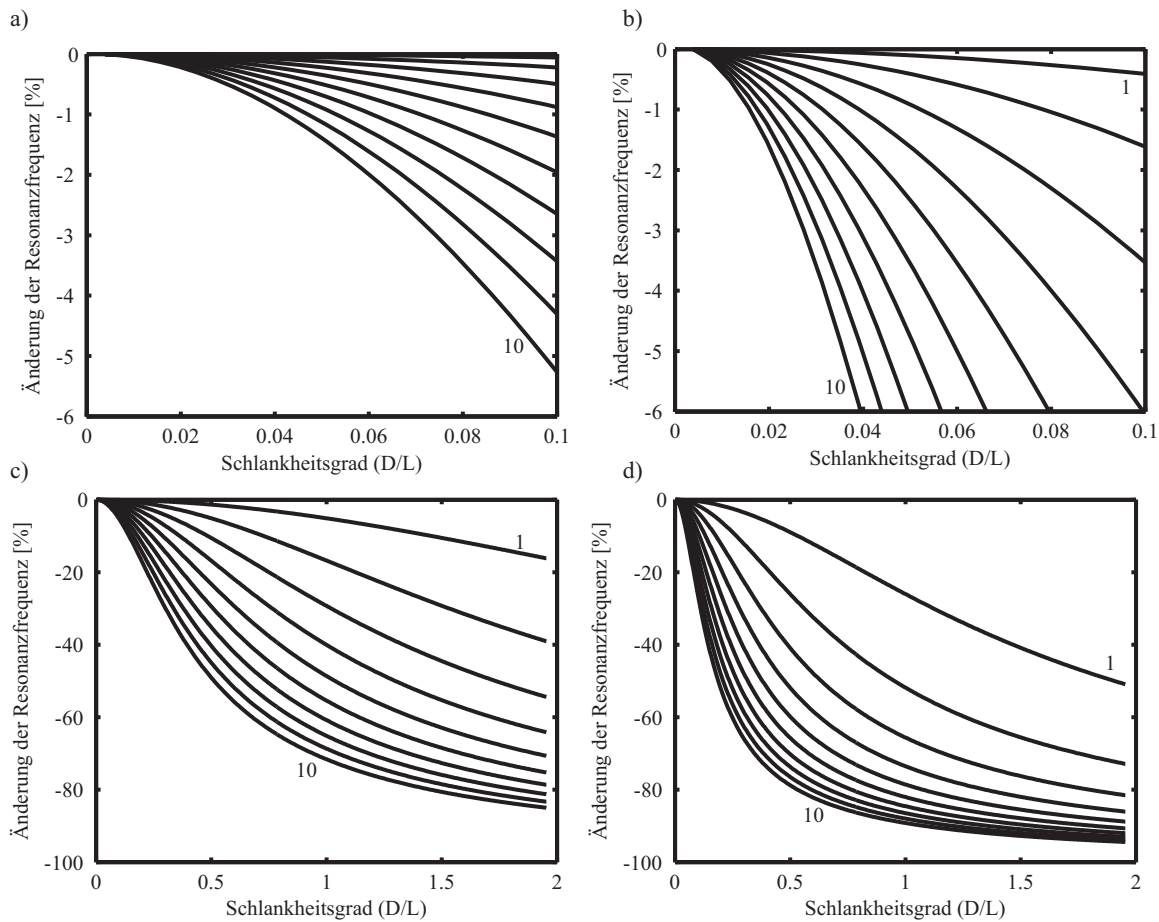
Die statisch kondensierten Freiheitsgrade lassen sich im Nachhinein wieder mit der Gleichung 7.87 bestimmen. Sollen auch die Reaktionskräfte berechnet werden, so können diese mit den ermittelten Verschiebungen aus

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M}_{km} & \mathbf{M}_{ks} & \mathbf{M}_{kk} & \mathbf{M}_{kz} \\ \mathbf{M}_{zm} & \mathbf{M}_{zs} & \mathbf{M}_{zk} & \mathbf{M}_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\underline{x}}_m \\ \ddot{\underline{x}}_s \\ \ddot{\underline{x}}_k \\ \ddot{\underline{x}}_z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{D}_{km} & \mathbf{D}_{ks} & \mathbf{D}_{kk} & \mathbf{D}_{kz} \\ \mathbf{D}_{zm} & \mathbf{D}_{zs} & \mathbf{D}_{zk} & \mathbf{D}_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\underline{x}}_m \\ \dot{\underline{x}}_s \\ \dot{\underline{x}}_k \\ \dot{\underline{x}}_z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{km} & \mathbf{K}_{ks} & \mathbf{K}_{kk} & \mathbf{K}_{kz} \\ \mathbf{K}_{zm} & \mathbf{K}_{zs} & \mathbf{K}_{zk} & \mathbf{K}_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{x}_m \\ \underline{x}_s \\ \underline{x}_k \\ \underline{x}_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{f}_k \\ \underline{f}_z \end{bmatrix} \quad (7.93)$$

berechnet werden.

### 7.3 Analyse des Stators

Die vorgestellten Analysen (insbesondere die harmonische und modale Analyse) erlauben die Berechnung des freien Stators unter Vorgabe von statischen und dynamischen Randbedingungen. Im Folgenden wird die Struktur des in Kapitel 4 untersuchten Schwingers systematisch untersucht. Dabei wird zunächst untersucht, inwieweit die Berücksichtigung der Querkontraktion und der Schubkräfte für Längs- und Biegeschwingungen sinnvoll ist. Im Anschluss werden der Einzelschwinger und der komplette Stator, insbesondere mit Hinblick auf den Einfluss der Lagerung, untersucht.



**Abbildung 7.4:** Einfluss der Querkontraktion auf die ersten 10 ungedämpften Resonanzfrequenzen des Stabes bezogen auf den klassischen Stab über dem Schlankheitsgrad. Die niedrigen Modenummern haben jeweils die geringste Abweichung. **a),c)** Stabelement bis zu einem Durchmesser-Längenverhältnis von 1/10 bzw. 2/1. **b),d)** Elektromechanisches Stabelement bis zu einem Durchmesser-Längenverhältnis von 1/10 bzw. 2/1.

### 7.3.1 Prinzipieller Einfluss von Querkontraktion und Schubkräften

Um den Einfluss der Querkontraktion auf die Resonanzfrequenz aufzuzeigen, wurde ein einfaches Beispiel untersucht. Dazu wurde ein uniformer Stab aus einem einheitlichen Material mit frei-freien Randbedingungen modelliert und mittels Modalanalyse die Eigenfrequenzen bestimmt. Es ist zu erwarten, dass ein möglicher Effekt aufgrund der Querkontraktion vom Durchmesser-Längen Verhältnis des Stabes, das hier als Schlankheitsgrad bezeichnet wird, abhängt, also davon, inwieweit die Voraussetzung eines langen, schlanken Stabes erfüllt wird. Zumeist wird ein Verhältnis von 1/10 als hinreichend angesehen. Daher sind in Abbildung 7.4a genau für diesen Bereich die Veränderung der Resonanzfrequenzen, in Bezug auf einen idealen Stab<sup>14</sup>, der ersten zehn Schwingungsmoden aufgezeigt. Hier ist zu erkennen, dass für die erste Mode eine sehr moderate

<sup>14</sup>Beim idealen Stab sind die Resonanzfrequenzen unabhängig vom Durchmesser und damit vom Durchmesser-Längen Verhältnis.

Abweichung deutlich unter 0.5 % vorhanden ist, also die Annahme eines idealen Stabes gerechtfertigt wäre. Werden allerdings höhere Moden betrachtet, fallen die Abweichungen etwas stärker aus und rechtfertigen die Annahme weniger. Weitaus deutlichere Frequenzabweichungen können beobachtet werden, wenn der Schlankheitsgrad weiter erhöht wird. Wenn nur die erste Schwingungsmode benötigt wird, ist der akzeptable Bereich, in dem das einfache Stabmodell bereits gute Ergebnisse liefert, sehr groß. Anhand der Abbildung 7.4c kann unter Berücksichtigung des zulässigen Fehlers entschieden werden, welches Modell genutzt werden sollte. Allerdings kostet die Berücksichtigung der Querkontraktion sehr wenig Rechenaufwand, da hierfür keine zusätzlichen Freiheitsgrade benötigt werden.

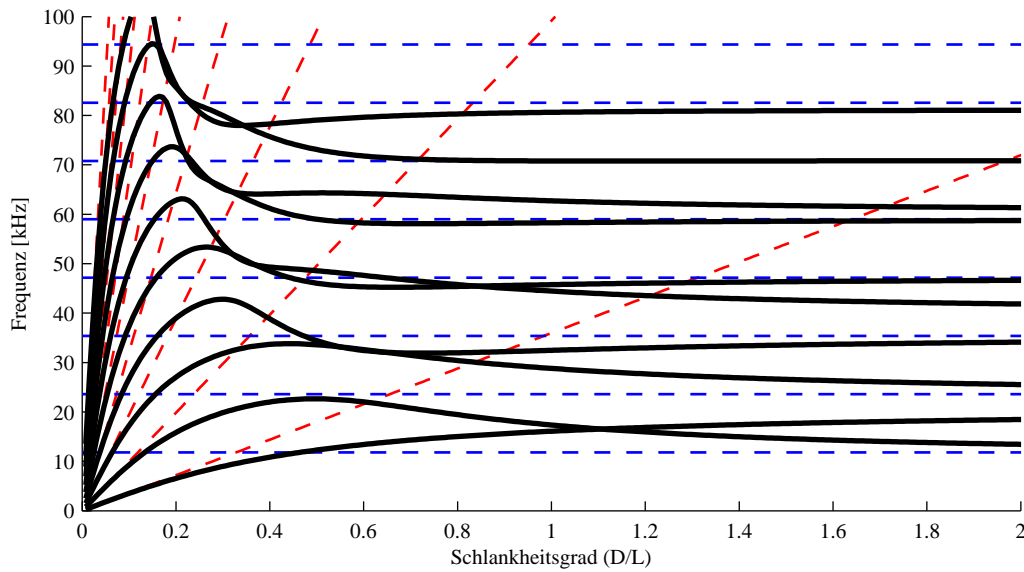
Mit einem fast identischen Modell soll nun der Einfluss der Querkontraktion auf die Resonanzfrequenzen elektromechanischer Stäbe untersucht werden. Auch hierfür wurde ein uniformer Stab aus einem einheitlichen Material untersucht. Die mechanischen Randbedingungen sind wie zuvor, frei-frei. Elektrisch sind die Potentiale an den äußeren Elementen zu null gesetzt, folglich sind die Elektroden kurzgeschlossen. Aus der Modalanalyse ergeben sich die Antiresonanzfrequenzen. Auch hier wurde zuerst der Bereich bis zu einem Schlankheitsgrad von 1/10 untersucht, vgl. Abbildung 7.4b. Es ergibt sich erwartungsgemäß ein ähnliches Bild wie beim mechanischen Stab, allerdings ist die quantitative Auswirkung viel größer. So beträgt die Abweichung für die erste Mode schon 2.5 % was um mehr als den Faktor 5 größer ist als beim passiven Stab. Dieses Verhalten setzt sich auch bei steigendem Schlankheitsgrad so fort. Werden anstelle der Antiresonanzen die Resonanzen betrachtet, ergibt sich das gleiche Bild. Zur Begründung des hohen Unterschieds können die beiden zusätzlichen Massenanteile für die mechanischen Freiheitsgrade verglichen werden, für den Stab aus Gleichung 7.30 und für den elektromechanischen Stab aus Gleichung 7.54. Diese unterscheiden sich in der Beschreibung des Querkontraktionseinflusses, im Fall des Stabes genügt aufgrund der isotropen Materialannahme die POISSON-Zahl  $\nu$ , wogegen für das piezoelektrische Material  $\frac{c_{13}^E}{c_{11}^E + c_{12}^E}$  verwendet werden muss. Das Einsetzen von typischen Materialkonstanten für Metalle und PZT zeigt, dass

$$\nu < \frac{c_{13}^E}{c_{11}^E + c_{12}^E} \quad (7.94)$$

gilt. Im konkreten Fall lag ein Faktor von 2.7 zwischen den beiden Werten, wobei zusätzlich zu beachten ist, dass der Querkontraktionseinfluss quadratisch in den zusätzlichen Massenanteil eingeht.

Insgesamt ist es sinnvoll, den Einfluss der Querkontraktion zu berücksichtigen. Da es gerade bei Schwingern, die nicht lang und schlank sind, zu deutlichen Abweichungen kommt insbesondere wenn höhere Moden betrachtet werden. Beides ist beim Entwurf von Ultraschallschwingern eher die Regel als die Ausnahme.

Für das Biegeelement wurde direkt ein Element nach der Balkentheorie vom TIMOSHENKO unter Berücksichtigung der Schubspannungen und Rotationsträgheiten erläutert. In der Praxis ist jedoch die Balkentheorie nach EULER-BERNOULLI weiter verbreitet. Die



**Abbildung 7.5:** Beispielhafter Verlauf der ersten 10 Resonanzfrequenzen nach der TIMOSHENKO-Theorie in Abhängigkeit vom Schlankheitsgrad in Schwarz. Entsprechender Resonanzverlauf nach der EULER-BERNOULLI-Theorie in Rot. Resonanzfrequenzen unter ausschließlicher Berücksichtigung der Schubeffekte in Blau.

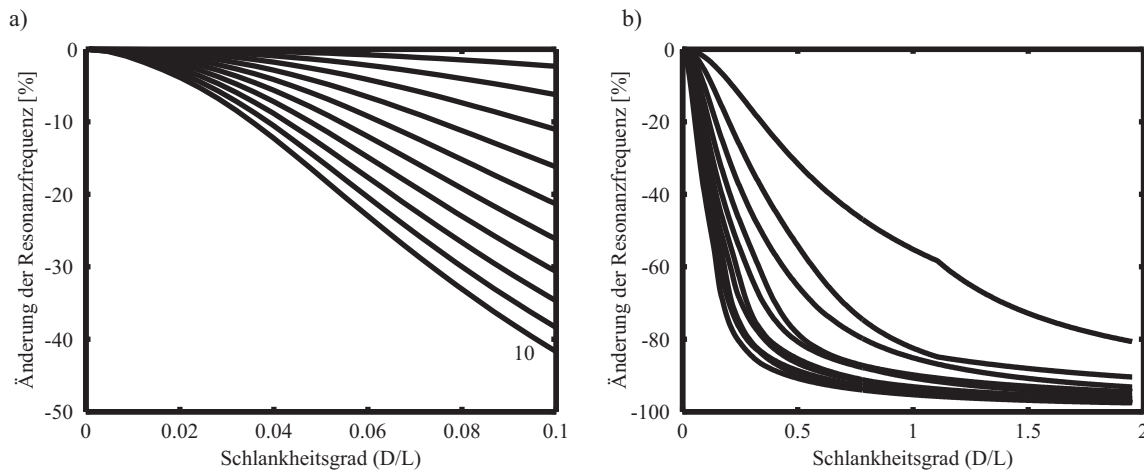
beiden Theorien unterscheiden sich ausschließlich durch die Berücksichtigung der Schubspannungen und der Drehträgheitseffekte. Um die Relevanz aufzuzeigen, wird ein einfaches Beispiel untersucht, bei dem für einen zylindrischen uniformen Balken aus einem Material wieder mit der Modalanalyse die Resonanzen bestimmt werden. Um den Gültigkeitsbereich sichtbar zu machen, wird der Schlankheitsgrad variiert. Anders als bei den Stäben hängt die Resonanzfrequenz in beiden Fällen vom Schlankheitsgrad ab, dabei verändert sich die Resonanzfrequenz beim EULER-BERNOULLI-Balken (kreisförmiger Querschnitt) mit

$$f_i = \underbrace{\frac{\lambda_i^2}{2\pi} \sqrt{\frac{E}{16\rho}}}_{= \text{konstant}} \frac{d}{\ell^2}. \quad (7.95)$$

Dabei ist  $\lambda_i$  eine dimensionslose Frequenzkonstante<sup>15</sup> für die  $i$ -te Schwingungsmode. Da für den TIMOSHENKO-Balken auch Schubkräfte berücksichtigt werden, können auch freie Schubmoden auftreten. Diese werden insbesondere für große Schlankheitsgrade relevant. Die korrespondierenden Resonanzfrequenzen der Schubmoden ergeben sich nach BLEVINS [172] für einen Balken mit kreisförmigen Querschnitt zu

$$f_i = \underbrace{\frac{\Lambda_i}{2\pi\ell} \sqrt{\frac{3E}{(7+6\nu)\rho}}}_{= \text{konstant}}. \quad (7.96)$$

<sup>15</sup>nach BLEVINS [172]:  $\lambda_1 = 4.73004074$ ,  $\lambda_2 = 7.8320462$ ,  $\lambda_3 = 10.9956078$ ,  $\lambda_4 = 14.1371655$ ,  $\lambda_5 = 17.2787597$  und  $\lambda_i = (i + 0.5)\pi$  für  $i > 5$



**Abbildung 7.6:** Einfluss der Schubspannung auf die ersten 10 ungedämpften Resonanzfrequenzen des Balkens bezogen auf die EULER-BERNOULLI-Theorie über dem Schlankheitsgrad. Die niedrigen Modennummern haben jeweils die geringste Abweichung. **a)** Balkenelement bis zu einem Durchmesser-Längenverhältnis von 1/10. **b)** Balkenelement bis zu einem Durchmesser-Längenverhältnis von 2/1.

Mit einer dimensionslosen Frequenzkonstante  $\Lambda_i$ <sup>16</sup>. Interessanterweise ist diese Frequenz unabhängig vom Schlankheitsgrad. Zu bessern Verständnis ist in Abbildung 7.5 der Verlauf der Resonanzfrequenzen für einen beispielhaft untersuchten Balken in Abhängigkeit vom Schlankheitsgrad dargestellt. Für sehr geringe Schlankheitsgrade fallen die Ergebnisse nach EULER-BERNOULLI und TIMOSCHENKO zusammen, so dass beide Theorien gleichermaßen geeignet sind. Gut zu erkennen ist weiterhin, dass einige der Biegemoden mit zunehmendem Schlankheitsgrad in Schubmoden übergehen. Dabei kommt es auch vor, dass die Moden ihre Reihenfolge tauschen. Die deutlichen Abweichungen in Frequenz und Schwingungsform zeigen die Relevanz der Berücksichtigung von Schubspannungen und Rotationsträgheiten. In Abbildung 7.6a ist der relative Unterschied in den Resonanzfrequenzen<sup>17</sup> zwischen den beiden Theorien für die ersten zehn Schwingungsformen bis zu einem Schlankheitsgrad von 1/10 dargestellt. Für die erste Mode ergibt sich eine Abweichung in der Größenordnung von 2,5 %, also ähnlich wie im Fall des aktiven Stabes. Für die höheren Moden fällt die Abweichung noch deutlich größer aus. In der zweiten Abbildung ist wieder der Bereich bis zu einem Schlankheitsgrad von bis zu 2 dargestellt. Hier ergeben sich bemerkenswert große Abweichungen gerade für die höheren Moden.

Insgesamt zeigt sich, dass die Nutzung der TIMOSHENKO-Theorie sinnvoll ist. Auch hier ist der Rechenaufwand gegenüber der einfacheren Modellierung nicht größer, da sich wieder nur veränderte Konstanten in den Systemmatrizen ergeben. Daher werden in den folgenden Berechnungen sowohl der Einfluss der Querkontraktion auf die Längsschwin-

<sup>16</sup>nach BLEVINS [172]:  $\Lambda_i = i\pi$

<sup>17</sup>Hierbei werden die jeweils gleichen Modennummern ungeachtet der Schwingungsform verglichen. Dabei sind die Moden sind mit der Frequenz aufsteigend sortiert. Daher resultieren auch die Knicke in den Kurven.

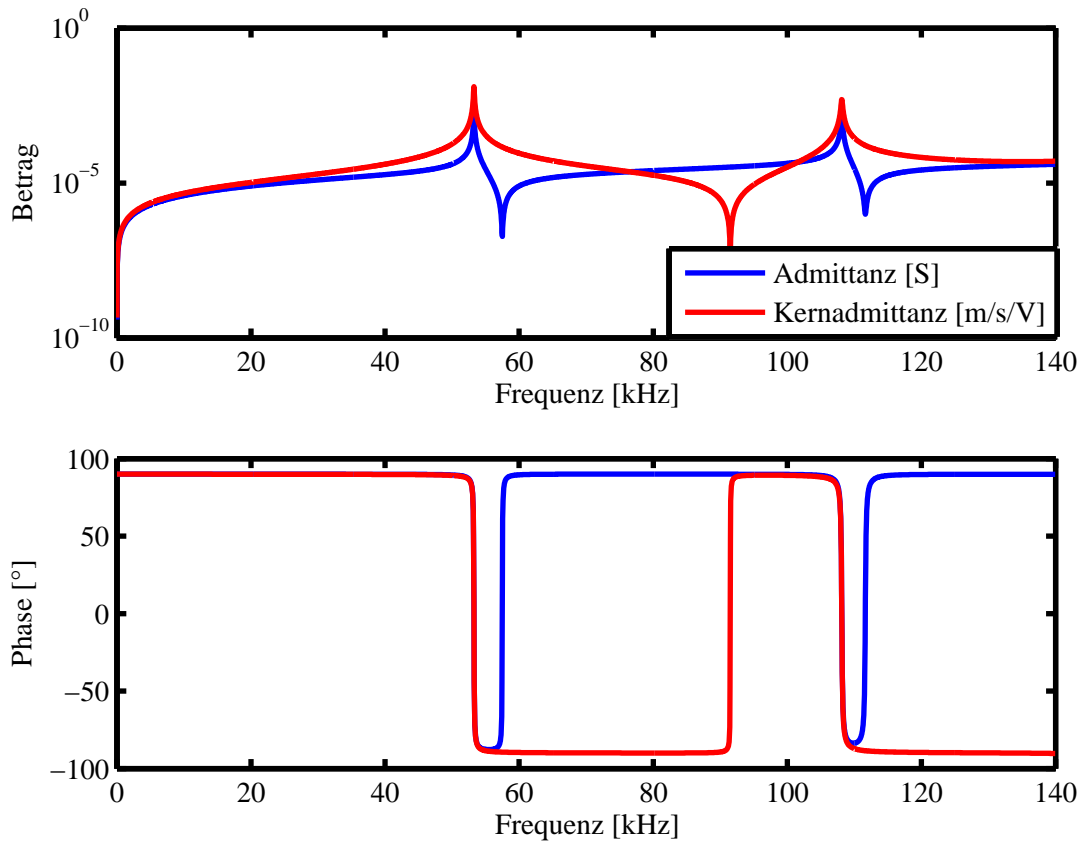
gungen als auch der Einfluss der Schubspannungen auf die Biegeschwingungen berücksichtigt.

### 7.3.2 Einzelschwinger

Zunächst soll der Einzelschwinger genauer betrachtet werden. Dazu wird der Schwinger aus drei Abschnitten modelliert, zwei Abschnitte aus Stahl und ein piezoelektrischer Abschnitt. Jeder Abschnitt ist in etwa 1 mm lange Elemente unterteilt. In der Abbildung 7.7 sind die Admittanz und die Kernadmittanz (Schwingungsamplitude an der der Kopfkineematik zugewandten Seite, bezogen auf die Anregespannung) des Schwingers dargestellt. Hier ist ein zur Messung in Abbildung 4.8 ähnliches Verhalten zu erkennen. Die erste Resonanzfrequenz ist die erste Längseigenschwingungsmode, die später zum Betrieb genutzt werden soll.

Um die Lagerung des Schwingers mit abzubilden, sind an der zur Lagerung vorgesehene Stelle des Einzelschwingers zwei diskrete Feder-Dämpfer-Masse Elemente in Längsrichtung angekoppelt. Da der Schwinger des in Kapitel 4 gezeigten Aufbaus sehr steif in einem in Längsrichtung verschiebbaren Lagerblock eingebaut ist und dieser Block über eine sehr weiche Feder mit der Umgebung verbunden ist, soll überprüft werden, welche Auswirkung die Masse des Lagerblocks auf die Schwingungsform bzw. Resonanzfrequenz des Schwingers hat. Diese Betrachtung ist vor allem wichtig da außer im Modell (und bei freien Schwingern) nie garantiert werden kann, dass die Knotenposition exakt mit der Lagerposition übereinstimmt. Der verwendete Einzelschwinger hat seine Knotenlage ungefähr ein bis zwei mm von der Lagerposition entfernt im Randbereich des piezoelektrischen Abschnittes. Zur Untersuchung wurde die Punktmasse am Lagerpunkt verändert und die jeweilige Schwingungsform bestimmt. Abbildung 7.8 zeigt die verschiedenen Schwingungsformen, wobei auffällig ist, dass schon kleine Massen – in diesem Fall schon ab ca. 10 g – eine erhebliche Auswirkung auf die Schwingungsform haben. Größere Massen sorgen dafür, dass eine quasifeste Einspannung erzeugt wird. Dabei soll an dieser Stelle auf eine Einschränkung des Modells hingewiesen werden. Die Modellierung mit den Stab-/Balkenelementen sorgt dafür, dass es für jeden Querschnitt im Schwinger nur genau einen Knoten gibt. Daher greifen die Lagermasse sowie die Lagersteifigkeit direkt an diesem einen Knoten an. Eine Schwingungsverteilung über die Querschnittebenen kann nicht mit abgebildet werden. Aus diesem Grund ist der Effekt der diskreten Masse wie auch der der diskreten Federsteifigkeit verstärkt. Nichtsdestotrotz geben die Ergebnisse einen guten Einblick und können mit hinreichender Näherung verwendet werden.

