ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

Scuola di Scienze

Corso di Laurea Magistrale in Matematica

Un'analisi del concetto di limite tra epistemologia e didattica

Relatore:

Chiar.mo Prof.
Paolo Negrini

Presentata da:

Eleonora Dallagiacoma

Prima sessione

Anno Accademico 2012-2013

A mamma, papà …

… Eli …

… e Riccardo.

Ogni cosa è più semplice di
quanto si pensi e, allo
stesso tempo, più complessa
di quanto si immagini.
(J.W. von Goethe)

Indice

Introduzione

L’Analisi è un settore significativo della matematica. Essa fornisce strumenti in varie applicazioni, sfruttate anche in altre branche del sapere umano, quali la Fisica, la Chimica, la Biologia, ecc. . Il valore dell’analisi matematica non si limita solo alle sue applicazioni: i suoi concetti fondamentali di numero, di limite, di infinitesimo, di infinito e tanti altri hanno occupato il pensiero filosofico attraverso i secoli. Morris Kline afferma:

il Calcolo, a fianco della Geometria Euclidea, è la più grande creazione di tutta la matematica.

(Kline, 1972)

La nozione basilare per le fondazioni e per lo sviluppo dell’analisi è quella di limite. Seppure in alcuni casi tale concetto possa apparire quasi intuitivo, esso cela una notevole complessità. È stato anche uno dei primi temi di cui si sono occupati i ricercatori in didattica della matematica; sono state compiute numerose ricerche per determinare la natura e le possibili cause delle diffuse difficoltà che gli studenti incontrano nel momento in cui si approcciano al concetto di limite. La teoria degli ostacoli può risultare un interessante costrutto teorico per identificare difficoltà incontrate dagli studenti nei processi di apprendimento e per determinare, di conseguenza, strategie più appropriate di insegnamento. È possibile distinguere diversi tipi di ostacoli: epistemologici, causati dalla natura dei concetti matematici stessi; genetici e psicologici, legati al soggetto e al suo sviluppo personale, mentale; didattici, legati alla trasposizione didattica, alle pratiche di insegnamento; di carattere cognitivo, dovuti ai processi di astrazione e concettualizzazione; infine di carattere metacognitivo, dovuti all'insieme di atteggiamenti con cui gli studenti si rapportano alla conoscenza matematica. Nonostante questa netta distinzione spesso e volentieri tali ostacoli si intersecano e influenzano a vicenda.

Nel primo capitolo della tesi si cercherà di analizzare gli ostacoli epistemologici legati alla nozione di limite, riprendendo lo sviluppo storico del concetto; nel secondo capitolo, invece, si farà maggiore riferimento agli altri possibili ostacoli. Tale studio risulterà utile per l'analisi della ricerca esposta nel terzo ed ultimo capitolo della tesi, riguardante proprio alcune possibili difficoltà degli studenti nell’apprendimento del concetto di limite.

Capitolo 1

Analisi storico-epistemologica del concetto di limite

1.1 Storia, epistemologia e cultura

Nell'immaginario collettivo storia-epistemologia e matematica-fisica appartengono a mondi separati; circa cinquant'anni fa Charles P. Snow aveva parlato del cosiddetto problema delle "due culture", nel senso che cultura umanistica e scientifica venivano considerate nettamente separate, non vi era nulla in comune tra le due. Tale problema è strettamente legato all'immagine della scienza che si possiede e in Italia, molto probabilmente, giocò un ruolo fondamentale la prima grande riforma del sistema scolastico, varata nel 1923 dal filosofo neoidealista Giovanni Gentile, in cui era dato maggior risalto alle cosiddette materie umanistiche a scapito di quelle scientifiche.
Le ricerche degli ultimi trent'anni hanno mostrato come, al contrario, ci sia la necessità di colmare il divario tra queste due culture, come sia necessario un approccio storico ed epistemologico nell'insegnamento delle scienze in generale e della matematica in particolare.

La storia e l'epistemologia non sono più considerate come un lusso per specialisti, ma come una componente essenziale della formazione disciplinare chiara.

(Speranza, 1992)

Questo non significa porre attenzione ai fatti storici in sé, è importante evitare di trasformare la storia della matematica in un ulteriore bagaglio nozionistico che causerebbe un rifiuto ancora maggiore da parte degli studenti. Fondamentale risulta osservare come ogni soluzione proposta da matematici del passato a particolari problemi e situazioni sia stata tale perché legata al particolare contesto socio-culturale in cui è stata elaborata.

La configurazione e il contenuto della conoscenza matematica è propriamente ed intimamente definito dalla cultura nella quale essa si sviluppa.

(Radford, 1997)

Già all'inizio del secolo scorso alcuni matematici, tra cui Enriques, avevano auspicato quest'esigenza:

Dalla storia della scienza vuolsi apprendere non tanto la notizia erudita, quanto la considerazione dinamica dei concetti e delle teorie, ravvisando l'unità di pensiero che si esprime talvolta in forme e sviluppi diversi.

(Enriques, Lazzeri, 1921)

L'interesse per un approccio di tipo storico è legato anche al fatto che si riconosce, nel processo di apprendimento della matematica, l'esistenza di "ostacoli epistemologici". Il primo a parlare di ostacolo epistemologico fu Gaston Bachelard nel suo *La formation de l'esprit scientifique*. Egli, in verità, si occupò più di scienze sperimentali che di matematica, ma le sue idee sono comunque molto interessanti nell'ambito della filosofia della scienza. Egli ritiene che in molti casi una conoscenza anteriore funga da ostacolo per una conoscenza successiva. Scrive Bachelard nel 1938:

Quando si ricercano le condizioni psicologiche dei progressi delle scienze, ci si convince ben presto che è in termini di ostacoli che bisogna porre il problema della conoscenza scientifica. E non si tratta di considerare ostacoli esterni, come la complessità e la fugacità dei fenomeni, oppure di incolpare la debolezza dei sensi e dello spirito umano, perché è all’interno dell’atto stesso del conoscere che, per una specie di necessità funzionale, appaiono lentezze e confusioni. È qui che mostreremo alcune cause di stagnazione e persino di regresso della scienza; qui ne riveleremo le cause di inerzia; e tutte queste cause le chiameremo ostacoli epistemologici.

(Bachelard, 1938)

A proposito degli ostacoli epistemologici Sierpinska scrive che:

sono il risultato del sistema concettuale dello studente, delle sue intuizioni, dei suoi metodi di porsi di fronte ai problemi (...) Gli ostacoli epistemologici costituiscono un supporto per la scoperta di una teoria manifestatasi in un determinato periodo storico. é un dato di fatto che gli ostacoli sono inevitabili e non possono essere annullati perché su ogni fase della loro scoperta, la conoscenza è stata costruita ed adeguata a problemi che si affacciano verso la soluzione alla quale sono legate.
(Andriani, Dallanoce, Falcade, Foglia, Gregori, Grugnetti, Maffini, Marchini, Rizza, Vannucci, 2005)

Tali ostacoli si possono ritrovare nella storia dei concetti stessi nel momento in cui si individua una frattura, un cambiamento di concezione e possono divenire ostacoli didattici, nel caso delle problematiche di insegnamento-apprendimento. Un ostacolo epistemologico è da intendersi come una conoscenza, non come una mancanza di conoscenza; ma una conoscenza che blocca quelle successive sullo stesso tema quando si cerca di ampliarle.
Secondo Guy Brousseau:

Organizzare il superamento di un ostacolo consisterà nel proporre una situazione suscettibile di evolvere e di far evolvere l'allievo secondo una dialettica conveniente. Si tratterà, non di comunicare le informazioni che si vogliono insegnare, bensì di trovare una situazione nella quale esse siano le sole ad essere soddisfacenti o ottimali - rispetto a quelle alle quali si oppongono - per ottenere un risultato fatto proprio dall'allievo.
(Andriani, Dallanoce, Falcade, Foglia, Gregori, Grugnetti, Maffini, Marchini, Rizza, Vannucci, 2005)

Inoltre Cornu scrive:

The construction of pedagogical strategies for teaching students must then take such obstacles into account. It is not a question of avoiding them but, on the contrary, to lead the student to meet them and to overcome them, seeing the obstacles as constituent parts of the revised mathematical concepts which are to be acquired.

(Cornu, 1991)

Ultimamente si è messo in evidenza come gli ostacoli epistemologici siano essenziali anche nella formazione della concezione epistemologica dell'insegnante e quindi, a maggior ragione, giochino un ruolo chiave nella trasformazione del sapere in conoscenza.

1.2 Ostacoli epistemologici e limiti

Come già accennato in precedenza, varie ricerche internazionali hanno cercato di individuare ostacoli epistemologici in relazione al concetto di limite; in particolare Sierpinska, (1985), e Cornu, (1991), hanno approfondito tale questione. La prima, ripercorrendo lo sviluppo storico del concetto e analizzando un'esperienza proposta a vari studenti, distingue cinque classi di ostacoli relativi alla nozione di limite che denomina:

1) "horror infiniti";
2) ostacoli legati alla nozione di funzione;
3) ostacoli "geometrici";
4) ostacoli "logici";
5) ostacoli legati ai simboli utilizzati.

Scendendo più nei dettagli, gli ostacoli legati al cosiddetto "horror infiniti" (riprendendo un'espressione di Georg Cantor) comprendono:

- ostacoli legati al rifiuto del passaggio al limite come operazione matematica:
    - il passaggio al limite è un metodo di dimostrazione che segue uno schema rigoroso che elimina il problema dell'infinito (si ritrova questo ostacolo ad esempio nel metodo d'esaustione, anche se non tutti gli storici della matematica sono d'accordo);
    - ragionamenti basati su un'induzione incompleta (gli studenti osservati hanno trattato il passaggio al limite come un ragionamento per induzione);
    - il passaggio al limite è la ricerca di ciò di cui noi non conosciamo che approssimazioni;
    - per giustificare il risultato ottenuto non serve fare dimostrazioni rigorose, basta trovare una formula che descrive la situazione e che permette una verifica a posteriori attraverso un semplice calcolo;
- ostacoli di tipo "algebrico":
    - le proprietà di una successione vengono trasferite al suo limite (essenza del principio di continuità di Leibniz);
    - metodi algebrici propri per manipolare grandezze finite vengono estesi a grandezze infinite;
- infine un ostacolo cosiddetto "fisico", che non rientra nei due gruppi precedenti, ma che è legato all'associazione del passaggio al limite a un movimento fisico, un avvicinamento.

Sierpinska sottolinea come solo la formulazione del concetto generale di funzione abbia permesso una formulazione chiara della nozione di limite, libera da intuizioni geometriche e fisiche. Va sottolineato come gli studenti generalmente non fanno attenzione al punto in cui si deve calcolare il limite di una funzione, essi considerano successioni, quindi il punto naturale è l'infinito; questa è una posizione molto simile a quella di Cauchy, il quale considerava unicamente successioni; la concezione del continuo degli studenti è molto più vicina a quella di Cauchy-Leibniz che di Weierstrass. Altri ostacoli legati alla nozione di funzione possono essere:

- l’attenzione focalizzata unicamente sulla formula che definisce la funzione data e non sulla topologia di dominio, codominio, sugli intorni del punto, ecc.;
- spesso le funzioni vengono sempre considerate come monotone (anche storicamente per molto tempo la nozione di limite è stata applicata solo a questo tipo di funzioni);
- inoltre non si distingue la nozione di limite da quelle di estremo superiore e inferiore (bisogna distinguere tra funzione e insieme dei suoi valori, questo risulta particolarmente difficile nel caso di successioni).

Riprendendo ora la classificazione iniziale, Sierpinska distingue due ostacoli di natura "geometrica":

- un'idea geometrica di differenza tra grandezza variabile e una grandezza costante che è il suo limite (la concezione del cerchio come limite dei poligoni inscritti o circoscritti è uno dei sintomi di questo ostacolo);
- infine se oggi l'idea di limite è legata all'operazione topologica di chiusura, nell'intuizione geometrica è in alcune situazioni più vicina a ciò che si può chiamare il "confine" di un insieme (le origini di questo ostacolo sono da ricercare nella mancanza di un concetto ben formato di numero reale).

Passando agli ostacoli "logici" si sottolinea come spesso si sbagli l'uso dei quantificatori e il loro ordine. Essi non si impongono in modo naturale nei problemi legati alla nozione di limite e non è nemmeno sufficiente uno studio preventivo di logica per evitare questi ostacoli.

Infine Sierpinska considera il cosiddetto ostacolo "del simbolo": il simbolo dell'operazione del passaggio al limite è stato introdotto da Cauchy, ma l'uso di questo simbolo rischia di sottolineare troppo la somiglianza con l'algebra, nasconde le differenze e può portare a una perdita di significato.

Qualche anno dopo la pubblicazione di questi risultati, Bernard Cornu ha individuato ostacoli epistemologici in parte differenti rispetto a quelli appena evidenziati. In particolare egli distingue quattro grandi ostacoli nella storia del concetto di limite:

- **the failure to link geometry with numbers**: il metodo di esaustione sembra molto vicino alla nozione di limite, nonostante questo non si può affermare che i Greci possedessero il concetto moderno di limite; il metodo di esaustione ha una natura geometrica, permette di ottenere risultati ignorando il problema dell'infinito; si applica a grandezze, non a numeri; l'interpretazione geometrica è vista come causa di un ostacolo che impedisce il passaggio alla nozione di limite;
- **the notion of the infinitely large and infinetly small**: nella storia della nozione di limite si incontra la supposizione dell'esistenza di quantità infinitamente piccole, quantità così piccole che si possono considerare come nulle, ma con una propria "dimensione"; l'idea di uno stato intermedio tra il nulla e ciò che è effettivamente qualcosa si trova frequentemente tra gli studenti; spesso il simbolo epsilon è visto come rappresentante un numero che non è zero, ma è più piccolo di qualsiasi altro numero reale positivo, analogamente si crede che 0,9999999... sia l'ultimo numero prima di 1 diverso da 1; allo stesso modo molti studenti credono che esista un numero intero più grande di tutti gli altri che non è infinito;
- **the metaphysical aspect of the notion of limit**: spesso sembra che la nozione di limite abbia più a che fare con la metafisica, con la filosofia che con la matematica, anche storicamente vari matematici, come ad esempio Lagrange, hanno espresso un certo sconcerto negli aspetti metafisici del concetto stesso, questo può essere anche dovuto alle difficoltà legate alla nozione di infinito, ad ogni modo spesso e volentieri ciò funge da ostacolo nella comprensione del concetto;
- **is the limit attained or not?**: questa domanda ha causato un grande dibattito nel corso della storia, ancora aperto tra gli studenti di oggi.

