math

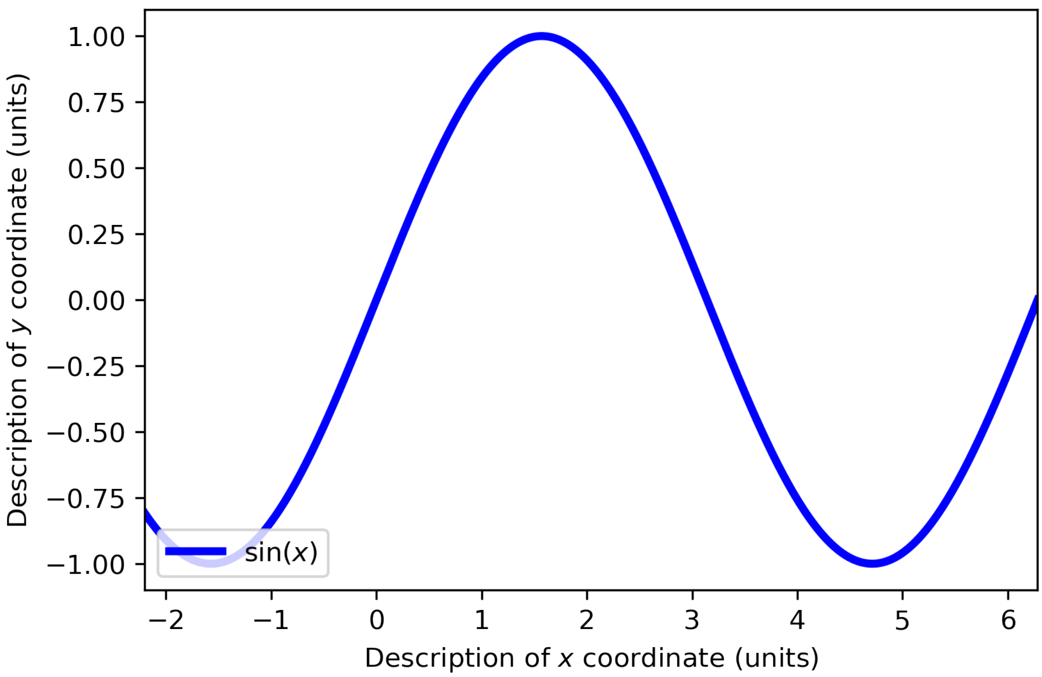
2020 年 12 月 14 日

1 函数

1.1 函数的变换

对于函数

$$y = f(x)$$

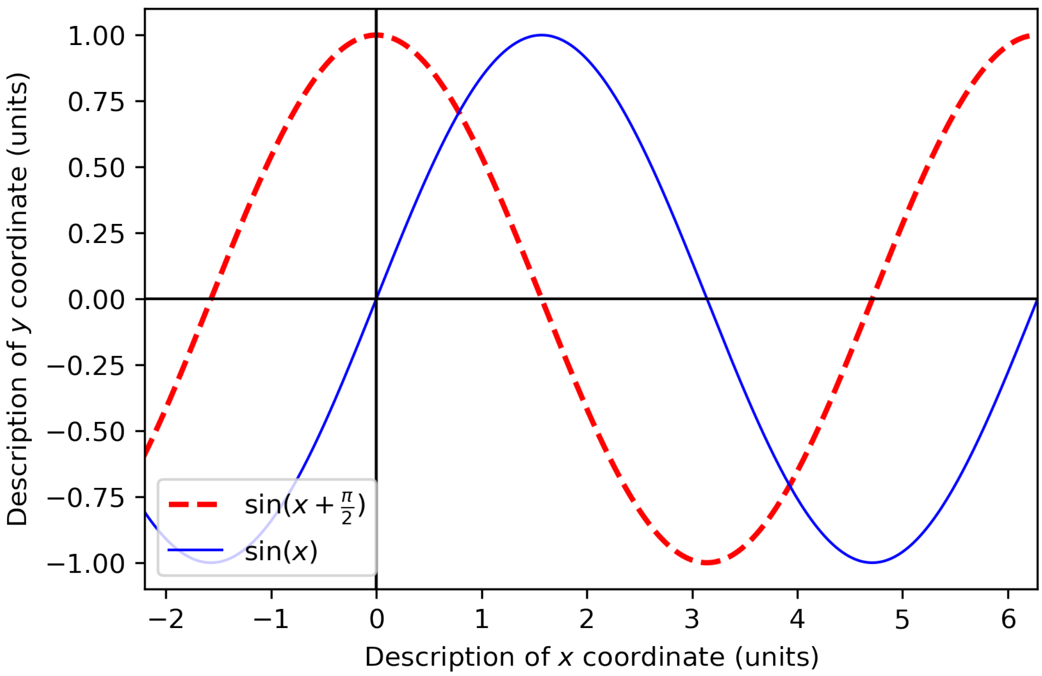


其上任意一点

$$(x_0, f(x_0))$$
$$y_0 = f(x_0)$$

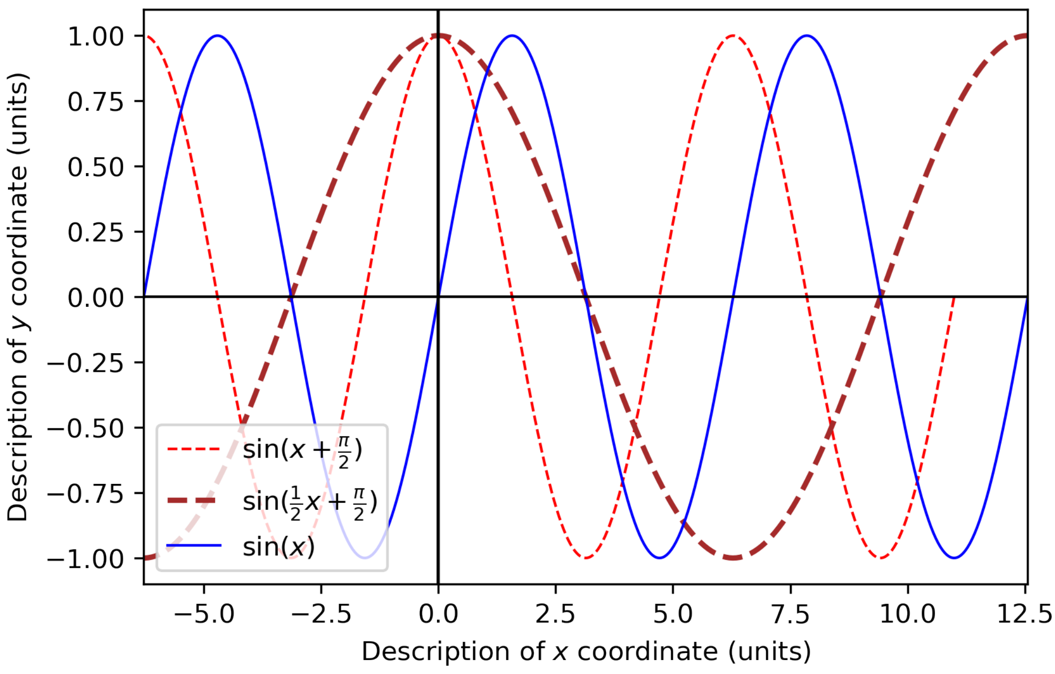
首先对其做平移变换，将函数向左平移 $\frac{\pi}{2}$ 个单位得到

$$(x_0 - \frac{\pi}{2}, f(x_0))$$