Eine Änderung der Form einer Schwingung ist in der Regel auch mit einer Änderung der Frequenz verbunden. Auch diese kann mit der Modalanalyse bestimmt werden, Abbildung 7.9 zeigt diese Abhängigkeit auf. Die Verschiebung der Frequenzen ist analog zu



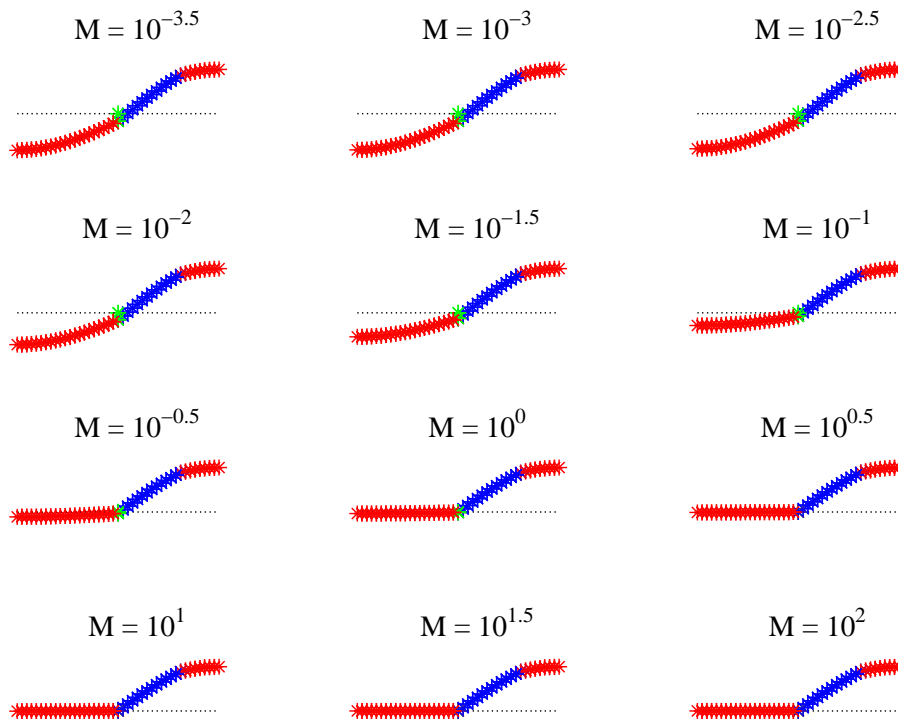
**Abbildung 7.7:** Elektromechanisches Frequenzverhalten des Einzelschwingers.

dem Einfluss einer Feder am Ende eines Stabes<sup>18</sup> (vgl. Abbildung 3.1) mit dem wesentlichen Unterschied, dass die Frequenzen zur nächst niedrigeren fest-freien Mode wandern. Wird das berechnete Ergebnis mit dem von einem einseitig am Ende mit einer Punktmasse belasteten Stabes<sup>19</sup> verglichen, fällt auf, dass das qualitative Ergebnis sehr ähnlich ist. Nur die Frequenz fällt im vorgestellten Fall etwas weniger ab, da die Länge des noch schwingenden Abschnittes kürzer wird und dessen Eigenfrequenz dadurch im Vergleich höher ist. Alles in allem ist die Masse der Lagerung ein wichtiger Punkt, den es bei der Auslegung zu berücksichtigen gilt, da ihr Einfluss signifikant auf das Schwingverhalten wirkt.

Ebenso wie die Masse der Lagerung ist auch ihre Steifigkeit ein wichtiger Faktor. Auch hier kann, mit obigen Einschränkungen bezüglich der eindimensionalen Modellierung, eine feste Einspannung erreicht werden. Ab der Federsteifigkeit, die als quasifeste Einspannung fungiert, entsprechen die erreichbaren Schwingungsformen denen im Fall der Massenerhöhung und auch die Resonanzfrequenzen sind gleich. Allerdings entwickelt sich die Schwingungsform aus der Starrkörperbewegung, die beim hinzufügen der

<sup>18</sup>Auch für einen Masseinfluss am Ende eines uniformen Stabes lässt sich das Ergebnis direkt analytisch angeben, dazu sei wieder auf das Tabellenwerk von BLEVINS [172] verwiesen.

<sup>19</sup>Vgl. beispielsweise analytische Lösung von BLEVINS [172].



**Abbildung 7.8:** Einfluss der Masse (in kg) der Lagerung auf die Schwingungsform.

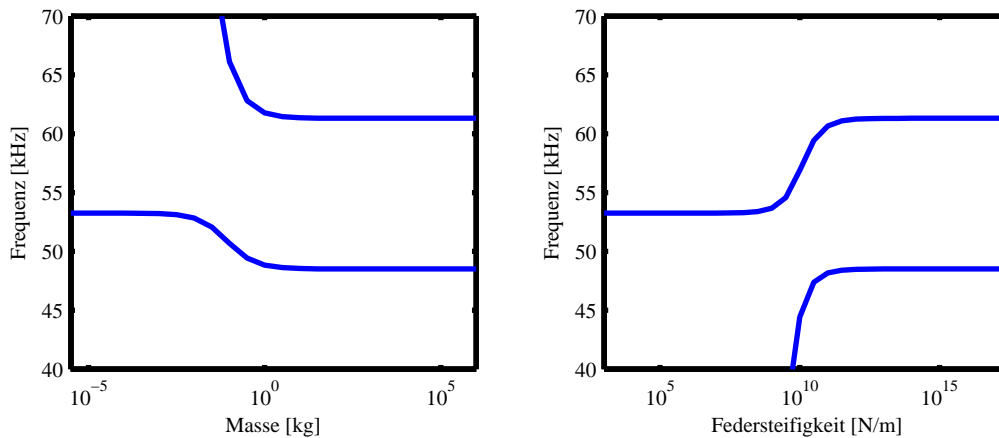
Masse erhalten bleibt. Aus der anfänglichen  $\lambda/2$ -Schwingung entwickelt sich eine  $\lambda/4$ -Schwingung des Endstücks. Die Frequenzverläufe sind in Abbildung 7.9 eingetragen.

### 7.3.3 Stator

Der Stator besteht, wie schon früher beschrieben aus zwei Einzelschwingern, einer Kopfkinematik und einer Lagerung. Die Elemente sind entlang der neutralen Faser angeordnet. In einer groben Näherung wurden die verschiedenen Geometrien und Materialien berücksichtigt. Dabei wurde der kegelförmige Teil der Kopfkinematik mit Stufen angenähert, die beiden Festkörpergelenke wurden als Aussparungen mit modelliert. Die Elementgröße liegt zwischen 0.5 mm und 1 mm Länge. Insgesamt hat das Modell 62 Knoten und 192 Freiheitsgrade, davon 14 elektrische.

Auf dieser Basis wurden zunächst die freien Schwingungsformen berechnet. Abbildung 7.11 zeigt die ersten zwölf freien Moden. An den drei Starrkörpermoden ist deutlich zu erkennen, dass die Lagerung noch nicht berücksichtigt wurde, lediglich die elektrischen Freiheitsgrade an den Elektroden haben schon eine Randbedingung, hier sind jeweils die Potentiale null. Damit sind die beiden Piezostapel kurzgeschlossen und folglich die Antiresonanzen sichtbar. Bei der Betrachtung der Moden fällt auf, dass keine perfekt



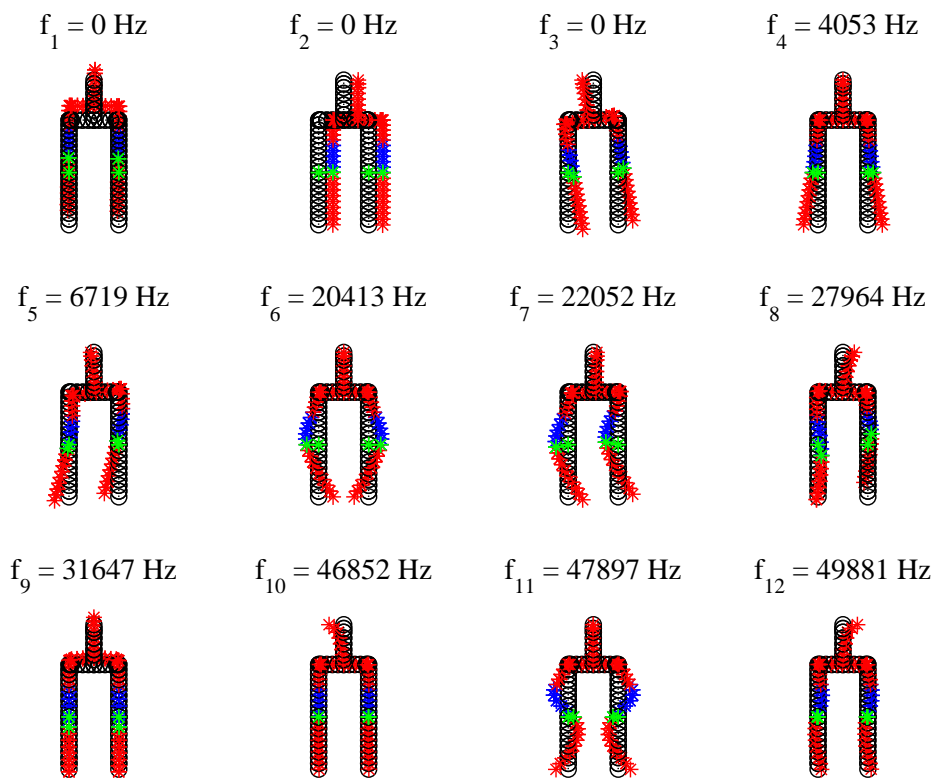


**Abbildung 7.9:** Links) Einfluss der Masse der Lagerung auf die erste Longitudinalresonanzfrequenz. Rechts) Einfluss der Federsteifigkeit der Lagerung auf die erste Longitudinalresonanzfrequenz.

die Wunschbewegung wiedergibt. Dies ist darauf zurückzuführen, dass vor allem bei der Auslegung der Kopfkinematik auf eine gute Zugänglichkeit für das Laservibrometer geachtet wurde, eine gute Modenabstimmung war zweitrangig. Am ehesten scheint die achte Mode der gewünschten Bewegung zu entsprechen.

Deutlicher lässt sich die Eignung einer bestimmten Frequenz in einem Frequenzgang erkennen wie er in Abbildung 7.11 zu sehen ist. Zur Berechnung wurde eine harmonische Analyse über dem gezeigten Frequenzbereich durchgeführt, dabei wurden die beiden Einzelschwinger mit einer um  $90^\circ$  zueinander verschobenen Spannung angeregt. Die Admittanz ist für beide Einzelschwinger aufgetragen, die Kernadmittanz ist für den zukünftigen Kontaktpunkt am Stößel sowohl in tangentialer als auch in normaler Richtung aufgetragen. Diese Kurven ermöglichen eine sinnvolle Auswahl der Betriebsfrequenz, indem eine Frequenz gewählt wird, bei der beide Bewegungskomponenten einen deutlichen Anteil haben. Für die gezeigte Konfiguration scheint der Schnittpunkt beider Funktionen bei etwa 30 kHz gut geeignet zu sein. Im Anhang sind weitere Frequenzgänge angegeben. Abbildung A.11 zeigt den Fall mit phasengleicher Anregung der beiden Einzelschwinger. Hier verschwindet die Tangentialkomponente völlig, die Phase derselben ist aufgrund von starkem numerischen Rauschen<sup>20</sup> nicht dargestellt. Das gegenteilige Bild liefert die Anregung in Gegenphase, siehe Abbildung A.12. Es ist ausschließlich die Tangentialkomponente vorhanden. Die Phase der Normalkomponente fehlt wieder wegen des numerischen Rauschens. Beim Vergleich aller drei Abbildungen fällt auf, dass nur mit einem  $90^\circ$  Phaseversatz sowohl die Tangentialresonanz (Mode 8) als auch die Normalresonanz (Mode 9) angeregt wird, während in den beiden anderen Fällen nur jeweils eine Resonanz angeregt wird. Auch in der Admittanz gibt es deutliche Unterschiede. In den beiden Fällen der Gleichphasigkeit und der Gegenphasigkeit sind die Kurven für die beiden Einzelschwinger deckungsgleich.

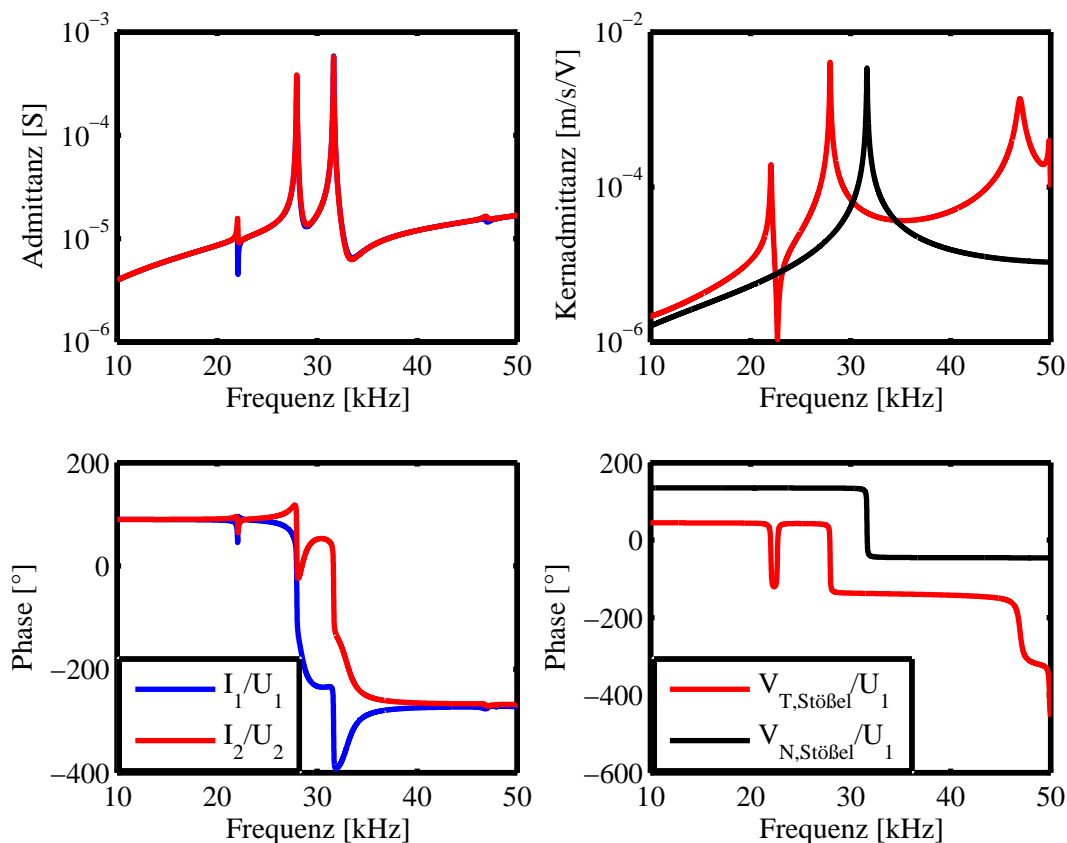
<sup>20</sup>Die Werte der Admittanz sind in der Größenordnung der Rechengenauigkeit, daher ist die Phasenbestimmung sehr fehleranfällig.



**Abbildung 7.10:** Die ersten 12 (einschließlich der Starrkörpermoden) freien ungedämpften Eigenformen (x und y Freiheitsgrade) des Stators.

Wie zuvor schon beim Einzelschwinger soll auch hier der Einfluss von Lagermasse und Lagersteifigkeit untersucht werden. Die beiden Lagerpunkte sind wieder über diskrete Elemente mit der Umgebung verbunden. Zur Abschätzung der Auswirkungen sind zunächst wieder die Punktmassen am Lagerpunkt variiert worden. Dazu sind beide Punkte mit den gleichen Massen versehen worden, auch wirken die Massen nur in Normalrichtung. Aufgrund des Aufbaus mit einer sehr steifen Lagerung in Tangentialrichtung ist kein Masseneinfluss der Lagerung in diese Richtung berücksichtigt, auch für den Verdrehfreiheitsgrad ist keine zusätzliche Trägheit angenommen worden. Die Kurven in Abbildung 7.12 zeigen die Veränderung der Resonanzfrequenz bei steigender Punktmasse. Das Verhalten entspricht im Wesentlichen dem des Einzelschwingers. Gut zu erkennen sind die Moden, die von der Parameteränderung unbeeinflusst sind, da ihre Frequenz konstant bleibt. Auch der Einfluss der Lagersteifigkeit, die hier wieder in Normalrichtung variiert wurde und in Tangentialrichtung auf einem vergleichsweise hohen Wert konstant gehalten wurde, hat einen ähnlichen Effekt. In beiden Fällen ist zu erkennen, dass es Konstellationen gibt, in denen mehrere Moden frequenzgleich sind und folglich miteinander koppeln. Auch können einzelne Moden die Reihenfolge verändern.

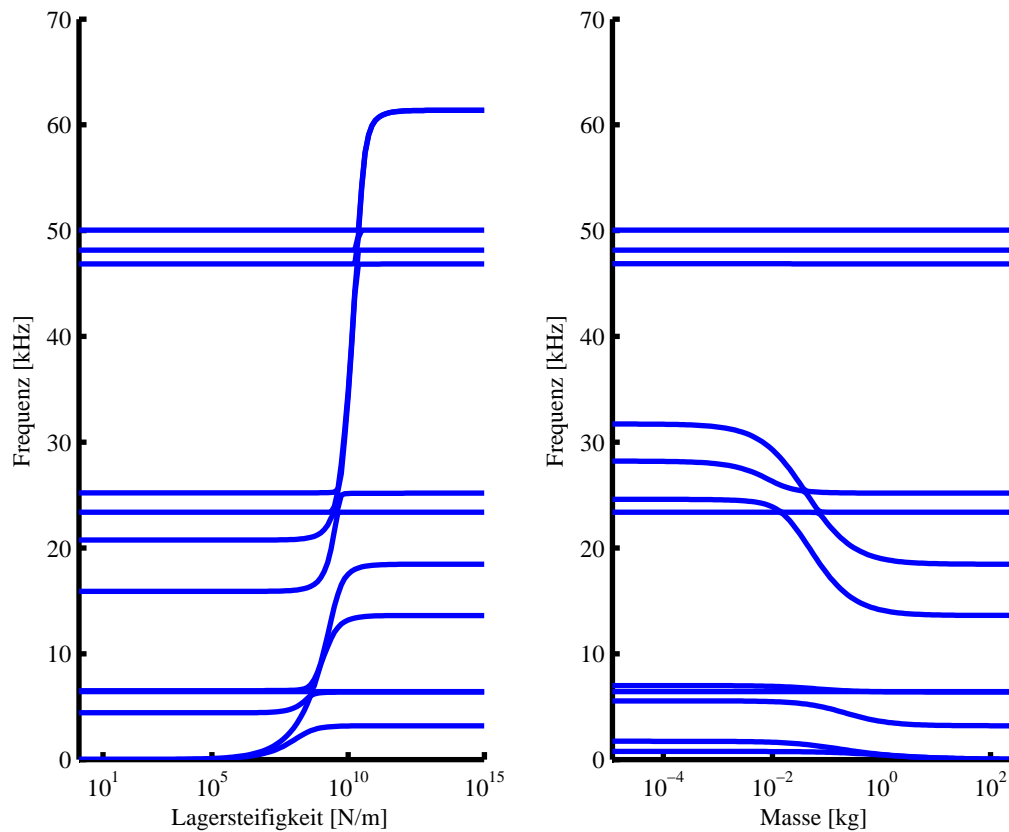
Zur Abbildung des realistischen Falls wird die im Folgenden beschriebene Konfiguration



**Abbildung 7.11:** Elektromechanisches Frequenzverhalten bei  $90^\circ$  Phase zwischen den Anregespannungen. **Links)** Admittanz. **Rechts)** Kernadmittanz.

angenommen. Da der Lagerblock auf einem Linearrollenkugellager montiert ist, wird für die Richtung, in der das Lager beweglich ist, also in Normalrichtung, eine Lagermasse und eine kleine Steifigkeit angenommen. In der Tangentialrichtung ist das Lager nicht beweglich, daher wird keine Masse aber eine höhere Steifigkeit angenommen. Mit diesen Annahmen wird wieder eine Modalanalyse durchgeführt. Die neuen Schwingungsmoden sind in Abbildung 7.13 gezeigt. Die Eigenformen und -frequenzen zeigen deutlich den Einfluss der Lagerung, die vorigen Starrkörpermoden sind deutlich zu höheren Frequenzen verschoben. Die beiden interessanten Frequenzen sind zu 15.9 kHz und 20.7 kHz hin verschoben.

Um die Anregbarkeit zu überprüfen, ist wieder eine Berechnung mit harmonischer Anregung mit  $90^\circ$  Phase zwischen den Spannungssignalen durchgeführt worden. Das Ergebnis hat große Ähnlichkeit zu denen der freien Untersuchung, nur mit einer deutlichen Verschiebung der Frequenzen. Abbildung 7.14 zeigt die entsprechenden Diagramme. Auf Basis dieser Diagramme kann die Betriebsfrequenz für eine spätere Berechnung, bei der der Stoßreibkontakt berücksichtigt werden soll, ausgewählt werden. Interessant erscheint der Schnittpunkt der beiden Kernadmittanzen bei etwa 30 kHz. Ein alternativer Betriebsbereich sind die Frequenzen oberhalb von 40 kHz aufgrund der großen Tangen-



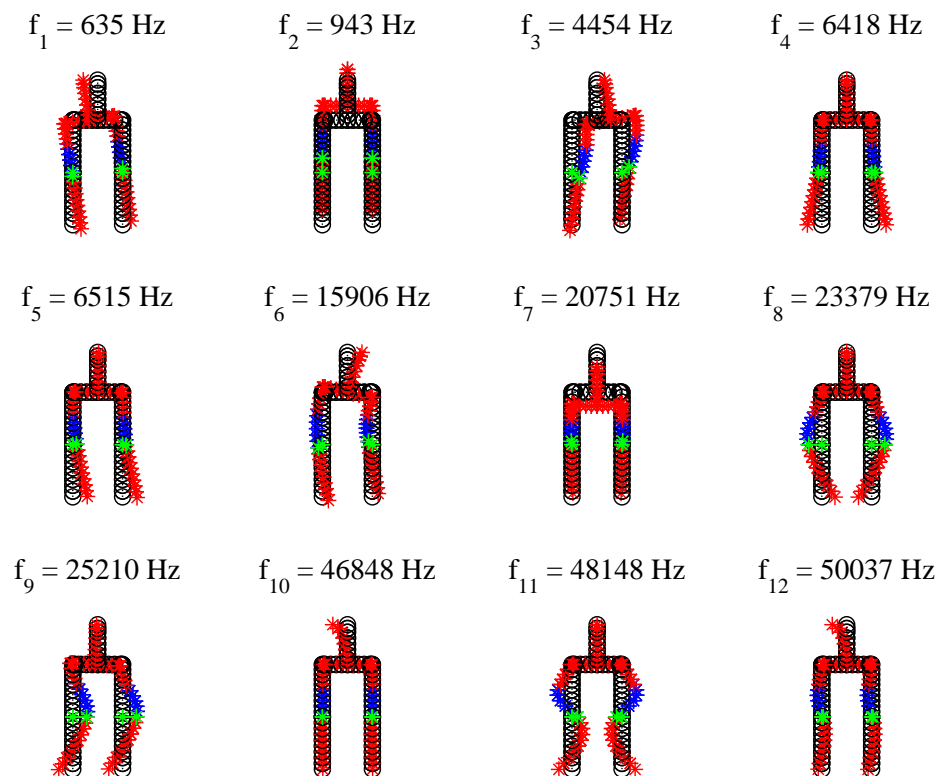
**Abbildung 7.12:** Links) Einfluss der Lagersteifigkeit und Rechts) der Lagermasse auf die Resonanzfrequenzen des freien Stators.

tialamplituden. Eine ebenfalls durchgeführte transiente Berechnung führt zu denselben Ergebnissen wie die harmonische Berechnung.