Artigue ha così riassunto e classificato le posizioni viste in precedenza:

Questa categorizzazione [quella di A. Sierpinska] è diversa da quella proposta da B. Cornu che, come sottolinea A. Sierpinska, "ha scelto come basilare la nozione numerica di limite (nel senso di Cauchy)", avendo invece lei stessa scelto "la nozione topologica". Si può dunque considerare che si sviluppa, nei diversi Autori, un consenso sull'esistenza di ostacoli epistemologici legati:

- al senso comune della nozione di limite che porta a delle concezioni persistenti di limite come barriera o come ultimo termine di una progressione, o ancora porta a ridurre la convergenza ad un processo strettamente monotono;
- all'impropria generalizzazione delle proprietà dei processi finiti ai processi infiniti, secondo il principio di continuità di Leibniz;
- ad un'eccessiva aderenza al punto di vista geometrico, che da un lato impedisce la chiara identificazione degli oggetti implicati nel processo di limite e delle topologie sulle quali si basano, e d'altro lato rende difficile il sottile gioco tra i quadri numerici e geometrici nel passaggio al limite;
- ma anche a delle concezioni metafisiche sull'infinito e sul suo statuto in matematica.

(Artigue, 2000)

Con queste poche righe ho cercato semplicemente di riprendere alcuni risultati di ricerche fatte in precedenza, che saranno uno dei punti di partenza del lavoro presentato nell'ultimo capitolo.

1.3 Storia del limite

In Italia oggi un qualsiasi corso di analisi matematica considera il concetto di limite come primo argomento su cui basare il calcolo differenziale, integrale e tutto il resto. Scrive Speranza:

L'esposizione attuale [nel 1996] è inquadrabile sia nell'ordine positivistico comtiano delle discipline (la matematica pura precede le "applicazioni"), sia in una visione della matematica che tenda a isolarla dalle altre discipline (al modo di Bourbaki). Il positivismo ha influenzato indirettamente l'insegnamento della matematica in Italia fino alla metà del secolo, per essere sostituito dall'impostazione bourbakista, di tipo idealistico. Storicamente invece, l'analisi è iniziata con il problema delle aree (metodo di esaustione nell'antichità, e metodo degli indivisibili nell'età moderna), per proseguire con il problema delle tangenti, e come strumento per affrontare la necessità della fisica matematica: il concetto di limite è arrivato per ultimo.

(Speranza, 1996)

Nel seguito si cercherà di ricostruire le tappe principali dello sviluppo storico del concetto di limite, sottolineando i suoi molteplici aspetti, anche legati a campi concettuali e registri rappresentativi differenti. Questo può essere utile per cercare di individuare la presenza di ostacoli epistemologici, ponendo attenzione ai periodi di lento sviluppo del concetto e alle difficoltà incontrate da vari matematici, e quindi per conoscere al meglio e interpretare le radici di difficoltà che oggi incontrano gli studenti. Vorrei a questo punto fare un'ulteriore riflessione preliminare: in matematica, e non solo, esistono concetti ricchi, complessi, con una vasta applicabilità e strettamente legati ad altri concetti altrettanto ricchi e complessi; esiste quasi una sorta di rete che unisce ognuno di questi nodi concettuali; difficoltà cognitive inevitabili legate ad un concetto divengono difficoltà legate ad ogni altro concetto della rete. La nozione di limite può a buon diritto annoverarsi tra questi concetti ricchi e complessi. In particolar modo, sia nel suo sviluppo storico, sia nel suo insegnamento è da considerarsi intrinsecamente correlato almeno alle nozioni di infinito, continuo, funzione, numero reale, approssimazione. Quindi cercando di esporre lo sviluppo storico della nozione di limite inevitabilmente tratterò anche altre questioni ad essa strettamente connesse.

1.3.1 L'antica Grecia[1]

1.3.1.1 Antifonte e Brysone

Il concetto di limite, secondo l'accezione comune, ha incominciato a trovare applicazioni matematiche già nell'antica Grecia, tra il V e il IV secolo a.C..

Antifonte (480-410 a.C. circa) fu un celebre oratore, poeta epico e aruspice ateniese, contemporaneo di Socrate. Notizie biografiche su di lui sono fornite da Diogene Laerzio (prima metà del III secolo d.C.) e da Suida (X secolo d.C.). Le notizie relative al frammento matematico che ci interessa (già citato incidentalmente da Aristotele) provengono da Themistio (317-387), Simplicio e Philopone (entrambi vissuti nel VI secolo d.C.). Dal passo attribuito ad Antifonte risulta che egli considera il cerchio come limite dei poligoni inscritti (che nel commentatore più antico Themistio sono quelli di 3, 6, 12, 24, 48, 96,... lati; e che nei commentatori più recenti Simplicio e Philopone sono quelli di 4, 8, 16, 32, 64,...lati).

Questa non è, però, la sola interpretazione dell'opera di Antifonte: ad esempio Enriques, seguendo la testimonianza di Aristotele, ritiene che Antifonte, come empirista, tratti le linee come cose sensibili e non abbia la nozione di limite; inoltre qualche autore ritiene Antifonte posteriore a Ippocrate e attribuibile a questi l'idea di considerare il cerchio come limite dei poligoni inscritti e circoscritti. Riprendendo l'opera di Themistio, egli

[1] Per la trattazione del concetto di limite nell’Antica Grecia si fa particolare riferimento a Cassina (1936).

scrive:

Ma contro Antifonte il geometra non aveva certo nulla da dire: il quale [Antifonte] disegnava un triangolo equilatero nel cerchio e descrivendo sopra ciascun lato e verso la periferia del cerchio un altro triangolo isoscele e facendo questo continuamente, pensava alla fine che i lati del triangolo- che sono rettilinei- finissero a sovrapporsi al contorno; ma ciò aboliva la divisione all'infinito, ipotesi che il geometra postula.

(Cassina, 1936)

La veduta di Antifonte di considerare il cerchio come limite dei poligoni inscritti, cioè come poligono infinilatero[2], è perfettamente giustificata dal significato intuitivo della parola limite. L'errore di Antifonte sta nell'aver affermato quadrabile il cerchio, in quanto è quadrabile ogni poligono inscritto, cioè nell'aver ritenuto applicabile al limite superiore di una classe di poligoni una proprietà valevole per i singoli poligoni della classe; il che è falso. Si noti, però, che questo errore si ritrova ancora per molti secoli e che il riconoscimento esplicito di esso sarà fatto per la prima volta da Bolzano nel 1817. Brysone, altro sofista, posteriore di una generazione circa ad Antifonte è stato ancora più "maltrattato" dagli storici della matematica, specialmente sulla falsariga del giudizio di Aristotele e dei tardi commentatori aristotelici: Alessandro di Afrodisia (fine del II secolo d.C.), Themistio e Philopone. Non vi è concordanza completa fra le notizie riportate da questi commentatori; dagli scarsi frammenti conosciuti si può unicamente dedurre che Brysone considera il cerchio come limite fra poligoni inscritti ed i poligoni circoscritti, cioè: maggiore di ogni poligono inscritto e minore di ogni poligono circoscritto; questo, infatti, è l'unico senso che si può dare alla frase che il cerchio è uguale **ad un certo quadrato compreso fra quello inscritto e quello circoscritto**; poligoni che per Aristotele ed Alessandro d'Afrodisia sono quadrati e per Themistio e Philopone sono poligoni regolari qualunque. Si afferma che Brysone, fondandosi su questa proprietà. abbia dedotto la quadrabilità del cerchio. Se così è, la sua deduzione era certo erronea, per lo stesso motivo ricordato a proposito di Antifonte. Ecco il passo di Themistio relativo a Brysone:

Il cerchio dice è maggiore di tutti i poligoni inscritti e minore dei circoscritti; e poi costruito

[2] La considerazione del cerchio come poligono infinilatero si ritroverà di nuovo solo in M. Stifel (*Arithmetica integra*).

similmente un poligono fra gli inscritti ed i circoscritti al cerchio, questo poligono è precisamente-così come il cerchio-maggiore e minore degli stessi poligoni; cosicché mutuamente eguali (per l'assioma predetto).

(Cassina,1936)

1.3.1.2 Anassagora (498-428 a.C. circa)

Tra i primi ricercatori la cui opera deve essere considerata nell’ambito dei procedimenti infinitesimali della matematica greca è Anassagora. Un suo frammento contiene alcuni spunti che lo collocano tra i primi pensatori che accettano la “sfida” dell’infinitamente piccolo e dell’infinitamente grande:

Rispetto al piccolo non vi è un ultimo grado di piccolezza, ma vi è sempre un più piccolo, essendo impossibile che ciò che è, cessi di essere per divisione.

(Dupont, 1981)

Cercando di interpretare tale frammento si può scorgere una vaga idea di limite: Anassagora, infatti, descrive una quantità che può essere diminuita indefinitamente, pur senza mai giungere ad annullarsi (dal testo sembra plausibile che la grandezza considerata sia soggetta ad una variazione discreta, quindi potrebbe essere opportuno collegare tale intuizione al limite di una successione numerica convergente a zero, piuttosto che al limite di una funzione di variabile reale). Il frammento poi continua:

Così vi è sempre qualcosa di più grande di ciò che è grande

(Dupont, 1981)

In questo caso la prosecuzione del frammento potrebbe essere interpretata in termini di intuizione di un limite infinito. L’assenza di ulteriori testimonianze ci invita a considerare il filosofo di Clazomène solo come

il primo lontano progenitore dell’analisi infinitesimale

(Geymonat, 1947)

1.3.1.3 La scuola eleatica

Un po' semplicisticamente si potrebbe affermare che la nozione di limite funge da saldatura tra la matematica del discreto e quella del continuo; in realtà dietro a questa semplice frase vi sono secoli e secoli di dibattiti e discussioni.

Il problema risale probabilmente alla scuola pitagorica: com'è ben noto, i Pitagorici consideravano i numeri, rigorosamente numeri interi, come componenti ultimi degli oggetti reali e materiali; in un certo senso, essi tentarono di ridurre il continuo al discreto. Ben presto questa teoria si scontrò con la geometria che inevitabilmente mostra la natura continua dei suoi enti. L'illusione di poter esprimere tutto l'universo solo attraverso i numeri naturali o loro rapporti cade miseramente nel momento in cui si scopre l'esistenza di grandezze incommensurabili: la scoperta dell'incommensurabilità tra lato e diagonale di un quadrato[3] fa crollare le basi della filosofia pitagorica. Ciò portò ad una profonda crisi, non solo in matematica, che indusse i matematici a riflettere sulle problematiche del continuo e sulle relazioni con il discreto.

In particolare Zenone di Elea[4], vissuto nel V secolo a.C., fornì, attraverso i suoi famosi paradossi, materiale di discussione. Varie interpretazioni sono state date ai paradossi, ad esempio Speranza (1989) ritiene che alcuni possano essere riletti come dimostrazioni dell'irriducibilità del continuo al discreto. In particolare egli cita quello della freccia, secondo cui, poiché in ogni istante la freccia occupa una posizione definita, e pertanto è istantaneamente ferma, è sempre ferma. Questo paradosso sostanzialmente critica l'opinione secondo cui spazio e tempo sono costituiti da piccoli intervalli indivisibili e, di conseguenza, il movimento è una successione di salti. Zenone quindi sembra mostrare l'inefficacia della riduzione di tempo, spazio e movimento a enti discretizzabili. Tali paradossi, quindi, sul piano epistemologico, mettono in luce la possibilità di distacco tra ambito geometrico e algebrico; in essi si fa sempre riferimento all’'ambito geometrico, l'unico in cui potrebbe essere garantita la (potenzialmente

[3] Dimostrazione. Supponiamo che il lato l e la diagonale d siano commensurabili, allora essi hanno un sottomultiplo comune e per cui esistono m,n interi tali che $l = me$ e $d = ne$. Possiamo anche supporre che m e n siano primi tra loro (se non lo fossero potremmo scrivere $l = \frac{m}{r}(re), d = \frac{n}{r}(re)$ con $\frac{m}{r}$ e $\frac{n}{r}$ interi, se anche $\frac{m}{r}$ e $\frac{n}{r}$ non fossero primi fra loro potremmo continuare ad eliminare i fattori comuni e con un numero finito di passi eliminarli tutti). Per il teorema di Pitagora si ha:

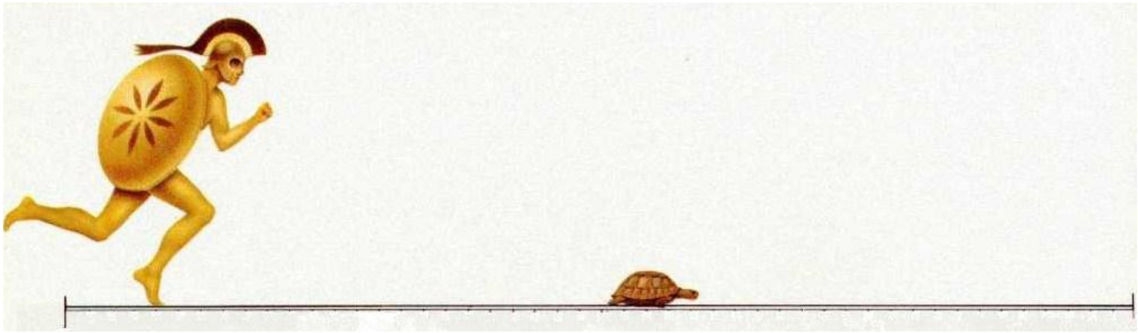
$$n^2e^2 = d^2 = l^2 + l^2 = m^2e^2 + m^2e^2 = 2m^2e^2$$

Cioè $2m^2 = n^2$ e siccome, come dice Aristotele, i pari non sono dispari, questo non può succedere. Infatti n^2deve essere pari e quindi anche n deve essere pari, quindi m è dispari, non avendo fattori comuni con n. D’altra parte se $n = 2p$ troviamo allora $2m^2 = 4p^2$ ossia $m^2 = 2p^2$ pertanto m^2 deve essere pari e deve essere pari anche m. Assurdo.

[4] Com’è noto, nessuno scritto di Zenone ci è pervenuto, le informazioni che abbiamo ci arrivano tramite Platone, Aristotele e Simplicio, che vissero rispettivamente 60, 100 e 1000 anni dopo Zenone.

infinita) divisibilità.

Prendiamo ora in esame il famoso paradosso di Achille e della tartaruga: Achille Piè Veloce è sfidato dalla tartaruga, notoriamente lenta, in una gara podistica; entrambi stabiliscono che la tartaruga parta contemporaneamente ad Achille, ma con un vantaggio di 100 m. Achille vincerà la gara se riuscirà a raggiungere la tartaruga.



La nostra esperienza sensibile fa sì che Achille sia il favorito, ma un ragionamento (paradossale) mostra come la vittoria spetti alla tartaruga, poiché Achille non riuscirà a raggiungerla in un tempo finito. Infatti, ad esempio, supponiamo che Achille corra 10 volte più velocemente della tartaruga. Mentre Achille in pochi secondi copre i 100 m di svantaggio iniziale, la tartaruga percorre ulteriori 10 m; mentre Achille percorre questi 10 m, la tartaruga avrà percorso 1 ulteriore metro; mentre Achille percorre il metro che lo distanzia dalla tartaruga, questa percorre 0,1 m; e così via. Mentre Achille recupera lo svantaggio, la tartaruga percorre sempre una distanza non nulla. Dunque la tartaruga sarà sempre davanti ad Achille, il quale inesorabilmente perderà la gara. Possiamo analizzare la situazione in termini di matematica attuale. La somma dei tratti che separano Achille dalla tartaruga è:

$$S = 100 + 10 + 1 + 0{,}1 + 0{,}01 + \cdots$$

Cioè

$$S = 110 + \sum_{n=0}^{\infty} 0{,}1^n = 110 + \frac{1}{1-0{,}1} = 110 + \frac{1}{0{,}9} = 111{,}\overline{1};$$

quindi, in totale, il tratto che Achille deve percorrere per raggiungere la tartaruga, pur essendo la somma di infiniti addendi, ha un valore finito. Una volta percorso questo tratto, di $111{,}\overline{1}$ m, egli raggiungerà la tartaruga e poco dopo l'avrà superata. Per sciogliere l'apparente paradosso si è ricorso alla teoria delle serie infinite, anche se anche questo tipo di risposta non è immune da critiche.

