LA YUPANA COMO HERRAMIENTA PEDAGÓGICA EN LA PRIMARIA

Lyda Constanza Mora

Nydia Valero
Universidad Pedagógica Nacional

1. Introducción

La Yupana (ábaco inca) es una de las herramientas del cálculo propio de nuestra cultura latinoamericana, la cuál ha motivado a matemáticos, ingenieros e historiadores, pues tras esta herramienta se esconden valiosos aportes a la matemática y a la didáctica, los cuales mencionaremos a grandes rasgos en el presente trabajo. Para elaborarlo, consultamos textos, boletines y artículos; fue necesario, también, experimentar con yupanas manuales (elaboradas por los estudiantes del Seminario de Lecturas) de diferentes estilos, buscando la más apropiada que facilitara el manejo de las operaciones costruidas; es importante mencionar que el enfoque pedagógico de la yupana en la escuela primaria mencionado en este trabajo se logró gracias a la consolidación de ideas e investigaciones realizadas por todos los integrantes del Seminario a lo largo del semestre.

Resta decir que un tema como este es de bastante interés –o al menos así lo consideramos- por lo cual, merece que otras personas conozcan algo acerca de él y se motiven a participar en su exploración; es así como una síntesis de este escrito será expuesta en el Encuentro de Geometría cuyo título es "*La Yupana (el ábaco Inca): su uso en la escuela primaria*".

2. Objetivos

1. Apreciar la labor de los incas en la matemática al idear instrumentos de cálculo como la Yupana, pues la estructura social y administrativa que poseían, son de alguna manera, el reflejo de su interesante desarrollo matemático y su alto grado de civilización.

2. Recopilar información acerca del ábaco incaico y su incidencia tanto en la matemática (ciencia pura) como en su enseñanza (pedagogía).

3. Reformar e idear algoritmos para efectuar operaciones en la yupana que faciliten el manejo de éstas sin perder su esencia

4. Reconocer la yupana como un elemento pedagógico que contribuye a la labor educativa de la matemática.

3. Historia

Al parecer, fue William Burns Glynn (ingeniero textil) quien le dio el nombre de Yupana a la tabla de cálculo de los incas, basado en que YUPAY (vocablo quechua) significa contar.

Aunque la yupana no fue la herramienta central del cálculo incaico aportó bastante al control numérico así como el quipu, considerado el instrumento básico de archivo y control de información numérica, estadística e histórica. Tanto en el quipu (consta de un cordel principal del cual penden otros cordoncillos más cortos de diferentes colores, en cada uno hay varios nudos que simbolizan algún número o letra) como en la yupana se usa el sistema decimal y posicional lo cual indica un alto grado de civilización de la cultura incaica; es por esta razón que matemáticos, ingenieros e historiadores se han encargado de estudiar y analizar minuciosamente el misterio que encierran estos instrumentos; resumiremos ahora en qué hechos seha basado el origen de la yupana al igual que la interpretación de algunos personajes acerca de ella:

- Felipe Guamán Poma de Ayala en su obra *"Nueva Crónica y buen Gobierno"* (1.615) muestra en la esquina inferior izquierda un esquema de la yupana: una tabla de forma rectangular donde se encuentran cinco filas y cuatro columnas cuya base es uno de los lados más cortos, se observa círculos znegros y blancos distribuídos por columnas, en la primera se encuentran por casilla cinco círculos, en la segunda tres, en la tercera dos y en la última un círculo.

A raíz de este dibujo han aparecido varias interpretaciones con el fin de explicar el funcionamiento y lectura de la yupana, entre ellos:

- J. A. Mason enuncia que las cifras de un número se representan con granos de maíz o piedrecillas de dos colores diferentes.
- Otro personaje interpreta los círculos negros como posiciones para sumar y los blancos para restar, pero esto es considerado inpráctico, así se acepta otra opinión:
- Wassen indica que los dos colores representan posiciones ocupadas por fichas y posiciones desocupadas.

Estas interpretaciones se basan en la aceptación de que los números en la Yupana figuran como granos de maíz, semillas, piedrecillas,..., quizás basados en aquello que enuncia José de Acosta (1.530 – 1.616) en su libro *"Historia Natural y moral de las Indias":*

> *" Tomarán estos indios sus granos y pondrán una aquí, tres acullá, ocho no sé dónde. Pasarán un grano de aquí, trocurán tres de acullá, y en efecto ellos salen con su cuenta hecha puntualísima, sin errar tílde. Si esto en él es ingenio y estos hombres son bestias, júzguelo quien quisiese, que lo que yo juzgo de cierto es que en aquello a que se aplican nos hacen grandes ventajas"*[1]

Otra persona[2] dice que es posible que en la Yupana se representaran las cifras de un número con símbolos "○" y "●" identificables en el ábaco de Guamán Poma; según esta interpretación, equivaldría a 1, y tendría un valor de 5. Los números debieron escribirse de arriba hacia abajo, siguiendo el patrón acogido en el quipu y a lo que enuncia Acosta:

> *"... su modo no era escribir a renglón seguido, sino de alto, abajo o a la redonda"*

Así se entra a otra discusión, la posición en que se debe colocar la yupana para ubicar los números:

- Un grabado de 1.503 de Margarita Philosophica por Gregorius Reich muestra la yupana girada en 90° de acuerdo a la posición dada por Guamán

[1] HIGUERA, Clara Lucía. *Lecturas matemáticas.* Volumen 15, pág. 66.
[2] PAREJA, Diego. *Instrumentos prehistóricos de cálculo "El quipu y la Yupana".*

- Poma, la cual es considerada la ubicación correcta: el lado más largo debe ocupar una posición horizontal, cerca del operario.

Otro aspecto de interés en la yupana es la distribución de las casillas y la presencia de la progresión: 1, 2, 3, 5 que es estimada por Burns como fundamental al sistema, los casilleros con cinco, tres y dos círculos son las posiciones para ubicar las "ayudas artificiales" (pueden ser piedras, granos,...) y la casilla con un círculo figura como "memoria"; cada círculo vale "uno" y adquiere mayor valor de acuerdo a la columna a la que pertenezca. (Este enfoque será explicado más detalladamente en la parte del trabajo "Algoritmos expuestos por William Burns).

En cuanto a las operaciones desarrolladas en la yupana, los incas (al parecer) sumaban, restaban, multiplicaban y dividían; refiriéndonos a la resta, todo indica que los incas la emplearon y la yupana fue el medio utilizado para expresar numéricamente el resultado obtenido después de sustraer un número de otro; además, comparando con los quipus, registraban la entrega de una

mercancía desanudando un cordel y anudando otro. Por esto último y otras semejanzas de la yupana con el quipu, Diego Pareja acepta la yupana como una sección del quipu, donde los nudos son sustituídos por piedrecillas, se manipulan objetos como en todo el proceso abacista; todo se reduce a reglas y como en el caso de quienes manejan símbolos, también hay que aprender las tablas de multiplicar.

Por último, también hace parte de la historia las reformas que hemos hecho al esquema o estructura de la yupana y el enfoque que le hemos dado, donde nuestro fin es rescatar en la multiplicación su definición como sumas sucesivas y en la división la idea de restas sucesivas aboliendo la memorización de tablas de multiplicar. En cuanto a la potenciación hemos querido relacionarla con la utilización de bases por ser un proceso más fácil y rápido.

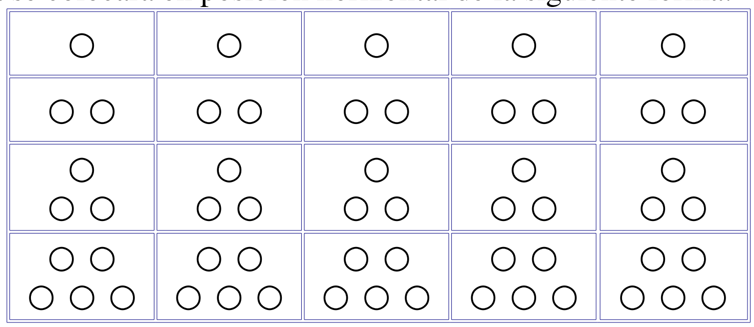
4.Enfoque Didáctico

En este punto se expondrán dos enfoques para trabajar las operaciones en la yupana: el dado por William Burns Glynn y el trabajado por el "Seminario de Lecturas (1.998)". Es de aclarar que entre los dos enfoques existen similitudes en cuanto al desarrollo de algunas operaciones.