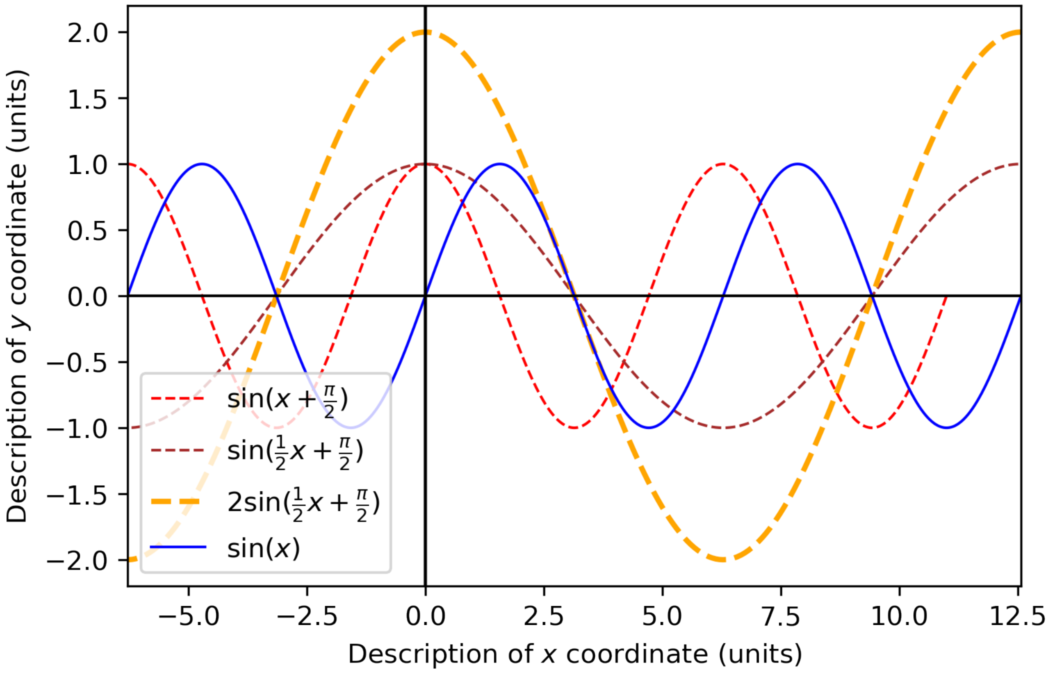
再对其进行伸缩变换，使此刻所有横坐标变为原来的 2 倍得到

$$(2(x_0 - \frac{\pi}{2}), f(x_0))$$



再在竖直方向进行拉伸两倍得到

$$(2(x_0 - \frac{\pi}{2}), 2f(x_0))$$



最后得到关系式

$$x' = 2x_0 - \pi$$
$$y' = 2y_0$$

其中 $y_0 = f(x_0)$

变换可得

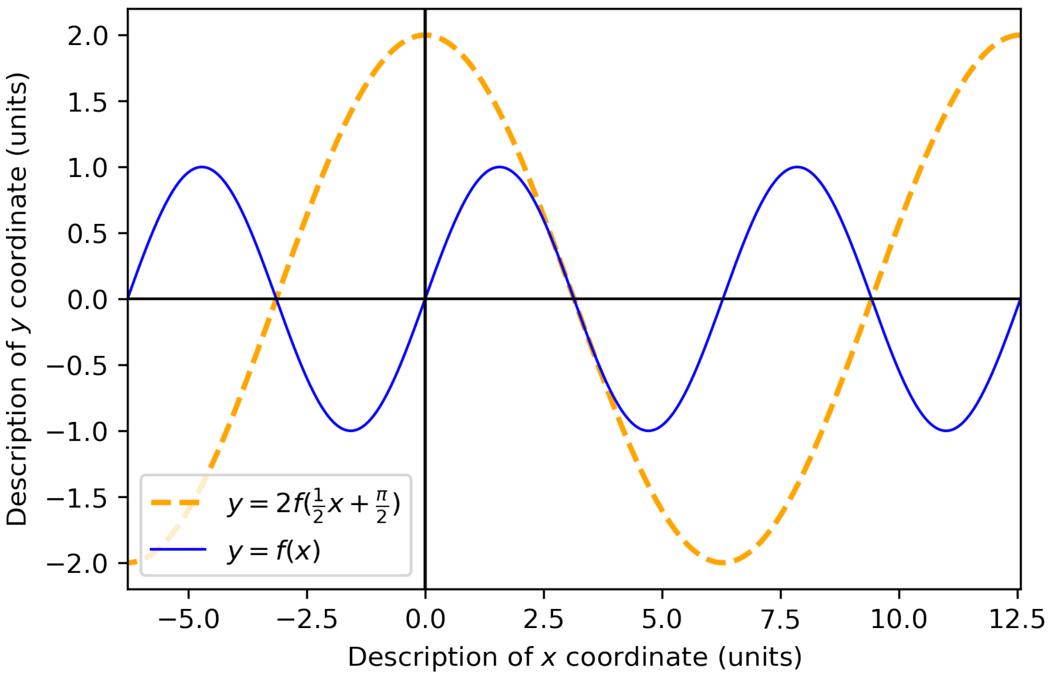
$$x_0 = \tfrac{1}{2}x' + \tfrac{\pi}{2}$$
$$y_0 = \tfrac{1}{2}y'$$