Alla base del successo di Zenone sta anche il fatto che per gli antichi Greci la somma di infiniti segmenti non può che essere un segmento infinito; l'idea che tale somma possa essere finita era fuori dalla portata concettuale dei più.

1.3.1.4 Gli Atomisti

In questo riassunto delle tappe storiche fondamentali per lo sviluppo del concetto di limite vorrei menzionare anche gli Atomisti, in particolare Democrito di Abdera (460-360 a.C. circa), secondo i quali tutto è composto da vuoto e atomi, enti indivisibili e impercettibili dai sensi, ma accessibili con il pensiero. Democrito distingue bene i due problemi della infinita divisibilità: da un punto di vista matematico astratto ogni ente è infinitamente divisibile in parti; mentre da un punto di vista fisico c'è un limite materiale alla divisibilità e tale limite è detto appunto atomo.

Nella preistoria del calcolo infinitesimale il ruolo di Democrito è basato su alcune autorevoli testimonianze (tra le quali quella di Archimede) e sul frammento:

Due sezioni, eseguite in un cono mediante due piani paralleli fra loro vicinissimi, non possono risultare fra loro uguali, senza che il cono si muti in un cilindro, né possono risultare disuguali, altrimenti il cono presenterebbe rugosità e discontinuità.

(Dupont, 1981)

Il senso dell’affermazione è incentrato sul significato del termine “vicinissimi”: viene spontaneo un parallelismo tra queste sezioni e gli indivisibili di Cavalieri (che riprenderemo in seguito), ma la conoscenza attuale dell’impostazione di Democrito è troppo scarsa per poter interpretare il frammento citato.

Secondo Archimede è Democrito che per primo intuisce che due piramidi, aventi le facce scelte come basi congruenti e la stessa relativa altezza, hanno anche lo stesso volume. Ciò che risulta interessante ai fini di questa trattazione è capire come Democrito giunse a questa “congettura”. Secondo alcuni studiosi egli sapeva che le sezioni di tali piramidi, ottenute con piani paralleli alla faccia comune, hanno la stessa area, perché sono rimpicciolimenti di questa faccia ottenuti nella stessa scala. Democrito avrebbe pensato quindi di approssimare la piramide con un solido "quasi" piramide, detto scaloide[5], costituito dalla sovrapposizione di lamine piane, molto sottili,

[5] Solido costituito da prismi sovrapposti aventi un’altezza “piccola” (enormemente più piccola rispetto

gradatamente più piccole a mano a mano che si avvicinano al vertice opposto alla base, corrispondenti alle diverse sezioni piane parallele alla faccia comune. Da un punto di vista fisico queste lamine, per quanto sottili, hanno sempre un certo spessore; quindi lo scaloide avrà volume minore (o maggiore) della piramide; tuttavia, in ottica matematica, lo spessore può essere pensato "infinitamente piccolo" e di conseguenza lo scaloide può essere considerato coincidente con la piramide. Secondo alcune testimonianze Democrito si sarebbe anche spinto oltre: immaginando un cilindro circoscritto a un prisma e un cono circoscritto a una piramide avente la "base" scelta e la relativa altezza isometriche a quelle del prisma. Aumentando continuamente il numero dei lati del poligono di "base", i volumi dei prismi e quelli delle piramidi differiranno rispettivamente da quello del cilindro e da quello del cono per quanto si vuole. Dunque tra i volumi del cilindro e del cono vi è la stessa relazione trovata tra i volumi del prisma e della piramide. Il passaggio finale, dallo scaloide alla piramide, poggia su un'infinità considerata in atto[6]: lo scaloide diventa piramide solo se si riesce a pensarlo costituito di infinite lamine dallo spessore nullo. Si è concordi col ritenere che i ragionamenti di Democrito fossero di tipo euristico. In seguito, su questa stessa idea, si baserà il ragionamento che Archimede userà per valutare il volume di vari solidi.

1.3.1.5 Eudosso[7] ed Euclide

La già citata scoperta degli incommensurabili porta Eudosso di Cnido (400-355 a.C.) ad introdurre la nozione di grandezza contrapposta a quella di numero: si conta con i numeri ma non si misura in termini numerici, si dice solo se due grandezze sono nella

---

alle altre dimensioni) e la relativa faccia coincidente con la sezione della piramide ottenuta con un piano parallelo alla faccia caratteristica della piramide stessa.

[6] Risulta necessaria fare una breve considerazione sul concetto di infinito nell'Antica Grecia. Nella filosofia e nella matematica greca si percepiva un clima di imbarazzo nei confronti di questo argomento che, nell'opinione comune, portava a contraddizioni o paradossi. Aristotele rilevò una duplice natura dell'infinito: "in atto" e "in potenza". Per infinito in potenza Aristotele intende una nozione privativa di infinito data dall'incompletezza: comunque considerata una totalità finita è la possibilità di determinare un elemento non presente nella precedente totalità. "In atto" significa che l'infinito si presenta "tutto in una volta", in un unico atto. Egli però diffidò i matematici dal fare uso dell'infinito attuale, ammettendo solo l'uso esclusivo di quello potenziale. Aristotele e la matematica greca non erano pronti ad accettare un infinito in atto, poiché lo sentivano minacciare l'ordine del mondo aprioristicamente finito. Cantor (1883) commenterà così questa distinzione aristotelica:

"(…) l'infinito potenziale ha solo una realtà presa a prestito, dato che un concetto di infinito potenziale rimanda sempre a un concetto di infinito attuale che lo precede logicamente e ne garantisce l'esistenza."

[7] Tutte le opere di Eudosso sono perdute, l'attribuzione di risultati al matematico è sempre indiretta.

stessa proporzione di altre due grandezze. È la teoria delle proporzioni, presentata e sviluppata nel V libro degli *Elementi* di Euclide, alla cui base stanno le nozioni di grandezza, rapporto e proporzione; insieme al metodo di esaustione[8], sempre dovuto ad Eudosso e presentato nel XII libro degli *Elementi*, permette di misurare figure con contorni non rettilinei; essa raggiungerà il suo splendore con Archimede (287-212 a.C.) e più tardi, nel Rinascimento e primo Seicento, con, tra gli altri, Francesco Maurolico (1494-1575), Luca Valerio (1552-1618) e Bonaventura Cavalieri (1598-1647), con i loro vari tentativi di reinterpretazione operativa della teoria.

L'idea di Eudosso, illustrata da Euclide, è di parlare solo di "egual relazione tra coppie di grandezze", senza far riferimento ai numeri. In questo modo non si considerano come "oggetti" del discorso eventuali processi infiniti, ma ci si limita a catturare il loro senso grazie al processo di dimostrazione detto metodo d'esaustione. Più in dettaglio: grandezze omogenee si possono sommare, sottrarre, soddisfano semplici regole del maggiore e minore ed inoltre soddisfano quello che successivamente sarà chiamato principio di Archimede, riprendendo la definizione IV del V libro degli *Elementi*:

Si dice che hanno fra loro rapporto (o ragione) le grandezze le quali possono, se moltiplicate, superarsi reciprocamente.

(Euclide, 1970)

Euclide considera come aventi rapporto tra loro due grandezze soltanto quando si può trovare un multiplo di una delle grandezze tale che esso superi l'altra $mA > B$, ossia le grandezze devono essere archimedee[9], non esistono grandezze né infinite, né infinitesime. Il termine proporzione è introdotto nella definizione VI, come conseguenza della definizione V che parla di uguaglianza di rapporti (**Grandezze che hanno lo stesso rapporto si chiamino proporzionali**).

Il vero problema è quello di avere bisogno di una definizione di eguaglianza, diversa da

---

[8] La terminologia è del Seicento; per i Greci il problema era proprio quello di evitare l'*esaustione* infinita di una figura con altre.

[9] Euclide conosceva anche il caso delle grandezze non archimedee, come ad esempio gli angoli (aggiungendo a quelli rettilinei gli angoli "curvilinei") come si può notare dalla proposizione 16 del libro III; quindi egli decide consapevolmente di escluderle dalla propria trattazione. Frajese e Maccioni fanno notare come il postulato di Archimede possa essere dedotto dal postulato di continuità formulato da Dedekind e Cantor nel XIX secolo; da qui essi deducono che il postulato di Archimede non sia altro che "l'enunciazione del concetto di continuità così come Euclide poteva darlo."

quella data come nozione comune. In particolare la definizione V dice:

Si dice che [quattro] grandezze sono nello stesso rapporto, una prima rispetto ad una seconda ed una terza rispetto a una quarta, quando risulti che equimultipli della prima e della terza [presi] secondo un multiplo qualsiasi, ed equimultipli della seconda e della quarta [presi pure] secondo un multiplo qualsiasi, sono gli uni degli altri, cioè ciascuno dei due primi del suo corrispondente fra i secondi, o tutti e due maggiori, o tutti e due uguali, o tutti e due minori, se considerati appunto nell'ordine rispettivo (=quando cioè, presi equimultipli qualunque della prima grandezza e della terza ed equimultipli qualunque della seconda e della quarta, secondo che il multiplo della prima sia maggiore, uguale o minore del multiplo della seconda, l'equimultiplo della terza è corrispondentemente maggiore, uguale o minore dell'equimultiplo della quarta).

(Euclide, 1970)

In questo modo Euclide non parla di rapporti uguali, ma di grandezze che sono a due a due nello stesso rapporto, in particolare due grandezze A e B risultano essere nello stesso rapporto di altre due C e D quando in qualunque modo si prendano due equimultipli mA, mC, e in qualunque modo si prendano due equimultipli nB, nD, a seconda che si abbia: $mA \gtreqless nB$ si ha corrispondentemente $mC \gtreqless nD$; la concordanza dei segni deve verificarsi per qualunque valore dei numeri interi m, n, quindi per infiniti valori, in questo modo nella stessa definizione V entra l'infinito: in linea di principio sono richiesti infiniti confronti ma nessuna regressione all'infinito.

Come già ricordato, l'altro strumento utilizzato per la misurazione di lunghezze, aree e volumi è il cosiddetto metodo d'esaustione. Per dimostrare che due grandezze A e B sono uguali fra loro si procede con il metodo di esaustione ad una doppia riduzione all'assurdo. Supponiamo A maggiore di B e immaginiamo una successione di grandezze omogenee con A e B: T_1, T_2, T_3 ..., che soddisfi le condizioni seguenti:

1. La successione possa essere sempre prolungabile, cioè non possegga un ultimo termine;
2. Tutti i termini della successione siano, ad esempio, minori sia di A sia di B, ossia rappresentino valori approssimati per difetto tanto dell'una che dell'altra grandezza;
3. I termini della successione siano tali da approssimare, nel loro succedersi, tanto bene quanto si voglia la grandezza supposta maggiore (nel nostro caso A).

Se si riesce a trovare una tale successione di grandezze si dimostra che A non può essere maggiore di B e, allo stesso modo, neppure B può essere maggiore di A, quindi $A = B$. Infatti, comunque si fissi la differenza tra le due grandezze $C = A - B$, la condizione 3 consente di trovare un elemento T_h della successione che differisce da A per meno di C, quindi un elemento della successione T_h sarebbe tra A e B, cioè sarebbe maggiore di B, contro la condizione 2. Dunque non è possibile che tra A e B ci sia una qualsiasi differenza C. Da sottolineare come sia lo stesso postulato di Eudosso-Archimede a consentire di ammettere che una grandezza T possa avvicinarsi quanto si vuole ad una grandezza A.

Ritornando ai riferimenti più specifici legati al limite, secondo la testimonianza di Archimede, ad Eudosso dobbiamo la prima dimostrazione delle formule relative al volume della piramide e del cono, come accennato già scoperte da Democrito, dimostrazioni che si è concordi nel ritenere analoghe a quelle sviluppate da Euclide nel libro XII dei suoi *Elementi*. Ora, l'attento esame di queste dimostrazioni (nella loro versione in linguaggio matematico moderno), evidenzia come esse siano fondate sull'uso implicito ma essenziale di alcune proprietà relative a limiti di successioni. In particolare, ad esempio, nella dimostrazione della proposizione II del libro XII degli *Elementi* che recita: "I cerchi stanno fra loro come i quadrati dei diametri", Euclide dimostra prima di tutto che la differenza fra l’area del cerchio e l’area di un poligono regolare inscritto può essere resa arbitrariamente piccola (come si dirà nel Seicento, i poligoni esauriscono il cerchio) pur di considerare poligoni con un sufficiente numero di lati, in un certo senso quindi Euclide considera il cerchio come il limite dei poligoni regolari inscritti. Analogamente nella dimostrazione della proposizione V che recita: "Piramidi che abbiano altezze uguali e basi triangolari stanno fra loro come le basi" si sfrutta l’idea che la piramide sia il limite delle somme di prismi inscritti, queste considerazioni si potrebbero fare anche per altre proposizioni. La nozione di limite usata da Euclide potrebbe essere vista come quella di limite di una successione monotona, questo è percettibile anche nel libro X, proposizione I; infatti scrive Euclide:

Siano assegnate due grandezze diseguali; se dalla maggiore togliete più della metà, e da ciò che resta più della metà e, questo continuamente, il residuo diventerà una certa grandezza, che sarà minore della più piccola grandezza assegnata.

(Cassina, 1936)

In linguaggio moderno potrebbe essere interpretata come: se $b_0,\ b_1, b_2, \dots, b_n, \dots$ è una successione di grandezze ciascuna delle quali è minore della metà della precedente, allora il limite della successione (decrescente) b_n, al tendere di n all'infinito, è uguale a zero; cioè: data ad arbitrio una grandezza non nulla k esiste sempre un termine della successione tale che risulti minore di k. Consideriamo ora un ulteriore esempio tratto dagli *Elementi*: la proposizione II del libro XII. In questa proposizione Euclide si riferisce ad un cerchio, che chiama EZHΘ, che sta esaurendo mediante successivi poligoni regolari inscritti costruiti raddoppiando continuamente il numero dei lati, partendo dal triangolo equilatero; egli afferma:

Dividendo perciò tutti i rimanenti archi per metà, conducendo le rette [per i punti di divisione] e questo sempre facendo, resteranno certi segmenti di cerchio, che saranno minori dell’eccesso di cui il cerchio EZHΘ supera l’area Σ.