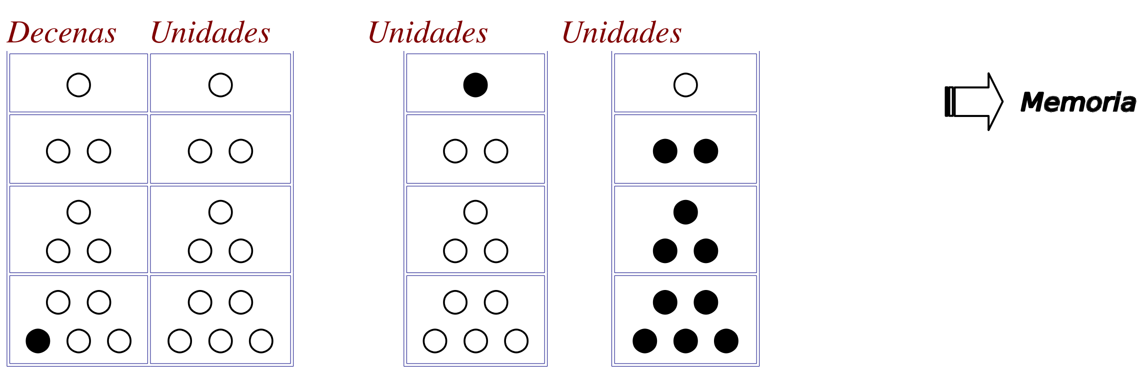
1. Algoritmos expuestos por William Burns

Antes de concretar dichos métodos es necesario conocer algunas reglas para así no tener dificultades al realizar las operaciones:

- La yupana se colocará en posición horizontal de la siguiente forma:



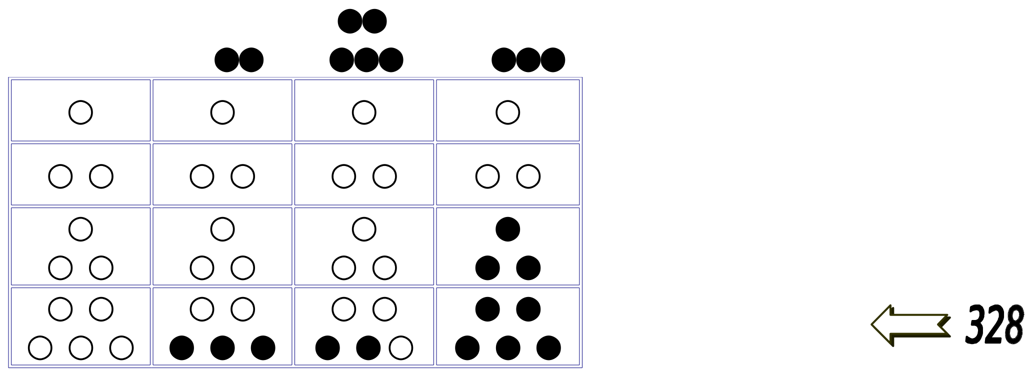
- Cada círculo tendrá un valor de "uno", y va adquiriendo otros valores de acuerdo a la columna donde se encuentre, por ejemplo: si se encuentra en la segunda columna contando de derecha a izquierda, ésta tendrá un valor de 10. Así cada círculo en la columna uno tendrá un valor de 10^0, en la columna dos un valor de 10^1 y así sucesivamente. De ésta manera nos damos cuenta que el sistema de numeración es decimal.
- Los círculos de la primera fila representan la memoria y las otras filas con casilleros de 2, 3, y 5 círculos son posiciones para ubicar ayudas artificiales.
- Para conservar un orden en el trabajo de la yupana se empezarán a llenar los círculos de abajo hacia arriba.
- Cada vez que se completen los diez círculos de una columna, los barremos o desocupamos y colocamos uno en la memoria que luego será transladado a la columna posterior, de la siguiente forma:



- Cuando necesitamos transferir al orden inferior, realizamos el proceso inverso al descrito en el numeral 5.

a. Adición

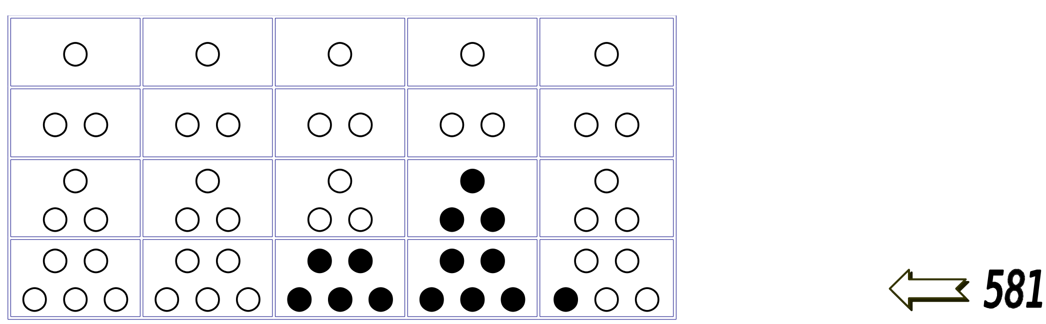
Para ver como resolvían esta operación, miremos un ejemplo: Consideremos la suma de 328 con 253



El proceso a seguir es el siguiente:

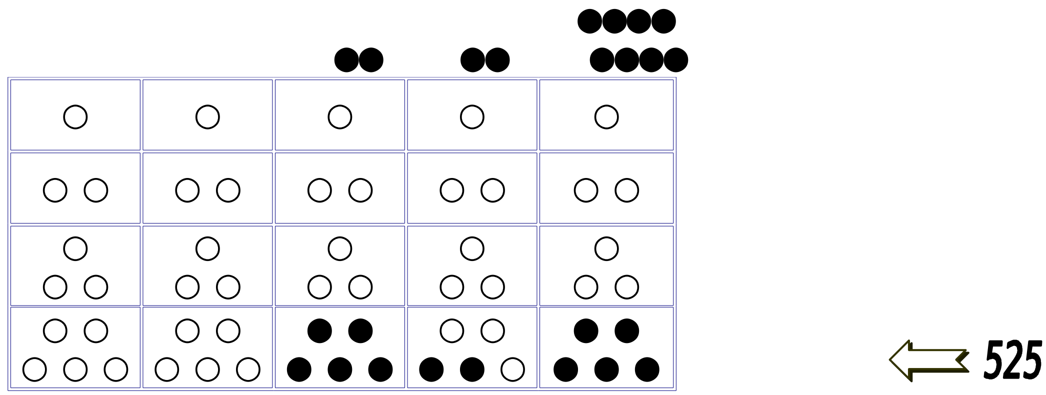
- Colocamos uno de los sumandos en la yupana y el segundo en la parte superior de esta.
- Transferimos las piedrecitas de la parte superior a la yupana conservando las columnas, es decir, en la columna uno, transferimos las tres piedritas a la columna de las unidades, en la segunda 5 y en la tercera 2. Como en la primera columna quedan los diez círculos llenos y uno por fuera, barremos y llevamos uno a la memoria; así podemos ubicar la piedrecita que falta.

Teniendo en cuenta esto, la suma será igual a 581 que se representa de la siguiente manera:



b. Sustracción

Al igual que en la adición mostraremos el procedimiento con un ejemplo:
Consideremos la resta de 525 con 228.



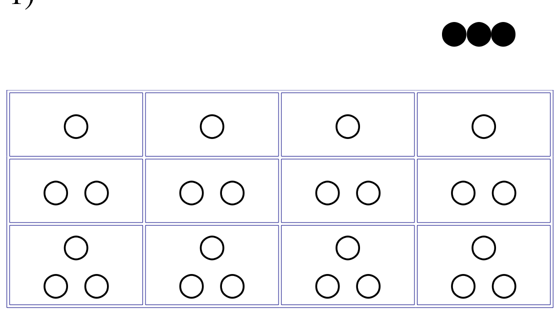
- A diferencia de la adición, vamos a colocar el número mayor en la yupana, pues solo consideraremos la sustracción como la estudiamos en la primaria. Pero al igual que en la anterior, el otro número lo colocaremos en la parte superior de la yupana.

- Retiramos de la yupana las piedrecitas que nos indica el número que colocamos en la parte superior teniendo en cuenta que a la columna de las unidades solo le quitaremos unidades.

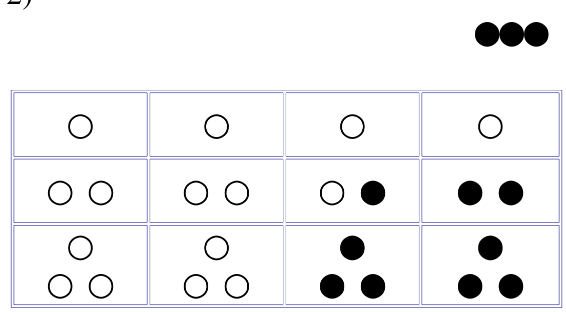
- Cuando no nos alcance las piedrecitas para quitar tomamos uno de la columna siguiente que sea equivalente a 10 de la columna sobre la cual estamos trabajando. En nuestro ejemplo como cuando le quitamos 5 a 8 nos faltan 3 piedritas, entonces de la columna de las decenas tomamos una que equivale a 10, así al quitar las 3 que nos faltan en la primera columna nos quedan 7.