Weiterhin ist es möglich, die Kontaktstelle als dauerhafte Verbindung mit zwei Federn zu modellieren und die Eigenformen und -frequenzen zu bestimmen. Da es dabei keine wesentlich neuen oder überraschenden Ergebnisse gibt, ist auf eine Abbildung verzichtet worden. Auch hier lässt sich ein ähnliches Verhalten zeigen; bei kleinen Federsteifigkeiten ist die Schwingungsform quasi unbeeinflusst, wogegen große Federsteifigkeiten zu einer Änderung von Form und Frequenz führen. Der Einfluss der Kontaktstelle wird im nächsten Abschnitt umfangreicher, einschließlich der während des Betriebs wechselnden Randbedingungen, untersucht.

## 7.4 Kontaktformulierung

Um den ganzen Motor zu simulieren, muss der Stoßreibkontakt mit berücksichtigt werden. In der FEM werden dazu typischerweise das *Penalty*-Verfahren, die Methode der LAGRANGE-Multiplikatoren oder eine Kombination der beiden verwendet, siehe zum



**Abbildung 7.13:** Die ersten 12 ungedämpften Eigenformen (x und y Freiheitsgrade) des Stators unter Berücksichtigung der Lagersteifigkeit und Lagermasse.

Beispiel WRIGGERS [128]. In den meisten kommerziellen Finite-Elemente-Programmen sind diese Verfahren implementiert. Eigene Tests mit der kommerziellen Software ANSYS, haben jedoch gezeigt, dass insbesondere der Kontaktstatuswechsel zu Konvergenzproblemen und Ungenauigkeiten führt, die sich nur über eine sehr kleine Zeitschrittweite verringern lässt, was wiederherum zu sehr langen Rechenzeiten führt, vgl. auch POTT-HAST [136].

Die guten Erfahrungen mit dem Minimalmodell aus Kapitel 5.4 riefen den Wunsch hervor, es in die FE-Berechnung zu integrieren. Das dort vorgestellte Modell verwendet eine, an das Verfahren von POUDOU [177] angelehnte, sehr effiziente Berechnungsmethode für den zweidimensionalen Punktkontakt, erweitert um die beliebig vorzugebenden Trajektorien des Kontaktpunktes und adaptive Zeitschritte. Dort wurde die Geschwindigkeit des Rotors vorgegeben, um eine hohe Rechengeschwindigkeit zu erreichen. Für ein Gesamtmodell kommt zunächst eine Vorgabe der Rotorgeschwindigkeit nicht in Frage, da es auch möglich sein soll, das Anlaufverhalten zu untersuchen. Für die geplanten transienten FE-Berechnungen muss der Algorithmus folglich angepasst werden.

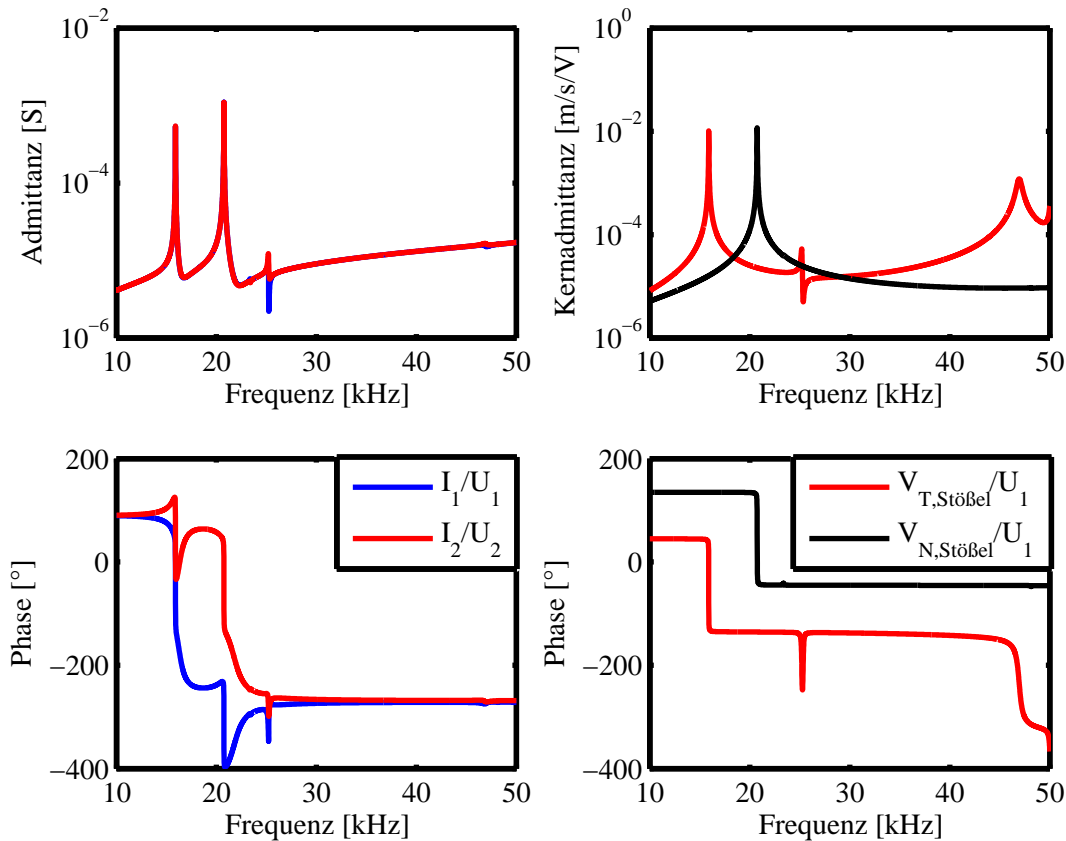


Abbildung 7.14: Elektromechanisches Frequenzverhalten des Stators in der Lagerung.

### 7.4.1 Erweiterung des Punktkontaktmodells

Bevor die Stoßkontaktberechnung in das FE-Programm integriert werden kann, muss es an die neuen Anforderungen angepasst und getestet werden.

Um die transiente Geschwindigkeitsänderung des Rotors mit zu erfassen, ist eine Zeitschrittintegration unumgänglich. Zur Bestimmung der Geschwindigkeit wird die Bewegung der Rotormasse mit dem Impulssatz

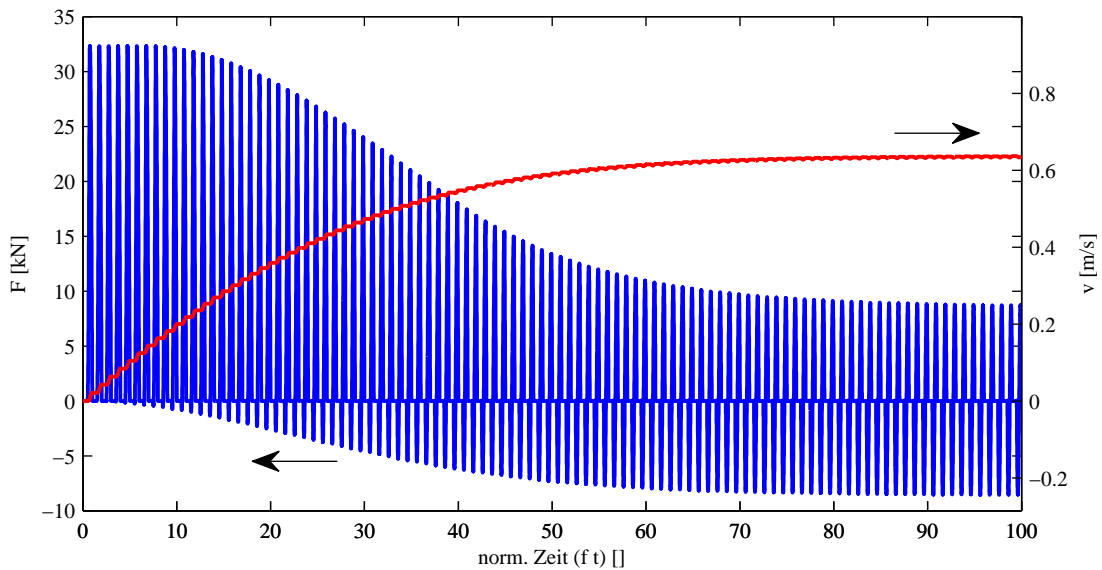
$$m\dot{v} = F_T - F_L \quad (7.97)$$

beschrieben. Anschließende Integration mit

$$v = \frac{1}{m} \int_{t_0}^t F_T - F_L dt \quad (7.98)$$

führt auf die Rotorgeschwindigkeit. Um weiterhin den großen Geschwindigkeitsvorteil der in Kapitel 5.4 vorgestellten Implementierung zu erhalten, wird ein explizites Integrationsverfahren benötigt, das zudem noch ein Einschrittverfahren sein sollte. Diese Anforderung soll kurz begründet<sup>21</sup> werden. Ein explizites Verfahren hat gegenüber einem

<sup>21</sup>Zur genaueren Beschreibung der verschiedenen Verfahren sei auf die Literatur zur numerischen Mathematik, wie beispielsweise SCHWARZ UND KÖCKLER [191] oder STOER UND BULIRSCH [192] verwiesen.



**Abbildung 7.15:** Berechnung der Geschwindigkeit und der tangentialen Kraft während eines Einschwingvorgangs mit dem erweiterten Punktkontaktmodell.

impliziten Verfahren den Vorteil, dass die rechte Seite jeweils zum Zeitpunkt der Berechnung komplett bekannt ist, daher kann das jeweilige Ergebnis direkt bestimmt werden. Iterationen, wie sie im Fall des impliziten Verfahrens notwendig wären, sind nicht nötig. Damit kann die Anzahl der durchzuführenden Operationen klein gehalten werden. Da aufgrund der Kontaktvorgänge die Zeitschritte, egal mit welchem Verfahren gerechnet wird, sehr klein sein müssen, kann ein implizites Verfahren seinen Genauigkeitsvorteil bei großen Zeitschritten nicht ausspielen. Die Forderung nach einem Einschrittverfahren liegt darin begründet, dass zur Lösung eines Zeitschritts keine Zwischenschritte benötigt werden, in denen auch mögliche Kontaktstatuswechsel berücksichtigt werden müssten. Damit kann die Begründung einfach zusammengefasst werden: es wird ein Verfahren gesucht bei dem der Rechenaufwand pro Zeitschritt möglichst gering ist. Hierzu bietet sich das explizite Euler-Verfahren<sup>22</sup> an, mit dem sich die Geschwindigkeit  $v_{(i)}$  zum Zeitpunkt  $t_{(i)}$  bestimmen lässt:

$$v_{(i)} = v_{(i-1)} + \Delta t \frac{1}{m} (F_{T,(i-1)} - F_L) \quad (7.99)$$

wobei  $i$  der Zählindex über die Schleifendurchläufe ist. Um weiterhin variable Zeitschritte nutzen zu können, wird  $\Delta t$  durch  $\Delta t_{(i)} = t_{(i)} - t_{(i-1)}$  ersetzt, welches zum Zeitpunkt der Berechnung von  $v_{(i)}$  stets bekannt ist.

In der Abbildung 7.15 ist ein exemplarischer Einschwingvorgang dargestellt. Hier ist deutlich zu erkennen, dass während der Beschleunigung des Rotors die Tangentialkraft einen positiven Mittelwert hat. Sobald die stationäre Geschwindigkeit erreicht ist, entspricht der Mittelwert der Lastkraft, die im gezeigten Fall null ist. An den kleinen Wellen auf dem Geschwindigkeitsverlauf ist die Schwankung der Rotorgeschwindigkeit zu er-

<sup>22</sup>auch EULERSche Polygonzugmethode

kennen, die hier aufgrund einer hohen Trägheit des Rotors klein ausfällt. Die notwendige Rechenzeit, um den gezeigten Zeitverlauf zu berechnen, beträgt nur wenige Sekunden. Die Ergebnisse stimmen mit denen aus Kapitel 5.3 gut überein.

### 7.4.2 Integration in das FE-Modell

Zur Berechnung des Antriebsverhaltens sollen die beiden Modelle gekoppelt werden. Dazu wird in dem FE-Modell jeweils ein Verschiebungsfreiheitsgrad als Tangential- und Normalbewegung des Kontaktpunktes festgelegt. Abbildung 7.16 zeigt den Ablauf der Berechnung.

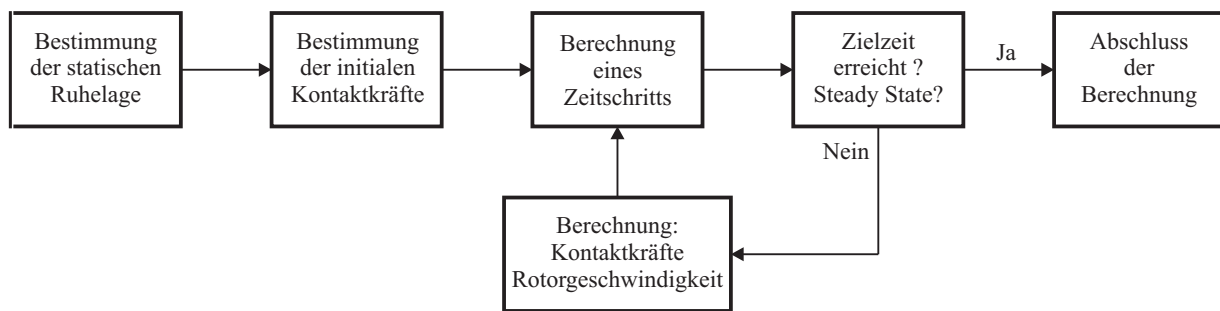
Anhand der schematischen Darstellung lässt sich der Berechnungsablauf gut zusammenfassen. Zu Beginn der Berechnung ist der Motor in Ruhe. Mittels einer statischen Analyse<sup>23</sup> ist die Berechnung der initialen Verschiebung direkt zu ermitteln. Dies garantiert eine korrekte und sinnvolle Startverschiebung. Ein möglicher initialer Kontakt wird nur in Kontaktnormalrichtung berücksichtigt, indem auf den korrespondierenden Eintrag der Steifigkeitsmatrix die Kontaktsteifigkeit addiert wird. Im zweiten Schritt werden die initialen Kontaktkräfte bestimmt. Die Gleichung 7.92 wird im dritten Schritt einem Gleichungslöser von MATLAB übergeben, dabei werden variable Schrittweiten zugelassen. Mittels einer *Event*-Funktion werden die Nulldurchgänge des für den Kontakt verantwortlichen Freiheitsgrades detektiert und fein aufgelöst. Nach jedem gültigen Zeitschritt wird die Berechnung der Kontaktkräfte und die Berechnung der Rotorgeschwindigkeit mit Hilfe des erweiterten Punktkontaktmodells und mit Hilfe der EULERSchen Polygonzugmethode durchgeführt. Die Kontaktkräfte werden wieder an die Gleichung 7.92 übergeben, um den nächsten Zeitschritt zu bestimmen, und so weiter bis die vorgegebene Endzeit oder ein anders Abbruchkriterium erreicht ist.

Damit ist die Berechnungsaufgabe klar in zwei Teilaufgaben zerlegt, welche abwechselnd gelöst werden. Zum einen wird die Statorstruktur mit für jeden Zeitschritt konstanten Kontaktkräften berechnet. Zum anderen werden der Kontakt und die Rotorgeschwindigkeit mit einem separaten Gleichungslöser berechnet. Die adaptive Zeitschrittweite wird bei der Berechnung der Statorstruktur festgelegt.

Insbesondere der Auswahl des richtigen Gleichungslösers für die Statorberechnung kommt eine große Bedeutung zu, sowohl in Bezug auf die Genauigkeit als auch auf die Geschwindigkeit der Rechnung. Zumeist sind diese beiden Kriterien gegenläufig. Leider kann für die Auswahl kein Patentrezept angegeben werden, da sich für jede Problemstellung – manchmal sogar für leicht geänderte Parameter – ein anderer Löser als geeigneter erweisen kann. Aus mathematischer Sicht ist das zu berechnende Problem höchst

<sup>23</sup>Der Verschiebungsvektor lässt sich mit  $\begin{bmatrix} \mathbf{x}_m \\ \mathbf{x}_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{mm} & \mathbf{K}_{ms} \\ \mathbf{K}_{sm} & \mathbf{K}_{ss} \end{bmatrix}^{-1} \left( \begin{bmatrix} \mathbf{f}_m \\ \mathbf{f}_s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{mk} \\ \mathbf{K}_{sk} \end{bmatrix} \mathbf{x}_k \right)$  direkt bestimmen. Da die resultierende Steifigkeitsmatrix mit sehr unterschiedlich großen Einträgen besetzt ist, ist eine Invertierung nicht immer, jedoch meistens möglich.





**Abbildung 7.16:** Schematische Darstellung des Ablaufs einer Berechnung mit Kontakt

anspruchsvoll, da steife Differenzgleichungen mit zum Teil sehr schnellen Veränderungen der Systemmatrizen zusammenkommen. Die hier durchgeführte Aufspaltung des Problems verbessert die Berechenbarkeit spürbar, wird aber letztendlich auch mit einem Genauigkeitsverlust erkauft. Kommerzielle FE-Programme würden genau diese Aufspaltung des Problems nicht durchführen und dadurch eine genauere Lösung bei einer (heute noch) unwirtschaftlichen Rechenzeit erzielen. Um die zu verarbeitenden Daten klein zu halten, wird die Rechnung in regelmäßigen Abständen kurz gestoppt, aus den berechneten Daten Anfangswerte zur Fortsetzung der Berechnung bestimmt und die übrigen Daten verworfen oder gespeichert. Dadurch kann während der Rechnung der Hauptspeicherbedarf deutlich reduziert werden, was einen positiven Einfluss auf die Rechengeschwindigkeit hat.

Durch die obig beschriebene Implementierung ist das Gesamtmodell des Antriebs komplett. Damit sind alle als wesentlich betrachteten Einflüsse integriert, insbesondere das piezoelektrische Verhalten des Materials, die Möglichkeit, dass sich die Strukturschwingung im laufenden Betrieb verändert und der Kontaktvorgang zwischen Stator und Rotor. Im folgenden Abschnitt werden mit dem gewonnenen Modell einige exemplarische Rechnungen durchgeführt und deren Ergebnisse gezeigt.

## 7.5 Analyse des Antriebsvorgangs

Mit der beschriebenen Berechnungsmethode wird jetzt der Beispielantrieb untersucht. Der in Kapitel 7.3 untersuchte Stator wird dazu, wie zuvor beschrieben, um den Kontakt zum Rotor und den Rotor selbst erweitert. Die Berechnung wird für die aus dem Frequenzgang der Kernadmittanz in Abbildung 7.14 abgeleiteten Frequenzen durchgeführt, dies sind die beiden Resonanzen und der Schnittpunkt der zwei Kurven. Bei der folgenden Berechnung wird zunächst keine Lastkraft angenommen.

Als erstes wird die Resonanz der Tangentialbewegung bei 15.91 kHz betrachtet. Der Stator wird, wie schon im freien Fall, mit 90° Phasenversatz zwischen den beiden Anspannungen betrieben. Die statische Anpresskraft ist gerade null. Die Ergebnisse der

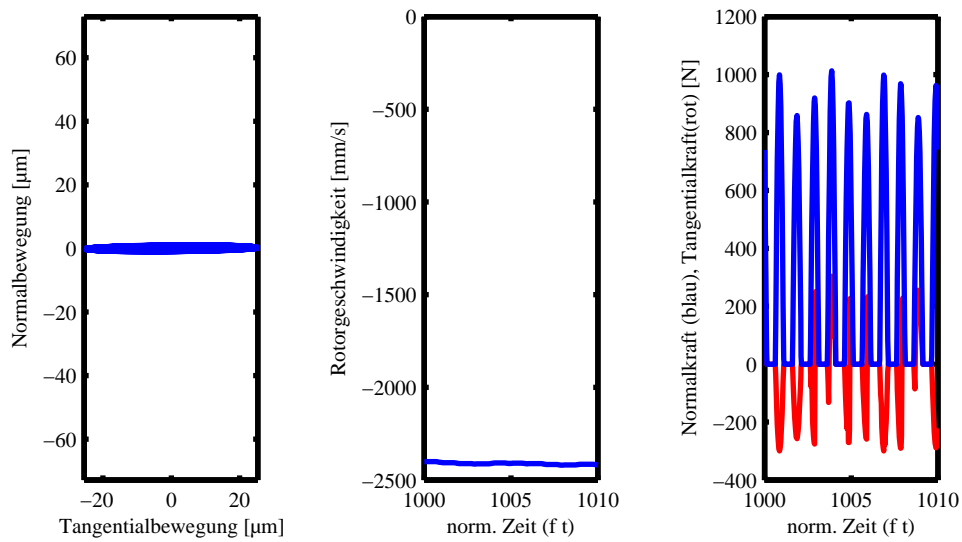


Abbildung 7.17: Transientes Verhalten des Antriebs bei 15.91 kHz. (Tangentialresonanz)

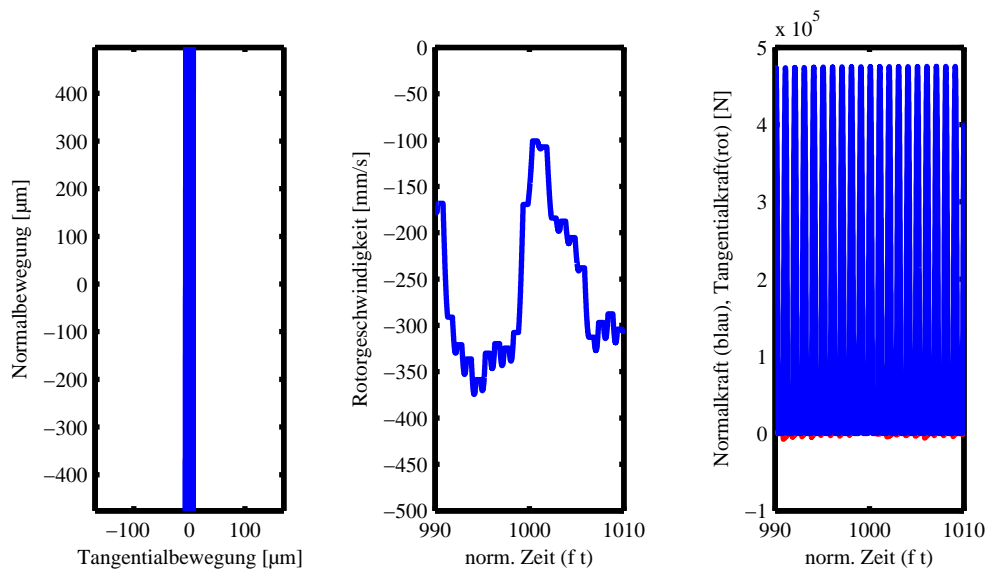
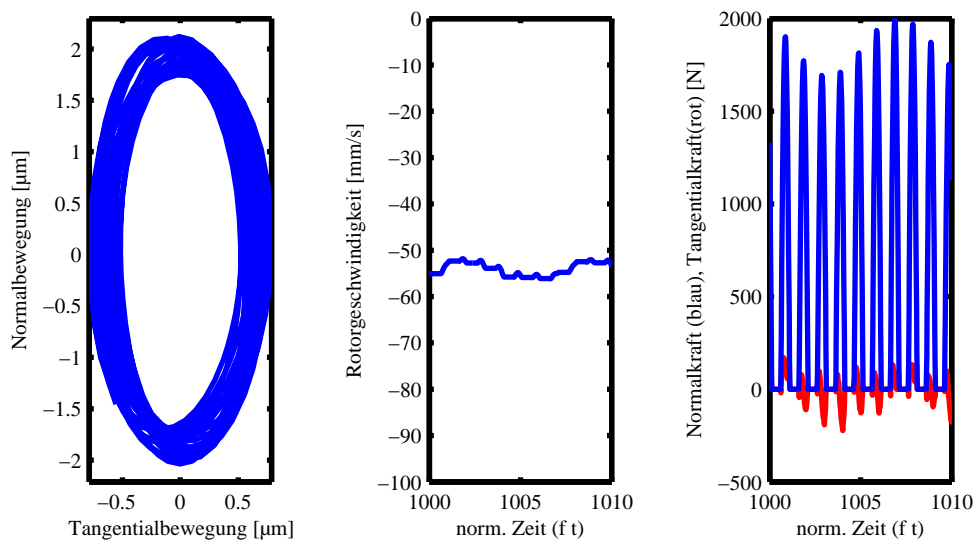