(Cassina, 1936)

In linguaggio moderno potrebbe essere: Data ad arbitrio l'area Σ è possibile trovare un poligono p_n della successione dei poligoni regolari inscritti $p_1, p_2, \dots, p_n, \dots$ (rispettivamente di 3,6,12,24,... lati) tale che la differenza fra il cerchio k e p_n sia minore di Σ; cioè $lim p_n = k$.

1.3.1.6 Archimede (287-212 a.C.)

Precedentemente è stato citato più volte il nome di Archimede, soprattutto in riferimento al metodo di esaustione. Nell'opera *Sul metodo meccanico* egli illustra ad Eratostene il "metodo" spesso utilizzato per scoprire vari risultati, in seguito dimostrati formalmente proprio attraverso il metodo d'esaustione; egli scrive:

decisi di scriverti e di esporti nello stesso libro le caratteristiche di un certo metodo, mediante il quale ti sarà data la possibilità di considerare questioni matematiche per mezzo della meccanica. E sono persuaso che esso sia non meno utile di certi anche per la dimostrazione degli stessi teoremi. Ed infatti alcune delle cose che a me prima si sono presentate per via meccanica sono state più tardi dimostrate per via geometrica, poiché la ricerca mediante questo metodo non è una dimostrazione: è poi più facile, avendo già ottenuto con questo metodo qualche conoscenza delle cose ricercate, compiere la dimostrazione.

(Giaquinta, 2010)

Analizziamo ora un esempio di queste "dimostrazioni" dall’opera *Quadratura della parabola*. Nella prefazione dell'opera afferma:

Per quanto riguarda il segmento compreso da una retta e da una sezione di cono rettangolo sappiamo che nessuno ha prima di noi tentato di quadrarlo, ciò che da noi è stato ora trovato.
Dimostriamo infatti che qualunque segmento compreso da una retta e da una sezione di cono rettangolo [parabola] è uguale ai 4/3 del triangolo avente la stessa base e altezza uguale al segmento: ciò avendo assunto il seguente lemma per la sua dimostrazione: date due aree diseguali è possibile, aggiungendo a se stesso l'eccesso di cui la maggiore supera la minore, superare ogni area limitata data[10].

(Giaquinta, 2010)

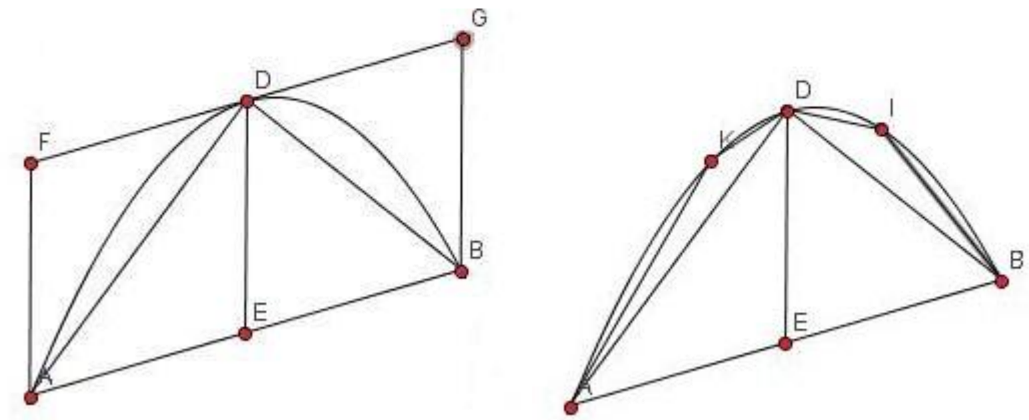


Figura 1

Archimede dimostra innanzitutto che il segmento di parabola può essere esaurito da una serie di triangoli (come mostrato parzialmente in figura 1). Sia ADB il segmento parabolico, sia DE il “diametro” che biseca le corde parallele alla base AB del segmento, tale che E sia il punto medio della base. Archimede dimostra nella proposizione 18 che la tangente in D alla parabola è parallela ad AB, cioè che la retta parallela ad AB per D tocca la parabola unicamente in D. Se FA e GB sono paralleli a DE, allora l’area del triangolo ADB è metà dell’area del parallelogramma $AFGB$ e di conseguenza il triangolo ADB ha area maggiore della metà del segmento parabolico. Archimede, poi, reitera la costruzione fatta in precedenza sui segmenti parabolici ADK e BDI, mostrando nella proposizione 21 che il triangolo DIB ha area un ottavo del

[10] Si tratta del principio di Archimede.

triangolo ADB. Ne segue che, iterando la costruzione n volte, l’area del poligono iscritto è pari a:
$A_{ADB} + \frac{1}{4}A_{ADB} + \frac{1}{16}A_{ADB} + \cdots + \frac{1}{4^n}A_{ADB}$ (somma di una serie geometrica di ragione $\frac{1}{4}$).
A questo punto Archimede dimostra nella proposizione 23 che, se si indica con
$A_0 = A_{ADB}$ e $A_n = \frac{1}{4^n}A_{ADB}$, allora
$A_0 + A_1 + \cdots + \frac{1}{3}A_n = \frac{4}{3}A_0$,
e quindi che se A è l’area del segmento parabolico deve essere: $A = \frac{4}{3}A_{ADB}$.
Infatti se $A > \frac{4}{3}A_{ADB}$, prendendo in considerazione il poligono S inscritto composto dai triangoli iterati fino ad m tale che $A > S > \frac{4}{3}A_0$, essendo $S + \frac{1}{3}A_m = \frac{4}{3}A_0$ troviamo $S < \frac{4}{3}A$, il che è assurdo. Analogamente se $A < \frac{4}{3}A_{ADB}$possiamo scegliere S in modo tale che $\frac{4}{3}A_0 - S > A_m$, cioè $\frac{4}{3}A_0 - (A_0 + \cdots + A_m) = \frac{1}{3}A_m < A_m$ ancora assurdo.
Egli, quindi, non esprime l’idea che il resto sparisca (non esegue passaggi al limite) e che la somma della serie sia uguale a $\frac{4}{3}A_0$; dimostra invece che l’area del segmento parabolico non possa essere né superiore né inferiore a tale valore. In questo modo Archimede da un lato evita di utilizzare una nozione così oscura come quella di “poligono con un numero infinito di lati”, dall’altro aumenta il numero dei lati del poligono fino a che la quantità residua sia piccola quanto si vuole, pur considerandone sempre un resto.
Oggi faremmo in modo differente, avendo a che fare con una serie geometrica calcoleremmo:

$$\lim_{n\to\infty}\left(A_0 + \frac{1}{4}A_0 + \cdots + \frac{1}{4^n}A_0\right) = \lim_{n\to\infty}(A_0\frac{1-\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{4}}) = \frac{4}{3}A_0$$

oppure usando simbolismo proprio delle serie

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{n}\frac{1}{4^i}A_0 = \sum_{i=0}^{\infty}\frac{1}{4^i}A_0 = \frac{4}{3}A_0.$$

Oltre all'utilizzo preciso del metodo d'esaustione, si può osservare che, se si cerca di rileggere in chiave moderna alcune proposizioni presenti in varie opere di Archimede, si intravede l'utilizzo di alcune espressioni riguardanti i limiti: ad esempio nell'opera *Sulla sfera e il cilindro* si può ritrovare l'uso della proposizione "il cerchio è il limite fra i poligoni inscritti e circoscritti" nelle proposizioni 3 e 5 del primo libro, oppure della proposizione "il settore circolare è il limite fra i poligoni inscritti e circoscritti" nelle proposizioni 8,9,10,14 sempre del primo libro, ecc. In particolare citando la proposizione 3 del primo libro di *Sulla sfera e il cilindro* essa afferma:

Date due grandezze diseguali ed un circolo, è possibile inscrivere nel circolo un poligono e circoscriverne un altro, in modo che il rapporto del lato del poligono circoscritto a quello del poligono inscritto sia minore del rapporto della grandezza maggiore alla minore.

(Cassina, 1936)

Tale enunciazione potrebbe essere rivista in termini moderni come: il limite del rapporto fra il lato (o perimetro) del poligono regolare circoscritto e quello del poligono regolare inscritto avente lo stesso numero di lati è uguale a uno; ciò implica che il perimetro del cerchio è il limite dei perimetri dei poligoni inscritti e circoscritti.
Probabilmente a causa della grande originalità dei suoi lavori, Archimede non è stato seguito nel mondo greco e non ha avuto discepoli diretti; solo a partire dal IX secolo alcuni studiosi arabi iniziarono ad interessarsi ai procedimenti di tipo infinitesimale soggiacenti alle opere del grande siracusano.
Con i lavori di Archimede hanno termine le applicazioni greche del concetto di limite. Da quanto visto si può forse affermare che nella matematica ellenica, nonostante non sia stato introdotto esplicitamente una nozione quale quella di limite, se ne facesse un certo uso nel caso di successioni monotone, anche se ogni passaggio al limite veniva giustificato con argomentazioni opportune. Ad ogni modo nessuno aveva sentito il bisogno di sviluppare la teoria che si poteva ottenere dando veste generale al metodo d'esaustione.

1.3.2 Il Seicento prima del Calcolo

Dopo le grandiosi imprese di Archimede, la storia dell'evoluzione del concetto di limite si concede una lunga stasi. La caduta di interessi non riguarda soltanto questa tematica, ma investe quasi tutta la speculazione intorno ai temi più astratti. Bisogna fare un salto di vari secoli per ritrovare risultati interessanti dal nostro punto di vista. È il XVII secolo che chiude un lungo periodo caratterizzato dalla cultura classica greco-romana, dagli innesti del cristianesimo e dall'affermarsi della centralità dell'uomo con l'umanesimo e apre una nuova era.

1.3.2.1 La tradizione archimedea

Quasi due millenni dopo gli studi archimedei, al metodo d’esaustione si sostituisce il cosiddetto “metodo degli indivisibili”, nato dalle ricerche di vari matematici, tra i quali svolsero un ruolo preminente Johannes Kepler (1571-1630), Bonaventura Cavalieri (1598-1647), Gilles Personne de Roberval (1602-1675) ed Evangelista Torricelli (1608-1647). Da evidenziare che nessun matematico dell'epoca poteva conoscere la lettera di Archimede ad Eratostene; si sapeva solo per certo in che ambito avesse lavorato Archimede grazie ad altre opere tradotte, ma non si sapeva fino a quale grado di raffinatezza egli fosse riuscito a dominare, da un punto di vista logico, la suddivisione di una superficie in "infiniti" segmenti o di un solido in "infinite" superfici.

Pascal Dupont sintetizza così il diffondersi della geometria degli indivisibili:

> **Nel XVII secolo, la matematica cambia volto. I procedimenti archimedei sono ineccepibili, ma sono ingombranti. Si vuol procedere più speditamente. Nasce un’analisi infinitesimale agile ma su basi fragilissime. La disinvoltura prende il posto del rigore. Gli indivisibili […] sostituiscono il metodo d’esaustione.**
>
> **(Dupont, 1981)**

In questo sottoparagrafo focalizzeremo l'attenzione solo su alcuni matematici, particolarmente interessanti per la nostra trattazione, che insieme ad altri perfezionarono il metodo archimedeo.

Luca Valerio (1553-1618)

Nel mondo occidentale è Luca Valerio che, "algebrizzando" il metodo di Archimede, lo generalizza (“se due quantità differiscono per meno di ogni quantità data, allora esse sono uguali”), tanto che le sue opere gli valgono da parte di Galileo l'appellativo di "novello Archimede". Mentre Archimede applica il suo metodo d'esaustione solo nei casi di curve conosciute, egli estende questi ragionamenti ad archi di curva qualsiasi, con l'unica restrizione che siano crescenti o decrescenti. Valerio, inoltre, introduce notevoli semplificazioni, sostituendo la riduzione all'assurdo con dimostrazioni dirette basate su principi intuitivi, analoghi a quelli che sono posti a fondamento della teoria dei limiti, di particolare importanza le prime tre proposizioni del secondo libro del *De centro gravitatis* (1604). D'altro parere è invece lo storico Cassina che afferma:

le proposizioni di L. Valerio che sono state esaminate e collegate al concetto di limite di una funzione, funzione ad ogni modo monotona, in realtà non presentano negli originali né il concetto di funzione (o di variabile dipendente da un'altra variabile) né tanto meno di limite di funzione.

(Cassina, 1936).

Proviamo ad analizzare il metodo d'esaustione proposto da Valerio nel caso di una curva crescente, in termini moderni.

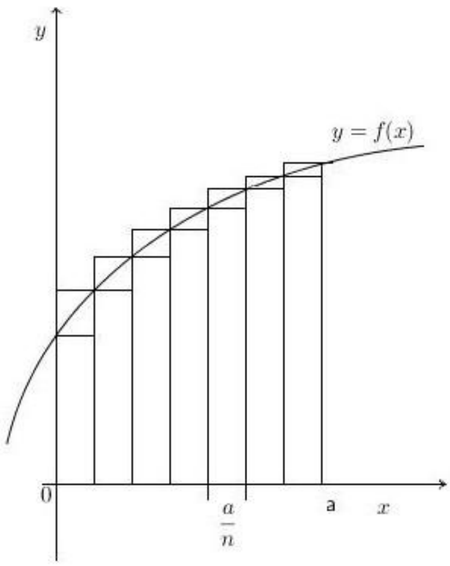


Figura 2

Il problema consiste nel calcolare l'area della figura delimitata dalla curva $y = f(x)$, dall'asse x e dalle rette $x = 0$ e $x = a$ (si faccia riferimento alla figura 2).

Calcoliamo la somma I_n delle aree dei rettangoli inscritti:

$$I_n = f(0) \cdot \frac{a}{n} + f\left(\frac{a}{n}\right) \cdot \frac{a}{n} + f\left(\frac{2a}{n}\right) \cdot \frac{a}{n} + \cdots + f\left(\frac{(n-1)a}{n}\right) \cdot \frac{a}{n} .$$

Calcoliamo la somma C_n delle aree dei rettangoli circoscritti:

$$C_n = f\left(\frac{a}{n}\right) \cdot \frac{a}{n} + f\left(\frac{2a}{n}\right) \cdot \frac{a}{n} + f\left(\frac{3a}{n}\right) \cdot \frac{a}{n} + \cdots + f\left(\frac{na}{n}\right) \cdot \frac{a}{n} .$$

Calcoliamo la differenza $C_n - I_n$:

$$C_n - I_n = f(a) \cdot \frac{a}{n} - f(0) \cdot \frac{a}{n} = [f(a) - f(0)] \cdot \frac{a}{n} .$$

Se poi operiamo una traslazione dell'asse x possiamo ottenere $f(0) = 0$, quindi

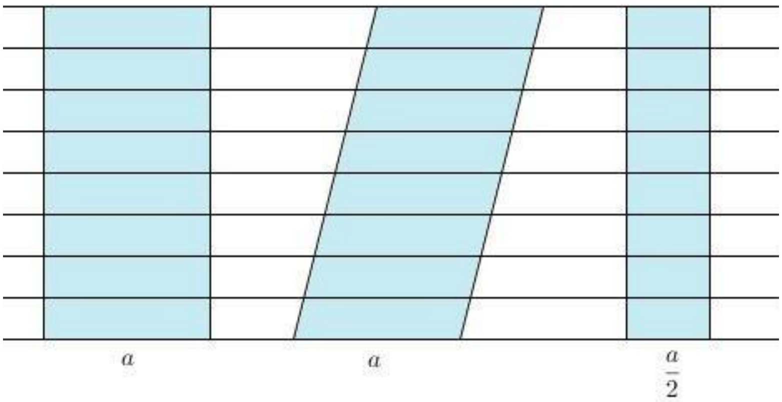
$$C_n - I_n = f(a) \cdot \frac{a}{n}.$$

Nell'uno o nell'altro caso ci si può rendere conto che, aumentando opportunamente il valore di n, questa differenza diventa piccola come si vuole. Quando n tende all’infinito, le due somme tendono ad essere uguali, eguagliando l’area della figura cercata.