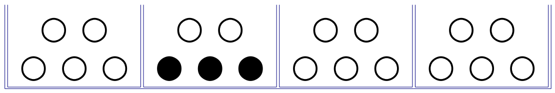
Veamos gráficamente:

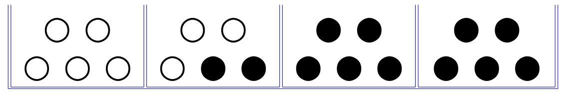
1)



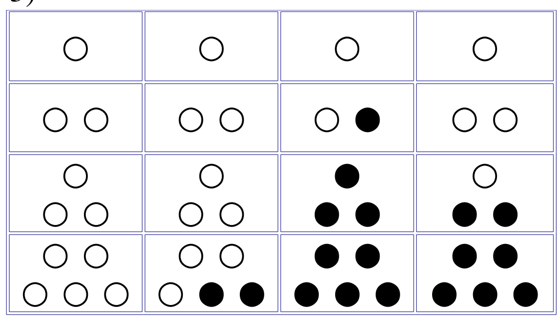
2)







3)



c. Multiplicación

Para multiplicar se debe tener en cuenta la distribución de los círculos en el esquema de la yupana que sigue la progresión: 1, 2, 3, 5. Como nos damos cuenta esta progresión está basada en los números primos, la cual constituye la clave del sistema.

Para realizar la operación es necesario hacer cálculos previos que consisten en repetir uno de los factores tantas veces lo indique la progresión, lo cual permite hallar cuatro sumas parciales. Luego se debe descomponer el otro factor en partes que concuerden con la progresión. El resultado de la multiplicación se obtiene por medio de la suma de los productos parciales del factor disociado.
Para visualizar mejor la multiplicación, miremos un ejemplo: Realicemos el producto de 318 con 27

- Calculos previos

$$318 \times 1 = 318$$
$$318 \times 2 = 636$$
$$318 \times 3 = 954$$
$$318 \times 5 = 1590$$

Estos productos parciales que constituyen una tabla de apoyo se colocan al lado de la yupana.

- Si descomponemos el 27 tenemos*:*

$$27 = 20 + 5 + 2$$

Luego 318 $\times$ 27 será igual a :

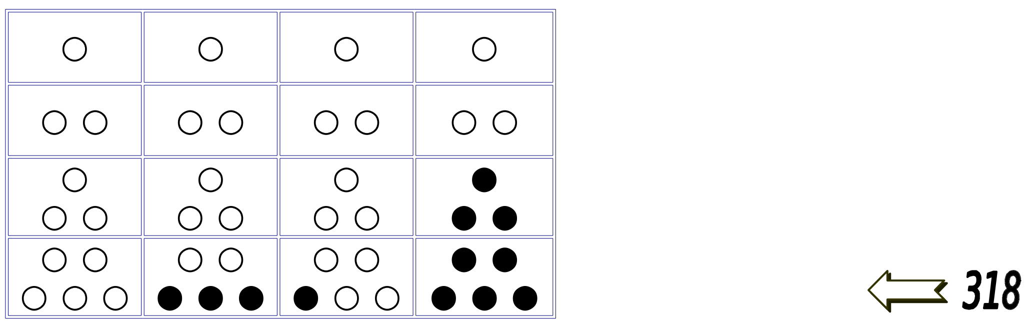
318×2 *(segunda columna)*	$= 318 \times 20$	$= 6.360$
318×5	$= 318 \times 5$	$= 1.590$
318×2	$= 318 \times 2$	$= 636$

Así:

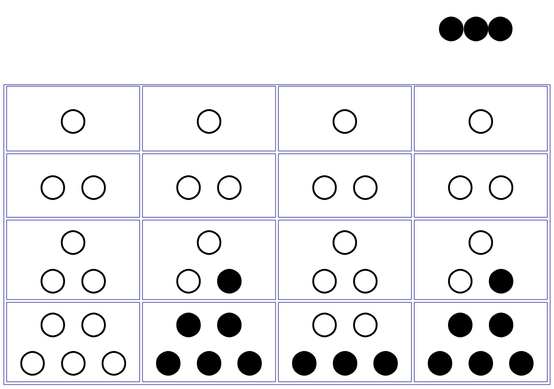
$$318 \times (20 + 5 + 2) \qquad = 318 \times 27 = 8.586$$

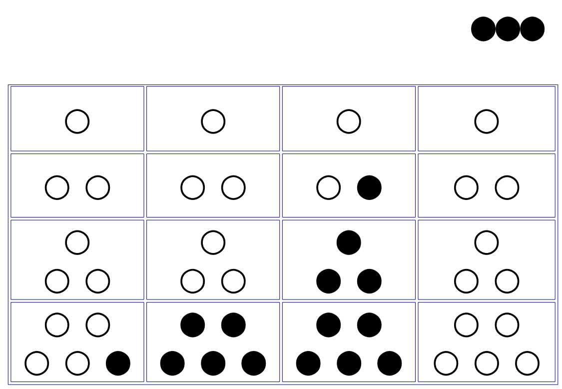
Para realizar esta operación necesitamos una yupana auxiliar o tabla de apoyo

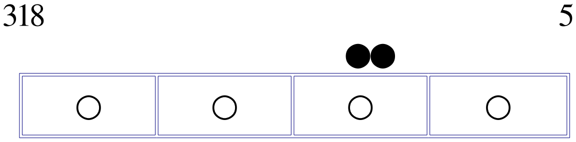
- En una yupana registramos el valor del multiplicando en la yupana



- En las tablas de apoyo o yupanas auxiliares colocamos los productos parciales. Para hacer notar que se multiplica por 20 colocamos dos piedrecitas bajo la columna de las decenas.


2 × 318


5 × 318



○ ○	○ ○	○ ○	○ ○
○ ○ ●	○ ○ ○	○ ○ ●	○ ○ ○
● ● ● ● ●	○ ○ ● ● ●	● ● ● ● ●	○ ○ ○ ○ ○

20 × 318

- Para obtener el resultado lo único que hacemos es sumar los resultados de los productos parciales obtenidos anteriormente. Luego el resultado de multiplicar 318 con 27 es:

○	○	○	○
○ ○	○ ○	○ ○	○ ○
● ● ●	○ ○ ○	● ● ●	○ ○ ●
● ● ● ● ●	● ● ● ● ●	● ● ● ● ●	● ● ● ● ●

⇐ 8.586

Como nos pudimos dar cuenta el proceso inca de multiplicación adopta un método de operaciones parciales de sumas, por lo cual no fue necesario repetir el multiplicando tantas veces como lo indica el multiplicador.

d. División

En ésta operación[3] en lugar de sumar valores parciales como en el caso anterior, vamos a restar valores parciales del dividendo. Antes de describir el método es importante señalar en forma esquemática, los distintos elementos de la operación.

[3] BURNS, William. *La tabla de Cálculo de los incas.* Boletín de Lima.

Para describir el método de división, veamos un ejemplo: dividamos 81 entre 3.

- Hacemos una tabla de apoyo teniendo en cuenta las progresiones dadas en la yupana:

$3 \times 1 = 3$
$3 \times 2 = 6$
$3 \times 3 = 9$
$3 \times 5 = 15$

- Colocamos el dividendo en la yupana (B)

- Empezando con el orden mayor buscamos en la tabla de apoyo (A), un número igual o inmediatamente inferior. El número en la yupana es 8 y el número que encontramos en la tabla es 6.
- Ponemos el cociente parcial 2 en las decenas del registro (C) y 6 en las decenas del registro (D). Enseguida restamos 6 de la yupana y ponemos las fichas situadas en (E).

- Al confirmar que los valores en D y E son iguales retiramos las fichas de estos registros y los ponemos en la reserva (F).

- Quedamos con 21 en la yupana y buscamos de nuevo en la tabla por el número igual o inmediatamente inferior. En esta caso es 15 y ponemos 5 en el registro de cocientes. Colocamos 15 en el registro (D) y procedemos a restar de al yupana fichas correspondientes a este valor.

- Al confirmar que estos valores en (D) y (E) son iguales, retiramos las fichas de estos dos registros poniéndolos en la reserva (F).

- Ahora quedamos con 6 en la yupana (B), y 25 en el registro de cocientes.

- Buscamos de nuevo un número en la yupana (B) igual o inmediatamente inferior al número 6.