Abbildung 7.18: Transientes Verhalten des Antriebs bei 20.75 kHz (Normalresonanz)



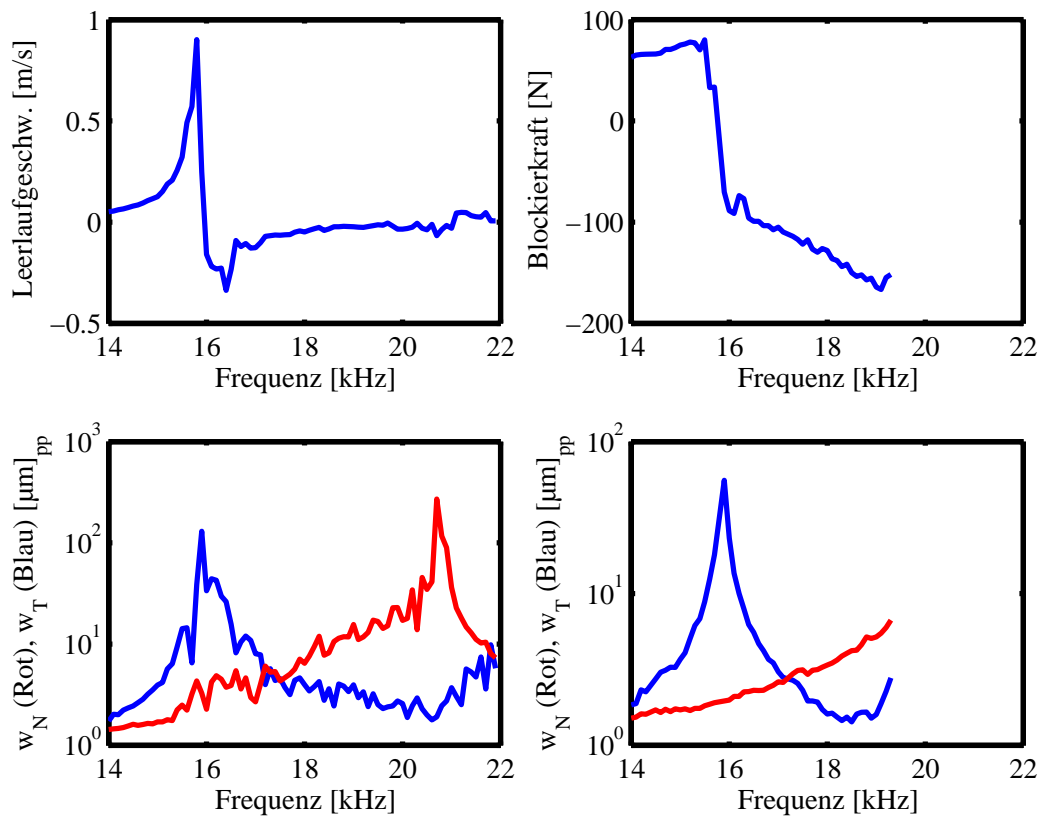
**Abbildung 7.19:** Transientes Verhalten des Antriebs bei 18.4 kHz (Schnittpunkt der Übertragungsfunktionen)

Rechnung sind in drei Diagrammen in Abbildung 7.17 gezeigt. Zunächst ist die Bewegungstrajektorie der Stößelspitze während der letzten 10 Perioden gezeigt, hier ist eine sehr flache in Tangentialrichtung ausgebreitete Ellipse zu erkennen. Die deckungsgleichen Linien lassen den eingeschwungenen einperiodischen Zustand erkennen. Im Diagramm der Rotorgeschwindigkeit ist eine nahezu konstante Geschwindigkeit zu erkennen, die kleinen Unebenheiten ergeben sich aus den unterschiedlichen Kontaktphasen. Im Schaubild der Kontaktkräfte ist für die Tangentialkraft im Mittel eine Gleichverteilung von positiven und negativen Anteilen zu erkennen. Ein ähnliches Bild ergibt sich für die anderen beiden Resonanzen der Tangentialbewegung in den Abbildungen A.13 und A.14.

Ein gänzlich anderes Bild ergibt sich für den Fall der Resonanz der Normalbewegung bei 20.75 kHz. Erwartungsgemäß ist die Normalamplitude dominant, es bildet sich keine richtig eingeschwungene Ellipse aus. In der Abbildung 7.18 fällt daher die erreichte Geschwindigkeit recht klein aus und hat sehr große Schwankungen. Die extrem hohen Amplituden liegen an der im Modell als sehr klein angenommenen Dämpfung. Den sehr hohen Normalkräften zum Trotz, sind die Tangentialkräfte erwartungsgemäß vergleichsweise klein.

Die Frequenz bei der in Abbildung 7.14 die Normal- und Tangentialamplitude gleich groß sind, liegt bei 18.4 kHz. Die dazugehörigen Ergebnisse sind in der Abbildung 7.19 angegeben. Die gezeigten Wegamplituden unterscheiden sich nun in etwa um einen Faktor zwei. Dieser Unterschied ist auf den Kontaktvorgang zurückzuführen.

Um das Antriebsverhalten über der Frequenz darzustellen, sind Frequenzgänge gerechnet worden, dazu wurde die Frequenz von 14 kHz bis 22 kHz in 80 Schritten durchfahren. Jede Rechnung beginnt mit den Endwerten der vorangegangenen Rechnung, um



**Abbildung 7.20:** Links) Leerlaufgeschwindigkeit und Kontaktpunktamplituden des berechneten Motors mit unbelastetem Rotor über der Frequenz. Rechts) Blockierkraft und Kontaktpunktamplituden des berechneten Motors mit festgesetztem Rotor über der Frequenz.

die Einschwingdauer zu reduzieren. Als schwaches Kriterium zum Test auf einen eingeschwingenen Zustand wurde für jedes Segment von 10 Perioden überprüft, ob die prozentuale Abweichung zwischen der Durchschnittsgeschwindigkeit und der Maximalgeschwindigkeit des Rotors kleiner als 8 % war. Abbildung 7.20(Links) zeigt das errechnete Ergebnis. Die Geschwindigkeit steigt zur Resonanzfrequenz der Tangentialbewegung an. Direkt neben der Resonanzfrequenz fällt die Geschwindigkeit stark ab und es kommt zu einem Drehrichtungswechsel. Kurz danach wird die maximale negative Geschwindigkeit erreicht. Wird die Frequenz weiter erhöht, sinkt der Betrag der Geschwindigkeit. Im Bereich der Resonanz der Normalbewegung sind die Geschwindigkeiten am geringsten, auch im Bereich dieser Resonanz findet ein Drehrichtungswechsel statt. Diese Wechsel lassen sich durch die  $180^\circ$  Phasenänderung beim Durchlaufen der Resonanzfrequenz erklären.

Um den neben der Leerlaufgeschwindigkeit zweiten wichtigen Kennwert, die Blockierkraft, zu ermitteln, wird im Modell der Untergrund festgesetzt. Damit lässt sich direkt die gesuchte Kraft ermitteln, in dem im eingeschwingenen Zustand das Integral der Tangentialkraft über einer Periode berechnet wird,

$$F_B = \frac{1}{T} \int_{T_i}^{T_{i+1}} F_T(t) dt. \quad (7.100)$$

In diesem Fall wird das System als eingeschwungen angesehen, sobald zwei aufeinander folgende Mittelungen der Blockierkraft über 10 Perioden nicht mehr als 0.5 % voneinander abweichen. Das Ergebnis ist in Abbildung 7.20 dargestellt. Hier nimmt die Kraft zur Resonanz in Tangentialrichtung hin zu und wechselt das Vorzeichen wie zuvor die Geschwindigkeit. Mit weiterer Annäherung an die Resonanz in Normalrichtung steigt die Blockierkraft, allerdings gibt es einen Bereich um diese Resonanz, in dem kein eingeschwungener einperiodischer<sup>24</sup> Zustand in 5000 Anregeperioden erreicht wird. Vielmehr wechselt in der Berechnung das Vorzeichen des Integrals über der Tangentialkraft, selbst nach dieser großen Periodenzahl noch häufig in unregelmäßigen Abständen. Daher wurden diese Punkte nicht mit in das Diagramm eingetragen. An dieser Stelle ist nicht ausgiebig analysiert worden, ob die Lösung zu irgendeinem späteren Zeitpunkt auf eine ein- oder mehrperiodische Lösung einschwingt oder ob es sich um eine chaotische Lösung handelt.

## 7.6 Fazit

In diesem Kapitel wurde ein Vorgehen und auch eine Umsetzung desselben zur Modellierung und Berechnung von piezoelektrischen Stehwellenantrieben vorgestellt. Um die benötigte Anzahl von Freiheitsgraden gering zu halten, und um dennoch einen hohen Detaillierungsgrad zu erreichen, wurde auf eine Finite-Elemente-Modellierung mit eindimensionalen Elementen gesetzt. Dazu wurde ein eigenes FE-Programm in MATLAB geschrieben. Dies war insbesondere notwendig, da es in den meisten kommerziellen FE-Paketen keine eindimensionalen piezoelektrischen Elemente gibt. Weiterhin erlaubte die eigene Umsetzung den direkten Zugriff auf die Berechnungsmethoden, was für die Einbindung der Stoßreibkontaktberechnung notwendig war und ohne weiteres in kommerziellen Code zu integrieren gewesen wäre.

Die Ergebnisse für die exemplarisch untersuchte Geometrie zeigen die Effektivität des Modells; ein durchschnittlicher Einschwingvorgang lässt sich auf einem handelsüblichen Rechner in zehn Minuten bestimmen, wobei ein Großteil des Zeitbedarfs noch auf das nicht immer perfekte Hauptspeichermanagement von MATLAB und vor allem den interpretierten Programmcode zurückzuführen ist. Die Ergebnisse selbst erweisen sich als plausibel. Damit eignet sich das in dieser Arbeit entstandene Tool zum Entwurf und zur Analyse von piezoelektrischen Antrieben. Dabei ist das Tool selbst nicht auf eine bestimmte Antriebsklasse oder Anzahl von Kontaktpunkten begrenzt, lediglich die Beschreibung der Geometrie als ebene Struktur und die Annahmen für Stab-/Balkenelemente müssen zu rechtfertigen sein.

---

<sup>24</sup>Aufgrund der Länge der untersuchten Zeitabschnitte können auch zwei-, fünf- und zehnperiodische Lösungen ausgeschlossen werden.

## 8 Diskussion der Ergebnisse

In den vier vorangegangenen Kapiteln sind die wesentlichen Resultate dieser Arbeit beschrieben worden. In der Aufgabenstellung wurde die Funktionsweise der reibungsba- sierten Antriebe und spezieller, die der Stehwellenantriebe in den Fokus gerückt. In die- sem Kapitel soll nun noch aufgezeigt werden, inwieweit die verschiedenen Teilaufgaben zum besseren Verständnis der untersuchten Antriebe beitragen konnten. Dabei werden insbesondere die folgenden vier Fragen untersucht:

- Wie sieht die Bewegung des statorseitigen Kontaktpunktes aus?
- Wie sieht ein Minimalmodell für den Antriebsprozess aus?
- Wie relevant sind die Veränderungen der Schwingungsform?
- Wie wird ein Stehwellenantrieb unter Berücksichtigung von Geometrie-, Material- und Lastparametern recheneffizient beschrieben?

### **Wie sieht die Bewegung des statorseitigen Kontaktpunktes aus?**

In den experimentellen Untersuchungen konnten aufschlussreiche Erkenntnisse über die Bewegung des Stößels gewonnen werden. Es stellte sich heraus, dass ein deutlicher Un- terschied in der Trajektorie des Kontaktpunktes für die untersuchten Parameter, Anpress- kraft, Frequenz, Höhe der Anregespannung und Phase zwischen den Anregesignalen, zu erkennen ist. Dabei ist auch festzuhalten, dass sich offensichtlich die tribologischen Randbedingungen ständig ändern und auch dies eine Rückwirkung auf die Bewegungs- bahn hat. Nur wenn diese Rückwirkung so ist, dass ein stationärer Zustand des tribo- logischen Systems erreicht wird, ist ein gleichmäßiges Antriebsverhalten zu erreichen. Weiterhin konnte im Experiment gezeigt werden, dass sich auch mehrperiodische Abläu- fe einstellen können. Aus den aufgenommenen Daten ist zu erkennen, dass keinesfalls ein monofrequentes harmonisches Signal genügt, um die Bewegung näherungsweise zu beschreiben. Das Frequenzspektrum der gemessenen Geschwindigkeiten weist zumeist acht signifikante Frequenzanteile auf. Da allerdings die höherfrequenten Anteile bei der Integration zur Verschiebung stark abgeschwächt werden, sind für deren Beschreibung drei bis vier Frequenzanteile hinreichend. Diese Erkenntnis bedeutet auch, dass sich die Trajektorie des Stößels signifikant von einer Ellipse unterscheidet und bestätigt damit ei- ne zu Beginn der Arbeit aufgestellte These.

Es ist auch festzuhalten, dass die Ergebnisse der Messungen stark äußeren Einflüssen unterliegen. Offenbar spielen auch Fertigungstoleranzen eine große Rolle. Gerade in dem untersuchten Anwendungsbereich in dem hochfrequente und häufig vergleichsweise schwach gedämpfte Systeme resonant aufeinander abgestimmt werden müssen. Neben der Geometrie spielen auch noch Alterungserscheinungen und die Umgebungsbedingungen eine wichtige Rolle.

### **Wie sieht ein Minimalmodell für den Antriebsprozess aus?**

Als Minimalmodell für einen reibungsbasierten Antrieb hat sich in der vorliegenden Arbeit das in Abbildung 5.1 gezeigte Modell mit zwei Steifigkeiten, dem konstanten Haft- und Gleitreibungswert und einer Rotormasse bewährt. In dem Modell sind außer der Reibung keine Verluste berücksichtigt. Dies ermöglicht eine bewegungsabhängige Kontakterkennung. Aufgrund der strikten Konzentration auf den eigentlichen Antriebsprozess ist das Modell sehr vielseitig, für verschiedene reibungsbasierte Antriebe nutzbar. Eine sehr hohe Rechengeschwindigkeit konnte durch die Vorgabe der Rotorgeschwindigkeit erreicht werden, da durch diese Vereinfachung das System nicht mehr schwingfähig ist und somit quasi keine Einschwingzeit notwendig ist. Ein großer Vorteil dieses so vereinfachten Systems ist, dass es sich inkrementell algebraisch mit einem numerischen Verfahren lösen lässt. Somit ist auch die Berechnung vieler Kontaktpunkte, wie sie für Wanderwellenmotoren notwendig wäre, kein Problem. Eine entsprechende Implementierung ist umgesetzt worden, wurde aber in dieser Arbeit nicht weiter diskutiert.

Ein weiterer wichtiger Schritt im Hinblick auf die Nutzung als generisches Motorminimalmodell ist die Erweiterung des numerischen Verfahrens um den zunächst vernachlässigten Rotor, wie es in einem anderen Zusammenhang in Kapitel 7.4 diskutiert wurde. Diese Erweiterung, zusammen mit der Erweiterung auf viele Kontaktpunkte, erlaubt es auf einfache Weise, das Zusammenspiel mehrerer Statoren auf einen einzelnen Rotor zu untersuchen. Dabei können die Auswirkungen der Synchronität in Amplituden und Phasen der einzelnen Bewegungen untersucht oder auch der Einfluss unterschiedlicher Betriebsfrequenzen diskutiert werden. Auch hier wurden programmtechnische Umsetzungen durchgeführt, aber aus Platzgründen nicht in der vorliegenden Arbeit diskutiert.

Eine weitere naheliegende Ergänzung des Minimalmodells ist der Rauheitseinfluss zwischen Rotor und Stator. Eine entsprechende Umsetzung, inspiriert von den Arbeiten von PANNING [193] und SEXTRO [163] unter Zuhilfenahme der Materialanteilskurve von ABBOTT UND FIRESTONE [194], wurde erstellt. Allerdings hat sich herausgestellt, dass diese Effekte für die reibungsbasierten Antriebe nur von geringer Bedeutung sind, wenn die prinzipiellen Zusammenhänge dargestellt werden sollen und daher nicht zwingend Teil des Minimalmodells sein müssen. Aus diesem Grund wurde die Umsetzung in dieser Arbeit nicht weiter besprochen. Für eine sehr genaue Betrachtung mit einem insgesamt umfangreicheren Modell kann die Berücksichtigung dieser Effekte sinnvoll sein und ließe sich auch ohne weiteres in das vorgeschlagene Modell integrieren.

### Wie relevant sind die Veränderungen der Schwingungsform?

Die Rückwirkung der hochfrequenten Kontaktvorgänge auf das Schwingungsverhalten des Stators konnte deutlich gezeigt werden. Dabei hängt die Auswirkung in hohem Maße von den Parametern Kontaktsteifigkeit, Lagersteifigkeit und der statischen Ruhelage ab. Stark zugespitzt lässt sich festhalten, dass immer dann, wenn die genannten Steifigkeiten größer<sup>1</sup> als die Steifigkeit des Schwingers ist, die Auswirkung nicht mehr vernachlässigbar ist. Die Kontaktsteifigkeit wird dabei nicht als reine *Penalty*-Steifigkeit betrachtet, da sie auch die reale Nachgiebigkeit des Untergrunds mit abbildet. Die Änderungen des Schwingungsverhaltens fallen besonders signifikant in zwei Kriterien auf. Zum einen verändert sich die Schwingungsform derart, dass keine monofrequente harmonische Schwingung mehr vorliegt, sondern bei jedem Kontakt mit dem Untergrund eine Stoßwelle in den Schwinger hinein läuft. Dies verhindert nicht, dass die Schwingung in den untersuchten Fällen stets periodisch war. Allerdings können vor allem bei hohen Kontaktsteifigkeiten Prellvorgänge, also häufige Kontaktwechsel innerhalb einer Periode auftreten. Zum anderen verschiebt sich die ehemalige Knotenposition deutlich zum freien Ende hin. Einen richtigen Schwingungsknoten wie im linearen Fall gibt es aufgrund der in den Aktor hineinlaufenden Stoßwellen nicht mehr. Der Umstand der Knotenverschiebung ist besonders in der Auslegung wichtig, da die Lagerposition an der Position mit der kleinsten Schwingung vorgesehen werden sollte. Eine Lagerung an der falschen Stelle würde sogar eine lineare Schwingung signifikant verändern. Ein Teil der Energie würde über das Lager abfließen und die umgebende Struktur zu Schwingungen anregen, damit wäre eine schwingungstechnische Isolation nicht mehr gewährleistet. Weiterhin würde die Lagerung die Amplitudenverteilung verändern, eine hinreichend<sup>2</sup> steife Lagerung könnte theoretisch sogar einen Schwingungsknoten aufprägen. Neben diesen beiden wichtigen Einflüssen ist auch die Resonanzfrequenz von den Parametern abhängig. Daher ist die Notwendigkeit einer Frequenznachführung, bzw. einer Betrachtung über die Frequenz unmittelbar einsichtig. Da die Resonanz der immer angestrebte Betriebspunkt ist, konnte mit der Nutzung eines vergleichsweise neuen Rechenverfahrens, der Berechnung als selbsterregtes System, eine zeitsparende Methode implementiert werden. Die parameterabhängige Veränderung der Resonanzfrequenzen konnte auch messtechnisch nachgewiesen werden.

### Wie wird ein Stehwellenantrieb unter Berücksichtigung von Geometrie-, Material- und Lastparametern recheneffizient beschrieben?

Um einen Stehwellenantrieb näherungsweise komplett zu beschreiben, müssen viele Effekte berücksichtigt werden. Dabei ist eine geeignete Abbildung der schwingenden Statorstruktur eine wichtige Komponente. Daneben ist eine Berücksichtigung des Reibkontaktes mit der Möglichkeit von Haft-, Gleit- und Separationszuständen unerlässlich. Vervollständigt wird die Beschreibung mit der Integration der elektromechanischen Kopp-

---

<sup>1</sup> Ab etwa der doppelten Steifigkeit, im Vergleich zum Stator.

<sup>2</sup> Dies ist in der Praxis nicht zu erreichen, allerdings kann die Schwingung deutlich behindert werden.



lung. Da bei der numerischen Berechnung des Antriebs mittels transienter Analyse aufgrund der relativ schwachen Systemdämpfung eine lange Einschwingzeit benötigt wird, sollte das System mit wenigen Freiheitsgraden beschrieben werden. Um dies zu erreichen, ist ein auf ebenen Längs-Biege-Elementen mit jeweils zwei Knoten basierendes FE-Modell erstellt worden. Für die Beschreibung der Längs-Biege-Elemente bietet sich eine Kombination von Stäben unter Berücksichtigung der Querkontraktion und Balken im Sinne der nach TIMOSHENKO benannten Theorie an. Damit hat jeder Knoten drei Freiheitsgrade. Die elektromechanische Kopplung lässt sich für die Längsrichtung mit integrieren, jeder Knoten bekommt dann einen zusätzlichen Freiheitsgrad. Ein weiterer Vorteil bei der Nutzung des FEM-Ansatzes ist, dass sich in der Systemgleichung alle Kraft-, Verschiebungs-, elektrische Potential- oder Ladungsrandbedingungen sehr systematisch implementieren lassen. Als effiziente Implementierung des Stator-Rotor Kontakts hat sich eine Einbindung des obigen Minimalmodells über zeitschrittweise konstante Reaktionskräfte erwiesen. Insbesondere die vereinfachende Annahme, dass für jeden Zeitschritt a priori die Reaktionskräfte an der Kontaktstelle bestimmt werden, und erst nach dem erfolgreich berechneten Zeitschritt aktualisiert werden, erhöht die Rechengeschwindigkeit. Mit der vorgeschlagenen Modellierung ist es möglich, eingeschwungene Frequenzgänge, auf gängigen Desktop-Computern unter Berücksichtigung des Kontaktes in wenigen Stunden zu berechnen. Diese überschaubaren Rechenzeiten ermöglichen sogar Parameterstudien, wie sie mit den bisher bekannten FE-Stehwellenantriebsmodellen aus Zeitgründen unmöglich wären. Daneben lässt sich die im Rahmen dieser Arbeit entstandene Umsetzung des Modells sehr gut zur Validierung von weiter reduzierten Modellen oder aber als Grundlage für Berechnungsmethoden, die direkt den eingeschwungenen Zustand bestimmen, nutzen.

## Fazit

Insgesamt konnten die Ziele, die in der Aufgabenstellung gesteckt wurden auch erreicht werden. Die vorliegende Arbeit hat Lücken, die mit der Analyse des Stands der Technik aufgedeckt wurden, geschlossen. Besonders herauszustellen sind die Messungen der Stößeltrajektorien und die Erstellung des ganzheitlichen Gesamtmodells. Aus den erzielten Ergebnissen konnten an vielen Stellen konkrete Hinweise für die Entwicklung von Stehwellenantrieben gegeben werden. Insbesondere das Ziel, Werkzeuge für einen modellbasierten Entwurf bereitzustellen, ist erreicht und ermöglicht eine Auslegung auch wirtschaftlich darzustellen. An einigen Stellen haben sich noch Potentiale für weitere Verbesserungen aufgetan, die im Rahmen dieser Arbeit nicht in den Fokus gerückt wurden. An diesen Stellen kann auf der geschaffenen Grundlage aufgebaut und weiter gearbeitet werden.

## 9 Zusammenfassung und Ausblick

Die vorliegende Arbeit beschäftigt sich mit der experimentellen und modellbasierten Analyse von Stehwellenantrieben. Dabei konnten aus einer Evaluation der reichlich vorhandenen Literatur einige Wissenslücken aufgezeigt werden. Hier haben sich vor allem die folgenden Punkte als wesentliche Schwachstellen herausgestellt. In den bekannten experimentellen Untersuchungen gab es fast ausschließlich makroskopische Untersuchungen am Antrieb im Betrieb. Im speziellen Untersuchungen auf einer Zeitskala, in der die quasi konstanten Geschwindigkeiten gemessen und so die typischen Motorkennlinien erstellt wurden. Untersuchungen der Stößelbewegung auf der Zeitskala der Anregefrequenzen sind bisher nur für den frei schwingenden Stator veröffentlicht worden. Weiterhin wurde die Rückwirkung des Antriebsprozesses auf die Schwingungseigenschaften des Stators weder experimentell noch modelltechnisch in den Fokus der Untersuchungen gerückt. Trotz vieler publizierter Ansätze und Umsetzungen für die Modellierung von Stehwellenantrieben gab es noch keine Methodik, die eine gute Abbildung der Statorstruktur, einschließlich der elektromechanischen Kopplung, mit der Berechnung des Antriebsprozesses, bei handhabbarem Berechnungsaufwand, kombinierte.