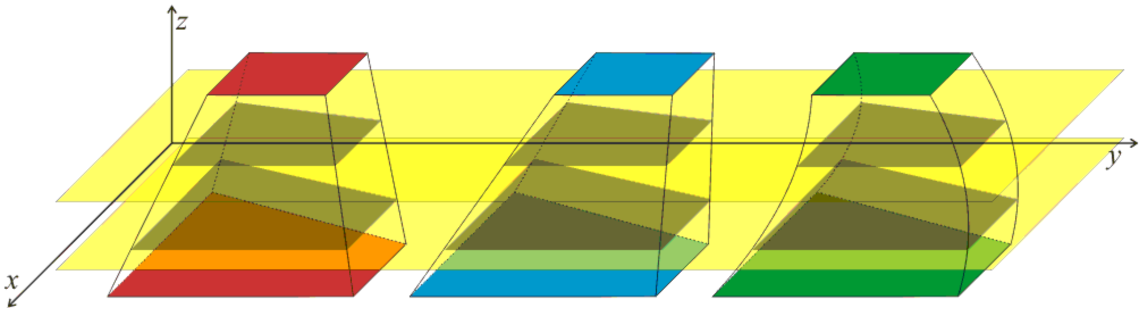
Questa interpretazione è in chiave moderna, Luca Valerio in realtà ragionava diversamente, in termini di teoria delle proporzioni.

Bonaventura Cavalieri (1598-1647)

L'idea base dell'opera *Geometria indivisibilium continuorum quadam nova ratione promota* (1635) consiste nel considerare una figura piana come costituita dalle infinite corde intercettate entro la superficie da un insieme di rette parallele; ciascuna di quelle corde è vista come un rettangolo avente dimensione infinitesima, l'elemento indivisibile; in essa inoltre si possono ritrovare anche elementi della teoria delle quantità geometriche infinitamente piccole dell'astronomo tedesco Johannes Kepler (1571-1630). Cavalieri, inoltre, gli espone un metodo per calcolare aree e volumi, che si basa sul confronto di due figure paragonando i loro indivisibili, in particolare il cosiddetto “principio di Cavalieri” afferma: se due superfici tagliate da un sistema di rette parallele generano corde corrispondenti isometriche allora esse sono equiestese, se le corde corrispondenti hanno rapporto costante, lo stesso rapporto esiste tra le aree;



analogamente per figure geometriche tridimensionali si ha che se due solidi tagliati da un sistema di piani paralleli generano sezioni corrispondenti equiestese essi hanno lo stesso volume, se le sezioni corrispondenti hanno rapporto costante lo stesso rapporto esiste tra i volumi.



In questi metodi riemergono le problematiche legate al continuo e al rapporto tra continuo e discreto: Cavalieri non prende posizione sul continuo, di cui gli basta un'idea intuitiva, riuscendo a individuare una via di fuga che gli evita qualunque riferimento all'infinito o alla composizione del continuo; egli infatti afferma che non si può applicare il metodo, cioè estendere un rapporto tra indivisibili a un rapporto tra continui, se gli indivisibili non sono "nello stesso numero" o non hanno "la stessa densità" dei loro continui; come vedremo tra poco Galileo, al contrario, prenderà una posizione precisa[11].

Galileo Galilei (1564-1642)

Galileo si occupa di indivisibili, ma la teoria che presenta a riguardo è puramente speculativa. Egli si chiede quale sia la causa che permette di tenere insieme le parti dei corpi solidi e una delle ipotesi è che nella materia ci siano dei vuoti molto piccoli e molto numerosi: per ripugnanza verso il vuoto i pezzi di materia si tengono uniti. La questione più generale che ne deriva è se in una porzione finita ci possa essere un'infinità di vuoti. Secondo Galileo ciò è possibile e lo dimostra attraverso un esempio tratto dalla Meccanica di Aristotele, noto come "la ruota di Aristotele" (figura 3): consideriamo una ruota formata da due cilindri coassiali, di diametro diverso, incollati l'uno sull'altro; quando la ruota rotola dalla posizione A alla posizione B, le due ruote da cui è formata, come si vede dalla figura, "rotolano" percorrendo esattamente la stessa

[11] Posizione rilevante in questo dibattito fu presa anche da Aristotele, il quale nega la possibilità di ridurre il continuo al discreto, in Physica VI, 1, 231 scrive:

Se ci sono la continuità, il contatto e la consecutività, secondo le definizioni che abbiamo date precedentemente, e se continue sono le cose le cui estremità sono una sola cosa, e se sono in contatto quelle le cui estremità sono insieme, e consecutive quelle in mezzo a cui non c’è nulla di affine, è impossibile che qualcosa di continuo risulti composto da indivisibili, ad esempio che una linea risulti composta da punti, se è vero che la linea è un continuo e il punto è un indivisibile. Non sono, infatti, una sola cosa le estremità dei punti, perché l’indivisibile non ha né estremità né qualche altra parte, né le estremità sono simultanee, perché non c’è nessuna estremità di ciò che è privo di parti. (…) Ma è chiaro che ogni continuo è divisibile in parti che siano sempre divisibili.

distanza; ed ecco il paradosso: le due ruote devono avere la stessa circonferenza perché facendo un giro completo percorrono la stessa distanza, ma è impossibile che due cerchi differenti abbiano la stessa circonferenza.

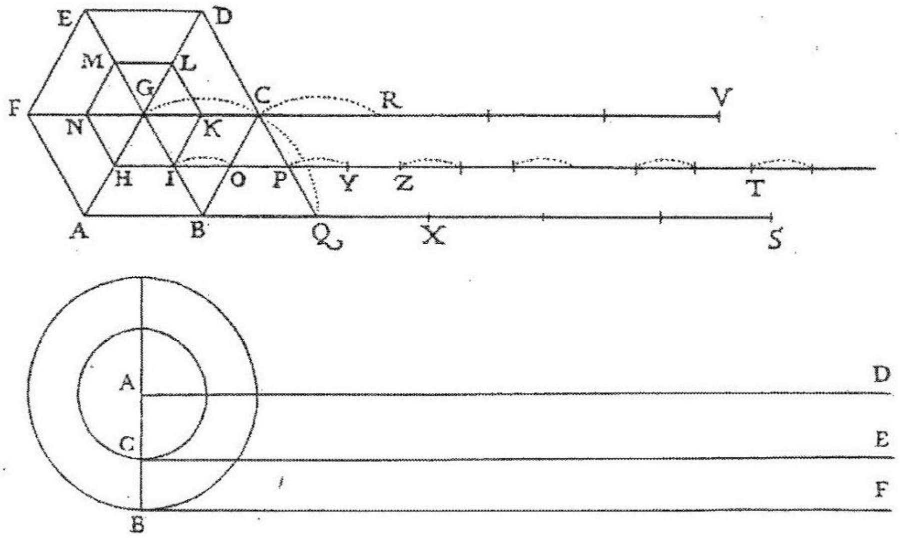


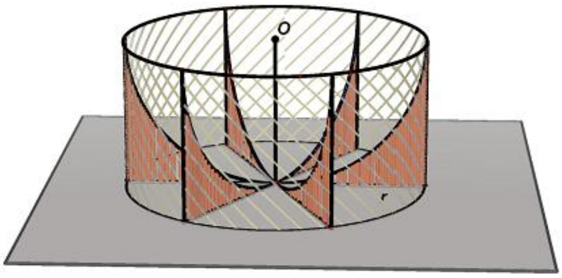
Figura 3 (illustrazione dai *Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze*)

Per rispondere Galileo considera due esagoni, al posto dei due cerchi. L'esagono grande, piuttosto che rotolare, ruota attorno ai vertici e si sposta appoggiando volta per volta uno dei suoi lati sulla base. Nel frattempo l'esagono piccolo appoggia i suoi lati su una retta orizzontale parallela alla base, ma lasciando degli spazi non occupati a intervalli regolari. Ciò che succede per gli esagoni indica la via per capire ciò che succede per i cerchi: è sufficiente moltiplicare il numero dei lati e non considerare più esagoni bensì dei poligoni con venti, mille lati. Allora il poligono piccolo si appoggerà mille volte sulla base e ogni volta lascerà un piccolo segmento orizzontale "non toccato". La retta sarà così costituita da mille piccoli segmenti separati da mille piccoli vuoti. Così, il cerchio può essere considerato come un poligono con infiniti lati: possiamo pertanto pensare che il cerchio piccolo percorra la linea CE facendo un numero infinito di salti infinitamente piccoli. Come afferma Speranza:

Galileo applica in sostanza il cosiddetto principio di continuità, secondo il quale ciò che vale in una successione di situazioni dovrebbe valere anche al limite.
(Andriani, Dallanoce, Falcade, Foglia, Gregori, Grugnetti, Maffini, Marchini, Rizza, Vannucci, 2005)

Da ciò si ha una tesi generale sul continuo: la retta è composta da punti, il divisibile da indivisibili. Nell'opera *Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze* del 1638 dimostra, utilizzando la caratterizzazione di Aristotele del continuo, che se il continuo è sempre divisibile allora è fatto di indivisibili; quindi Galileo pur partendo dal continuo aristotelico giunge alla conclusione "opposta".

Analizziamo ora il ragionamento proposto da Galileo a proposito della cosiddetta "scodella di Galileo", ossia usato per dimostrare che il volume del cono inscritto in un cilindro avente altezza pari al raggio di base è uguale al volume della cosiddetta "scodella", solido che si ottiene togliendo dallo stesso cilindro la semisfera avente centro nel centro della base opposta alla base del cono e stesso raggio; tale problema era già stato analizzato da Luca Valerio.



Egli ne parla nella "Giornata prima" sempre dei *Discorsi e dimostrazioni matematiche*. Il momento in cui la introduce è quando Salviati propone "come si possa mai capire che un sol punto è uguale a una lignea", quando cioè si tratta di presentare una sorta di paradosso. Salviati ripropone la figura della scodella "perché la prova è pura geometria".

Consideriamo la sezione piana verticale del solido in oggetto (figura 4).

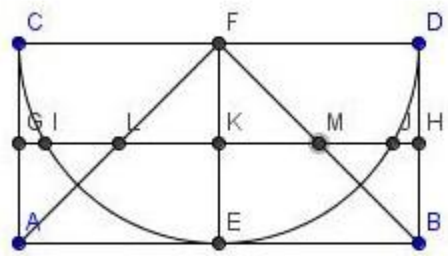


Figura 4

La retta $GILKMJH$ rappresenta la generica sezione realizzata con un piano parallelo alla base. Galileo vuole dimostrare che il cerchio LM è equivalente alla corona circolare

$GIJH$[12]. Procede in questo modo:

1- $IF = CF = GK$ perché raggi della stessa sfera e segmento a esso equipollente;
2- I triangoli FLK e FAE sono simili, quindi $LK = FK$;
3- Per il teorema di Pitagora si ha che $IF^2 = FK^2 + IK^2$;
4- Quindi per quanto visto sopra si ha che $GK^2 = IK^2 + LK^2$;
5- Quindi per la proposizione 2 del libro XII degli *Elementi* si ha che: corona$GIJH$=cerchio(GH)-cerchio(IJ)=cerchio(LM).

Ora, facendo scorrere il piano orizzontale generico parallelamente alla base otterrà in ogni caso sempre questo stesso risultato. Dice quindi Galileo:

Or mentre che nella diminuzione de i due solidi si va, sino all’ultimo, mantenendo sempre tra essi la egualità, ben par conveniente dire che gli altissimi ed ultimi termini di tali menomamenti restino tra di loro eguali, e non l’uno infinitamente maggiore dell’altro: par dunque che la circonferenza di un cerchio immenso possa chiamarsi uguale ad un sol punto.

(Freguglia, 1999)

Dunque la sezione con il piano orizzontale che si ottiene quando siamo al livello CFD ci dà da un lato il vertice (punto) del cono e dall’altro la circonferenza (linea) a cui si riduce la scodella, ovvero la corona circolare. Ciò sembrò a Galilei paradossale, ma basterà osservare che l’equivalenza in questione è relativa alla misura delle aree per stabilire che in realtà sussiste anche in questo caso limite l’equivalenza. Infatti l’area di un punto è zero come pure è tale l’area (e non la lunghezza) di una linea. La meraviglia di Galileo rimane se confrontiamo le cardinalità dei relativi insiemi di punti.

1.3.2.2 Alcuni Precursori della nozione di limite

Pietro Antonio Cataldi (1548-1626)

Nei decenni 1650-1660 viene sviluppata una grande varietà di metodi per calcolare π, compreso quello della frazione continua infinita di Lord William Broucker, primo presidente della Royal Society. In realtà, i primi passi nel campo delle frazioni continue erano già stati fatti tempo prima in Italia, dove Pietro Antonio Cataldi aveva espresso, nel *Trattato del modo brevissimo di trovare la radice quadrata delli numeri* (1613), il modo più rapido, più semplice e più sicuro, come egli stesso scrive:

[12] Galileo non distingue, almeno linguisticamente, tra area e figura geometrica

"pel calcolo approssimato della radice quadra dei numeri".

Un semplice esempio è utile alla comprensione. Da $\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{y}$, segue $y = 1 + \sqrt{2}$ e, sostituendo $\sqrt{2}$, si ricava $y = 1 + \frac{1}{2+\frac{1}{y}}$; iterando si ottiene:

$$\sqrt{2} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cdots}}}}$$

Da sottolineare come le serie infinite studiate da Cataldi per il calcolo di radicali quadratici e la frazione continua da lui costruita introdussero nel campo numerico, discontinuo, idee e metodi prima d'allora riservati alla determinazione delle aree e dei volumi nel campo geometrico, essenzialmente continuo: l'irrazionale, inesprimibile con un numero, figura come elemento di separazione fra la somma sempre crescente delle serie "scarse" e quelle sempre decrescenti delle serie "eccedenti", nello stesso modo in cui l'area del cerchio figura come elemento di separazione fra quello dei poligoni inscritti e circoscritti. Alla determinazione della differenza evanescente fra le aree dei poligoni inscritti e circoscritti corrisponde, nella trattazione di Cataldi, quella dell'errore che si commette assumendo per valore prossimo la somma di un determinato numero di termini di una delle sue due serie, ed una speciale ridotta della frazione continua. Cataldi dimostra anche che quell'errore può farsi piccolo a piacere.