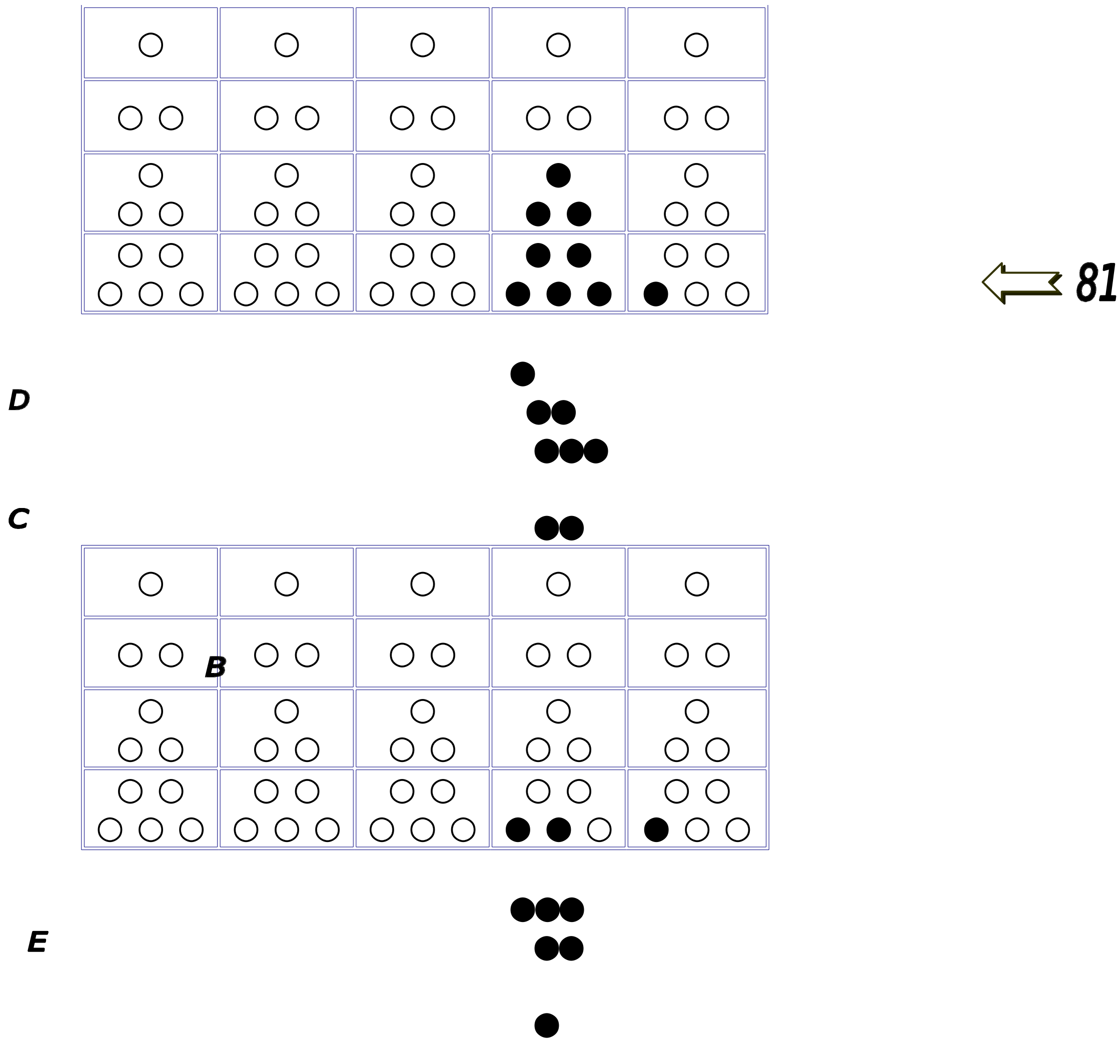
- Encontrando este valor en la tabla de apoyo (A) ponemos dos en el renglón de cocientes y restamos 6 de la yupana.

- Al terminar de restar verificamos los dos registros (D) y (E) son iguales y retiramos las fichas a la reserva (F)

- Ya no hay más fichas en la yupana y la operación está terminada.

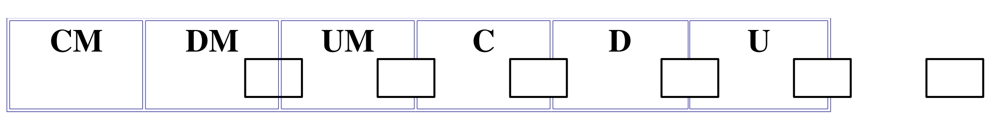
El cociente es 27 que es el resultado de dividir 81 entre 3.

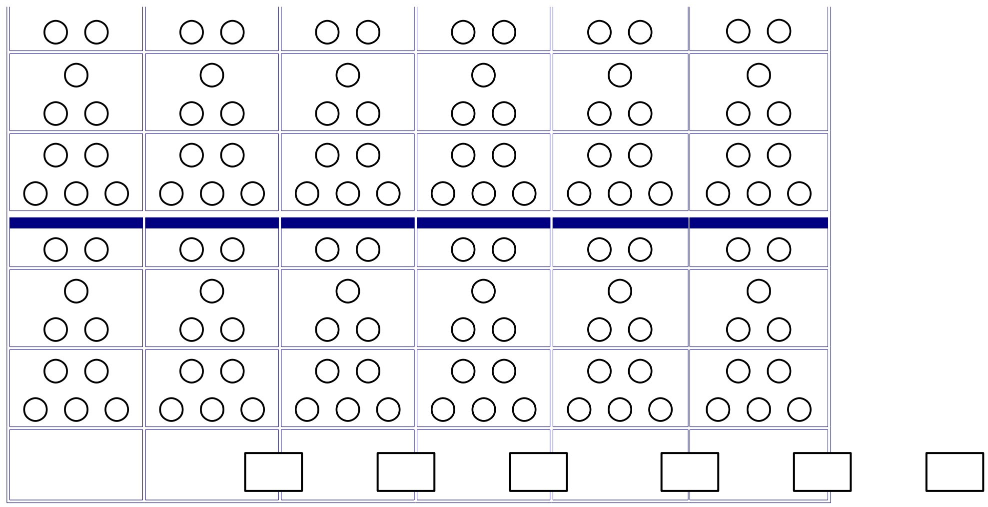
Veamos este proceso en la yupana:



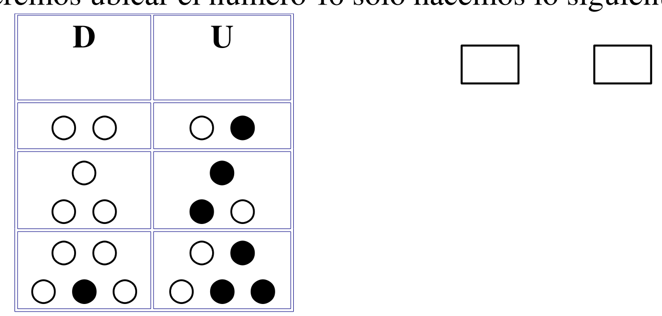
2. Algoritmos expuestos por "Seminario de Lecturas (1998 I.)"

Con base en el desarrollo por William Burns y la adaptación a la yupana, en nuestro curso de "Seminario de Lecturas" hemos querido trabajar alrededor de la yupana como herramienta pedagógica para la enseñanza de algoritmos básicos, con el objetivo de hacer que el niño entienda el por qué de las operaciones sin necesidad de aprender de memoria las tablas de multiplicar o el método para encontrar una respuesta "correcta", por tanto sólo tendremos como parámetros saber contar y reconocer la diferencia de lugares ocupados en una columna respecto a otra, pues el modelo de yupana a seguir es el siguiente:





Como observamos es una yupana doble, construída así para facilitar cálculos en las operaciones, pues al utilizar sólo para ubicar números no es indispensable considerar las dos partes, por ejemplo si queremos ubicar el número 16 solo hacemos lo siguiente:



Como nos damos cuenta aquí no existe ningún orden para colocar las piedritas aunque se podría considerar el mismo de William Burns para mayor comodidad.
Los cuadros de la parte superior han sido elaborados a manera de memoria para facilitar los cálculos.

Al igual en el enfoque dado por William Burns es necesario establecer algunas reglas para de esta manera estar todos de acuerdo y trabajar lo mismo.
Reglas:

- Cada círculo tiene un valor de 1 o una potencia de 10 dependiendo la columna donde se encuentre. De esta manera, nos damos cuenta que el sistema que utilizamos es decimal aunque estos algoritmos se pueden pasar al sistema binario,..., teniendo en cuenta que se anularán algunas filas.

- Cada vez que se completen las columnas de la yupana superior se barre y se coloca una piedrecita en la memoria superior. Con la yupana inferior ocurrirá lo mismo . Luego se pasa a la columna posterior.

- Cuando se necesita transferir de un orden superior a uno inferior se realiza el proceso contrario al del numeral 2.