Es wurde zunächst ein Versuchsstand zur Ermittlung der Kontaktpunkttrajektorien aufgebaut. In diesem wurde mittels eines 3D-Laser-Doppler-Vibrometers die Geschwindigkeit des Stößels eines adaptierten *Shaking-Beam*-Motors nahe des Kontaktpunktes ermittelt. Zur Auswertung wurden die Geschwindigkeitssignale im Frequenzbereich gefiltert und die Bewegungstrajektorien abgeleitet. In den Untersuchungen konnte gezeigt werden, dass die Betrachtung der höherfrequenten Anteile in einer möglichen Modellierung einen deutlichen Einfluss auf die Qualität des Ergebnisses hat.

Zur generischen Beschreibung von reibungsbasierten Antrieben ist ein Minimalmodell vorgeschlagen worden. In Kombination mit der Nutzung eines numerischen Verfahrens zur Berechnung und der Vorgabe einer Rotorgeschwindigkeit konnten sehr effizient Parameterstudien durchgeführt werden, die allgemeine Aussagen ermöglichen. Die erzielten Ergebnisse wurden weiterhin in einem spezifischen Anwendungsbeispiel auf die Auslegung von Statoren für *Shaking-Beam*-Motoren übertragen.

Ein weiteres Kapitel beschäftigt sich mit der Rückwirkung des Kontaktprozesses auf die Schwingungseigenschaften des Stators. Hierzu wurden ein Prinzipmodell und ein Prüfstand entworfen und umgesetzt. Als Ergebnis der Untersuchung des Einflusses der Para-

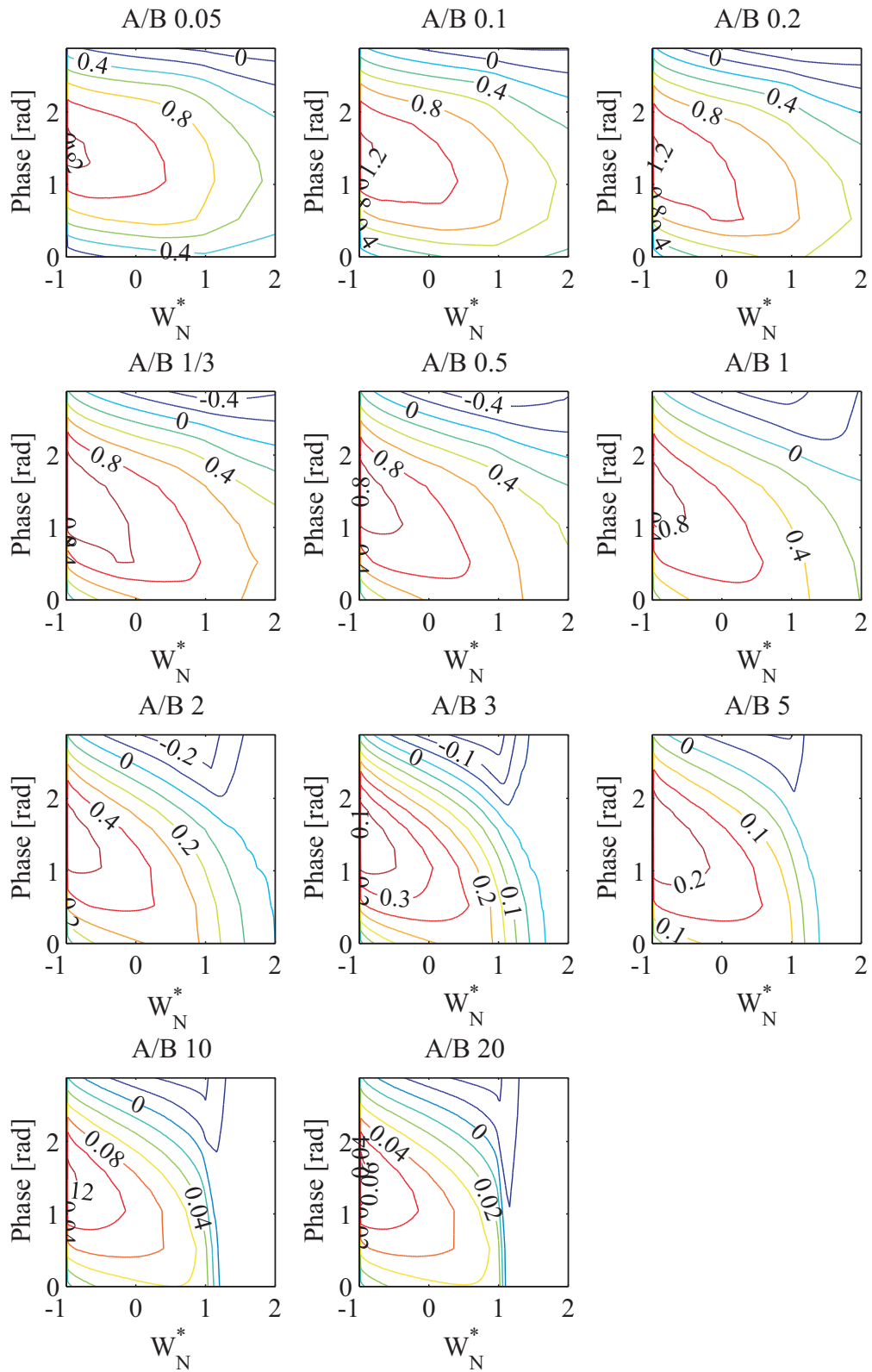
meter Kontaktsteifigkeit, Lagersteifigkeit und Anpresskraft konnten die Rückwirkungseffekte deutlich aufgezeigt werden. In Zusammenhang mit den Untersuchungen zeigte sich, dass die Berechnungsdauer insbesondere aufgrund der zusätzlichen Frequenzabhängigkeit der Ergebnisse sehr hoch ist. Der notwendige Zeitaufwand konnte durch die Implementierung einer recht neuen Berechnungsmethode – der autoresonanten Berechnung – signifikant verbessert werden, da nur noch die gesuchten Ergebnisse in Resonanz bestimmt werden müssen. Durch die Selbsterregung entfällt die Vorgabe einer Frequenz, die damit von einem Eingangsparameter zu einem Ergebnis der Rechnung wird. Die Methode hat Potential auch in anderen Bereichen, in denen Systeme in ihrer Resonanz untersucht werden sollen, zum Einsatz zu kommen.

Die Erstellung und Analyse des elektromechanischen Gesamtmodells rundet die Arbeit ab. Für dieses Modell wurde ein guter Kompromiss zwischen Berechnungsgeschwindigkeit, Modellierungstiefe und Rechengenauigkeit gesucht und erzielt. Dazu wurde ein Finite-Elemente-Modell basierend auf zwei-Knoten-Elementen aufgebaut. Die Elemente wurden auf Grundlage der TIMOSHENKO-Balken-Theorie und der klassischen Stabtheorie unter der Berücksichtigung von Querkontraktion hergeleitet. Zusätzlich wurden die Längs- und Biegeverformungen kombiniert. Weiterhin wurde in den Elementen die elektromechanische Kopplung berücksichtigt. Die Berücksichtigung des Kontaktvorganges für den Antriebsprozess wurde über die zeitschrittweise konstante Rückführung der Kontaktkräfte umgesetzt. Mit dem implementierten Programm lässt sich der transiente Antriebsvorgang sehr effizient berechnen, selbst auf üblichen Computern lassen sich Frequenzgänge in wenigen Stunden berechnen.

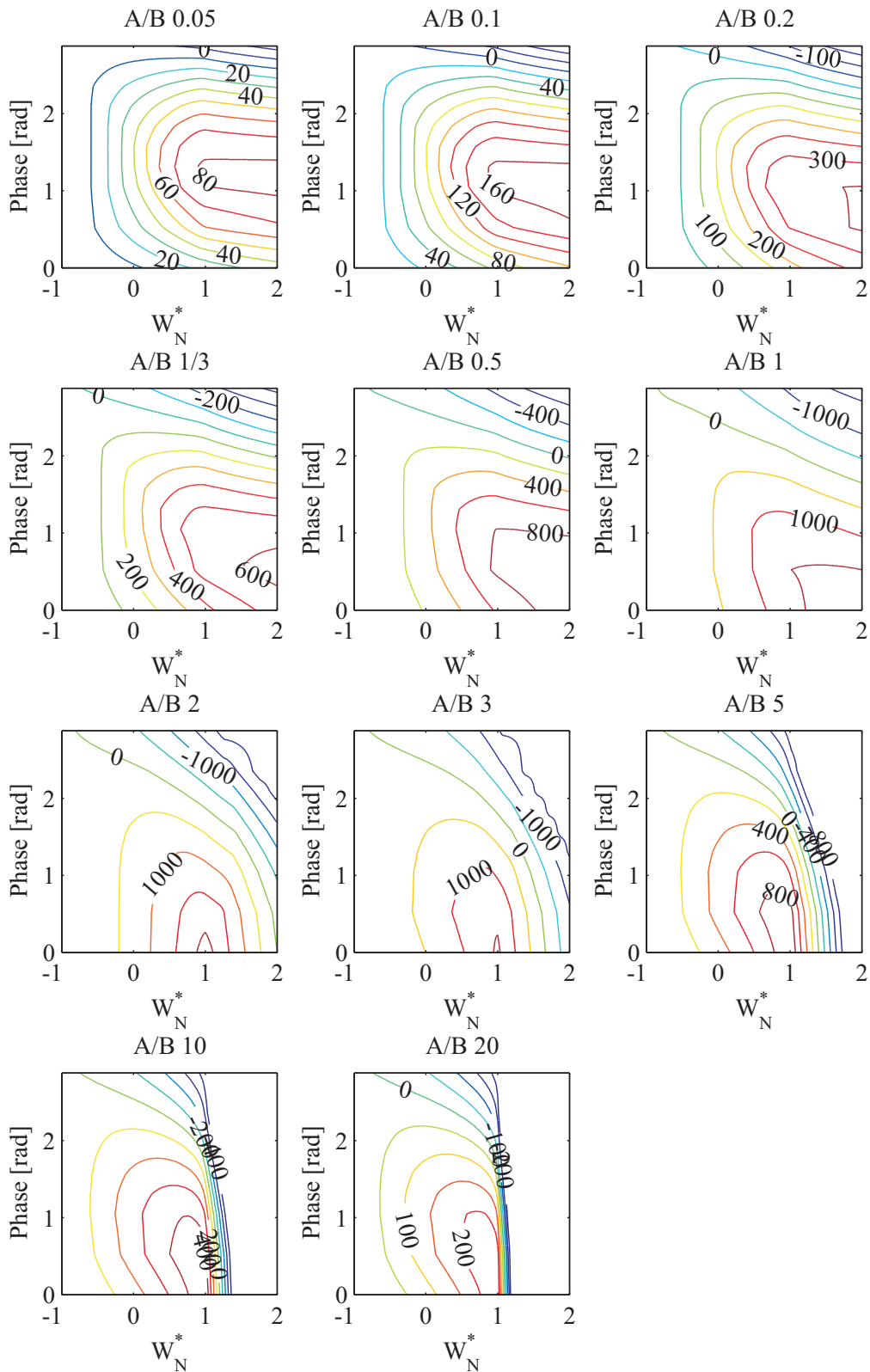
Insgesamt wurde in dieser Arbeit das Ziel erreicht, den Antriebsprozess des Stehwellenantriebs genauer zu beleuchten. Dabei ist das modelltechnische Handwerkszeug, das zur modellbasierten Auslegung und Optimierung von Stehwellenantrieben notwendig ist, entstanden. Dieses lässt sich als Basis für eine weitere Verbesserung der Modelle nutzen. Insbesondere die schon in der Analyse des Stands der Technik genannten Möglichkeiten zur direkten Berechnung des eingeschwungenen Zustandes (Schießverfahren, höhere harmonische Balance, ...) können auf der Basis der erstellten Modelle umgesetzt und validiert werden. Auch eine weitere Verfeinerung der Modellierungstiefe hin zu einem 3D Modell mit nachträglicher Reduktion der Freiheitsgrade ist eine interessante künftige Erweiterung. Dabei lassen sich die Reduktionsmethoden auf die in dieser Arbeit entstandenen Modelle anwenden und mit den entsprechenden Zeitlösungen vergleichen, um die Methoden auf ihre Nutzbarkeit hin zu untersuchen.

## A Bild-Tafeln

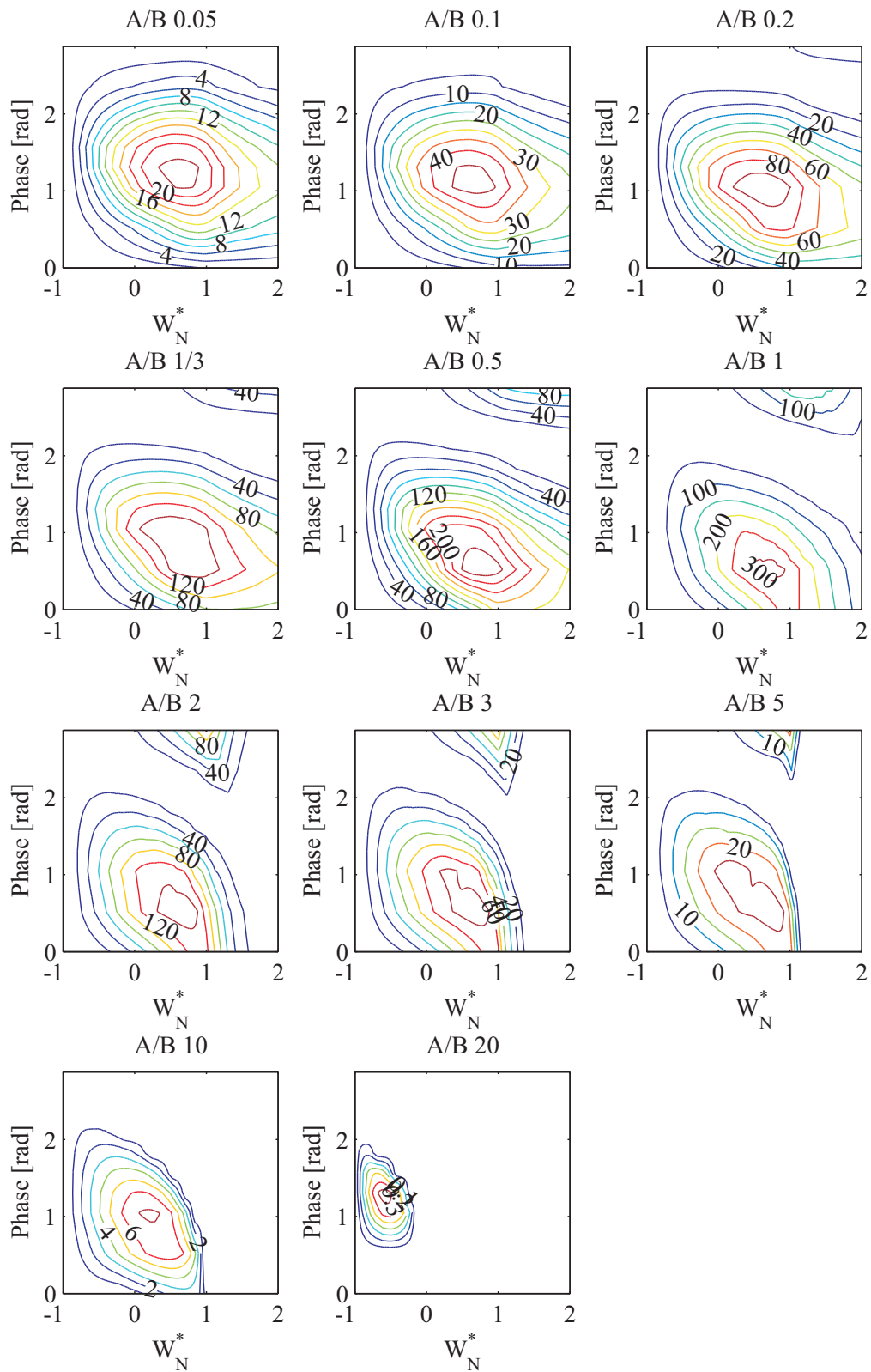
A.1	Kapitel 5.5, Leerlaufgeschwindigkeit für unterschiedliche Trajektorien . . .	139
A.2	Kapitel 5.5, Blockierkraft für unterschiedliche Trajektorien . . . . .	140
A.3	Kapitel 5.5, maximale Leistung für unterschiedliche Trajektorien . . . . .	141
A.4	Kapitel 5.5, Gleitanteil für unterschiedliche Trajektorien . . . . .	142
A.5	Kapitel 6.3.1, Variation Kontaktsteifigkeit – Phasendiagramm . . . . .	143
A.6	Kapitel 6.3.1, Variation Kontaktsteifigkeit – Einhüllende . . . . .	144
A.7	Kapitel 6.3.2, Variation Lagersteifigkeit – Phasendiagramm . . . . .	145
A.8	Kapitel 6.3.2, Variation Lagersteifigkeit – Einhüllende . . . . .	146
A.9	Kapitel 6.3.3, Variation Anpresskraft – Phasendiagramm . . . . .	147
A.10	Kapitel 6.3.3, Variation Anpresskraft – Einhüllende . . . . .	148
A.11	Kapitel 7.3, Frequenzverhalten des Stators bei 0° Phase . . . . .	149
A.12	Kapitel 7.3, Frequenzverhalten des Stators bei 180° Phase . . . . .	150
A.13	Kapitel 7.5, Transientes Antriebsverhalten bei 25.2 kHz . . . . .	151
A.14	Kapitel 7.5, Transientes Antriebsverhalten bei 47 kHz . . . . .	151



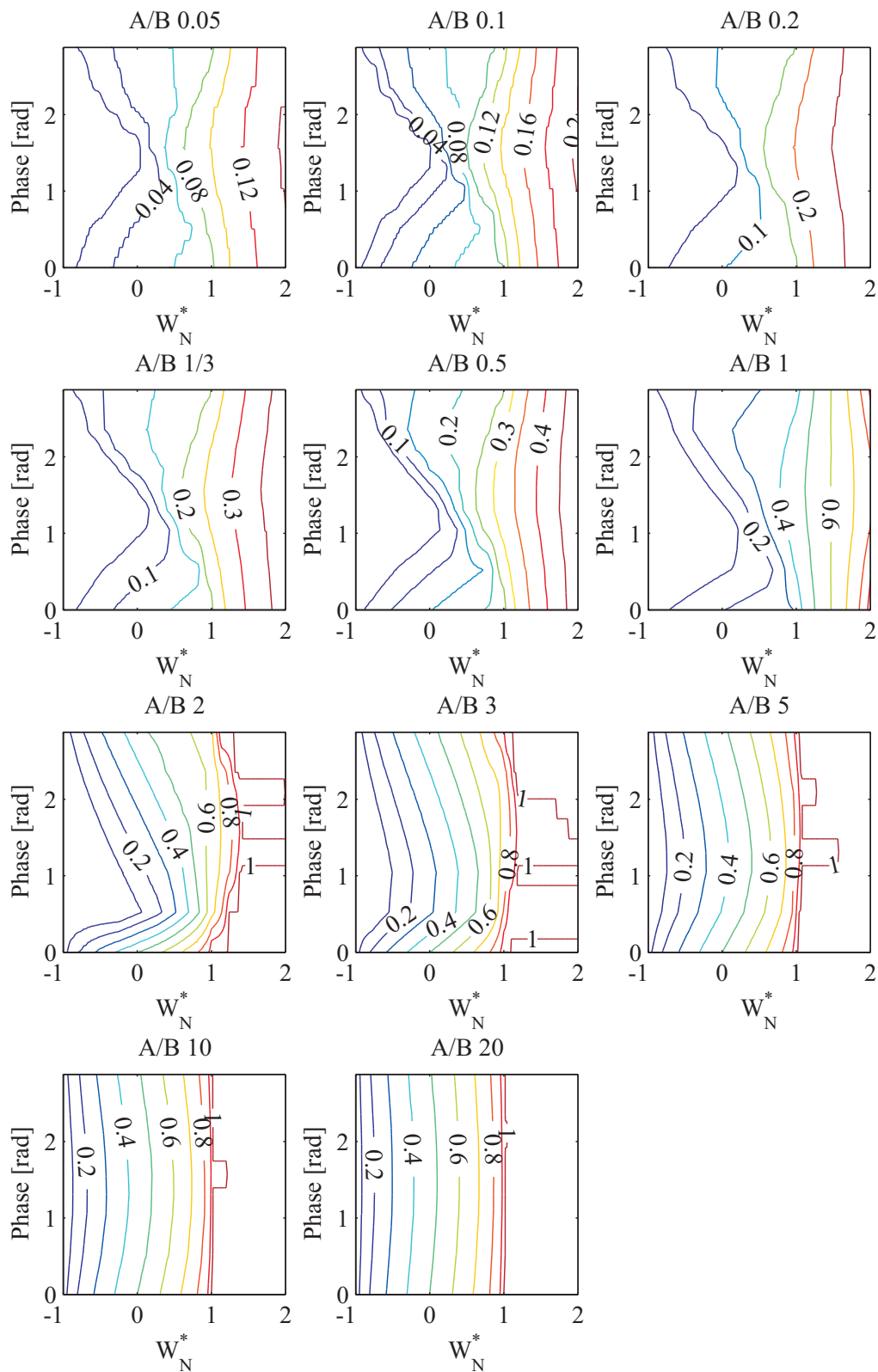
**Abbildung A.1:** Kapitel 5.5, Abhängigkeit der Leerlaufgeschwindigkeit von der eingeprägten Antriebsellipse für verschieden Phasen und Anpresskräfte



**Abbildung A.2:** Kapitel 5.5, Abhängigkeit der Blockierkraft von der eingprägten Antriebsellipse für verschieden Phasen und Anpresskräfte

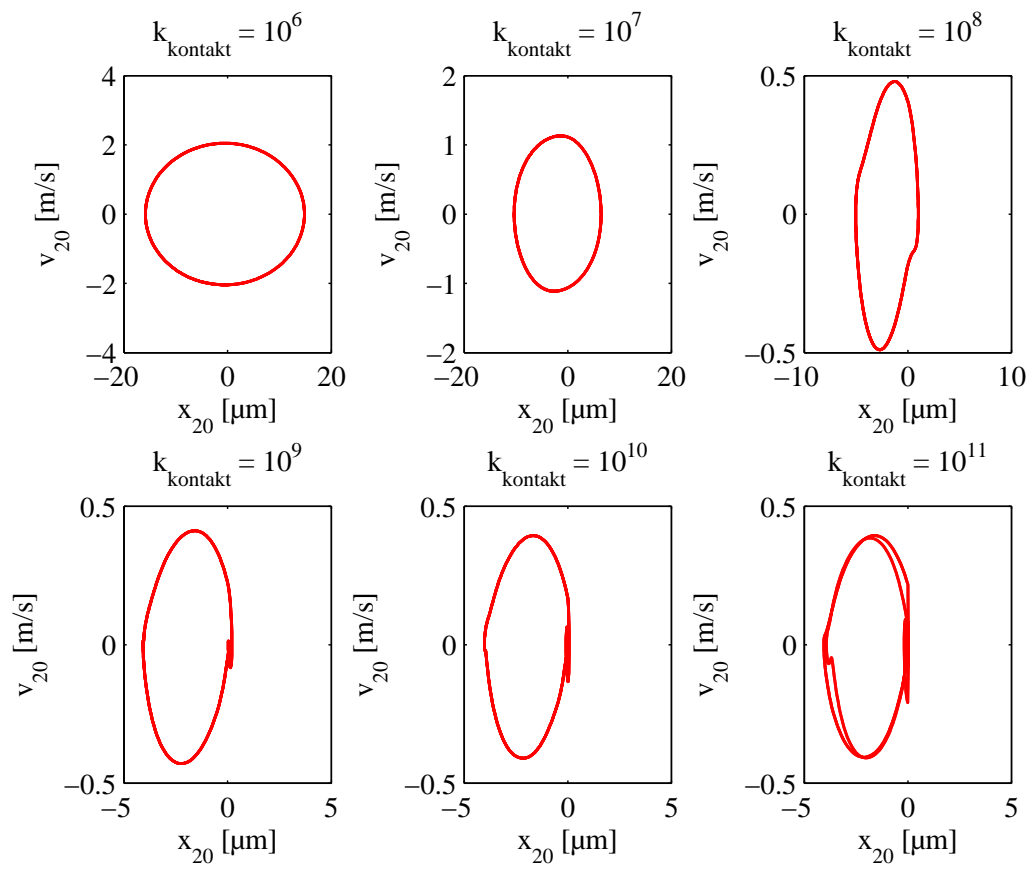


**Abbildung A.3:** Kapitel 5.5, Abhängigkeit der Leistung von der eingprägten Antriebselipse für verschiedenen Phasen und Anpresskräfte