John Wallis (1616-1703)

In generale le frazioni continue furono discusse nell'opera di John Wallis (1616-1703), in cui si può ritrovare l'idea di limite di una successione crescente o decrescente, applicata, però, in modo intuitivo. Ad esempio Ugo Cassina fa notare come nella proposizione XX dell'*Arithmetica infinitorum* (1665), che recita:

Cum autem crescente numero termino rum, excessus ille supra subtriplum ita continuo minuatur, ut tandem quolibet assegnabili minor evadat, (ut patet); si in infinitum procedatur, prorsus evaniturus est.[13]

(Cassina,1936)

[13] **Ma, col crescere del numero dei termini, il suo eccesso sulla terza parte di l si sarà continuamente rimpicciolito, così da riuscire minore di qualunque cosa assegnabile (com'è evidente); perciò quando si sia proceduto all'infinito si sarà certamente annullato.**

(Cassina, 1936)

Wallis deduca ciò che in termini moderni si può esprimere dicendo che il limite della somma $\frac{l}{3}+\frac{l}{6m-6}$ per m tendente all'infinito vale $\frac{l}{3}$. Nelle sue opere però non figura né il vocabolo limite in senso tecnico, né una definizione precisa del concetto rappresentato da tale vocabolo, né quindi un'applicazione veramente razionale del concetto stesso.

Pietro Mengoli (1626-1686)

Nel terzo libro (elementum) della *Geometria speciosa* (1659) di Pietro Mengoli si può intravedere una concezione piuttosto interessante sul limite, sebbene il linguaggio utilizzato sia ancora molto distante dall'attuale. In particolare egli parla di “ratio indeterminata determinabilis” considerata nella sua tendenza all'infinito o allo zero e che chiama rispettivamente Quasi infinita o Quasi nulla. In chiave moderna potremmo dire che, nel caso di Mengoli, siamo di fronte ad infinitesimi ed infiniti in senso potenziale. Infatti egli considera il potere di una quantità variabile di avvicinarsi finché si vuole allo zero o di superare qualunque numero grande assegnabile. Inoltre, se teniamo presente che i numeri positivi sono considerati da Mengoli come rapporti, la aequalitas di un rapporto, che egli introduce, altro non è che un numero diverso dall'unità. Traducendo alla lettera le ultime due definizioni e interpretando la ratio indeterminata determinabilis come un effettivo rapporto di due variabili si ha:

5°) I termini dei rapporti quasi gli stessi tra loro, si dicono tra loro quasi proporzionali;

6°) I termini dei rapporti quasi uguali all'unità si dicono quasi uguali.

Alla luce delle nostre conoscenze attuali si potrebbe forse dire che la 6° fornisce un criterio per giudicare se due variabili tendono allo stesso limite finito o sono asintotiche (ad esempio nel caso $\lim_{n\to++\infty}\frac{\sqrt{n^2+1}}{n}=1$ le successioni a numeratore e a denominatore sono asintotiche); la 5° potrebbe esprimere che il limite di un quoziente è uguale al quoziente dei limiti nel caso finito, dando ancora un criterio di asintoticità nel caso infinito o infinitesimo.

A titolo esemplificativo riportiamo anche la traduzione di una delle 52 proposizioni:

Il rapporto A/B sia quasi infinito. Dico, invertendo che B/A è quasi nullo. Si assuma un rapporto (numerico) qualunque c/d. Il rapporto A/B può essere maggiore di d/c (def. I). Dunque, invertendo, B/A può essere minore di c/d. Dunque (def. II) B/A è un rapporto quasi nullo, c.d.d.

(Agostini, 1925).

Tale proposizione può essere interpretata nel senso della proprietà secondo la quale se il limite di un rapporto tende all'infinito, il limite del rapporto inverso tende a zero.
Il linguaggio usato da Mengoli mostra ancora una volta quanto la strada per passare dall'idea di limite al concetto stesso sia stata lenta, tortuosa e a volte fuorviante.

1.3.3 La nascita del nuovo Calcolo

1.3.3.1 René Descartes (1596-1650)

La pubblicazione nel 1637 del *Discours de la méthode*, di cui la *Géometrie* è l'ultimo dei saggi, segna un punto di svolta nella matematica moderna. Descartes ha rinnovato radicalmente l'impianto classico della geometria delle curve, introducendo un nuovo oggetto: la curva-equazione. Anche se non mancano nella *Géometrie* metodi tradizionali di considerare le curve, tra cui una serie di macchine per il loro tracciamento, per la verità più ideali che pratiche, il posto principale spetta alla rappresentazione delle curve mediante equazioni, una tecnica totalmente innovativa, che tra le altre cose ha permesso di risolvere il problema di Pappo e di dare un metodo universale per la soluzione geometrica delle equazioni. Soprattutto l'introduzione delle curve-equazioni ha permesso di porre in maniera generale e poi di risolvere il problema delle tangenti, ossia la determinazione della tangente in un punto di una curva data. Descartes scrive:

[...] crederò di aver messo qui tutto quello che si richiede per gli elementi delle curve quando avrò dato in modo generale il metodo per tracciare le rette che cadono ad angoli retti su un loro punto preso a piacere. E oso dire che questo è il problema più utile e più generale non solo che io sappia, ma anche che abbia mai desiderato di sapere in Geometria.

(Freguglia, 1999)

La soluzione di Descartes passa attraverso la considerazione della circonferenza tangente alla curva in un punto dato $P_0 = (x_0, y_0)$ (figura 5). Una volta trovata quest'ultima, infatti, il suo raggio per P_0 sarà normale alla curva e per ricavare la tangente non si dovrà fare altro che considerare la retta perpendicolare al raggio.

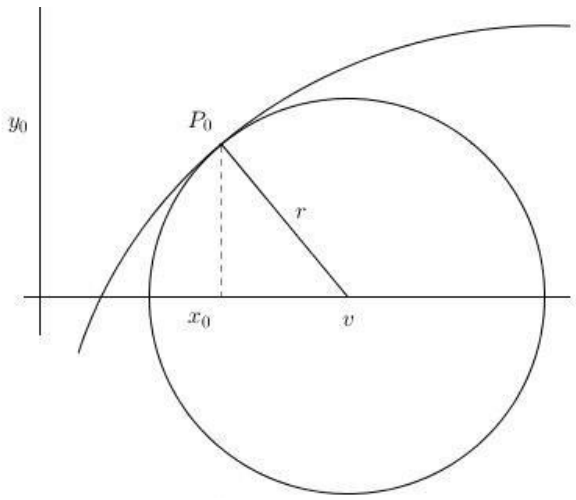


Figura 5

Cartesio considera la circonferenza con centro nel punto v sull’asse delle ascisse e raggio r, che quindi ha equazione $(x-v)^2+y^2=r^2$, e impone che essa abbia un’intersezione doppia in P_0 con la curva. Analiticamente se la curva ha equazione $P(x,y)=0$ (con P polinomio di grado arbitrario) si elimina dal sistema formato dalle equazioni della curva e della circonferenza una delle variabili, ad esempio la y, e si richiede che il polinomio $Q(x)$ così ottenuto abbia una radice doppia in x_0, ovvero che sia della forma $Q(x)=(x-x_0)^2R(x)$, dove $R(x)$ è da determinare. Se il polinomio $P(x,y)$ è di grado n, $Q(x)$ è di grado $2n$ e $R(x)$ di grado $2n-2$. Uguagliando nella relazione precedente i coefficienti dei termini dello stesso grado si ottengono allora $2n+1$ incognite: i $2n-1$ coefficienti di $R(x)$ e i due parametri v e r, che determinano la circonferenza tangente e che si ricavano risolvendo il sistema. Una volta trovata questa circonferenza, il raggio che passa per il punto P_0 è normale alle curve e la retta tangente è la perpendicolare al raggio.

Il problema delle tangenti è dunque risolto nella sua generalità, almeno in linea di principio. In realtà il metodo conduce a calcoli piuttosto intricati, anche nei casi più semplici, e inoltre è applicabile unicamente a curve la cui equazione è data mediante un polinomio $P(x,y)$, ad esso sfuggono non solo le curve trascendenti, ma anche quelle algebriche nella cui equazione entrano dei radicali, che quindi vanno preventivamente eliminati.

A differenza di altri temi trattati nell'opera fu questo problema, e la soluzione che Descartes ne aveva proposto, a essere, fin da subito, oggetto di studi che coinvolsero via via tutta la comunità scientifica e che portarono verso la fine del secolo alla "scoperta" del calcolo infinitesimale.

1.3.3.2 Pierre de Fermat (1601-1665)

Quando nel 1637 Descartes pubblicava la *Géometrie*, Fermat già da qualche anno aveva elaborato un suo metodo per le tangenti, anche questo basato sulla rappresentazione analitica delle curve. Il metodo prende origine dalle ricerche di Fermat sui massimi e i minimi di una funzione (o meglio di una grandezza variabile, dato che il concetto di funzione si preciserà solo molti decenni più tardi), che a loro volta si svilupparono a partire dallo studio dell'opera di François Viète.

Consideriamo dunque una funzione f, di cui vogliamo trovare, per esempio, il massimo che chiamiamo M(figura 6).

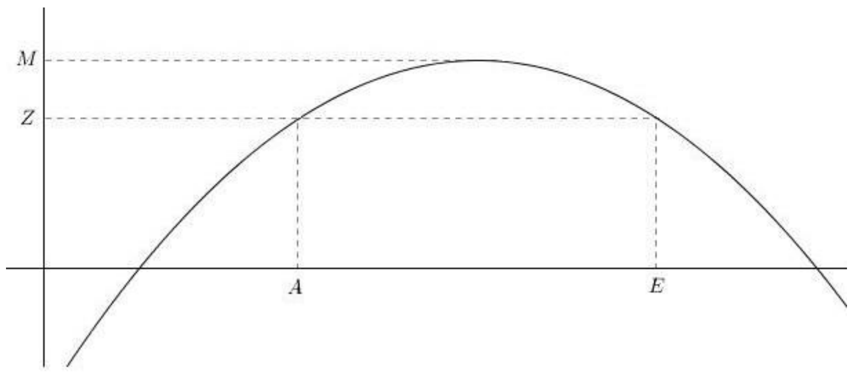


Figura 6

Se prendiamo un valore Z minore di M, afferma Fermat, l'equazione $f(X) = Z$ avrà due soluzioni, A ed E, che si troveranno da una parte e dall'altra del punto di massimo. Poiché $f(A) = Z$ e $f(E) = Z$ si avrà $f(A) = f(E)$, ossia $f(A) - f(E) = 0$, e dividendo per $A - E$: $\frac{f(A)-f(E)}{A-E} = 0$. Se ora aumentiamo il valore di Z, sempre però restando al di sotto del massimo M, i due punti A ed E si avvicineranno sempre più tra loro, finché verranno a coincidere quando Z raggiungerà il valore massimo M. Se dunque, dopo aver fatto le opportune semplificazioni, si pone $E = A$ nell'equazione precedente si troverà un'equazione dalla quale si potrà ricavare il punto di massimo A e dunque il valore massimo M. Prima di applicare tale metodo al problema delle tangenti occorreva un piccola modifica, per evitare calcoli troppo complicati. In particolare, invece di indicare le due soluzioni dell'equazione con A ed E Fermat le indica con A ed $A + E$, in questo caso quindi bisognerà scrivere $f(A + E) - f(A) = 0$ e poi dividere

per E e porre $E = 0$. Tale sostituzione comporta qualche cambiamento nella struttura concettuale, ma a questo proposito non mi dilungherò. Vorrei solo sottolineare come nel primo metodo quando si scrive $f(A) = f(E)$ si è in presenza di una vera equazione, mentre nel secondo metodo sostituendo E con $A + E$ questa diventa un adequazione (adaequatio, concetto di origine kepleriana), un'equazione approssimata che sarà vera soltanto nello stadio finale, quando cioè si sarà posto $E = 0$.
Ora consideriamo un esempio che fa lo stesso Fermat per calcolare la tangente ad una parabola (figura 7).

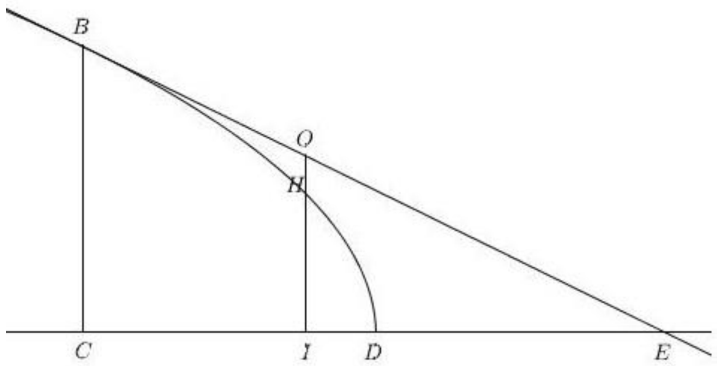


Figura 7

La proprietà caratteristica della parabola è che le ordinate ID, CD stanno tra loro come i quadrati delle ascisse corrispondenti IH, CB:

$$ID: CD = IH^2: CB^2$$

Se ora al posto del segmento IH con un estremo sulla curva si mette il segmento IO con l’estremo sulla tangente, essendo $IH < IO$ sarà anche $ID: CD < IO^2: CB^2$. D’altra parte, poiché $IO: CB = IE: CE$, avremo $ID: CD < IE^2: CE^2$. A questo punto Fermat sostituisce la disuguaglianza trovata con un’adequazione, scrivendo: $ID: CD \approx IE^2: CE^2$.
Si può esprimere quest’ultima adequazione in termini algebrici, ponendo
$CD = B, DE = A, CI = E$. Si ha allora $ID = B - E, CE = B + A, IE = B + A - E$, e dunque $(B - E): B \approx (B + A - E)^2: (B + A)^2$,
ossia $(B - E)(B + A)^2 \approx B(B + A - E)^2$.
A questo punto non resta che sviluppare i quadrati e semplificare. Si giunge così all’adequazione $-E(B + A)^2 \approx -2BE(B + A) + BE^2$
e dividendo per E dopo aver cambiato il segno ad ambedue i membri:

$(B+A)^2 \approx 2B(B+A) - BE$.

Se ora si pone $E = 0$, l’adequazione diventa un’equazione. Si ha allora

$(B+A)^2 = 2B(B+A)$ e dividendo per $(B+A)$ si ottiene $(B+A) = 2B$ e quindi in conclusione $A = B$.

Per trovare la tangente alla parabola nel punto B basta allora prendere sull’asse un punto E in modo che $DE = CD$. La retta EB sarà la tangente alla parabola, ritrovando così il risultato classico.

La definizione insita in questo metodo descrive la tangente come posizione limite di una secante quando i punti di intersezione con la curva tendono ad avvicinarsi. Non è in termini di funzione e limiti che pensa Fermat, ma piuttosto in termini di equazioni ed infinitamente piccoli. È il primo a considerare degli infinitamente piccoli numerici e non più geometrici e, invece di farli tendere a zero, li pone istantaneamente uguali a zero.