带入可得

$$\frac{1}{2}y' = f(\frac{1}{2}x' + \frac{\pi}{2})$$

容易知道对于任意的

$$(x', y')$$
$$y = 2f(\tfrac{1}{2}x + \tfrac{\pi}{2})$$

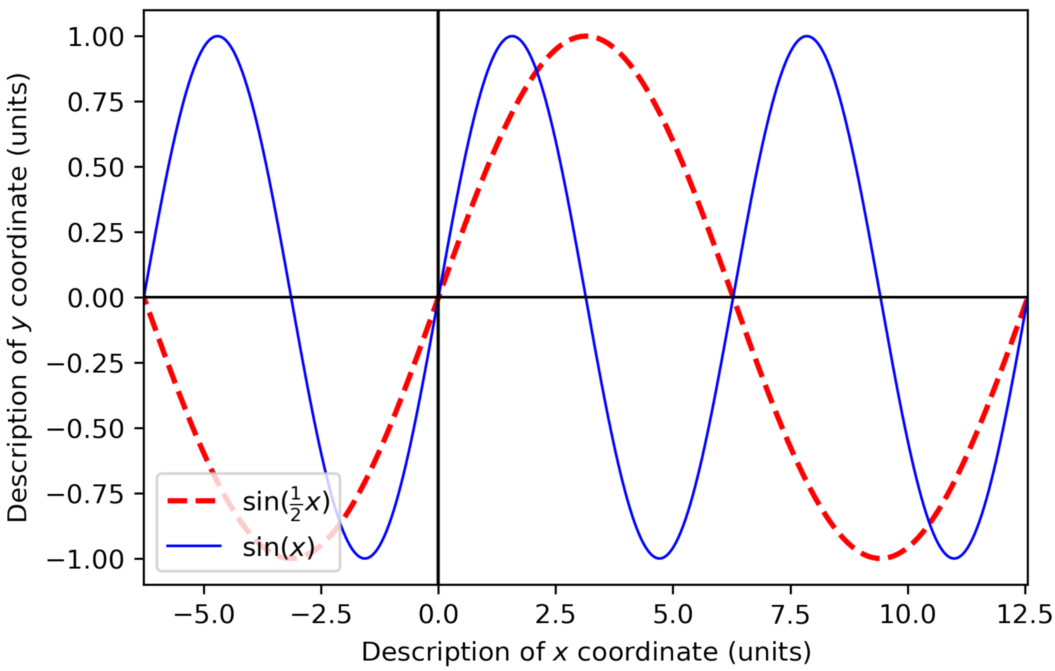


同理，对于

$$y = f(x)$$

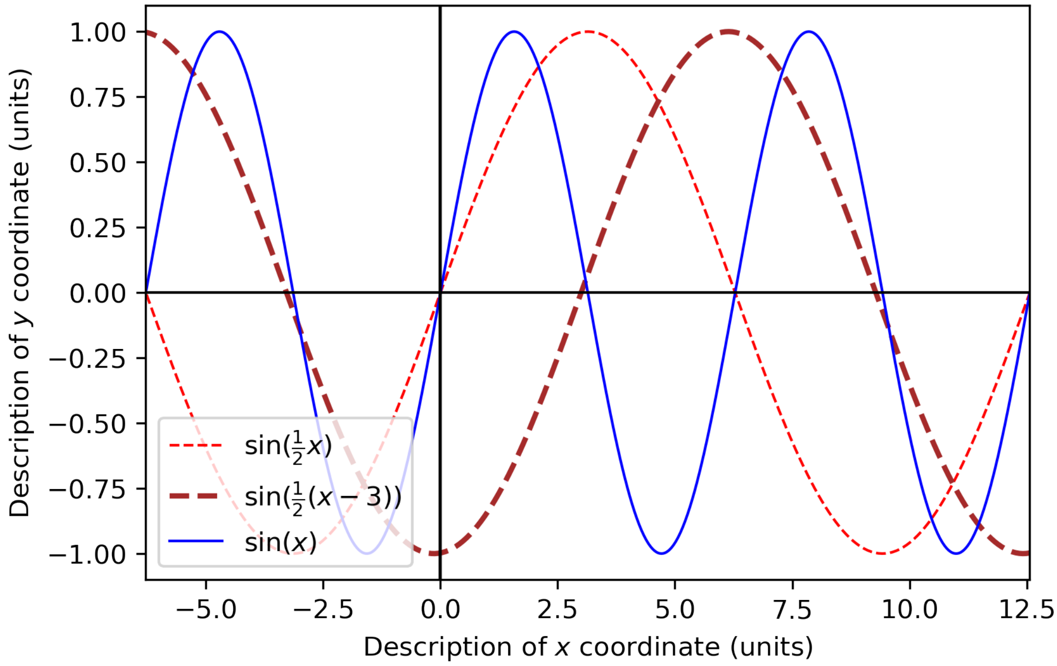
先把横坐标拉伸 2 倍

$$(2x_0, y_0)$$



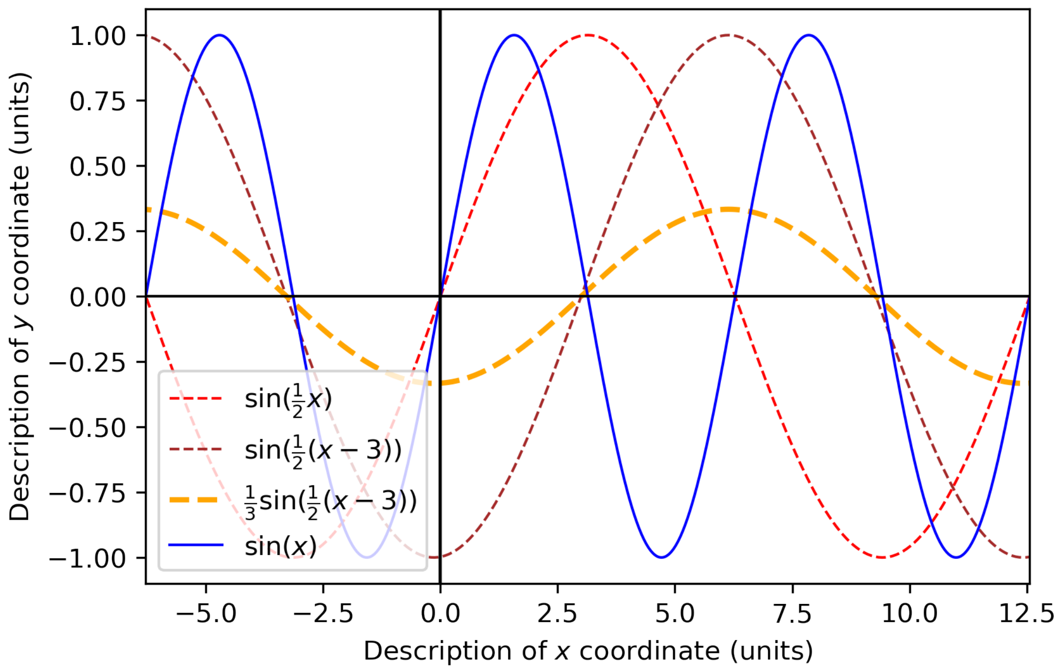
再右移 3 个单位

$$(2x_0 + 3, y_0)$$



再竖着拉伸 $\frac{1}{3}$ 倍

$$(2x_0 + 3, \frac{1}{3}y_0)$$

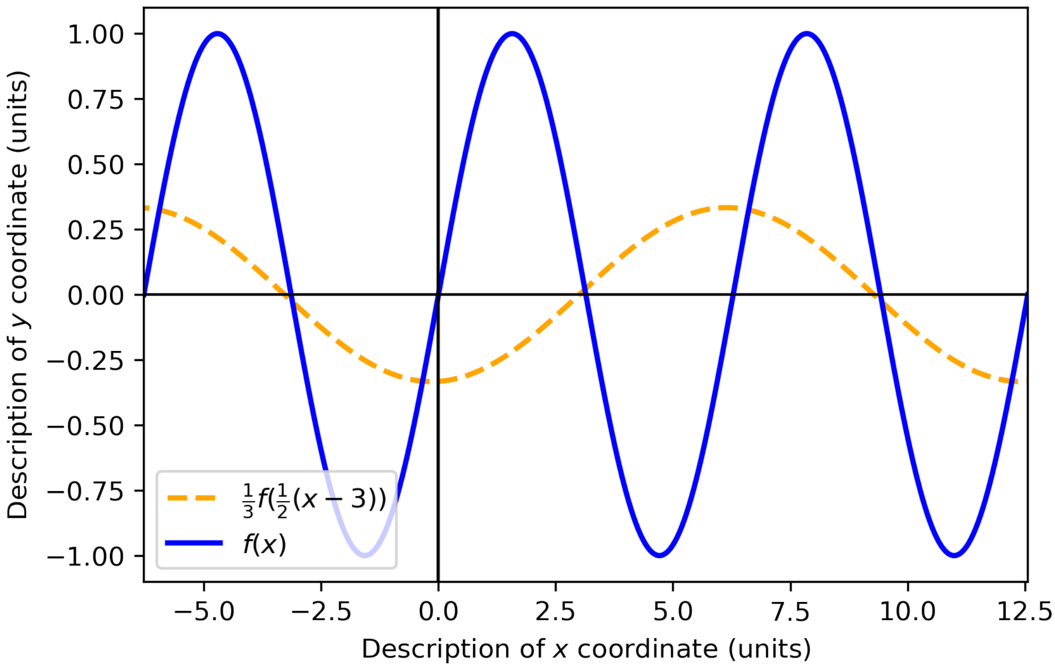


有对应关系

$$x' = 2x_0 + 3$$
$$y' = \frac{1}{3}y_0$$

代入有

$$y' = \frac{1}{3}f(\frac{1}{2}(x'-3))$$



1.2 实例详解

把

$$y = f(\omega x + \phi)$$

向左平移 m 个单位

对于点

$$(x_0, y_0)$$

有映射

$$f : \omega x_0 + \phi \longrightarrow y_0$$

平移后的点为

$$(x_0 - m, y_0)$$

记 $x_0 - m = x_1$ 则有映射

$$f : \omega(x_1 + m) + \phi \longrightarrow y_0$$

即对于变换后的点而言任意给出的 x 与 y 有关系式

$$y = f(\omega(x + m) + \phi)$$

直接有**推论**

$$y = f(\omega x + \phi) = f(\omega(x + \frac{\phi}{\omega}))$$

可以由

$$y = f(\omega x)$$

向左平移 $\frac{\phi}{\omega}$ 个单位得到

同理，把