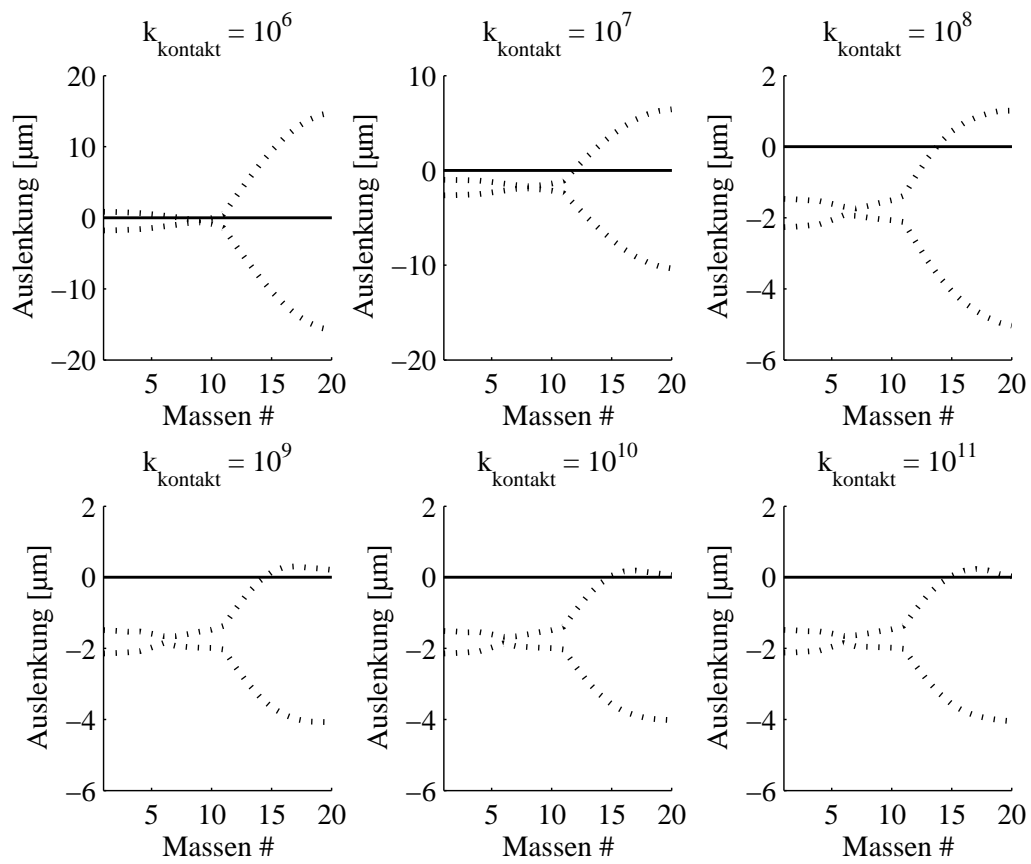


**Abbildung A.4:** Kapitel 5.5, Abhängigkeit des Gleitanteils von der eingprägten Antriebsellipse für verschieden Phasen und Anpresskräfte





**Abbildung A.5:** Kapitel 6.3.1, Phasendiagramme des Kontaktpunktes bei variiertes Kontaktsteifigkeit



**Abbildung A.6:** Kapitel 6.3.1, Einhüllende des Schwingungsverhaltens bei variiertem Kontaktsteifigkeit

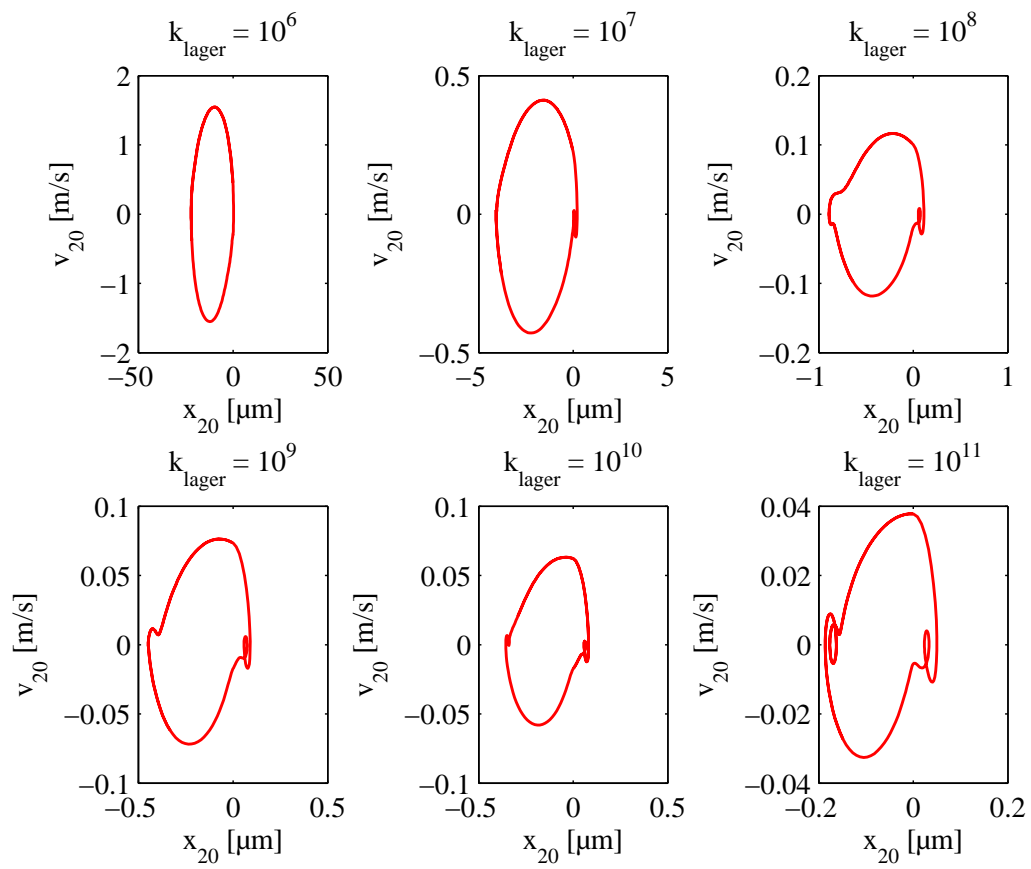
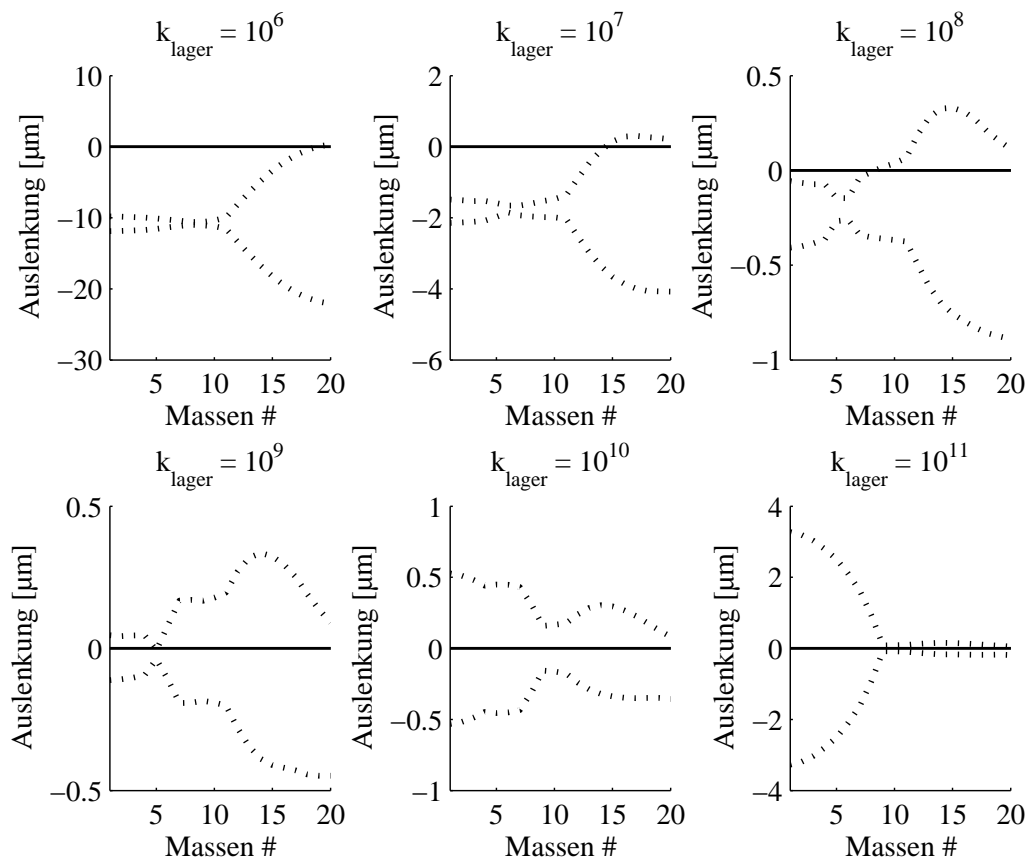
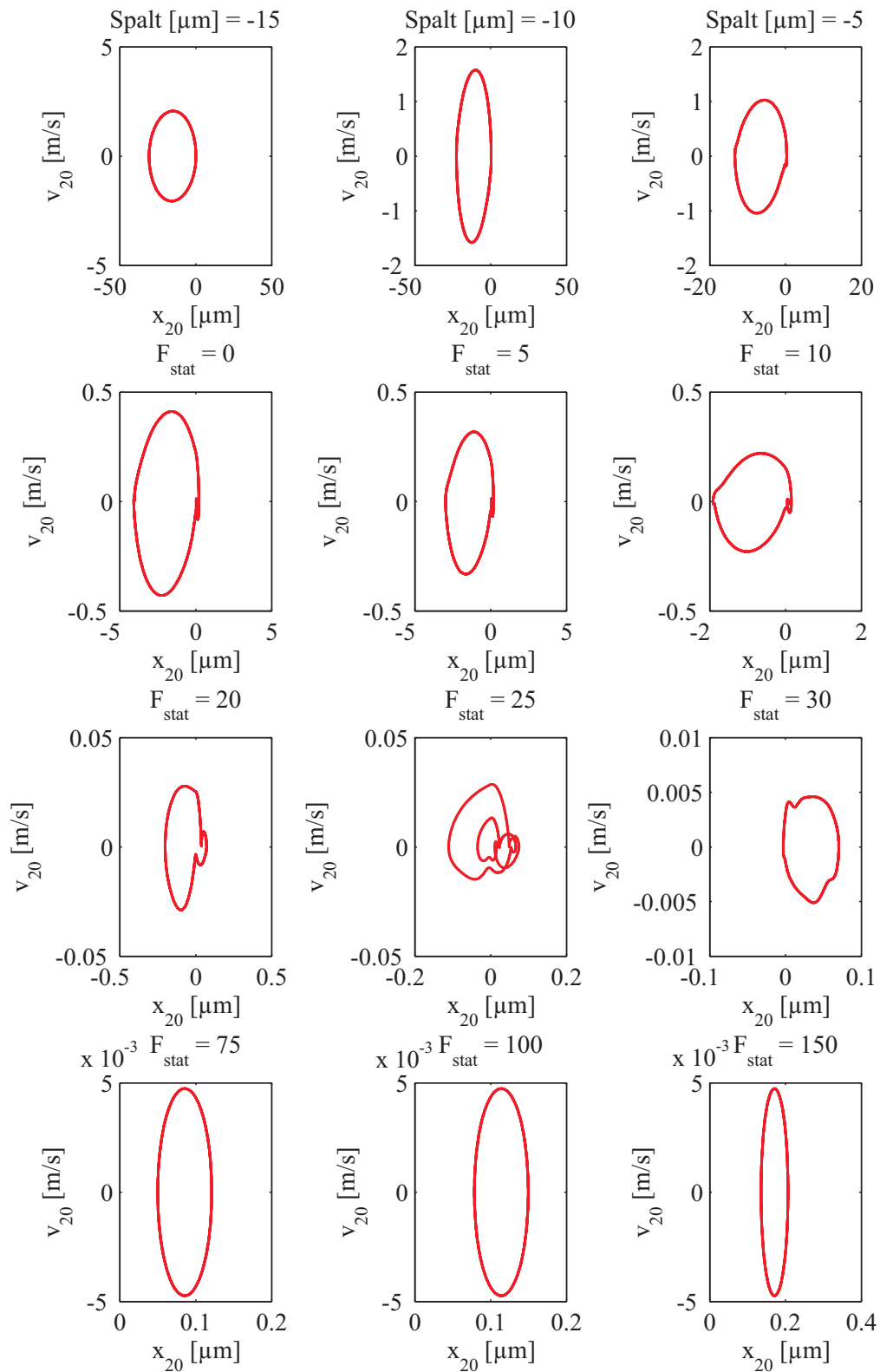


Abbildung A.7: Kapitel 6.3.2, Phasendiagramme des Kontaktpunktes bei variierter Lagersteifigkeit



**Abbildung A.8:** Kapitel 6.3.2, Einhüllende des Schwingungsverhaltens bei variiertem Lagersteifigkeit



**Abbildung A.9:** Kapitel 6.3.3, Phasendiagramme des Kontaktpunktes bei variiertem Lagerfußpunktposition

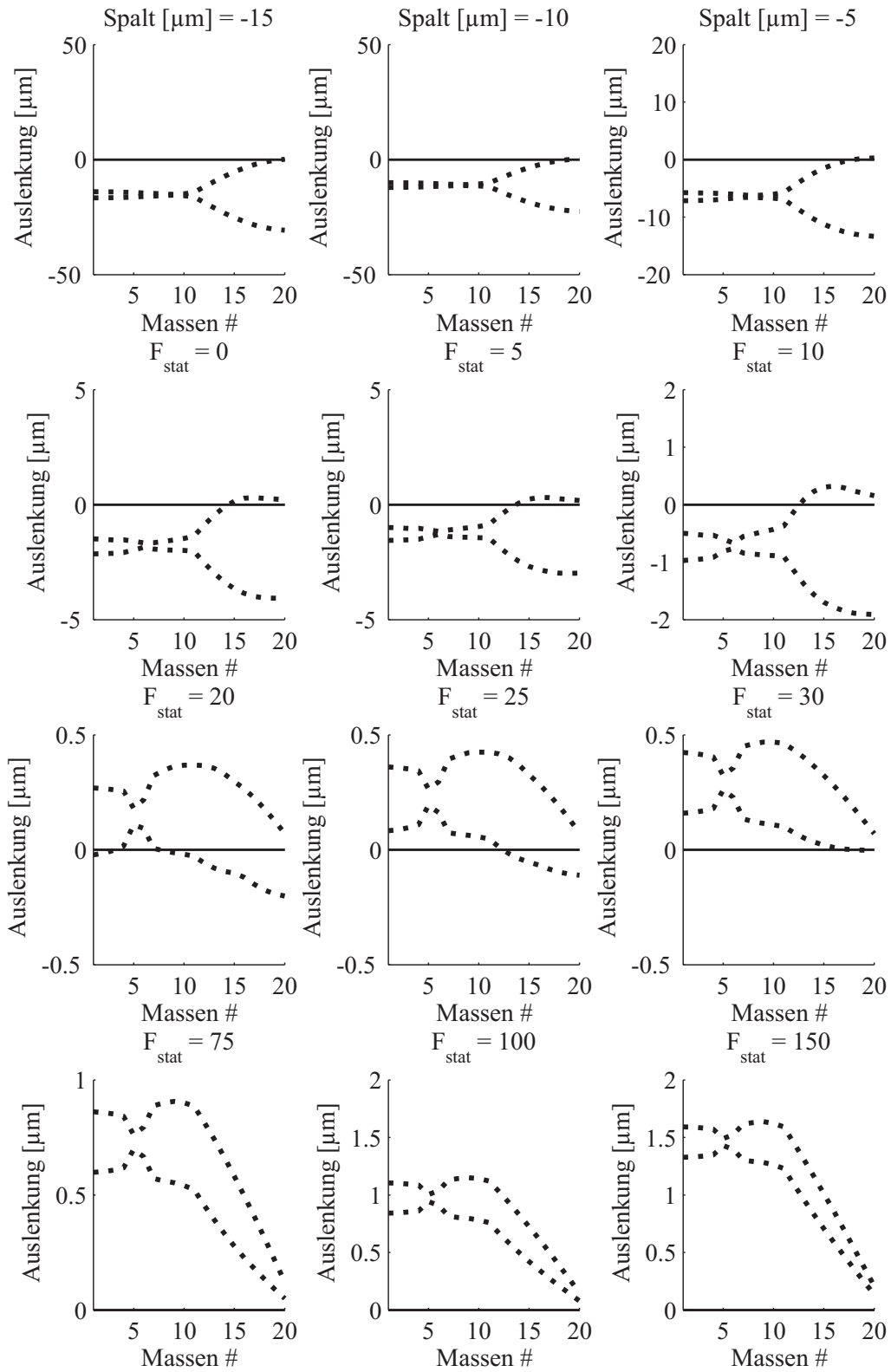
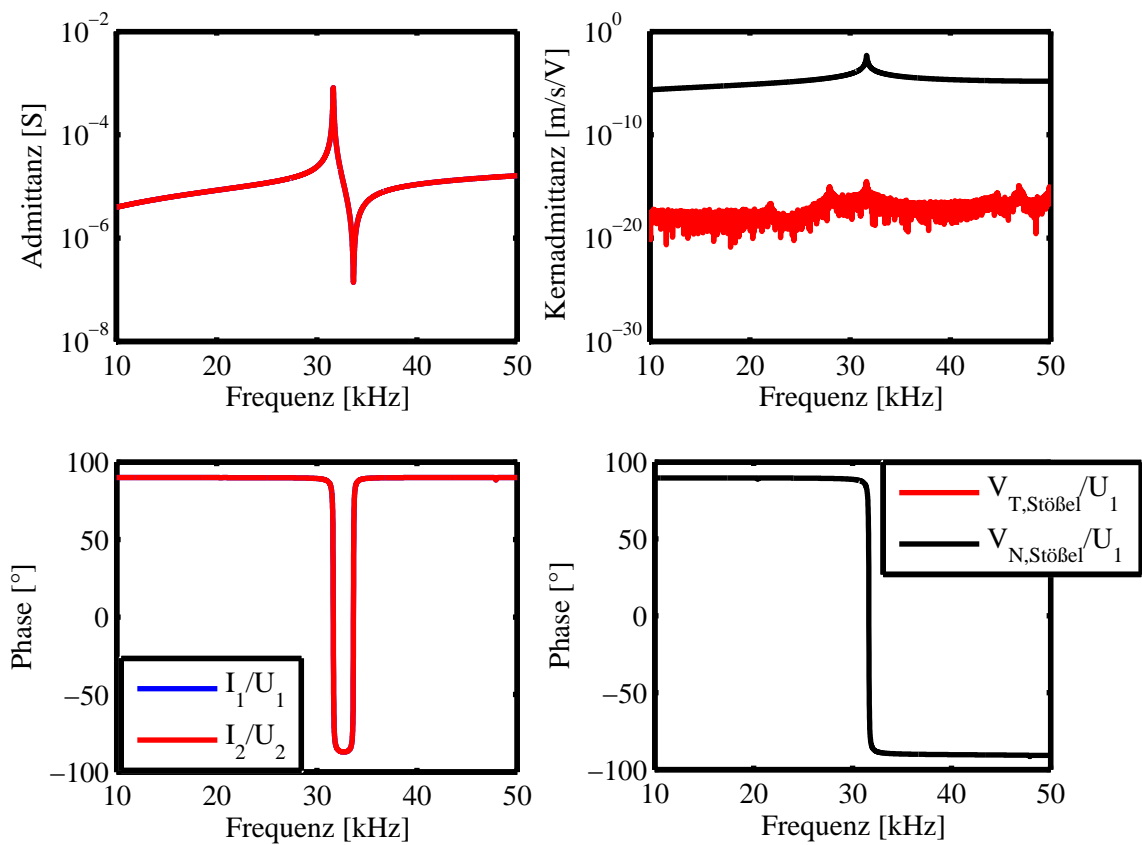
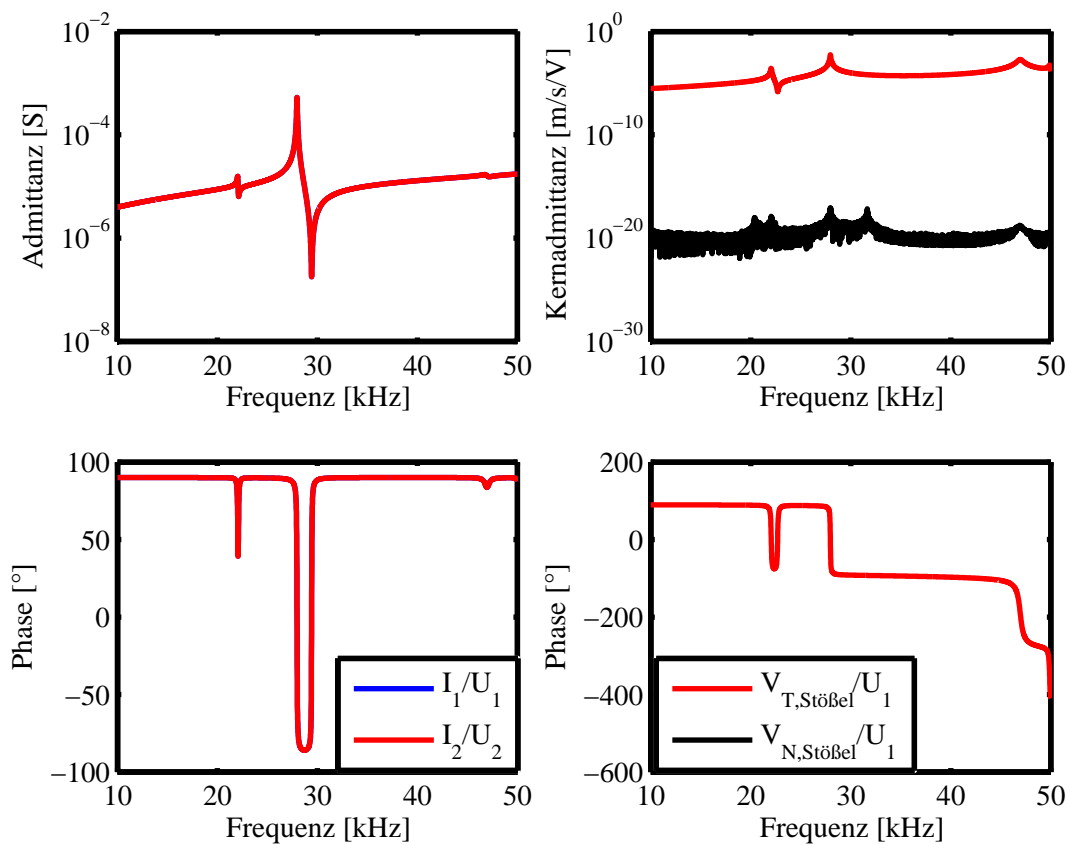


Abbildung A.10: Kapitel 6.3.3, Einhüllende des Schwingungsverhaltens bei variiertem Lagerfußpunktposition



**Abbildung A.11:** Kapitel 7.3, Elektromechanisches Frequenzverhalten des freien Stators bei  $0^\circ$  Phase zwischen den Anregespannungen. **Rechts)** Admittanz. **Links)** Kernadmittanz.



**Abbildung A.12:** Kapitel 7.3, Elektromechanisches Frequenzverhalten des freien Stators bei  $180^\circ$  Phase zwischen den Anregespannungen. **Rechts)** Admittanz. **Links)** Kernadmittanz.