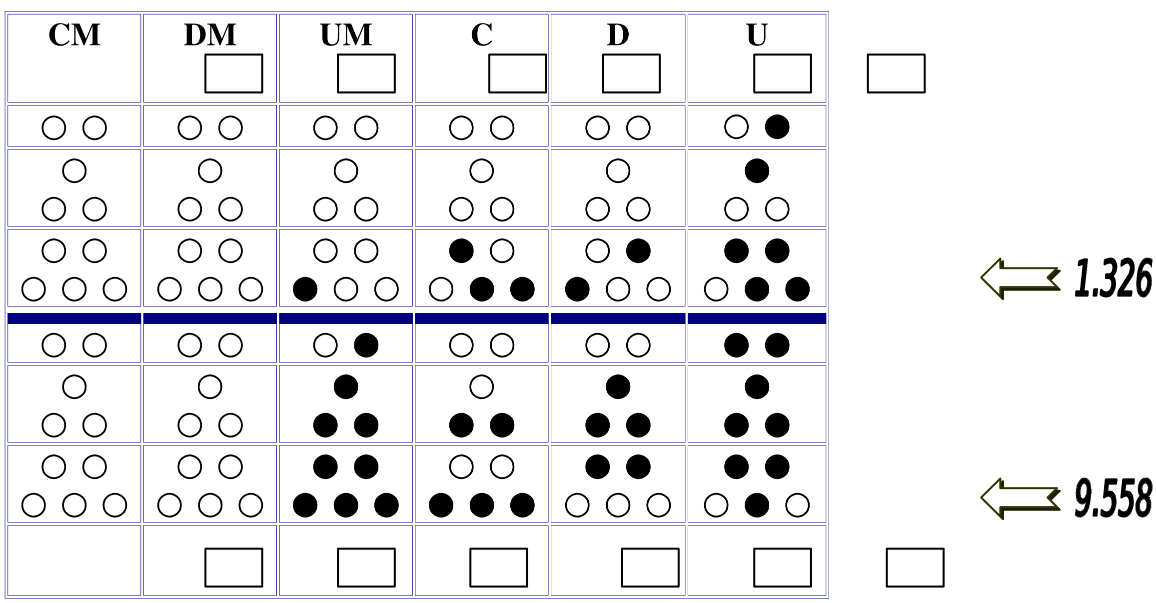
- En el inicio de una operación, no es necesario ubicar los números con algún orden particular. Cuando vayamos a operar no importa que cantidad se deje arriba y cual abajo, lo importante es que después de elegir en cual de los dos voy a operar, lo tome fijo durante el desarrollo de la operación.

a. ADICIÓN

Para aprender el mecanism de la adición, tomemos dos cantidades y mientras sumamos, explicamos el "proceso a seguir".

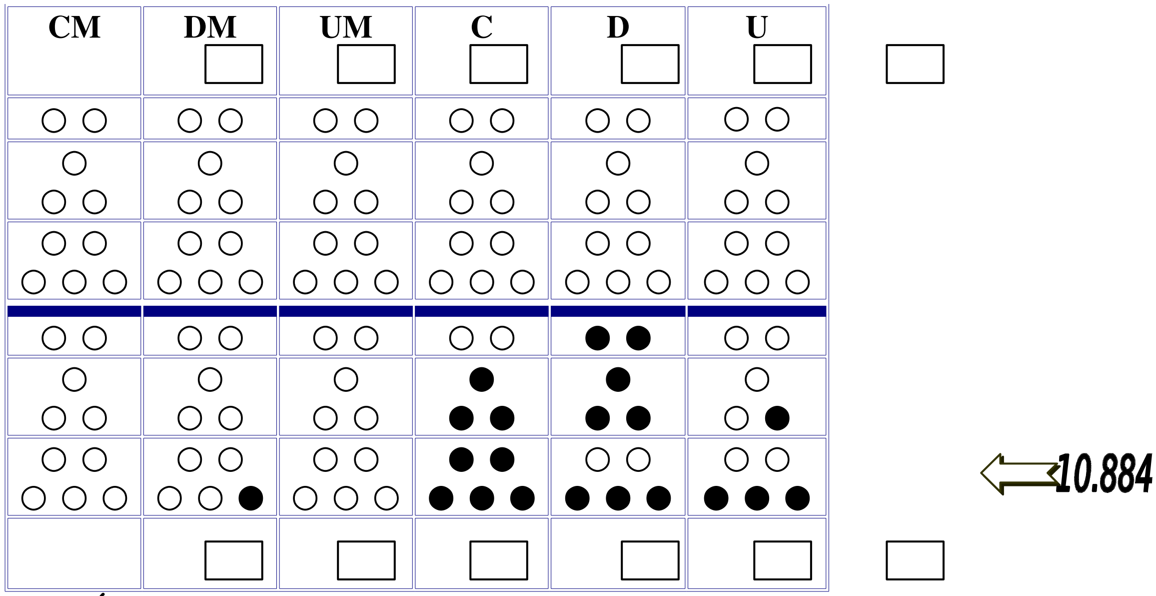
Ejemplo: Sumemos 1.326 con 9.558

- Representemos las cantidades cada una en cada yupana y elegimos cual cantidad o en qué yupana vamos a trabajar. Como es notorio lo más sencillo es trabajar sobre la cantidad en la cual la suma de sus dígitos es mayor.



- Como en este caso la suma de los dígitos de 9.558 es mayor a la de 1.326 entonces operamos sobre ésta, es decir, desplacemos las piedritas de la yupana superior a la parte inferior teniendo en cuenta que las unidades van a las unidades, decenas a decenas, etc.

Así el resultado de sumar 1.326 con 9.558 es:

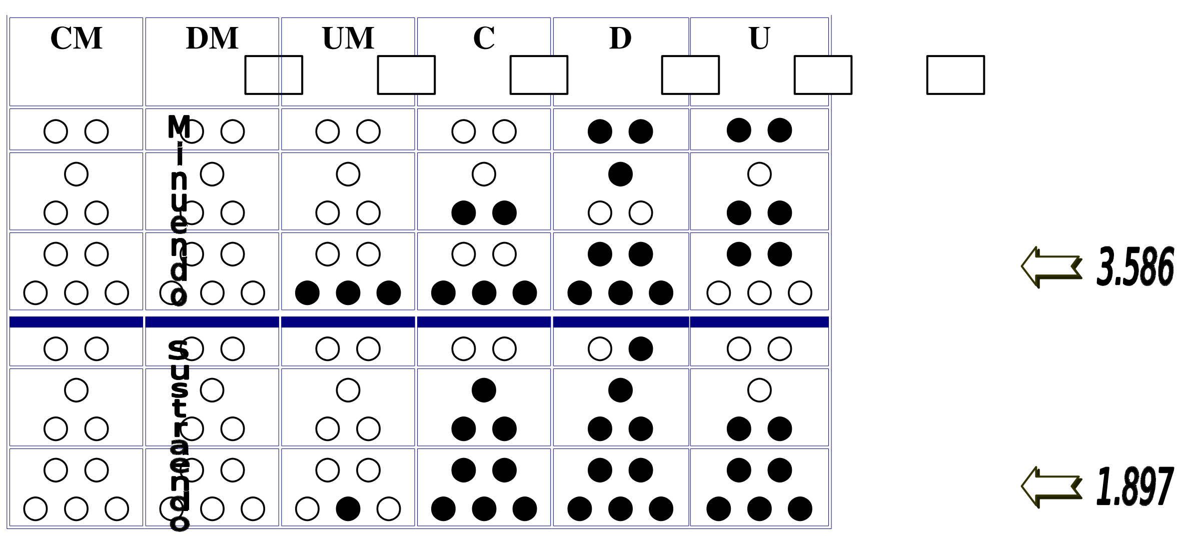


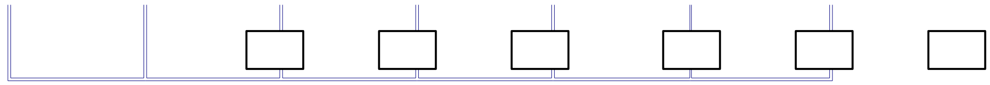
b. SUSTRACCIÓN

Para realizar la sustracción tenemos en cuenta que a un primer grupo de elementos le vamos a quitar cierta cantidad de elementos que corresponden a otro grupo. Como este enfoque es sólo para primaria siempre tomaremos el minuendo mayor que el sustraendo.

Veamos con un ejemplo el proceso que se sigue para realizar una sustracción. Realicemos la diferencia entre 1.897 y 3.586.