$$y = f(\omega x + \phi)$$

在水平方向拉伸 k 倍

拉伸后的点为

$$(kx_0, y_0)$$

记 $x_2 = kx_0$ 有

$$f : \omega\frac{x_2}{k} + \phi \longrightarrow y_0$$

平移后的函数即为

$$y = f(\omega\frac{x_2}{k} + \phi)$$

1.2.1 推论

在水平方向的伸缩不改变 ϕ

水平方向的平移作用在 ω 的括号里

如何快速

$$y = f(\omega_1 x + \phi_1) \longrightarrow y = f(\omega_2 x + \phi_2)$$

根据推论首先改 ω 不改变 ϕ

即在水平方向伸缩 $\frac{\omega_1}{\omega_2}$ 倍得到

$$\omega_1 x_0 = \omega_2 x_1$$
$$x_1 = \frac{\omega_1}{\omega_2} x_0$$

然后再水平平移，我不写了，你懂得

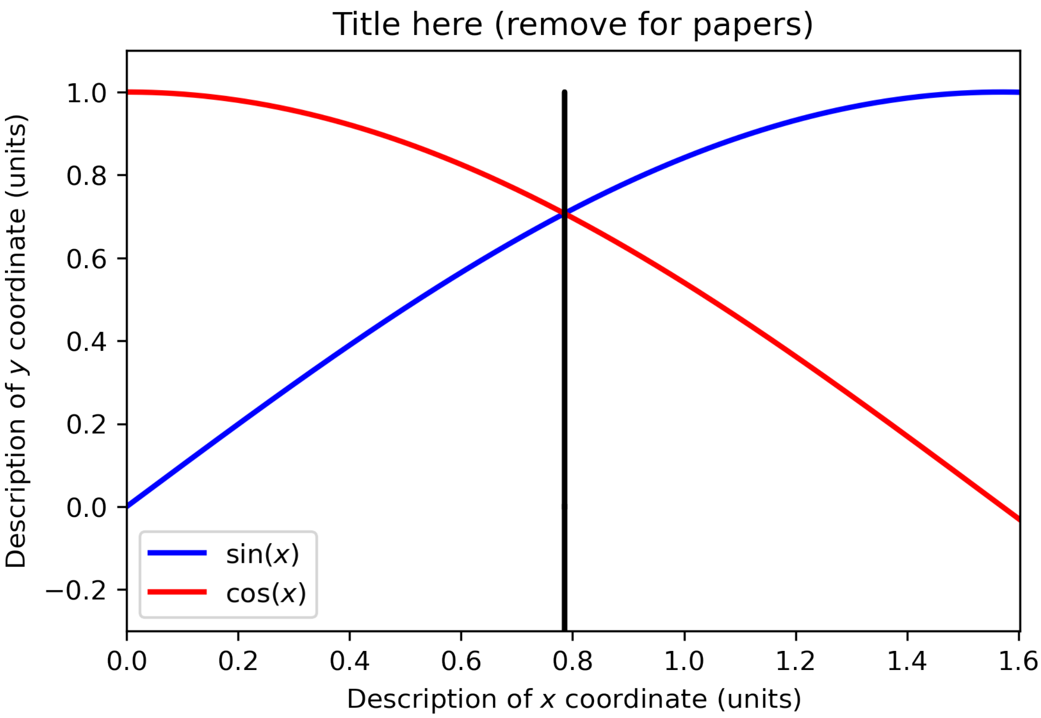
1.3 奇怪的题

锐角三角形 ABC 中，欲证

$$sinA + sinB + sinC > cosA + cosB + cosC$$

注意到

$$A + B > \frac{\pi}{2}$$



注意到

$$\frac{\pi}{4} - A < B - \frac{\pi}{4}$$

所以有

$$sinA > cosB$$

得证

2 易错点

2.1 注意平凡情况

比如斜率为 0 啊，二次函数首项系数为 0 啊啥的，这一写，不就有分了？先写上再说

导数切线题注意看好，是**在**某点的切线，还是**过**某点的切线

概率题，把事件写上，要不然扣分！

2.2 咱们来看看一个简单的矩阵

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

条件告诉你

$$a_{ik} \neq a_{jk}$$

说的是啥意思呢

说的是同一列中的第 i 个和第 j 个不等！

2.3 有关向量的角度

注意到向量的角度从 0 取到 π，其中，0 不是锐角，π 不是钝角