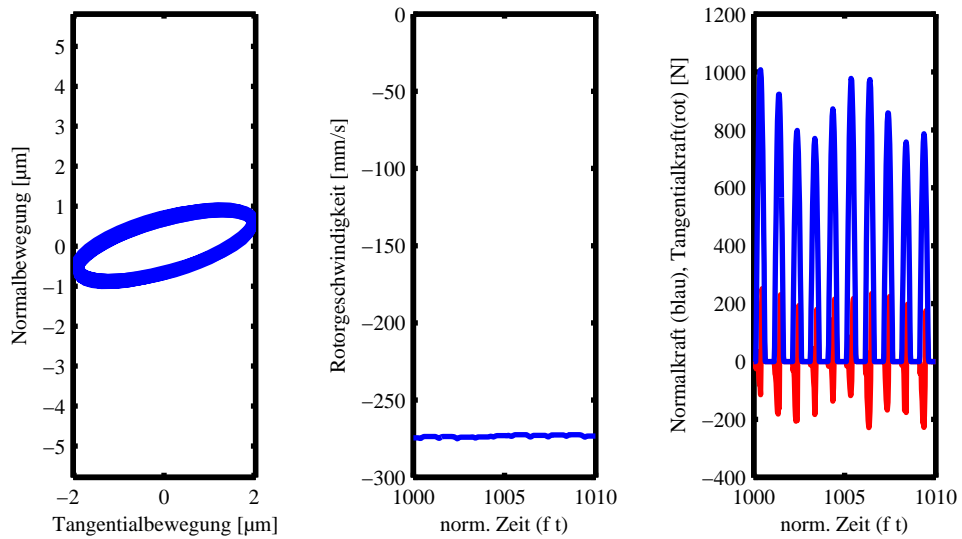


Abbildung A.13: Kapitel 7.5, Transientes Verhalten des Antriebs bei 25.2 kHz. (Tangentialresonanz)

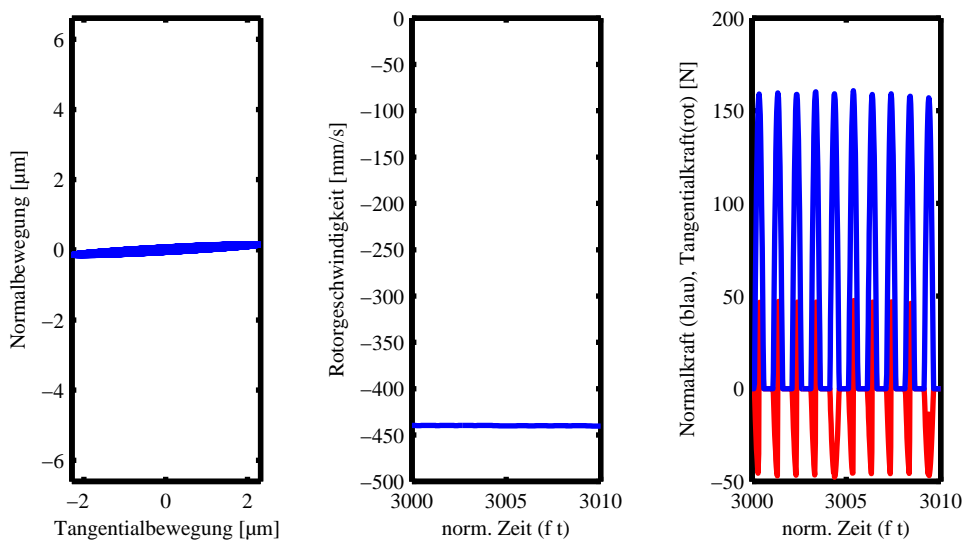


Abbildung A.14: Kapitel 7.5, Transientes Verhalten des Antriebs bei 47 kHz. (Tangentialresonanz)

## Literaturverzeichnis

- [1] K. Uchino, *Piezoelectric actuators 2006 – Expansion from IT/robotics to ecological/energy applications*, **Journal of Electroceramics**, Vol. 20, pp. 301 – 311, 2008.
- [2] A. L. W. Williams und W. J. Brown, *Piezoelectric Motor*, US **Patent** 2 439 499, 1948, Patentanmeldung 1942.
- [3] V. Lavrinenko, I. Kartashev, und V. Vishnevsky, **Pieoelektrische Motoren (russisch)**, 1. Aufl. Moskow: Energiya, 1980.
- [4] K. Ragulskis, R. Bansevicius, R. Barauskas, und G. Kulvietis, **Vibromotor for Precision Microrobots**, 1. Aufl., Serie: Applications of vibration. New York: Hemisphere Publishing Corporation, 1988.
- [5] T. Sashida und T. Kenjo, **An Introduction to Ultrasonic Motors**, 1. Aufl., Serie: Monographs in Electrical and Electronic Engineering. Oxford: Clarendon Press, 1993.
- [6] S. Ueha, Y. Tomikawa, M. Kurosawa, und N. Nakamura, **Ultrasonic Motors – Theory and Application**, 1. Aufl., Serie: Monographs in Electrical and Electronic Engineering. Oxford: Clarendon Press, 1993.
- [7] M. Fleischer, **Technischer Einsatz Neuer Aktoren**, 1. Aufl., Serie: Kontakt und Studium. Renningen-Malmsheim: expert Verlag, 1995, Nr. 484, Kapitel: *Pieoelektrische Antriebe und Aktoren*, pp. 254 – 266.
- [8] K. Uchino, *Piezoelectric ultrasonic motors: overview*, **Smart Materials and Structures**, Vol. 7, pp. 273–285, 1998.
- [9] T. Hemsell und J. Wallaschek, *Survey of the present state of the art of piezoelectric linear motors*, **Ultrasonics**, Vol. 38, pp. 37–40, 2000.
- [10] K. Spanner, *Survey of the Various Operation Principles of Ultrasonic Piezomotors*, in **Proceedings of the 10th International Conference on New Actuators**, Bremen, Deutschland, 2006.
- [11] W. Cady, **Piezoelectricity - An Introduction to the Theory and Application of Electromechanical Phenomena in Crystals**, 2. Aufl., Serie: International Series in Pure and Applied Physics. New York: McGraw Hill, 1946.
- [12] W. P. Mason, **Piezoelectric Crystals and their application to Ultrasonics**, 1. Aufl. Princeton: D. Van Nostrand Company, 1959.

- [13] B. Jaffe, W. R. Cook, und H. Jaffe, **Piezoelectric Ceramics**. London, New York: Academic Press, 1971.
- [14] T. Ikeda, **Fundamentals of Piezoelectricity**, 1. Aufl. New York: Oxford University Press, 1996, Übersetzung einer japanischen Fassung von 1984.
- [15] A. Lenk, **Elektromechanische Systeme - Band 1: Systeme mit konzentrierten Parametern**, 2. Aufl. Berlin: VEB Verlag Technik, 1973.
- [16] A. Lenk, **Elektromechanische Systeme - Band 2: Systeme mit verteilten Parametern**, 2. Aufl. Berlin: VEB Verlag Technik, 1977.
- [17] A. Lenk, **Elektromechanische Systeme - Band 3: Systeme mit Hilfsenergie**, 1. Aufl. Berlin: VEB Verlag Technik, 1975.
- [18] A. Kappel, B. Gottlieb, T. Schwebel, C. Wallenhauer, und H. Liess, *PAD - Piezoelectric Actuator Drive*, in **Proceedings of the 10th International Conference on New Actuators**, Bremen, Deutschland, June 2006, pp. 457 – 460.
- [19] T. Ishii, S. Ueha, K. Nakamura, und K. Ohnishi, *Wear Properties and Life Prediction of Frictional Materials for Ultrasonic Motors*, **Japanese Journal of Applied Physics**, Vol. 34, Nr. 5B, pp. 2765 – 2770, May 1995.
- [20] P. Rehbein, *Tribologische Untersuchungen von hochfrequent schwingenden Gleitkontakten für den Einsatz in reibkraftschlüssigen Antrieben*, **Dissertation**, Universität Paderborn, Heinz Nixdorf Institut, Fachgruppe Mechatronik und Dynamik, 1998.
- [21] H.-P. Ko, S. Kim, C.-Y. Kang, H.-J. Kim, und S.-J. Yoon, *Optimization of a piezoelectric linear motor in terms of the contact parameters*, **Materials Chemistry and Physics**, Vol. 90, Nr. 2-3, pp. 322–326, Apr. 2005.
- [22] W. May, *Piezoelectric electromechanical translation apparatus*, **US Patent 3 902 084**, 1975, Patentanmeldung 1974.
- [23] K. Mizumoto, *Driving apparatus and equipment comprising driving apparatus*, **US Patent 6 232 697**, 2001, Patentanmeldung 1999.
- [24] T. Sashita, *Motor Device Using Supersonic Vibration*, **JP Patent 58 148 682 (A)** , 1 017 353 (B) , 1 686 172 (C), 1989, Patentanmeldung 1982.
- [25] N. Kaneda, *Supersonic Motor*, **JP Patent 59 086 484 A**, -, Patentanmeldung 1982, Patent (noch) nicht erteilt.
- [26] T. Ujiyou und N. Kaneda, *Vibration Type Motor and Its Driving Method*, **JP Patent 59 185 178 A**, 4 061 593 B, 1992, Patentanmeldung 1983.
- [27] S. Ueha, M. Kuribayashi, H. Komatsu, und Y. Hirama, *Supersonic Wave Linear Motor Drive System*, **JP Patent 6 132 885**, -, Patentanmeldung: 1985, Patent (noch) nicht erteilt.
- [28] J. Wallaschek, *Contact mechanics of piezoelectric ultrasonic motors*, **Journal of Smart Materials and Structures**, Vol. 7, pp. 369–381, 1998.

- [29] T. Sashida, *Antriebsvorrichtung*, DE **Patent** 3 010 252 C2, 1982, Patentanmeldung 1980.
- [30] Y. Takano, H. Fujita, K. Iwase, M. E., S. Ueha, und M. Kuribayashi, *Vibration Wave Motor*, JP **Patent** 61 218 376 A, -, Patentanmeldung 1985, Patent (noch) nicht erteilt.
- [31] M. Katsuma, H. Murakami, und A. Hiramatsu, *Vibration Wave Motor*, JP **Patent** 59 096 882 A, 5 014 510 B, 1 811 313 C, 1993, Patentanmeldung 1982.
- [32] T. Sashita, *Progressive Wave Type Ultrasonic Wave Motor*, JP **Patent** 1 091 676 A, 7 087 707B, 2 093 757 C, 1995, Patentanmeldung 1986.
- [33] A. Fröschele, *Analyse eines Piezo-Wanderwellenmotors*, **Dissertation**, Universität Stuttgart, Institut für Konstruktion und Fertigung in der Feinwerktechnik, 1992.
- [34] B. Herzog, *Entwicklungsgrundlagen für modulare Ultraschallantriebe*, **Dissertation**, Universität Stuttgart, Institut für Konstruktion und Fertigung in der Feinwerktechnik, 1993.
- [35] M. Hermann, *Entwicklung und Untersuchung piezoelektrisch erregter Wanderwellenmotoren für lineare Bewegungen*, **Dissertation**, Universität Stuttgart, Institut für Konstruktion und Fertigung in der Feinwerktechnik, 1998.
- [36] J. Haug, *Optimierung eines piezoelektrisch erregten linearen Wanderwellenmotors*, **Dissertation**, Universität Stuttgart, Institut für Konstruktion und Fertigung in der Feinwerktechnik, 2006.
- [37] P. Chen, *Schwingungsberechnung axial- und sektorsymmetrischer Strukturen mit Anwendung beim Wanderwellenmotor*, **Dissertation**, Technische Universität Darmstadt, Dynamik und Schwingungen, Darmstadt, 1992.
- [38] P. Hagedorn und J. Wallaschek, *Travelling wave ultrasonic motors, Part I: Working principle and mathematical modelling of the stator*, **Journal of Sound and Vibration**, Vol. 155, Nr. 1, pp. 31 – 46, 1992.
- [39] P. Hagedorn, J. Wallaschek, und W. Konrad, *Travelling Wave Ultrasonic Motors, Part II: A Numerical Method For The Flexural Vibrations Of The Stator*, **Journal of Sound and Vibration**, Vol. 168, Nr. 1, pp. 115 – 122, 1993.
- [40] J. Schmidt, *Ein mechanisches Modell des Stator-Rotor-Kontaktes beim Ultraschall-Wanderwellen-Motor*, **Dissertation**, Technische Universität Darmstadt, Dynamik und Schwingungen, Darmstadt, 1999.
- [41] M. Berg, *Ein Wanderwellenmotor mit zylindrischem Stator: Mathematische Modellierung und experimentelle Untersuchung*, **Dissertation**, Technische Universität Darmstadt, Dynamik und Schwingungen, Darmstadt, 2001.
- [42] T. Sattel, *Dynamics of Ultrasonic Motors*, **Dissertation**, Technische Universität Darmstadt, Dynamik und Schwingungen, 2003.

- [43] P. Hagedorn, *Abschlussbericht Forschungsprojekt 13N70269 - Modellierung der nicht-linearen Dynamik von Ultraschallwandlerwellenmotoren im Hinblick auf verbesserte Motorauslegung und Reglerkonzepte*, Technische Universität Darmstadt, Dynamik und Schwingungen, Tech. Rep., 2000.
- [44] J. Maas, *Modellierung und Regelung von stromrichter gespeisten Ultraschall-Wandlerwellenmotoren*, **Dissertation**, Universität Paderborn, Leistungselektronik und Antriebstechnik, 1998.
- [45] T. Schulte, *Stromrichter- und Regelungskonzepte für Ultraschall-Wandlerwellenmotoren*, **Dissertation**, Universität Paderborn, Leistungselektronik und Antriebstechnik, Paderborn, 2004.
- [46] J. Krome, *Modelle zur Untersuchung des Schwingungsverhalten von Statoren für piezoelektrische Ultraschall-Wandlerwellenmotoren*, **Dissertation**, Universität Paderborn, Heinz Nixdorf Institut, Fachgruppe Mechatronik und Dynamik, 1999.
- [47] H. Storck, *Optimierung der Kontaktvorgänge bei Wandlerwellenmotoren*, **Dissertation**, Universität Paderborn, Heinz Nixdorf Institut, Mechatronik und Dynamik, 2004.
- [48] B. Schwenke, *Drehzahl- und Lageregelung rotierender Ultraschallmotoren*, **Dissertation**, Technische Universität Berlin, 1993.
- [49] M. Bullo, *Modélisation et commande du moteur piézoélectrique á onde progressive (françösisch)*, **Dissertation**, École Polytechnique Fédérale de Lausanne, 2005.
- [50] F. Giraud, *Modélisation causale et commande d'un actionneur piézo-électrique á onde progressive (françösisch)*, **Dissertation**, Université Lille I, 2002.
- [51] A. M. Flynn, *Piezoelectric Ultrasonic Micromotors*, **Dissertation**, MIT Artificial Intelligence Laboratory, 1997.
- [52] H. Neubert, *Beiträge zur Entwicklung piezoelektrischer linearer Schrittmotoren*, **Dissertation**, TU Karl-Marx-Stadt, Fakultät für Elektroingenieurwesen, 1979.
- [53] H.-J. Roscher, *Zur optimalen Gestaltung selbstständiger piezoelektrischer linearer Schrittantriebe mit magnetischer Klemmung für Mikropositioniereinrichtungen*, **Dissertation**, Technische Hochschule Karl-Marx-Stadt, Fakultät für Elektroingenieurwesen, 1980.
- [54] F. Müller, *Entwicklung eines piezoelektrischen Mikrostoßantriebes mit ausgeprägter Klemmung*, **Dissertation**, Technische Universität Dresden, Fakultät für Elektrotechnik/Elektronik, 1987.
- [55] G. Pfeifer, **Piezoelektrische lineare Stellantriebe**. Karl-Marx-Stadt: Technische Hochschule Karl-Marx-Stadt, 1982.
- [56] T. Galante, J. Frank, J. Bernard, W. Chen, G. A. Lesieutre, und G. H. Koopmann, *Design, Modeling, and Performance of a High Force Piezoelectric Inchworm Motor*, **Journal of Intelligent Material Systems and Structures**, Vol. 10, Nr. 12, pp. 962–972, 1999.

- [57] K. Duong, *Design, Modeling and Performance Optimization of a Novel Rotary Piezoelectric Motor*, **Dissertation**, Vanderbilt University, 1997.
- [58] M. Vaughan und D. J. Leo, *Integrated Piezoelectric Linear Motor for Vehicle Applications*, **ASME Conference Proceedings**, Vol. 2002, Nr. 36568, pp. 113–121, 2002.
- [59] H. Liess, T. Hegewald, J. Heinzl, R. Lerch, A. Kappel, T. Schwebel, B. Gottlieb, und R. Kraul, *Piezo Inchworm Actuator for Heavy Loads*, in **Proceedings of the 9th International Conference on New Actuators**, Bremen, Juni 2004.
- [60] J. J. Loverich, *Development of a new high specific power piezoelectric actuator*, **Dissertation**, Pennsylvania State University, 2004.
- [61] T. Hoshino, *Actuator using piezoelectric element, and driving circuit for the same*, US **Patent** 0 251 778 A1, -, Patentanmeldung 2004, Patent (noch) nicht erteilt.
- [62] T. Hoshino, *Driving device and an optical apparatus*, US **Patent** 0 232 094 A1, -, Patentanmeldung 2005, Patent (noch) nicht erteilt.
- [63] S. Y. Yoon, B. K. Kim, S. M. Yoon, und P. Vasiljev, *Small Piezoelectric Or Electrostrictive Ultrasonic Linear Motor Including Moving Body Moving Along Axial Direction Of Moving Shaft In Case Where Inertia Of Moving Body Is Larger Than Frictional Force Of Moving Body And Moving Shaft*, KR **Patent** 100 443 639 B1, 2004, Patentanmeldung 2004.
- [64] J.-M. Breguet, *Actionneurs Stick and Slip pour Micro-Manipulators (französisch)*, **Dissertation**, École Polytechnique Fédérale de Lausanne, 1998.
- [65] P. Liu, S. Soetebier, J. Wrege, und J. Hesselbach, *Design and Analysis on a Novel Piezoelectric Linear Motor*, in **2nd International Workshop on Piezoelectric Materials and Applications in Actuators**, Paderborn, 2005.
- [66] W. Heywang und M. Guntersdorfer, *Uhrenantrieb mit piezoelektrischer Stimmgabel*, DE **Patent** 2 035 587 A, -, Patentanmeldung 1970, Patent (noch) nicht erteilt.
- [67] V. Vishnevsky, L. Kaversev, I. Kartashev, V. Lavrinenko, M. Nekrasov, und A. Prez, *Piezoelectric motor structures*, US **Patent** 4 019 073, 1977, Patentanmeldung 1975.
- [68] V. Vishnevsky, L. Kaversev, I. Kartashev, V. Lavrinenko, M. Nekrasov, und A. Prez, *Elektrostriktiver Motor*, DE **Patent** 250 045 C2, 1985, Patentanmeldung 1975.
- [69] P. E. Vasiliev, V. Kazantsev, und L. Karmanov, *Stab-Ultraschallschwingungssystem*, DE **Patent** 2 914 434 A1, -, Patentanmeldung 1979, Patent (noch) nicht erteilt.
- [70] P. Vasiliev, P.-A. R. Klimavichjus, A. Kondratiev, J. Matsjukyavichjus, G.-V. L. Beksha, und V. Kaminskas, *Drive means and force control for piezoelectric vibration motor*, US **Patent** 4 249 100, 1981, Patentanmeldung 1979.
- [71] F. Zhang, W. Chen, J. Liu, und Z. Wang, *Bidirectional linear ultrasonic motor using longitudinal vibrating transducers*, **IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics and Frequency Control**, Vol. 52, Nr. 1, pp. 134–138, 2005.

- [72] V. F. Kazantsev und P. E. Vasil'yev, *Ultrasonic Vibratory System for a Vibrodrive*, in **The 11th International Congress on Acoustics**, Paris, Frankreich, 1983, pp. 153–156.
- [73] F. Künemund, *Elektrische Antriebsvorrichtung, insbesondere Antriebsvorrichtung für eine kleine mechanische Nutzlast*, **DE Patent 1 488 698 C**, 1973, Patentanmeldung 1965.
- [74] T. Morita, M. Kurosawa, und T. Higuchi, *A micro ultrasonic motor fabricated by hydrothermal method (1.4 mm in diameter and 5 mm in length stator transducer)*, in **Ultrasonics Symposium, 1998. Proceedings., 1998 IEEE**, Vol. 1, 1998, pp. 671–674.
- [75] T. Morita, M. Kuribayashi Kurosawa, und T. Higuchi, *A cylindrical micro ultrasonic motor using PZT thin film deposited by single process hydrothermal method ( $\Phi 2.4$  mm,  $L=10$  mm stator transducer)*, **IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics and Frequency Control**, Vol. 45, Nr. 5, pp. 1178–1187, 1998.
- [76] M. Fleischer, D. Stein, und H. Meixner, *New type of piezoelectric ultrasonic motor*, **IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics and Frequency Control**, Vol. 36, Nr. 6, pp. 614–619, 1989.
- [77] M. Fleischer und H. Meixner, *Ultraschallmotoren mit piezoelektrischem Antrieb*, **Physik in unserer Zeit**, Vol. 22, Nr. 4, pp. 169–174, 1991.
- [78] J. Jendery, *Konzeption und Bau eines linearen Schwingungsantriebes*, **Studienarbeit**, Universität Paderborn, Heinz Nixdorf Institut, Fachgruppe Robotik und Mechatronik, 1995.
- [79] T. Hemsel, *Konzeption und Bau eines reibkraftschlüssigen Schwingungsantriebes für lineare Positionieraufgaben*, **Diplomarbeit**, Universität Paderborn, Heinz Nixdorf Institut, Fachgruppe Mechatronik und Dynamik, 1996.
- [80] T. Hemsel, *Untersuchungen und Weiterentwicklung linearer piezoelektrischer Schwingungsantriebe*, **Dissertation**, Universität Paderborn, Heinz Nixdorf Institut, Fachgruppe Mechatronik und Dynamik, 2001.
- [81] R. Bansevicius und K. Ragulskis, **Vibromotors (russisch)**, 1. Aufl. Vilnius: Mokslas, 1981.
- [82] H. Marth, *Untersuchungen zur Dimensionierung und zum Betriebsverhalten von Vibrationslinearmotoren und deren Einsatz in Positioniereinrichtungen für Magnetköpfe*, **Dissertation**, Technische Universität Dresden, Fakultät für Elektrotechnik/Elektronik, 1980.
- [83] W. Krause, *Eine Untersuchung von Vibrationsantrieben auf Grundlage des piezoelektrischen Mikrostoßantriebes unter dem Gesichtspunkt der Anwendung in der Gerätetechnik*, **Dissertation**, Technische Hochschule Mittweida, 1984.
- [84] K. Mori und T. Ogiso, *Actuator*, **US Patent 4 613 782**, 1986, Patentanmeldung 1985.

- [85] K. Mori, H. Hirai, I. Kobayashi, T. Kumagae, und M. Kawamoto, *Method of and apparatus for conveying object by utilizing vibration*, US Patent 4 997 177, 1991, Patentanmeldung 1988.
- [86] M. K. Kurosawa, O. Kodaira, Y. Tsuchitoi, und T. Higuchi, *Transducer for high speed and large thrust ultrasonic linear motor using two sandwich-type vibrators*, **IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics and Frequency Control**, Vol. 45, Nr. 5, pp. 1188–1195, 1998.
- [87] T. Higuchi und M. Kurosawa, *Ultrasonic Motor*, WO Patent 2000/28 652, -, Patentanmeldung 1998, Patent (noch) nicht erteilt.
- [88] M. G. Bauer, *Design of a linear high precision ultrasonic piezoelectric motor*, **Dissertation**, North Carolina State University, Mechanical Engineering, 2001.
- [89] J. F. Lopez, *Modeling and Optimization of Ultrasonic Linear Motors*, **Dissertation**, École Polytechnique Fédérale de Lausanne, 2006.
- [90] S. Devos, *Development of fast, stiff and high resolution piezoelectric motors with integrated bearing driving functionality*, **Dissertation**, Katholieke Universiteit Leuven, Faculteit Ingenieurswetenschappen, Departement Werktuigkunde, 2006.
- [91] W. van de Vijver, *Development of a Highly-Accurate and Fast Piezoelectric Linear Positioning System*, **Dissertation**, Katholieke Universiteit Leuven, Faculteit Ingenieurswetenschappen, Departement Werktuigkunde, 2008.
- [92] W. van de Vijver, M. Houben, H. Van Brussel, und D. Reynaerts, *Piezomotors: an enabling technology*, **Mikroniek**, Vol. 49, pp. 20 – 27, 2009.
- [93] D. Reynaerts, H. Van Brussel, und W. Van De Vijver, *Positioning Motor and Apparatus*, US Patent 2 009 267 451 A1, -, Patentanmeldung 2009, Patent (noch) nicht erteilt.
- [94] P. Vasiljev, *Actuator of Type A Shaking Beam*, in **Proceedings of the 8th International Conference on New Actuators**, Bremen, June 2002, pp. 493–496.
- [95] S. Yoon, H. Kim, J. Choi, C. Kang, D. Lee, und P. Vasiljev, *Linear piezoelectric ultrasonic motor*, US Patent 6 984 920, 2006, Patentanmeldung 2002.
- [96] C. Y. Kang, S. J. Yoon, D. Y. Jeong, H. J. Kim, P. Vasiljev, und J. W. Choi, *Piezo-electric linear motor, capable of being inversely driven by inverting a phase difference of voltages applied to piezo-electric devices*, KR Patent 100 817 470 B1, 2008, Patentanmeldung 2004.
- [97] T. Hemsel, M. Mracek, J. Twiefel, und P. Vasiljev, *Piezoelectric linear motor concepts based on coupling of longitudinal vibrations*, in **The First International Workshop on Ultrasonic Motors and Actuators**, Yokohama, Japan, 2005, pp. 35–36.
- [98] J. Zumeris, *Ceramic Motor*, US Patent 5 616 980, 1997, Patentanmeldung 1994.
- [99] J. Zumeris, *Ceramic Motor*, US Patent 5 777 423, 1998, Patentanmeldung 1996.
- [100] J. Zumeris, *Ceramic Motor*, US Patent 6 064 140, 2000, Patentanmeldung 1998.