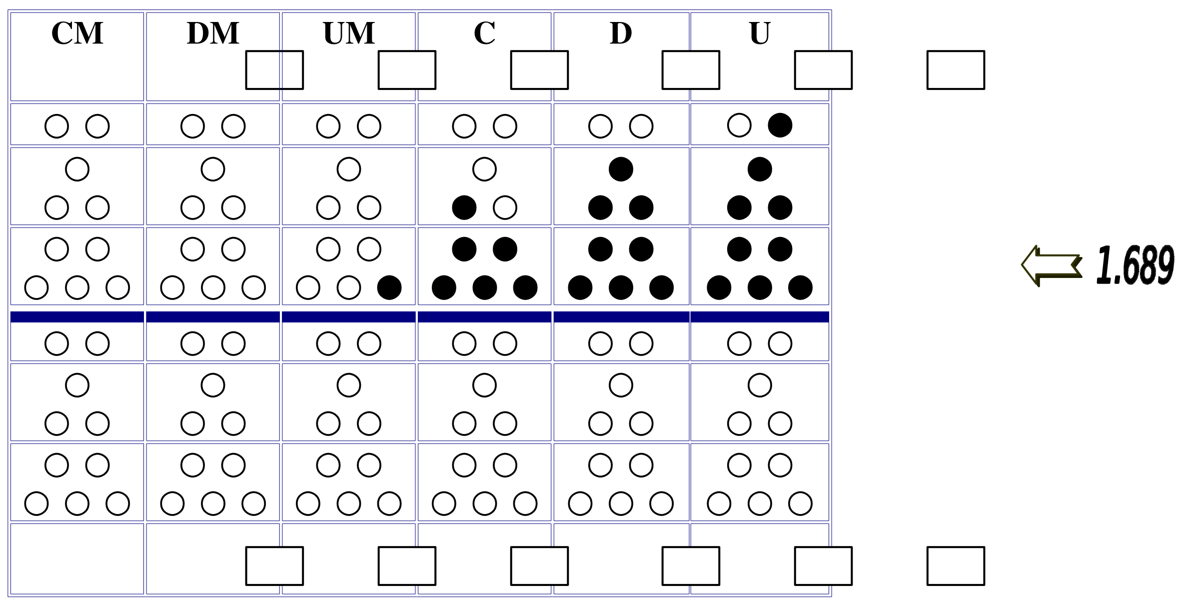
- Coloquemos los números teniendo en cuenta que sobre el que vamos a operar es el 3.586





- Quitamos tantas piedritas como nos indique el sustraendo, de columna en columna. Como podemos ver en la primera columna, quitamos 6 pero nos falta 1 por quitar, para poder quitarla tomamos una columna posterior que equivale a 10 de la primera columna. Luego quitamos la piedrita que nos falta.
  Este procedimiento lo repetimos de columna en columna hasta que se terminen las piedritas del sustraendo.

Veamos en la siguiente tabla:

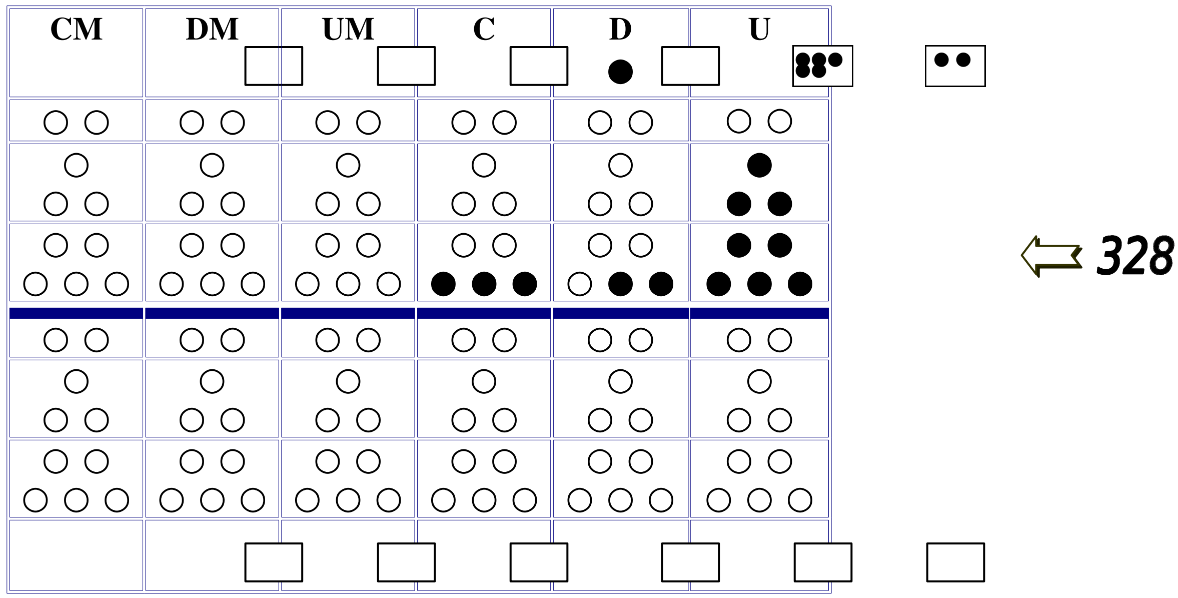


c. MULTIPLICACIÓN

Para esta operación se volverá a utilizar la memoria y vamos a disponer las cantidades de la siguiente forma:

- En la parte superior de la yupana, colocamos el número que vamos a multiplicar.
- En la parte inferior se efectuarán los cálculos
- En la memoria se encuentra el número por el cual vamos a multiplicar.

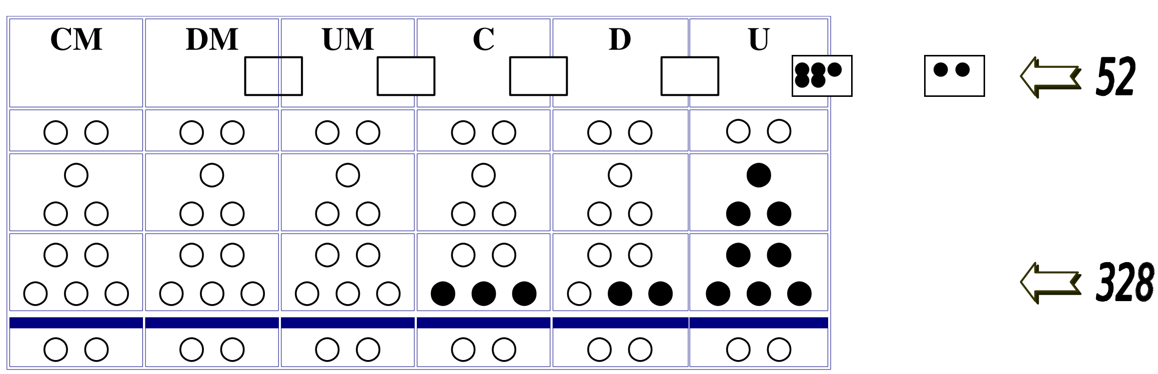
Ejemplo: 328×52

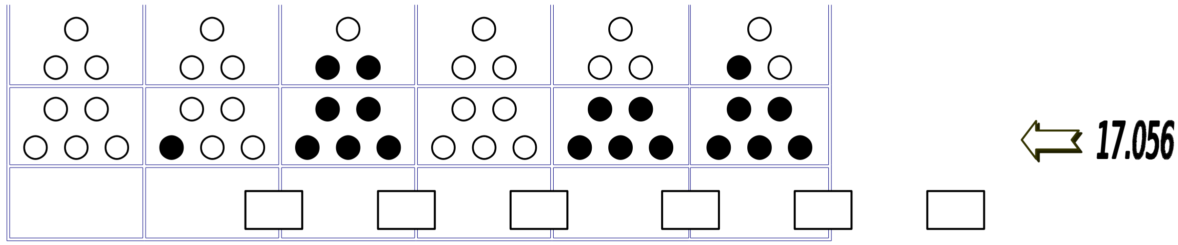


- Tomamos las unidades del número que se encuentra en la yupana superior y las colocamos tantas veces nos indique el número que se encuentra en la memoria. En el ejemplo tenemos 8 unidades que las vamos a repetir 52 veces. Para mayor facilidad podemos descomponer 52 en unidades y decenas. Así, empezamos a colocar 2 veces 8 en la primera columna de las unidades y luego 5 veces 8 en la columna de las decenas.

  Seguimos el procedimiento anterior teniendo en cuenta que vamos “comiéndonos” una casilla a la derecha, es decir, que si vamos a multiplicar las decenas del número por el que está en la memoria, colocamos los resultados en la columna de las decenas.