3 圆锥曲线

3.1 二次曲线系

简单回顾

对于任意二次曲线

$$A_1x^2 + B_1y^2 + C_1xy + D_1x + E_1y + F_1 = 0$$
$$A_2x^2 + B_2y^2 + C_2xy + D_2x + E_2y + F_2 = 0$$

过它们交点的二次曲线可以写成

$$\mu(A_1x^2 + B_1y^2 + C_1xy + D_1x + E_1y + F_1) + \lambda(A_2x^2 + B_2y^2 + C_2xy + D_2x + E_2y + F_2) = 0$$

这时候，只要配配系数就可以解决问题了

比如圆的方程必没有 xy 项，且 x^2 和 y^2 系数相等

3.1.1 实例详解

椭圆

$$Ax^2 + By^2 + F = 0$$

椭圆外一点 E 在定直线 x=C 上运动，与左顶点 A 与右顶点 B 连直线交椭圆于四个点 ACBD

证明 AB 与 CD 交点为定点

只需设出 l_{EA} 和 l_{EB} 的方程并乘在一块再与椭圆方程构建二次曲线系

就可以得到一定过 ABCD 四个点的二次曲线

随后，把 l_{AB} 和 l_{CD} 的直线根据 CD 过定点设出来，调参数即可

3.2 中点弦

中点弦是指，这有一个点，过这个点的直线与二次曲线恰好交于两点，这个点是中点，那么这条直线就能确定了

对于任意二次曲线

$$Ax^2+By^2+Cxy+Dx+Ey+F=0$$

设

$$(x_0,y_0)$$

为那个中点

则有另外两个被分成两段的点

$$(x_1,y_1),(2x_0-x_1,2y_0-y_1)$$

立刻有方程

$$Ax_1^2+By_1^2+Cx_1y_1+Dx_1+Ey_1+F=0 \qquad (1)$$
$$A(2x_0-x_1)^2+B(2y_0-y_1)^2+C(2x_0-x_1)(2y_0-y_1)+D(2x_0-x_1)+E(2y_0-y_1)+F=0 \qquad (2)$$

(2)-(1) 得到

$$A(4x_0^2-4x_0x_1)+B(4y_0^2-4y_0y_1)+C(4x_0y_0-2(x_0y_1+y_0x_1))+D(2x_0-2x_1)+E(2y_0-2y_1)=0$$