Grazie alla generalità di tale principio Fermat può trovare la tangente a numerose curve, siano esse algebriche sia trascendenti, come nel caso della cicloide.

Ad ogni modo anche questo metodo è criticabile sotto alcuni punti di vista, lo stesso Descartes condanna severamente l'uso troppo libero che Fermat fa degli infinitesimi, da qui, ma già dalla divulgazione stessa dell'opuscolo di Fermat, nacque una disputa tra i due, che ebbe termine vari anni più tardi, lasciando persuaso ognuno dei contendenti della sostanziale preminenza della sua impostazione.

1.3.3.3 Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716)

Prima che entrassero in scena Newton e Leibniz era già stata accumulata una quantità immensa di conoscenze sul calcolo infinitesimale; ciò che mancava era, invece, una maggiore generalità di metodo e il riconoscimento della generalità di ciò che era già stato stabilito nel corso della soluzione di problemi particolari.

Il calcolo vede ufficialmente la luce nel 1684 quando sugli *Acta Eruditorum* di Lipsia appare una memoria di Leibniz dal titolo *Nova methodus pro maximis et minimis, itemque tangentibus, quae nec fractas nec irrationales quantitates moratur, et singulare pro illis calculi genus.* Alcune difficoltà presenti nelle soluzioni di altri matematici, come ad esempio la mancanza di un'operazione che consentisse di smontare la complessità dell'equazione di una curva e la scelta di un parametro più comodo a essere trattato algebricamente, sono risolte grazie all'introduzione del differenziale.

Leibniz introduce un'operazione, la "differenziazione", che agisce non sulle funzioni, ma sulle variabili[14] e sulle loro combinazioni, e che consiste nel considerare la differenza tra due valori infinitamente vicini delle variabili. Sono le proprietà formali della differenza, e insieme il carattere infinitesimo delle differenze in gioco, evidente anche se sempre sottinteso, che permettono di trovare le regole di differenziazione che Leibniz pone all'inizio della sua memoria. Egli introduce il differenziale in un contesto che ricorda da vicino quello di Pierre de Fermat, Leibniz scrive:

Sia dato l'asse AX, e più curve come VV, WW, YY, ZZ e le ordinate di un loro punto, normali all'asse, siano VX, WX, YX, ZX: queste si dicono rispettivamente v, w, y, z; ed il segmento AX, tagliato sull'asse, sia detto x. Le tangenti siano VB, WC, YD, ZE, le quali incontrano l'asse rispettivamente nei punti B, C, D, E [fig. b].

Ora un segmento, preso ad arbitrio, sia detto dx ed un segmento [fig.a] che sta a dx, come v (o w, o y, o z) sta a BX (o CX, o DX, o EX) sia detto dv (o dw, o dy, o dz) ossia differenza delle stesse v (o delle stesse w, o y, o z).

Ciò posto, le regole del calcolo saranno queste:

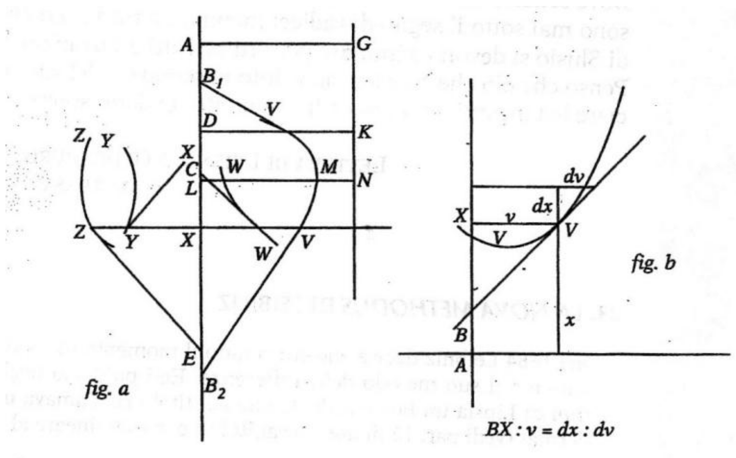
Sia a una quantità data costante, sarà

$da = 0$ e $dax = adx$.

Se abbiamo $y = v$ (ossia se un'ordinata qualsiasi della curva YY, è uguale a una qualsiasi ordinata corrispondente della curva VV), sarà: $dy = dv$ [fig.b].

Addizione e sottrazione:

se si ha $z - y + w + x = v$, sarà $d(z - y + w + x) = dv = dz - dy + dw + dx$.



[14] Risulta spontaneo chiedersi se Leibniz distinguesse tra variabili dipendenti e indipendenti: Bos (1974) risponde negativamente, sostenendo che Leibniz trattava le variabili tutte alla stessa stregua. L’atteggiamento di Leibniz verso le variabili, però, non è sempre lo stesso, a volte privilegia una variabile rispetto alle altre.

[...]
Dalla conoscenza di questo particolare algoritmo, o di questo calcolo, che io chiamo differenziale, tutte le altre equazioni differenziali possono ricavarsi per mezzo del calcolo comune, ed ottenersi i massimi e i minimi, come pure le tangenti, in modo che non sia necessario far sparire le frazioni o gl'irrazionali, od altri vincoli, come tuttavia si doveva fare, secondo i metodi sin'ora pubblicati. [...] Quindi, data una equazione qualsiasi, si può scrivere la sua equazione differenziale in questo modo. Per ogni termine (ossia per ogni parte che concorre a formare l'equazione per sola addizione o sottrazione) si sostituirà semplicemente la quantità differenziale del termine; e invece per un'altra quantità (che non sia un termine, ma concorra a formare un termine) s'impiegherà la sua quantità differenziale, per formare la quantità differenziale del termine stesso non semplicemente, ma secondo l'algoritmo precedentemente stabilito.

(Bottazzini, Freguglia, Toti Rigatelli, 1992)

Nella formulazione di Leibniz i differenziali dx e dv non sono a priori infinitesimi, ma acquistano questo carattere dalle regole di differenziazione; inoltre, come si può osservare dal testo appena citato, preso arbitrariamente uno dei differenziali, ad esempio dx, egli ricava l'altro direttamente per mezzo della tangente. In questo modo la determinazione della sottotangente segue immediatamente dal calcolo del rapporto $\frac{dx}{dv}$. Leibniz sceglie queste differenze come parametri principali al posto della sottotangente alla Fermat; si tratta di una scelta non semplice, non tanto per l'intervento di quantità infinitesime, che ormai erano entrate nel linguaggio matematico, quanto perché queste quantità perdono il loro carattere ausiliario di artifici tecnici, destinati a sparire nella formulazione finale, per assumere invece il ruolo di parametri fondamentali per la descrizione delle curve. Una scelta non facile soprattutto per Leibniz che a queste quantità infinitesime aveva sempre negato una reale esistenza, considerandole piuttosto "finzioni", anche se ben fondate, alla stregua degli immaginari e delle quantità negative. Le difficoltà concettuali sono evidenti, al punto che Leibniz cerca di mascherarle nascondendo il carattere infinitesimo dei differenziali, introducendo questi ultimi per mezzo della tangente, definita più avanti come quella retta che congiunge punti infinitamente vicini della curva. Utile, a tal proposito risulta un’osservazione di Federigo Enriques:

Sembra che egli [Leibniz] comprenda che l’infinitesimo potenziale è sufficiente alla costruzione del calcolo, ma d’altra parte ragioni metafisiche portavano nella sua mente l’infinito e l’infinitesimo

attuale.

(Enriques, 1938)

Ciò che costituisce la forza del metodo leibniziano è la semplicità del suo algoritmo, la sua notazione elegante, il suo formalismo operativo di impianto algebrico. L'idea fondamentale in Leibniz è la non confrontabilità: punti, linee, superfici non sono confrontabili, non si aggiunge nulla ad una retta aggiungendo ad esempio un punto; così nei riguardi di x, dx si comporta come un punto in rapporto ad una retta. Inoltre suggerisce che le quantità infinitesime sono minori di tutte le altre quantità date, che sono prive di grandezza, che conservano il carattere delle relazioni tra le quantità finite dalle quali provengono. Egli è tentato di non considerare gli elementi infinitesimali, bensì i loro rapporti, ma l'identificazione dei rapporti con i numeri non è sempre attuata; tale concezione è in parte responsabile del fatto che il concetto di limite non può scaturire dalle teorie leibniziane e, come vedremo, newtoniane; è necessario aspettare i numeri reali per poter definire i differenziali come limiti di serie infinite di numeri.
Ad ogni modo l’Analisi infinitesimale di Leibniz trionfò e, sebbene abbia sempre trovato dei critici nel XVIII secolo, continuò a vivere e produrre risultati eccezionali.

1.3.3.4 Isaac Newton (1642-1727)

Tutte le opere di Newton, ad eccezione dei *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica* del 1687, rivelano un indirizzo di tipo empirista, pragmatico: la matematica per lo scienziato inglese ha un valore essenzialmente strumentale nei confronti della fisica. Ciò traspare anche nei confronti dei problemi delle tangenti e delle quadrature, che pure si ritrovano all’origine del calcolo newtoniano. La sua posizione in merito è sostanzialmente differente rispetto alle precedenti: nell’ambito di una concezione “meccanica” della geometria, Newton considera le variabili come grandezze, il cui valore aumenta o diminuisce con continuità, e l’equazione $P(x, y) = 0$ di una curva come una relazione che regola le loro variazioni relative, e quindi come la traiettoria di un punto mobile. In altre parole, Newton immagina le variabili x, y come delle quantità “fluenti” correlate dall’equazione data. Egli introduce due nuove grandezze $\dot{x}$ e $\dot{y}$ che sono le velocità istantanee, o “flussioni”, delle variabili. Egli scrive nel *Tractatus de quadratura curvarum* (1704):

Considero in questo lavoro le grandezze matematiche come generate da un moto continuo. Le linee vengono descritte per moto continuo di punti, le superfici per moto di linee, chiamando flussioni queste velocità di accrescimento e fluenti le quantità generate.
(Andriani, Dallanoce, Falcade, Foglia, Gregori, Grugnetti, Maffini, Marchini, Rizza, Vannucci, 2005)

I rapporti di tali grandezze, che determinano la tangente alla curva data, poiché la velocità è tangente alla traiettoria, si potranno ricavare operando secondo opportune regole sulla funzione $P(x,y)$. Come per Leibniz, il ruolo centrale è giocato dall'algoritmo che consente di determinare le varie flussioni.
In precedenza ho scritto che per Newton le flussioni sono le velocità istantanee, bisogna però osservare che egli non le definisce come rapporto incrementale, in tutte le sue opere non compare, neppure a parole, il $\lim_{h\to 0}\frac{x(t+h)-x(t)}{h}$. Bisogna precisare che Newton considera solo grandezze dipendenti dal tempo (x è una fluente funzione del tempo e y è ancora una fluente funzione del tempo); $\dot{x}$ è la flussione, la velocità di accrescimento; anche se Newton non definisce la velocità istantanea, la concepisce come quantità fisica. Inoltre Newton non calcola mai delle flussioni, ma solo rapporti tra flussioni, come ad esempio $\frac{\dot{x}}{\dot{y}}$ o $\frac{\dot{y}}{\dot{x}}$, talvolta calcola $\frac{\dot{y}}{\dot{x}}$ e pone $\dot{x}=1$, per cui $\frac{\dot{y}}{\dot{x}}=\dot{y}$ e ciò è, operativamente, vicino al nostro $\dot{y}=\frac{dy}{dx}$.
Le analogie matematiche con la formulazione leibniziana sono evidenti, eppure, da un punto di vista fondazionale, i due approcci sono profondamente diversi: nella formulazione leibniziana il calcolo richiede una vera e propria rivoluzione epistemologica con l'introduzione essenziale di quantità evanescenti; con Newton restiamo invece nell'ambito di quantità finite, le velocità, la cui definizione rigorosa avrebbe certo condotto verso difficoltà analoghe, ma che potevano essere ignorate; naturalmente anche il calcolo newtoniano deve fare uso di quantità infinitesime, ma queste vengono "nascoste" e presentate sotto la veste di quantità finite e familiari.
Nell'opera *De quadratura curvarum* del 1676 Newton introduce il "metodo delle prime e ultime ragioni", qui dimostra di non essere molto distante dal concetto di limite. Infatti ragiona in questo modo: bisogna trovare la velocità delle variazioni x e x^n, sia o l'incremento in x e $(x+o)n-x^n$ il corrispondente incremento in x^n; allora il rapporto degli incrementi sarà:

$$1\colon\left[nx^{n-1}+\frac{n(n-1)}{2}ox^{n-2}+\cdots\right]$$

Per trovare la prima e l’ultima ragione si fa “svanire” o, ottenendo il rapporto $1\colon nx^{n-1}$
Un’altra conferma del fatto che Newton fosse vicino al concetto di limite è la seguente definizione che si trova nei suoi *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*:

Le quantità come anche rapporti di quantità, le quali in un dato tempo tendono costantemente all’uguaglianza, e in modo che possono avvicinarsi tra loro più di qualunque data differenza, diventano infine uguali.
(Andriani, Dallanoce, Falcade, Foglia, Gregori, Grugnetti, Maffini, Marchini, Rizza, Vannucci, 2005)

1.3.4 Il XVIII secolo

1.3.4.1 Leonard Euler (1707-1783)

La matematizzazione progressiva della fisica e l’uso del calcolo infinitesimale nell’analisi dei fenomeni naturali, sono all’origine del fiorire di nuovi rami della matematica: lo studio di fenomeni meccanici e fisici si traducono in generale in equazioni differenziali, la cui integrazione sarà l’oggetto di un nuovo ambito dell’analisi; la matematizzazione della meccanica, dell’idrodinamica e della teoria dell’elasticità è l’impulso principale allo sviluppo del calcolo delle variazioni; lo studio delle curve e delle superfici necessita di tecniche differenziali che sono all’origine della geometria differenziale.
Tutti questi rami si dipartono da un unico tronco comune: il calcolo infinitesimale; il suo sviluppo costituirà l’oggetto delle ricerche matematiche del XVIII secolo, dove il calcolo, pur ampliandosi tramite il ramificarsi delle sue applicazioni, conserverà tuttavia tutte le difficoltà di definirne le nozioni fondamentali. Quasi tutti i matematici del secolo infatti provano a superare tale ostacolo, ma i loro tentativi rimangono vani. Uno dei punti del calcolo soggetto alle critiche più violente è quello sulla natura degli “infinitamente piccoli”. Molti matematici cercano di legittimare l’esistenza di tali quantità “evanescenti”, anche mediante considerazioni metafisiche.
Il matematico Eulero rifiuta sia la metafisica sia la geometria come base del nuovo calcolo. Egli pone come basilare la nozione di funzione, com’egli stesso precisa nella

prefazione della *Introductio in Analysin infinitorum* (1748):

Mi sono dilungato nel primo libro sulle funzioni di variabili, poiché esse sono l’oggetto dell’analisi infinitesimale. […] Una funzione di una quantità variabile è un’espressione analitica composta in una maniera qualunque da questa quantità variabile e da numeri o quantità costanti.
(Andriani, Dallanoce, Falcade, Foglia, Gregori, Grugnetti, Maffini, Marchini, Rizza, Vannucci, 2005)

Già in precedenza Johann Bernoulli al termine di una corrispondenza con Leibniz ne aveva dato una definizione simile:

Chiamo funzione di una grandezza variabile una quantità composta in una maniera qualunque da questa grandezza variabile e da costanti.
(Andriani, Dallanoce, Falcade, Foglia, Gregori, Grugnetti, Maffini, Marchini, Rizza, Vannucci, 2005)

Ad ogni modo Eulero usa con grande disinvoltura i differenziali “alla Leibniz” e si può considerare come uno dei maggiori diffusori del modello leibniziano del nuovo calcolo.