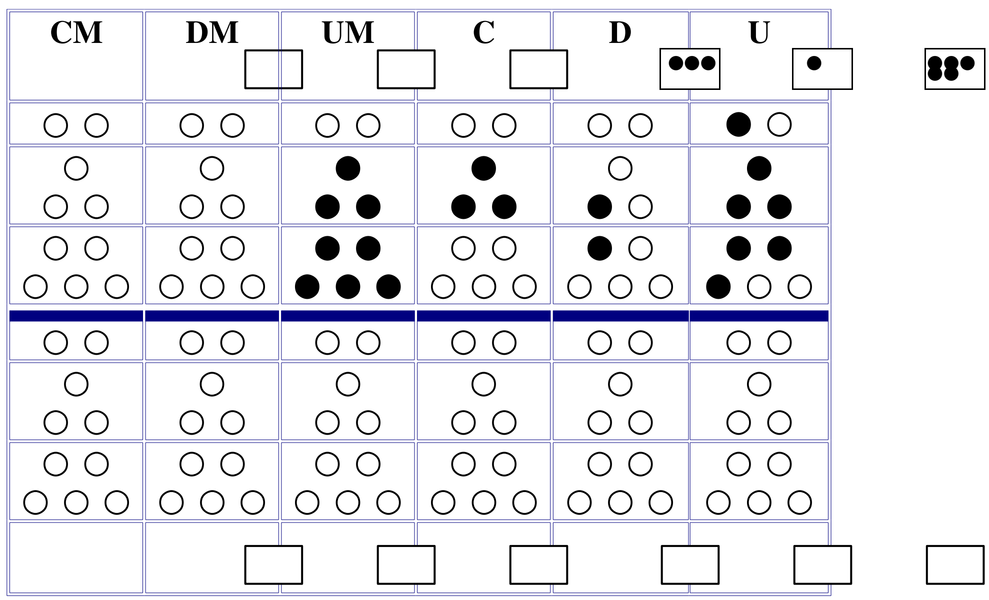
Así el resultado de multiplicar 328 con 52 es 17.056





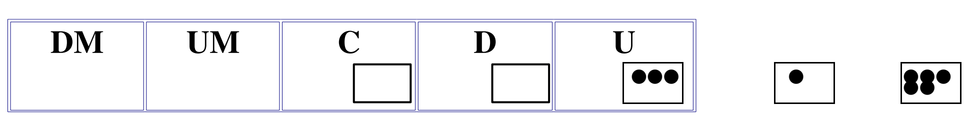
d. DIVISIÓN

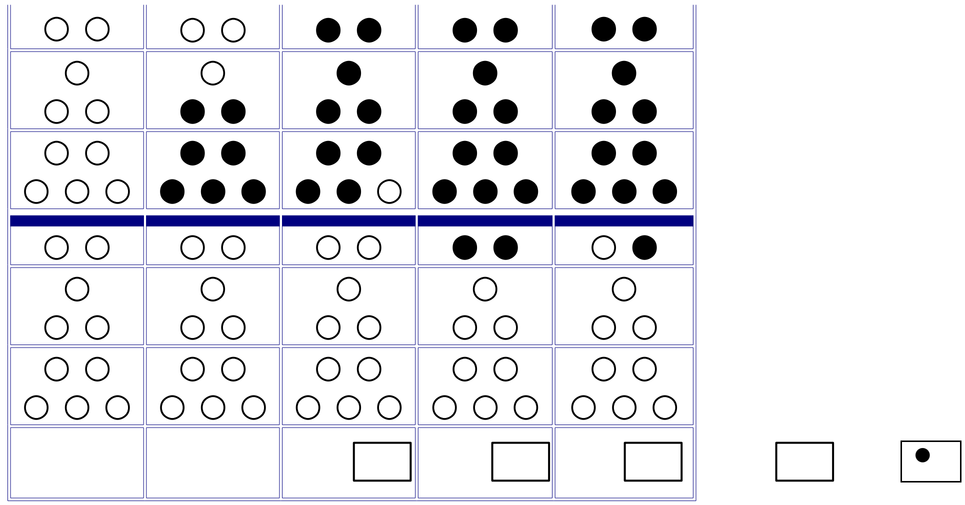
Efectuemos la división de 8.327 en 316. Para ello, ubicaremos el número a dividir (dividendo) en una yupana y el divisor en la memoria teniendo en cuenta que esta cifra quede en la memoria de la columna a que corresponde.



A continuación, empezamos a quitar el número de canicas de las unidades de la memoria en las unidades de la yupana, las decenas en las decenas, etc., y por cada vez que quitemos el número de la memoria en la yupana, colocamos una canica en la yupana libre; como es notorio, por ejemplo al quitar 316 la primera vez, en las unidades de la yupana, las canicas restantes no son suficientes para quitar nuevamente 6 unidades. En este caso, teniendo en cuenta que una canica en la siguiente columna representa 10 de la anterior, retiramos una de las decenas y llenamos las 10 perforaciones en las unidades. Si tenía espacios ocupados, colocamos estas canicas en la memoria de abajo sin olvidarnos de ellas (es decir, las quitamos tan pronto podamos)

Ejemplo:

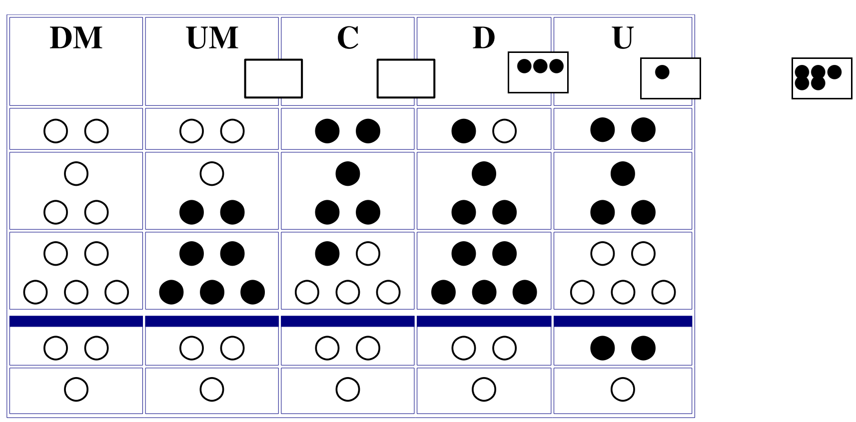


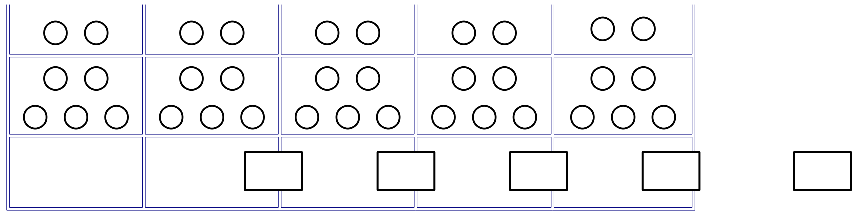


El lugar ocupado en la segunda yupana, indica que el cálculo o proceso se ha elaborado una vez, la canica que está en la memoria de abajo es lo que quedó después de efectuar éste. Como ésta era insuficiente para volver a retirar las canicas de las unidades, la pasamos a la memoria y nos disponemos a quitar la restante de las decenas para llenar un equivalente en las unidades. Así, en las decenas no queda canica y en las unidades quedan 10 más, las de la memoria.
Como necesitamos tener canicas en las decenas, quitamos de la columna de las decenas, pero ¡cuidado!, cuando se efectuó el cálculo, no quedó nada en ésta columna, por consiguiente vamos a las unidades de mil y tomamos una de allí y escribimos su equivalente en las centenas. Así, en las unidades de mil, quedan 7 canicas y en las centenas, 10.

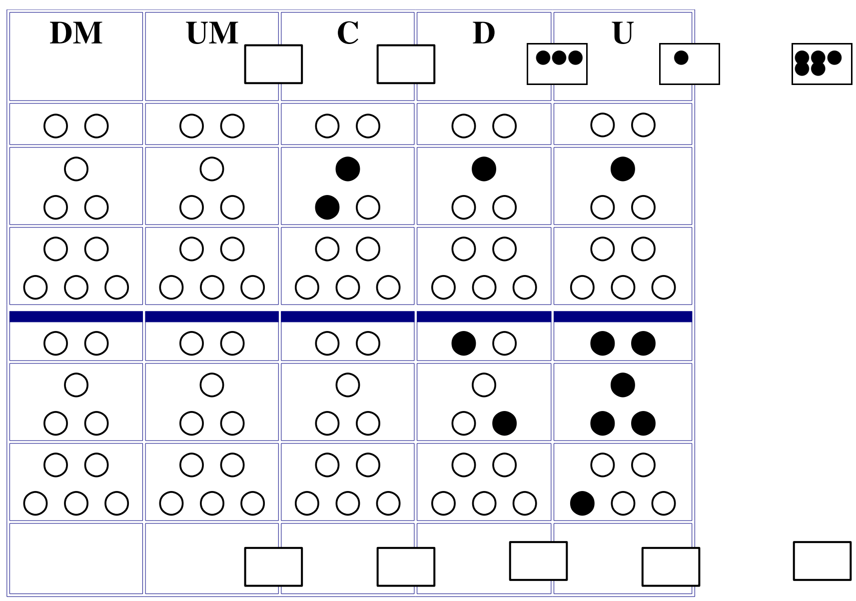
Como necesitábamos llenar las decenas quitamos una de las centenas y mientras ésta quedan 9 canicas, en las decenas quedan las 10 equivalentes a la que se quitó de las centenas.