化简得到

$$(2Ax_0+Cy_0+D)(x_1-x_0)+(2By_0+Cx_0+E)(y_1-y_0)=0$$

看得到

$$(2Ax_0+Cy_0+D,2By_0+Cx_0+E)$$

是该直线的法向量

所以中点弦即为

$$(2Ax_0+Cy_0+D)(x-x_0)+(2By_0+Cx_0+E)(y-y_0)=0$$

或者这个形式

$$(2Ax_0+Cy_0+D)x+(2By_0+Cx_0+E)y=(2Ax_0+Cy_0+D)x_0+(2By_0+Cx_0+E)y_0$$

注意到 (x_0,y_0) 关于该曲线的极线为

$$Ax_0x+By_0y+C\frac{x_0y+y_0x}{2}+D\frac{x_0+x}{2}+E\frac{y_0+y}{2}+F=0$$

或者换一种写法

$$(2Ax_0+Cy_0+D)x+(2By_0+Cx_0+E)y=-2F$$

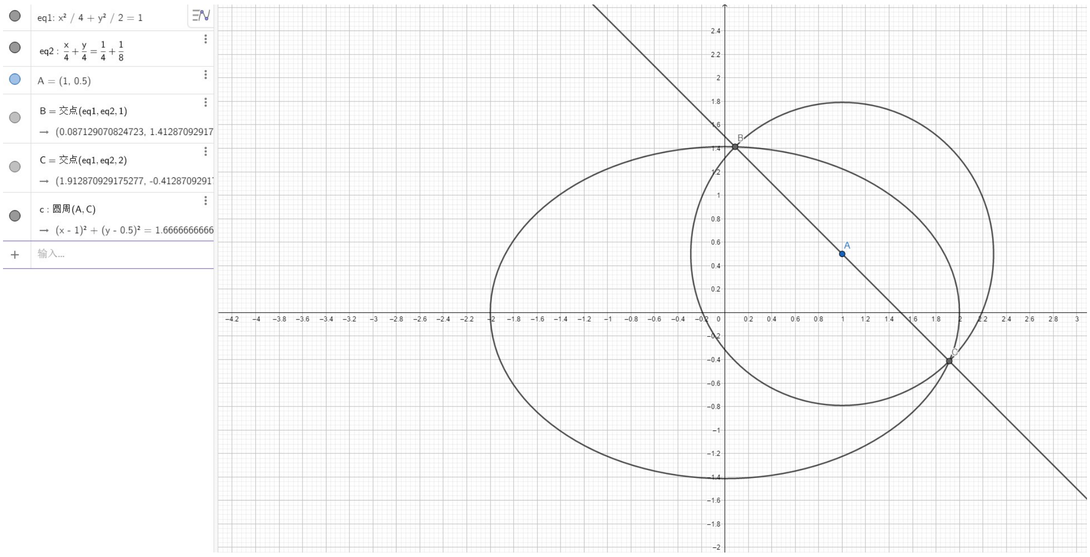
形式相近，方便记忆

3.2.1 结论

求中点弦只要把这个点的极线写出来，左边只放 x 和 y，在右边放 x 和 y 对应前面的系数和 x_0, y_0

举例，椭圆 $Ax^2 + By^2 + F = 0$ 的中点弦是

$$Ax_0x + By_0y = Ax_0^2 + By_0^2$$



4 集合

简单的定义

$$\forall a \in A, \exists b = a \in B \Rightarrow A \subseteq B$$

简单的应用

$$if \quad \forall x_1 \in D_1, f(x_1) \in A, \exists x_2 \in D_2, g(x_2) \in B \Rightarrow A \subseteq B$$