- [101] J. Zumeris und I. Rafaeli, *Conveying means and method*, US **Patent** 6 617 759, 2003, Patentanmeldung 2001.
- [102] Z. Ganor, I. Rafaeli, L. Shiv, und N. Karasikov, *Multilayer piezoelectric Motor*, US **Patent** 7 211 929, 2007, Patentanmeldung 2006.
- [103] W. Wischnewskij und A. Wischnewskij, *Hochpräziser Ultraschallmotor*, DE **Patent** 102 008 058 484, -, Patentanmeldung 2008, Patent (noch) nicht erteilt.
- [104] W. Wischnewskij und A. Wischnewskij, *Piezoelectric ultrasound motor*, US **Patent** 59 665 305, 2009, Patentanmeldung 2005.
- [105] T. Iijima, Y. Nakagawa, und H. Ito, *Ultrasonic Flat Motor Using Coupling of Longitudinal and Flexural Vibration Modes*, **Japanese Journal of Applied Physics**, Vol. 31, Nr. 8, pp. 2598–2605, August 1992.
- [106] T. Takano, Y. Tomikawa, und C. Kusakabe, *Operating Characteristics of a Same-Phase Drive-Type Ultrasonic Motor Using a Flexural Disk Vibrator*, **Japanese Journal of Applied Physics**, Vol. 38, Nr. 5B, pp. 3322–3326, May 1999.
- [107] T. Funakubo und Y. Tomikawa, *Characteristics of 10 mm Multilayer L1-F2 Mode Vibrator and Application to a Linear Motor*, **Japanese Journal of Applied Physics**, Vol. 42, Nr. 5B, pp. 3002–3006, May 2003.
- [108] A. Suzuki, M. Kihara, Y. Katsumata, N. Kikuchi, und J. Tsujino, *Configuration of a Transverse Vibration Rod Type Ultrasonic Motor Using Three Longitudinal Transducers Driven in Three Different Vibration Phases*, **Japanese Journal of Applied Physics**, Vol. 43, Nr. 5B, pp. 2901–2904, May 2004.
- [109] T. Muneishi und Y. Tomikawa, *Ultrasonic Linear Motor with Two Independent Vibrations*, **Japanese Journal of Applied Physics**, Vol. 43, Nr. 9B, pp. 6728–6732, September 2004.
- [110] R. Lucinskis, D. Mazeika, T. Hemsel, und R. Bansevicius, *The Experimental Research Of Piezoelectric Actuator With Two Vectors Of Polarization Direction*, **Mechanika**, Vol. 82, Nr. 2, pp. 50–57, 2010.
- [111] A. Wischnewski, *Reversierbare piezoelektrische Ultraschallmotoren auf Basis einphasig angeregter stehender Wellen*, **Dissertation**, Institut für Konstruktion und Fertigung in der Feinwerktechnik, Universität Stuttgart, 2008.
- [112] P. Vasiljev, R. Bareikis, L. Vasilja, und J. Tiskevicius, *Piezoelectric Actuator of Type A Shaking Beam for Body Positioning in the Plane*, in **Proceedings of the 9th International Conference on New Actuators**, Bremen, Germany, June 2004, pp. 464–467.
- [113] J. Tsujino, K. Nakai, K. Sako, N. Ikegami, K. Noda, und R. Suzuki, *Load Characteristics and Vibration Loci at the Driving Surfaces of Ultrasonic Rotary Motor using a Longitudinal-Torsional Vibration Converter*, **Japanese Journal of Applied Physics**, Vol. 37, Nr. 5B, pp. 2960–2965, May 1998.

- [114] J. A. Palmer, *Development of millimeter scale motors for miniature direct drive robots*, **Dissertation**, North Carolina State University, Mechanical and Electrical Engineering, 2002.
- [115] K. Magnus und K. Popp, **Schwingungen – Eine Einführung in die physikalischen Grundlagen und die theoretische Behandlung von Schwingungsproblemen**, 6. Aufl., Serie: Leitfäden der angewandten Mathematik und Mechanik. Stuttgart, Leipzig, Wiesbaden: Teubner, 2002.
- [116] J. Wauer, **Kontinuumsschwingungen – Vom einfachen Strukturmodell zum komplexen Mehrfeldproblem**, 1. Aufl. Wiesbaden: Vieweg und Teubner, 2008.
- [117] E. C. Pestel und F. A. Leckie, **Matrix methods in elastomechanics**, 1. Aufl. New York: McGraw Hill, 1963.
- [118] R. Gasch und K. Knothe, **Strukturmechanik Bd. 2 – Kontinua und ihre Diskretisierung**. Berlin, Heidelberg, New York: Springer, 1989.
- [119] B. Fu, *Piezoelectric actuator design via multiobjective optimization methods*, **Dissertation**, Universität Paderborn, Heinz Nixdorf Institut, Fachgruppe Mechatronik und Dynamik, 2005.
- [120] K.-J. Bathe, **Finite-Elemente-Methoden**, 2. Aufl. Berlin, Heidelberg, New York: Springer, 2002.
- [121] J. Wissmann und K.-D. Sarnes, **Finite Elemente in der Strukturmechanik**, 1. Aufl. Berlin, Heidelberg, New York: Springer, 2006.
- [122] M. Link, **Finite Elemente in der Statik und Dynamik**, 3. Aufl. Stuttgart: Teubner, 2002.
- [123] P. Steinke, **Finite-Elemente-Methode : Rechnergestützte Einführung**, 2. Aufl. Berlin, Heidelberg, New York: Springer, 2007.
- [124] H. Allik und T. J. R. Hughes, *Finite element method for piezoelectric vibration*, **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, Vol. 2, Nr. 2, pp. 151–157, 1970.
- [125] A. Benjeddou, *Advances in piezoelectric finite element modeling of adaptive structural elements: a survey*, **Computers & Structures**, Vol. 76, Nr. 1-3, pp. 347 – 363, 2000.
- [126] D. Mazeika und R. Bansevicius, *Study Of Resonant Vibrations Shapes Of The Beam Type Piezoelectric*, **Mechanika**, Vol. 76, Nr. 2, pp. 33–37, 2009.
- [127] P. Bouchilloux und K. Uchino, *Combined Finite Element Analysis - Genetic Algorithm Method for the Design of Ultrasonic Motors*, **Journal of Intelligent Material Systems and Structures**, Vol. 14, Nr. 10, pp. 657–667, 2003.
- [128] P. Wriggers, **Nichtlineare Finite-Element-Methoden**, 1. Aufl. Berlin, Heidelberg, New York: Springer, 2001.

- [129] W. Rust, **Nichtlineare Finite-Elemente-Berechnungen**, 1. Aufl. Wiesbaden: Vieweg und Teubner, 2009.
- [130] M. Fleischer, D. Stein, und H. Meixner, *Ultrasonic Piezomotor with Longitudinally Oscillating Amplitude-Transforming Resonator*, **IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics and Frequency Control**, Vol. 36, Nr. 6, pp. 607–613, 1989.
- [131] R.-F. Fung, C.-M. Yao, und D.-G. Chang, *Dynamic and contact analysis of a bimodal ultrasonic motor*, **IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics and Frequency Control**, Vol. 46, Nr. 1, pp. 47–60, January 1999.
- [132] R. F. Fung, C. R. Tseng, und C. M. Yao, *Dynamic simulation of a bimodal ultrasonic motor by new hybrid laplace transform/finite element method*, **Journal of Sound and Vibration**, Vol. 226, Nr. 4, pp. 625 – 644, 1999.
- [133] J.-S. Park, S.-T. Kim, J.-W. Kim, J.-K. Lee, und K. S. Hong, *Ultrasonic Linear Motor using L1-B4 Mode and its Analysis*, **Japanese Journal of Applied Physics**, Vol. 44, Nr. 1A, pp. 412–416, January 2005.
- [134] N. Weerayuth und W. Seemann, *Numerical modelling and analysis of high frequency dynamic contact in the hybrid transducer type ultrasonic motor*, **Proceedings in Applied Mathematics and Mechanics**, Vol. 9, Nr. 1, pp. 283–284, 2009.
- [135] N. Weerayuth, *Dynamik und Kontaktvorgänge bei einem hybriden piezoelektrischen Schwingungsmotor*, **Dissertation**, Karlsruher Institut für Technologie, Institut für Technische Mechanik, 2010.
- [136] C. Potthast, *Numerische und experimentelle Untersuchung eines Ultraschall-Schlagbohrwerkzeugs*, **Dissertation**, Leibniz Universität Hannover, Institut für Dynamik und Schwingungen, 2009.
- [137] O. Y. Zharii, *An exact solution of a time-dependent frictional contact problem for two elastic spheres*, **International Journal of Engineering Science**, Vol. 34, Nr. 5, pp. 537 – 548, 1996.
- [138] P. L. Moal, E. Joseph, und J.-C. Ferniot, *Mechanical energy transductions in standing wave ultrasonic motors: Analytical modelling and experimental investigations*, **European Journal of Mechanics - A/Solids**, Vol. 19, Nr. 5, pp. 849–871, Sep. 2000.
- [139] B. Andersen, J. Helbo, und B. M., *Modelling and Experiments of a Standing Wave Piezomotor*, in **Proceedings of the 8th International Conference on New Actuators**, Bremen, 2002.
- [140] X. Xu, Y. C. Liang, H. P. Lee, W. Z. Lin, S. P. Lim, K. H. Lee, und X. H. Shi, *Mechanical modeling of longitudinal oscillation ultrasonic motors and temperature effect analysis*, **Smart Materials and Structures**, Vol. 12, pp. 514–523, 2003.
- [141] Y. Nakagawa, A. Saito, und T. Maeno, *Transient analysis of bar-type ultrasonic motors*, in **Proceedings of Intelligent Robots and Systems**, Vol. 2, 2004, pp. 1263 – 1268.

- [142] F. Pigache, *Modélisation causale en vue de la commande d'un translateur piézoélectrique plan pour une application haptique (französisch)*, **Dissertation**, Université des Science et Technologies de Lille, 2005.
- [143] F. Pigache, F. Giraud, und B. Lemaire-Semail, *Modelling and identification of a planar standing wave ultrasonic motor*, **European Journal of Applied Physics**, Vol. 34, Nr. 1, pp. 55–65, 2006.
- [144] J. Jin und C. Zhao, *Charaterization matching between stator and rotor in standing-wave-type ultrasonic motors*, **Journal of Electroceramics**, Vol. online pre-version, pp. doi: 10.1007/s10 832–007–9134–2, 2007.
- [145] M. Houben, W. van de Vijver, F. Al-Bender, und D. Reynaerts, *A Generic Study on the Contact Dynamics and Wear Behavior of Bimodal Standing Wave Piezomotors*, in **Proceedings of the 11th International Conference on New Actuators**, Bremen, 2008.
- [146] H. F. Olson, **Dynamical Analogies**. New York: D. Van Nostrand Company, 1943.
- [147] F. A. Firestone, *A New Analogy between Mechanical and Electrical Systems*, **The Journal of the Acoustical Society of America**, Vol. 4, Nr. 1A, pp. 5–5, 1932.
- [148] W. E. E. Hähnle, *Die Darstellung elektromechanischer Gebilde durch rein elektrische Schaltbilder*, **Dissertation**, Technische Hochschule Danzig, 1931.
- [149] W. P. Mason, *An Electromechanical Representation of a piezoelectric Crystal used as a Transducer*, in **Proceedings of the Institute of Radio Engineers**, Vol. 23, Nr. 10. IRE, October 1935, pp. 1252–1263.
- [150] W. P. Mason, **Electomechanical Transducer and Wave Filters**, 2. Aufl. New York: D. Van Nostrand Company, 1948.
- [151] J. Krome und J. Wallaschek, *Reduktion kontinuumsmechanischer Modelle im Rahmen der Optimierung mechatronischer Systeme am Beispiel des Wanderwellenmotors*, in **Tagungsband zur VDI-Tagung "Mechatronik in Maschinenbau und Fahrzeugtechnik"**, Moers, Deutschland, 1997, pp. 75–90.
- [152] V. Piefort, *Finite Element Modelling of Piezoelectric Active Structures*, **Dissertation**, Université Libre de Bruxelles, 2001.
- [153] R. Krol, *Eine Methodik zur Ableitung einfacher elektromechanischer Ersatzmodelle für piezoelektrische Wandler unter Verwendung der Finiten Elemente Methode (FEM)*, **Dissertation**, Universität Paderborn, Heinz Nixdorf Institut, Fachgruppe Mechatronik und Dynamik, 2010.
- [154] Y. Tomikawa, M. Yaginuma, S. Hirose, und T. Takano, *An Equivalent Circuit Expression of an Ultrasonic Motor and Measurement of Its Elements – In the Case of L1-B8 Multi-mode Rectangular Thin-Form Motor –*, **Japanese Journal of Applied Physics**, Vol. 30, Nr. 9B, pp. 2398–2401, September 1991.

- [155] M. Aoyagi und Y. Tomikawa, *Simplified Equivalent Circuit of Ultrasonic Motor and Its Application to Estimation of Motor Characteristics*, **Japanese Journal of Applied Physics**, Vol. 34, Nr. 5B, pp. 2752–2755, May 1995.
- [156] M. Aoyagi, Y. Nakano, und Y. Tomikawa, *Rod-Type Ultrasonic Motor Using Two Degenerate Second Flexural Vibration Modes and Characteristic Consideration Using Its Equivalent Circuit Expression*, **Japanese Journal of Applied Physics**, Vol. 34, Nr. 9B, pp. 5292–5297, September 1995.
- [157] M. Mracek, *Theoretische und experimentelle Untersuchungen an piezoelektrisch angeregten Ultraschallantrieben mit Mikrostoßkontakt*, **Dissertation**, Universität Paderborn, Heinz Nixdorf Institut, Fachgruppe Mechatronik und Dynamik, 2010.
- [158] M.-S. Tsai, C.-H. Lee, und S.-H. Hwang, *Dynamic modeling and analysis of a bimodal ultrasonic motor*, **IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics and Frequency Control**, Vol. 50, Nr. 3, pp. 245–256, March 2003.
- [159] P.-A. Juang und D.-W. Gu, *Analysis, measurement and control of a new disc-type ultrasonic motor system*, **Mechatronics**, Vol. 16, Nr. 1, pp. 1–12, Feb. 2006.
- [160] R. Le Letty, F. Claeysen, N. Lhermet, B. Hamonic, J. N. Decarpigny, und R. Boscut, *Combined finite element-normal mode expansion methods in electroelasticity and their application to piezoactive motors*, **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, Vol. 40, Nr. 18, pp. 3385–3403, 1997.
- [161] P. Hagedorn, **Nichtlineare Schwingungen**. Wiesbaden: Akademische Verlagsgesellschaft, 1978.
- [162] V. L. Babitsky, **Theory of Vibro Impact Systems and Applications**, Serie: Foundations of Engineering Mechanics. Berlin, Heidelberg, New York: Springer, 1998.
- [163] W. Sextro, **Dynamical Contact Problems with Friction – Models, Methods, Experiments and Applications**, 2. Aufl. Berlin, Heidelberg, New York: Springer, 2007.
- [164] K. Johnson, **Contact Mechanics**. Cambridge: Cambridge University Press, 2003.
- [165] D. Hall, *Review Nonlinearity in piezoelectric ceramics*, **Journal of Materials Science**, Vol. 36, pp. 4575–4601, 2001.
- [166] C. Kauczor, *Entwurf schwach gedämpfter piezoelektrischer Ultraschallsysteme*, **Dissertation**, Universität Paderborn, Leistungselektronik und Antriebstechnik, Paderborn, 2009.
- [167] H. van der Broeck und U. Schaaf, *Piezoelectric Motor fed by a PLL-Controlled Series Resonance Converter*, **European Power Electronics and Drives Journal**, Vol. 8, Nr. 1-2, pp. 55 – 60, June 1999.
- [168] R. Briot, M. M. Guillemot-Amadei, A. Pelourson, und C. Garabedian, *Generators for piezoelectric motors*, **Measurement Science and Technology**, Vol. 4, Nr. 9, pp. 938–946, 1993.

- [169] X. Chen, M. Aoyagi, C. Kusakabe, und Y. Tomikawa, *Self-Oscillated Ultrasonic Stepping Motor with Function of Angular Displacement Self-Correction: Nonaxisymmetric ((2,1))-Mode Thin Disk Motor*, **Japanese Journal of Applied Physics**, Vol. 33, Nr. 5B, pp. 3054–3057, May 1994.
- [170] C. Kusakabe, Y. Tomikawa, T. Takano, M. Aoyagi, und S. Inamura, *Stepping Drive of Self-Oscillation-Type Ultrasonic Motor*, **Japanese Journal of Applied Physics**, Vol. 33, Nr. 9B, pp. 5374–5377, September 1994.
- [171] C. Kusakabe, Y. Tomikawa, S. Takahashi, und T. Takano, *Effect of Pressing Force Applied to a Rotor on Disk-Type Ultrasonic Motor Driven by Self-Oscillation*, **Japanese Journal of Applied Physics**, Vol. 37, Nr. 5B, pp. 2966–2969, May 1998.
- [172] R. D. Blevins, **Formulas for Natural Frequency and Mode Shape**. Malabar: R.E. Krieger, 1984.
- [173] T. M. Cameron und J. H. Griffin, *An Alternating Frequency/Time Domain Method for Calculating the Steady-State Response of Nonlinear Dynamic Systems*, **Journal of Applied Mechanics**, Vol. 56, Nr. 1, pp. 149–154, 1989.
- [174] M. Brökelmann, *Modellierung und Simulation piezoelektrischer Aktoren zum resonanten Betrieb bei nichtlinearen mechanischen Randbedingungen*, **Diplomarbeit**, Universität Paderborn, Heinz Nixdorf Institut, Mechatronik und Dynamik, Paderborn, 2002.
- [175] W. C. Hurty, *Dynamic analysis of structural systems using component modes*, **American Institute of Aeronautics and Astronautics Journal**, Vol. 3, pp. 678–685, 1965.
- [176] R. R. Craig und M. C. C. Bampton, *Coupling of structures for dynamic analysis*, **American Institute of Aeronautics and Astronautics Journal**, Vol. 6, pp. 1313–1319, 1968.
- [177] O. J. Poudou, *Modeling and analysis of the dynamics of dry-friction-damped structural systems*, **Dissertation**, University of Michigan, 2007.
- [178] S. Voronina, V. Babitsky, und A. Meadows, *Modelling of autoresonant control of ultrasonic transducer for machining applications*, **Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science**, Vol. 222, Nr. 10, pp. 1957 – 1974, 2008.
- [179] A. Fidlin, **Nonlinear Oscillations in Mechanical Engineering**, 1. Aufl. Berlin, Heidelberg, New York: Springer, 2006.
- [180] S. Mojrzisch und J. Wallaschek, *Actively controlled high load capacity ultrasonic squeeze film bearing*, in **Proceedings of 6th International Conference Mechatronic Systems and Materials**, Opole, Poland, Juni 2010.
- [181] W. Littmann, *Piezoelektrische, resonant betriebene Ultraschall-Leistungswandler mit nichtlinearen mechanischen Randbedingungen*, **Dissertation**, Universität Paderborn, Heinz Nixdorf Institut, Fachgruppe Mechatronik und Dynamik, Paderborn, 2003.

- 
- [182] W. Seemann, *Transmission And Reflection Coefficients For Longitudinal Waves Obtained By A Combination Of Refined Rod Theory And FEM*, **Journal of Sound and Vibration**, Vol. 198, Nr. 5, pp. 571 – 587, 1996.
- [183] J. Rayleigh, **The Theory of Sound: Volume 1**. New York: Dover Publication, 1945, Vol. 1, Nachdruck der Fassung von 1894.
- [184] K. F. Graff, **Wave Motion in Elastic Solids**. New York: Dover Publications, 1991, Nachdruck der Fassung von 1975.
- [185] G. Strassacker und R. Süsse, **Rotation, Divergenz und Gradient**, 5. Aufl. Stuttgart: Teubner, 2003.
- [186] R. Gausmann, *Nichtlineares dynamisches Verhalten von piezoelektrischen Stabaktoren bei schwachem elektrischen Feld*, **Dissertation**, Technische Hochschule Karlsruhe, Institut für Technische Mechanik, 2005.
- [187] K. Sato, *On the governing equations for vibration and stability of a Timoshenko beam: Hamilton's principle*, **Journal of Sound and Vibration**, Vol. 145, Nr. 2, pp. 338 – 340, 1991.
- [188] J. S. Prezemieniecki, **Theory of Matrix Structural Analysis**. New York: McGraw Hill, 1968.
- [189] R. J. Guyan, *Reduction of stiffness and mass matrices*, **The American Institute of Aeronautics and Astronautics Journal**, Vol. 3, Nr. 2, p. 380, 1965.
- [190] F. Tisseur und K. Meerbergen, *The Quadratic Eigenvalue Problem*, **Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM) Review**, Vol. 43, pp. 235–286, 2001.
- [191] H. R. Schwarz und N. Köckler, **Numerische Mathematik**, 7. Aufl. Wiesbaden: Vieweg + Teubner, 2009.
- [192] J. Stoer und R. Bulirsch, **Numerische Mathematik 2**, 5. Aufl. Berlin, Heidelberg, New York: Springer, 2005.
- [193] L. Panning, *Auslegung von Reibelementen zur Schwingungsdämpfung von Turbinenschaufeln*, **Dissertation**, Leibniz Universität Hannover, Institut für Dynamik und Schwingungen, 2005.
- [194] E. J. Abbott und F. A. Firestone, *Specifying surface quality: a method based on accurate measurement and comparison*, **Mechanical Engineering**, Vol. 55, pp. 569 – 572, 1933.





# Lebenslauf

Jens Twiefel

## Persönliche Daten

Geburtstag	16.08.1976
Geburtsort	Gütersloh
Nationalität	deutsch
Email	jens@twiefel.de

## Chronologischer Lebenslauf

Seit 10/08	Leiter der Arbeitsgruppe Piezo- und Ultraschalltechnologie des Instituts für Dynamik und Schwingungen, Leibniz Universität Hannover
10/07 bis 09/08	Wissenschaftlicher Mitarbeiter im Institut für Dynamik und Schwingungen, Leibniz Universität Hannover
10/04 bis 09/07	Wissenschaftlicher Mitarbeiter in der Fachgruppe für Mechatronik und Dynamik des Heinz Nixdorf Instituts, Universität Paderborn
05/07 bis 09/07	Gastwissenschaftler in der Ferroelectrics Group, Environmental Information Laboratory, Graduate School of Frontier Sciences, The University of Tokyo
10/99 bis 09/04	Studium der Ingenieurinformatik mit Schwerpunkt Maschinenbau an der Universität Paderborn
01/04 bis 09/04	Diplomarbeit im Center for Intelligent Material Systems and Structures, Virginia Polytechnic Institute and State University, Blacksburg, VA, USA
02/98 bis 10/99	Facharbeiter, Industriemechaniker, Claas SE GmbH, Harsewinkel
07/98 bis 04/99	Wehrdienst
08/96 bis 06/98	Fachoberschule Technik (Abendschule), Gewerbliche Schulen Gütersloh
08/94 bis 01/98	Ausbildung zum Industriemechaniker Fachrichtung Produktionstechnik, Claas SE GmbH, Harsewinkel
08/88 bis 07/94	Städtische Realschule Harsewinkel
08/83 bis 07/88	Kardinal-von-Galen-Schule, Harsewinkel