Veamos cómo queda al efectuar por segunda vez el proceso:





Como las unidades que quedaron no son suficientes para restar nuevamente 6, tomamos éstas y las llevamos a la memoria de abajo, quitamos una canica de las decenas u colocamos las 10 equivalentes en las unidades. El proceso continúa en forma similar hasta que ya no podamos restar el número de las memorias de arriba.
Cuando se llenen los 10 lugares de las unidades tomamos una de estas canicas y la colocamos en las decenas. Luego retiramos los 9 que quedan en las unidades para continuar llenando lugares en ésta columna. De manera similar actuamos cuando se llenen los 10 lugares de cualquier columna.
El cociente es el resultado de la segunda yupana y el resultado el de la primera.



c. POTENCIACIÓN

Hemos encontrado que al trabajar con los exponentes de algunos dígitos es aconsejable pasar el número que estamos elevando a su base correspondiente debido a las generaldades halladas, por ejemplo:

$$2^0 = 1$$
$$2^1 = 10_{(2)}$$
$$2^2 = 100_{(2)}$$
$$2^3 = 1000_{(2)}$$

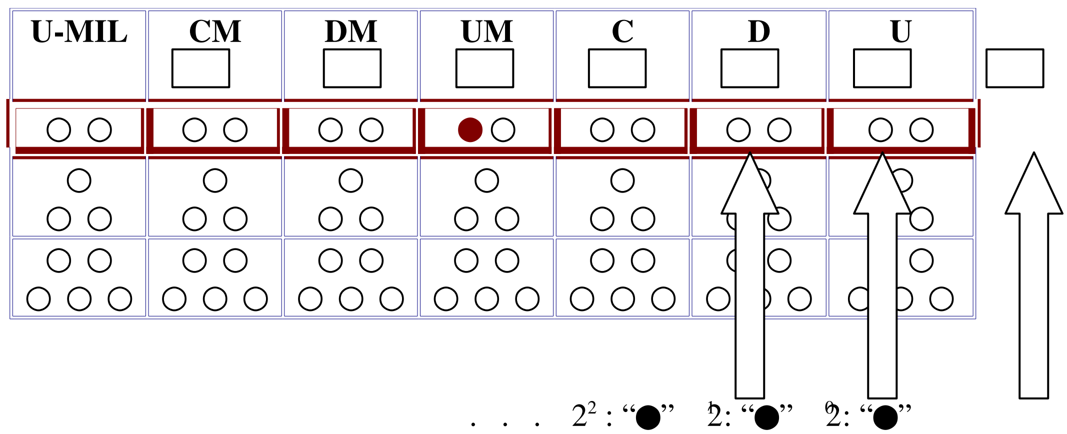
.

.

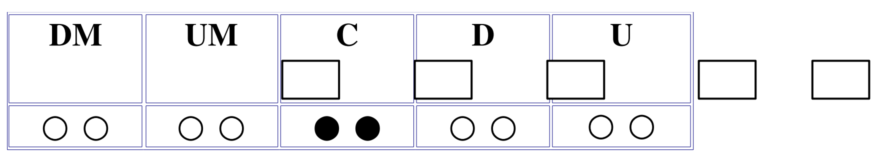
.

$$2^n = \underbrace{100..0}_{\text{n veces}}{}_{(2)}$$

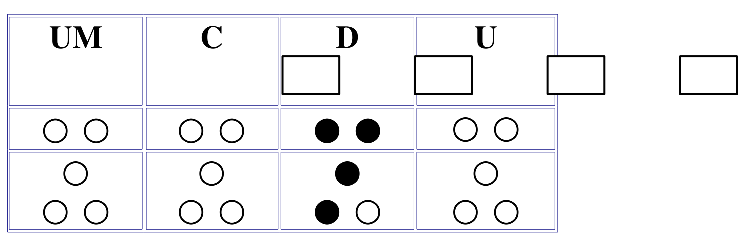
De acuerdo a esto, es fácil ubicar en la yupana las potencias de este número utilizando sólo la tercera fila de abajo hacia arriba:



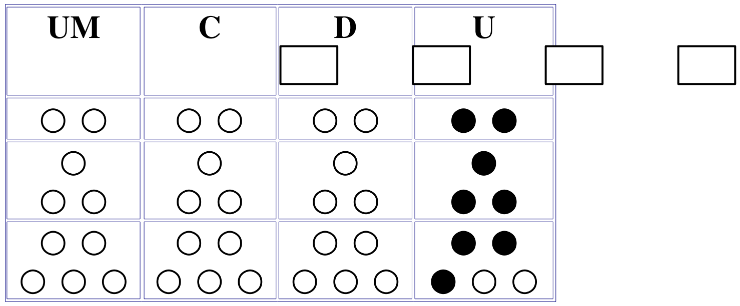
Así, el número ubicado corresponde a $2^3 = 1000_{(2)}$, en base diez hacemos lo siguiente: pasamos la canica ubicada a la columna anterior (de derecha a izquierda) y agregamos otra, de esta manera:



Luego, por cada canica ubicada en la columna de las centenas colocamos dos (número de la base) en la columna de las decenas, así:



Análogamente, pasamos a la columna de las unidades (por cada canica colocamos dos en la casilla anterior).



Por tanto, hemos obtenido:

$$2^3 = 1000_{(2)} = 8$$

En general, para pasar una cifra en cualquier base, en especial en base diez debemos ubicar las canicas hasta llegar a la columna de las unidades sucesivamente, de manera que al pasar de una columna a otra se coloca por cada canica el número de canicas que representa la base.

Con potencias de tres sucede algo análogo a lo anterior:

$$\begin{aligned} 3^0 &= 1 \\ 3^1 &= 3 = 10_{(3)} \\ 3^2 &= 9 = 100_{(3)} \\ &\vdots \\ 3^n &= \underbrace{100..0}_{\text{n veces}}{}_{(3)} \end{aligned}$$

Estos resultados se ubican en la segunda fila de abajo hacia arriba, posteriormente pasamos el número en base 3 a base 10 de la manera anunciada precedentemente.
De la misma forma encontramod las potencias de 5, 7, 8 y 10, pues son las bases con las cuales podemos operar en nuestra yupana.

En cuanto a las potencias de los demás dígitos, tenemos:

$$\begin{aligned} 4^1 &= 2^{2\times 1} = 2^2 = 100_{(2)} \\ 4^2 &= 2^{2\times 2} = 2^4 = 10000_{(2)} \\ 4^3 &= 2^{2\times 3} = 2^6 = 1000000_{(2)} \\ &\vdots \\ 4^n &= 2^{2\times n} = \underbrace{100...0}{}_{(2)} \end{aligned}$$

Ubicamos en la tercera fila (de abajo hacia arriba) n ×2 veces

$9^1 = 3^{2\times1} = 3^2 = 100_{(2)}$
$9^2 = 3^{2\times2} = 3^4 = 10000_{(2)}$ Ubicamos en la tercera fila (de abajo hacia arriba)

.

.

.

$9^n = 3^{2\times n} = 1\underbrace{00...0}_{n\times 2 \text{ veces}}{}_{(2)}$

Lo enunciado en cuanto a la potenciación requiere una yupana con las columnas equivalentes al exponente que deseemos elevar determinado número.

IV. CONCLUSIONES

1. Aunque las culturas precolombinas hayan tenido grandes desarrollos son poco conocidos hoy en día. Debido a la persecución europea se perdió riqueza científica y cultural, por ello lo que actualmente sabemos a grandes rasgos es gracias al interés de los cronistas, arqueólogos e historiadores quienes se han encargado de reconstruir experiencias de nuestros antepasados, entre ellos el uso de la yupana por los incas lo cual muestra su alto grado de civilización y organización, pues como enuncia Stryik *"la sociología de las matemáticas trata de la influencia de las formas de organización social en el origen y desarrollo de las concepciones y métodos matemáticos. Y del rol de las matemáticas como parte de la estructura social y económica de un periodo"*.

2. El ábaco inca, como titula Clara Higuera, es un ejemplo de lo histórico como elemento pedagógico, pues es innegable su valioso aporte a la matemática y a la

pedagogía, a la primera porque rescata el verdadero sentido de multiplicar y dividir; además, motiva la creación de nuevos algoritmos que faciliten las operaciones aritméticas y otros posibles usos a este artefacto y por último familiariza al usuario u operario con la representación numérica real de una cifra, el valor posicional de columnas, el manejo de operaciones,... y lo induce a la idea de calcular (proviene del latín calculus que significa piedrecilla).

3. El investigar (aunque la palabra adecuada es indagar) sobre temas como éste hace de nosotros matemáticos en búsqueda de identidad cultural y nos forma en la ardua tarea de recolectar información precisa sobre un tema determinado el cual nos motiva a crear basados en teorías establecidas o, modificarlas con el fin de lograr mejores resultados a los esperados.

5. REFERENCIAS

BURNS, Glynn William. *La tabla de cálculo de los incas.* Boletín de Lima. Lima.

COSSIU, del Pomar Felipe. *El mundo de los incas.* Ed. Fondo de Cultura Económica. México. 1.969.

PAREJA, Herendia Diego. *Instrumentos prehispánicos de cálculo: el quipu y la yupana.* Instituto de Investigaciones y posgrados. Universidad del Quindío. Armenia, 1.986.

PAREJA, Diego. *Arithmetical Algorithms of the Incas.* Universidad del Quindío.

VOH, Hagen Wolfrang. *Los Incas.* Ed. Joaquín Mortiz. Colección culturas básicas del mundo. México, 1.964