其中，A 和 B 分别为 $x \in D_1$ 时 $f(x_1)$ 的值域和 $x \in D_2$ 时 $g(x_2)$ 的值域

5 小技巧

5.1 代数

见到形如

$$xy + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 1$$

的式子该怎么处理呢？

可以两边乘以 xy 然后当作 x 的二次函数来解

可以利用

$$(a+1)(b+1) = ab + a + b + 1$$

这个结论

换元

$$\begin{cases} xy = a \\ \frac{1}{x} = b \\ \frac{1}{y} = c \end{cases}$$

有

$$\begin{cases} a+b+c=1 \\ abc=1 \end{cases}$$

椭圆小题，只告诉焦点和切线可以想 1. 光学性质 2. $|F_1P||F_2P| = b^2$（辅助圆）推论是可以通过辅助圆和切线比较准确的找焦点

5.2 数论

对于偶数来说，可以表示为 2^n 以及 $2^m \cdot c$ 其中

$$c = 2k+1 \quad k \in \mathbb{N}^+$$

对于

$$(i+j)(i-j) \quad (i,j \in \mathbb{N}^+)$$

可以表示除了 1，2 之外的所有自然数

而对于

$$(i+j)(i-j+1) \quad (i,j \in \mathbb{N}^+)$$

来说，可以表示除了 2 的幂之外的所有偶数

给定一个不是 2 的幂的偶数，必然能写成

$$2^m \cdot c \quad \text{where} \quad c = 2k+1 \quad k \in \mathbb{N}^+$$

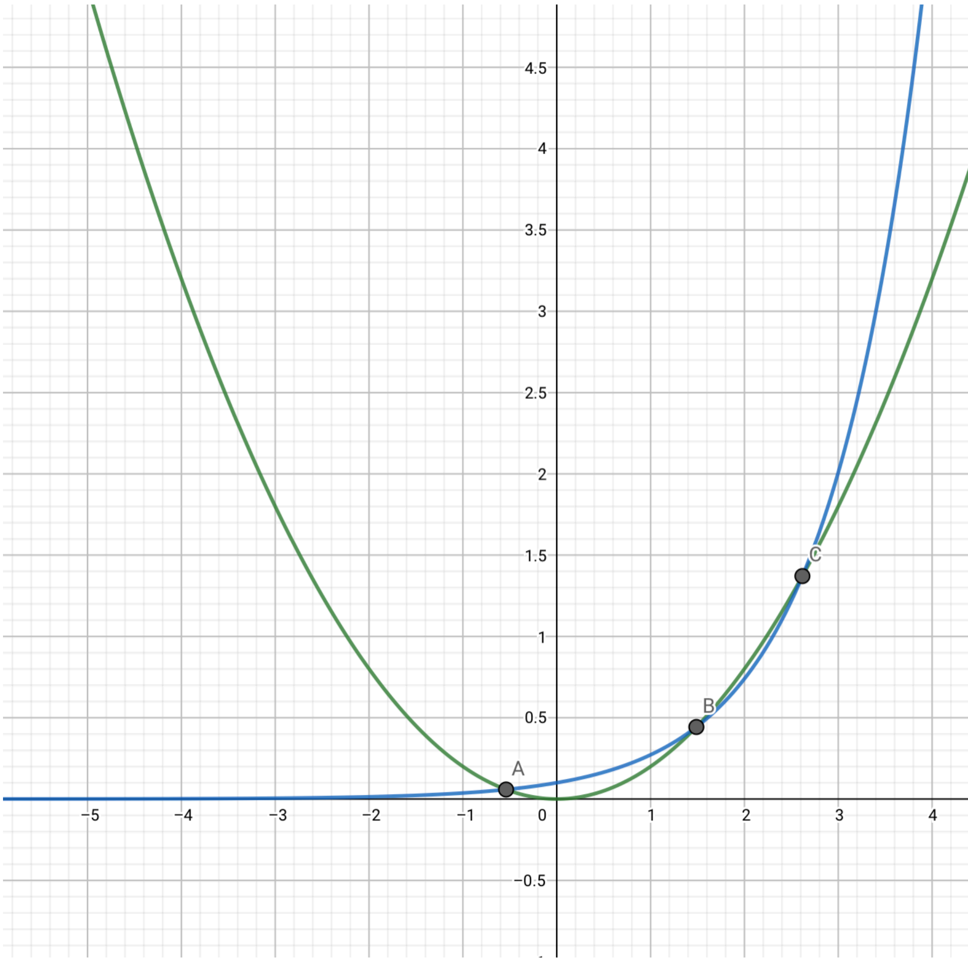
则只需令

$$\begin{aligned} & i+j = 2^m \\ & i-j+1 = c = 2k+1 \end{aligned}$$

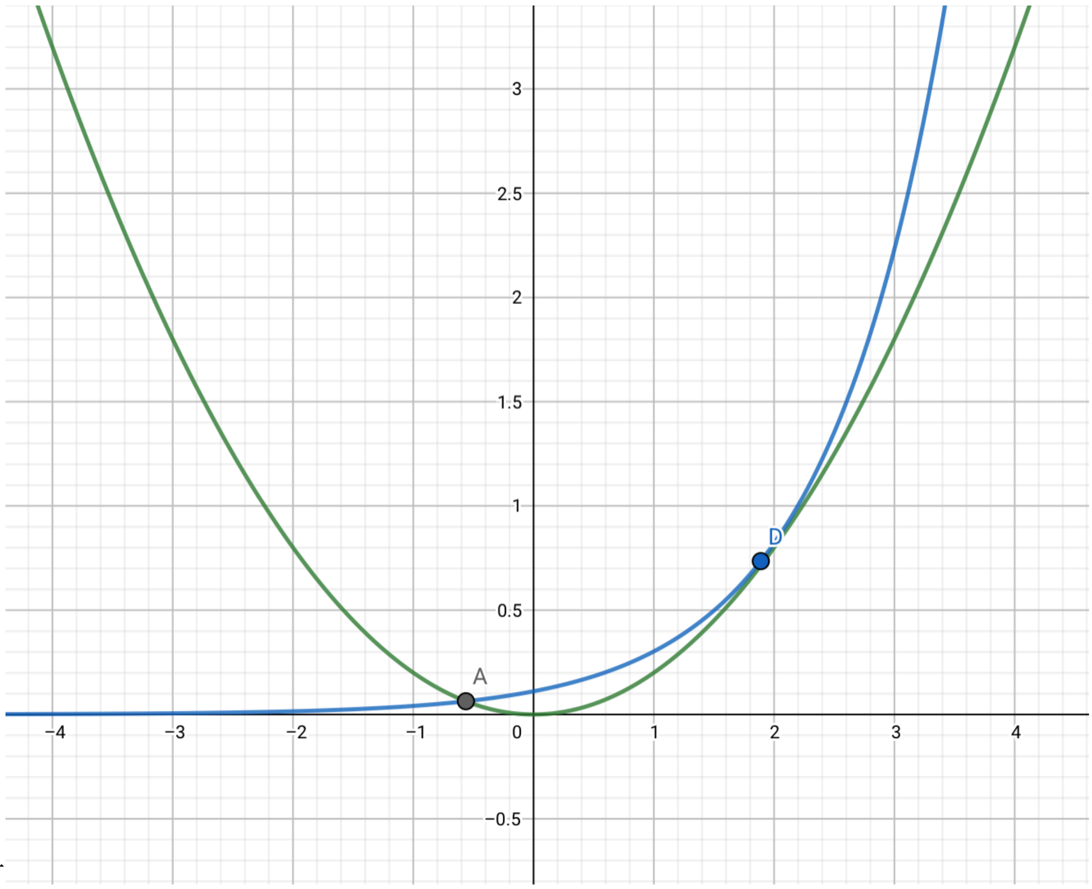
就能解出一组 (i,j)

5.3 导数题

对于任意一道导数题，先观察一下函数是否过某定点，与参数无关的，可以尝试验证 ±1,±2,±e，很可能后面要用到。该技巧适用于一切函数题。



算两条曲线的交点时需要注意,除了



还有

不过其实我们发现算两条曲线是麻烦的，我们最好转化成一条直线和一条曲线

5.4 裂项

对于 $n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)$ 这样的整式，可以

$$n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4) = \frac{1}{6}[n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)(n+5)-(n-1)n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)]$$

5.5 最后一题

- 要抽象思考，比如说，你要求的东西只跟集合的基数有关（cardinality），那就没必要关注具体的细节，直接计算 card 就行
- 注意 **奇偶分析**会是极其有用的手段。有的时候可以直接用奇数和偶数来代替你要写的具体的项 (mod2)，举个例子 $|a_{n+1}-a_n|=1$，且 $a_1=0$，你发现，写出每一项是不好写的，但是写奇偶是没问题的，奇数项为 1，偶数项为 0，这样的手段往往可以帮你快速判断或证明一个命题为假
- 有时候一定要想想，我正在求的东西我真的在乎吗？我真的在乎里面具体每一个数吗？我大概是不在乎的，抽象点！
- 一个 n 元集合 $A=\{a_1.....a_n\}$ 的所有子集可以用一个 n 位的 2 进制数表示，或者，n 维向量进行表示，用 1 和 0 来代表选或没选该元素，好处是 **可以用 *0* 来湮灭我所不需要的东西**。比如我告诉你 A 的不同的两个子集的交集的 card 是个偶数，就可以变成，

  $$\vec{B_i}\cdot\vec{B_j}=2n \quad n\in\mathbb{N}^+$$

  ，这样我就又可以通过点乘来奇偶分析了！
- 见到新定义的运算，立马去想基本运算律，比如 0 元，逆元，单位元。结合律，交换律，分配律
- 当你发现要处理有关无理数的数论问题时，基本上就是思路错了，仔细揣摩条件，寻找矛盾，比如条件给你一个公比大于 2 的等比数列，你就证它公比大于 2 是有问题的。