1.3.4.2 Jean Baptiste Le Rond d’Alembert (1707-1783)

In controtendenza con gli usi dell’epoca, D’Alembert non accettò il calcolo differenziale leibniziano. Riferendosi ai differenziali egli sostiene che

una quantità o è qualcosa o è niente: se è qualcosa, non si è ancora annullata; se è niente, si è letteralmente annullata. Supporre che vi sia uno stato intermedio tra qualcosa e niente è una chimera.

(Dupont, 1994)

D’Alembert è forse il matematico che più si è avvicinato al concetto di limite, prima del XIX secolo. Egli, infatti, nella redazione della voce “Limite” dell’*Encyclopédie* (1751-1765) scrive:

Limite (Matematica):
Diciamo che una grandezza è il *limite* di un’altra grandezza, quando la seconda può avvicinarsi alla prima più vicino di una grandezza data, tanto piccola quanto si possa supporre, senza però che la

grandezza che si avvicina, possa mai sorpassare la grandezza che avvicina; di modo che la differenza di una tale quantità al *limite* è assolutamente inassegnabile.

Per esempio, supponiamo due poligoni, l’uno inscritto e l’altro circoscritto ad un cerchio, è evidente che se ne possono moltiplicare i lati[15] quanto si vorrà; e in questo caso, ciascun poligono si avvicinerà sempre di più alla circonferenza del cerchio, il contorno del poligono inscritto aumenterà e quello del circoscritto diminuirà; ma il perimetro o il contorno del primo non sorpasserà mai la lunghezza della circonferenza; e quello del secondo non sarà mai più piccolo di questa stessa circonferenza; la circonferenza del cerchio è dunque il *limite* dell’aumento del primo poligono, e della diminuzione del secondo.

1°) Se due grandezze sono il *limite* di una stessa quantità, queste due grandezze saranno uguali tra loro.

2°) Sia $A \times B$ il prodotto delle due grandezze A, B. Supponiamo che C sia il *limite* della grandezza A, e D il *limite* della quantità B; dico che $C \times D$ prodotto dei *limiti*, sarà necessariamente il *limite* di $A \times B$, prodotto delle due grandezze A, B.

Queste due proposizioni, che si troveranno dimostrate esattamente nelle *Istitutiones de Géométrie* servono come principi per dimostrare rigorosamente che si ha l’area di un cerchio, moltiplicando la semicirconferenza per il suo raggio. Si vedano l’opera citata p. 331, e seguenti, del secondo tomo.

La teoria dei *limiti* la base della vera metafisica del calcolo differenziale. Si vedano DIFFERENZIALE, FLUSSIONE, ESAUSTIONE, INFINITO.

A dire il vero, il *limite* non coincide mai, o non diventa mai uguale alla quantità della quale è il *limite*; ma questo le si avvicina sempre di più, e può differirne così poco quanto si vorrà. Il cerchio, per esempio, è il *limite* dei poligoni inscritti e circoscritti; in quanto non si confonde mai rigorosamente con essi, benché questi possano avvicinarsi all’infinito. Questa nozione può servire a chiarire diverse proposizioni matematiche. Per esempio, si dice che la somma di una progressione geometrica decrescente il cui primo termine è a e il secondo è b, è $\frac{a-b}{aa}$; questo valore non è in effetti la somma della progressione, il valore esatto della somma è $\frac{aa-be}{a-b}$, che è sempre minore di $\frac{aa}{a-b}$, perché in una progressione geometrica anche decrescente, l’ultimo termine e non è mai $= 0$: ma poiché questo termine si avvicina continuamente a zero, senza mai arrivarci, è chiaro che zero è il *limite*, e che di conseguenza il *limite* di $\frac{aa-be}{a-b}$ è $\frac{aa}{a-b}$, supponendo $e = 0$, cioè mettendo al posto di e il suo *limite.* Si vedano SUCCESSIONE, PROGRESSIONE, ecc.

(Andriani, Dallanoce, Falcade, Foglia, Gregori, Grugnetti, Maffini, Marchini, Rizza, Vannucci, 2005)

Tale formulazione del concetto di limite, però, non venne accettata dai suoi contemporanei.

[15] il numero dei lati

1.3.5 Il XIX secolo

I matematici del XVIII secolo erano riusciti a costruire quasi tutti i concetti e le tecniche che oggi fanno parte di ogni corso di base di analisi matematica (successioni e serie infinite, funzioni continue, funzione derivata, integrali, sviluppi di funzioni in serie intere e trigonometriche, risoluzione di equazioni differenziali, ...) usando i numeri reali, concetti di limite e convergenza senza che fossero stati costruiti o definiti in modo rigoroso. Agli inizi del XIX secolo il desiderio di basare la matematica su fondamenti solidi diventa quasi generale e la necessità di mettere in chiaro i concetti basilari dell'analisi si fa pressante. Il primo ad avere una concezione chiara delle nozioni di base del calcolo infinitesimale (continuità e legame tra continuità e derivabilità) è il logico e matematico di Praga Bernard Bolzano, malauguratamente i suoi lavori passano inosservati per mezzo secolo.

1.3.5.1 Augustin Louis Cauchy (1789-1857)

All'inizio del XIX secolo è il matematico Augustin Louis Cauchy il principale artefice dell'introduzione del rigore nel calcolo infinitesimale. Nella concezione dell'Analisi di Cauchy il concetto di limite appare come fondamentale. Egli pubblica tra il 1821 e il 1829 tre opere riguardanti l'analisi infinitesimale: *Cours d'Analyse* (1821), *Résumé des leçons sur le calcul infinitésimal* (1823) e *Leçons sur le calcul différentiel* (1829). La sua definizione di limite riprende l'idea di D'Alembert e rompe definitivamente con la concezione geometrica ancora soggiacente a quell'epoca; egli fa del limite un concetto aritmetico:

Quando i valori successivamente attribuiti ad una stessa variabile si avvicinano indefinitamente ad un valore fisso, in modo che ne differiscano poco quanto si vuole, quest'ultimo è chiamato il limite di tutti gli altri.
(Andriani, Dallanoce, Falcade, Foglia, Gregori, Grugnetti, Maffini, Marchini, Rizza, Vannucci, 2005)

Diamo un'interpretazione di questo passo. Indichiamo con x la variabile; i valori successivamente dati a questa x siano: $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots$cioè costituiscano una successione infinita. Indichiamo il valore fisso con a. Ora Cauchy ci invita a considerare la differenza $x_n - a$ oppure $a - x_n$, diciamo il valore assoluto $|x_n - a|$.

Questa quantità diventerà piccola quanto vogliamo pur di assumere n sufficientemente grande.
Alla luce del concetto di limite, di variabilità e di funzione, Cauchy chiarisce la nozione di infinitamente piccolo, di infinitesimo, che non è altro che una successione convergente avente come limite zero:

Si dice che una quantità variabile diviene infinitamente piccola quando il suo valore numerico decresce indefinitamente fino a convergere verso il limite zero.
(Andriani, Dallanoce, Falcade, Foglia, Gregori, Grugnetti, Maffini, Marchini, Rizza, Vannucci, 2005)

Anche la derivata di una funzione continua è definita in termini di limite. Ad ogni modo Cauchy non esplicita il legame tra continuità e derivabilità, oggi sappiamo che una funzione derivabile in un punto è ivi anche continua e che il viceversa non è vero. Dopo aver definito la derivata, Cauchy chiarisce i suoi legami con i differenziali di Leibniz: se dx è una quantità finita qualunque, il differenziale dy di una funzione $y = f(x)$ sarà semplicemente $f'(x)dx$. Le quantità dx e dy sono dunque definite mediante la sola proprietà di avere un rapporto uguale alla derivata $f'(x)$.
Generalmente si attribuisce la formulazione che noi oggi conosciamo proprio a Cauchy, in realtà non possiamo ancora considerarla soddisfacente: sembra sia legata unicamente a successioni numeriche, le quantificazioni sono implicite e sono ancora presenti espressioni non ben definite, egli, inoltre, non sottolinea nemmeno il punto sul quale si calcola il limite. Nonostante questo la concezione di limite di Cauchy deve essere considerata molto avanzata, inoltre il 1821 segna una svolta fondamentale nell'Analisi infinitesimale, infatti prima di tale data tutta l'Analisi era dominata dal concetto di infinitesimo, in seguito fu fondata sul concetto di limite.

1.3.5.2 Jean Marie Duhamel (1797-1872)

La formulazione del limite, a partire dal 1821, subisce ancora notevoli modifiche, anzi perfezionamenti. Nella genesi storica del concetto si nota, per molto tempo, che si considera una grandezza che s'avvicina, nel senso letterale del termine, ad una meta, che sarà il limite. Questo va bene, nel senso che, quando vi è questo tipo di avvicinamento, abbiamo il limite; ma può generare idee errate perché, come ora illustreremo si parlerà di limite anche quando l'avvicinamento avverrà in modo che non potrebbe essere chiamato tale nel linguaggio comune. Consideriamo, ad esempio, la definizione che Duhamel dà nel 1847:

Chiamiamo limite di una quantità variabile una quantità fissa alla quale la variabile si avvicina indefinitamente, in modo cioè che la differenza fra le due quantità possa diventare minore di ogni grandezza assegnata, senza con ciò ridursi mai rigorosamente a zero.

(Dupont, 1994)

Pensiamo alla funzione $y = x sin\frac{1}{x}$ (figura 8) e facciamo tendere la x a zero.

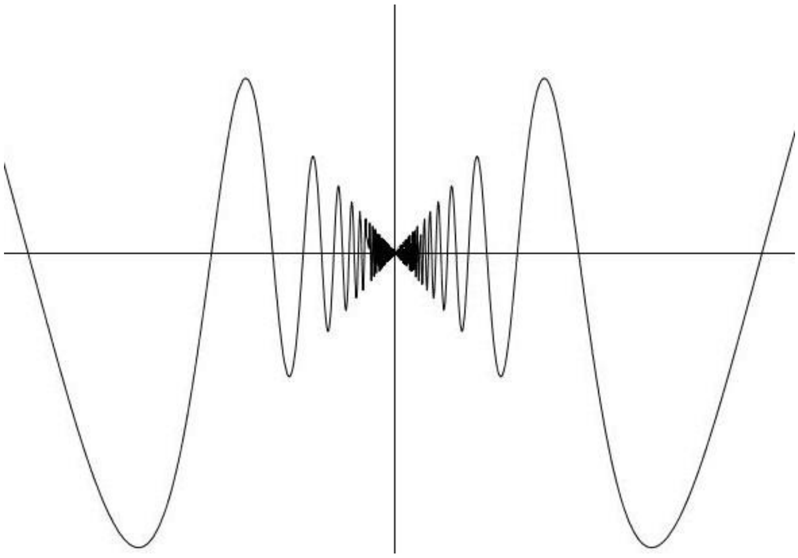


Figura 8

Ora pensiamo in modo cinematico: attorno ad $x = 0$ la y oscilla infinite volte, assume infinite volte il valore zero, si avvicina e si allontana alternativamente al valore zero, ma, mentre la x si avvicina a zero per valori decrescenti della $x > 0$ o per valori crescenti della $x < 0$, la y si allontana sempre meno da zero; per x che si avvicina a zero (oggi diremmo $x \to 0$) possiamo dire che la y si avvicina irregolarmente a zero.
La definizione di limite oggi accettata è preceduta storicamente da molte definizioni difettose, ad esempio quella appena vista. Passare anche attraverso gli errori della storia può essere una metodologia didattica efficace. D'altra parte la storia è un processo di approssimazioni successive.

1.3.5.3 Pierre Ossian Bonnet (1819-1892)

Generalmente la formulazione esatta e definitiva, come viene oggi presentata, è attribuibile a Weierstrass. In realtà anche il matematico Bonnet nel 1871 scrive:

Essendo data una funzione $f(x)$ di una variabile x, si dice che questa funzione tende verso un limite finito e determinato L per x tendente verso un valore particolare x_0, quando dopo aver fissato arbitrariamente un numero reale positivo ε piccolo quanto si vuole è possibile trovare un altro numero reale positivo δ tale che, per ogni valore di x la cui differenza con x_0 ha un modulo diverso da zero ma minore di δ, il valore corrispondente di $f(x)$ abbia con L una differenza il cui modulo sia compreso fra zero ed ε.

(Dupont, 1994)

Va sottolineato come con questa definizione siamo comunque ancora di fronte ad una "teoria cinematica del concetto di limite"

1.3.5.4 Karl Theodor Wilhelm Weierstrass (1815-1897)

Karl Weierstrass probabilmente riteneva che le definizioni date dal 1821 in poi, seppur suggestive e pedagogicamente convincenti, fossero prive di quella precisione e rigore che generalmente si esige dalla matematica. Una tale precisione poteva essere raggiunta unicamente passando ad una "teoria statica del concetto di limite", come venne chiamata da alcuni, non facendo riferimento né a nozioni di movimento, né a significati geometrici. Egli scelse di basare tutta l'Analisi sul sistema $\mathbb{R}$ dei numeri reali, non considerandolo come dato a priori. La sua costruzione dei numeri reali mediante serie, elaborata attorno al 1863, non restò isolata; nel 1872 vennero pubblicati in questo campo i lavori di Cantor, Heine e Dedekind. Fra i contributi di Weierstrass al cosiddetto programma di aritmetizzazione dell'analisi si conta, oltre a una definizione soddisfacente del concetto di numero reale, anche un perfezionamento della definizione del concetto di limite. Si tratta della cosiddetta definizione "epsilon-delta", egli scrive:

Se è possibile determinare un intorno δ tale che, per tutti i valori di h minori in valore assoluto di δ, $f(x+h)-f(x)$ sia minore di una quantità ε, piccola quanto si vuole, allora si dirà che si è fatto corrispondere ad una variazione infinitamente piccola della variabile una variazione infinitamente piccola della funzione.

(Andriani, Dallanoce, Falcade, Foglia, Gregori, Grugnetti, Maffini, Marchini, Rizza, Vannucci, 2005)

Ne derivano immediatamente le definizioni moderne di limite e di continuità.

Heine, nei suoi *Elemente* del 1872, che risentono dell'influenza delle lezioni di Weierstrass, definisce il limite della funzione $f(x)$ nel punto x_0 nel modo seguente:

Il numero L è il limite della funzione $f(x)$ per $x = x_0$, se, dato un qualsiasi numero arbitrariamente piccolo ε, si può trovare un altro numero δ tale che per tutti i valori di x che differiscono da x_0 meno di δ, il valore di $f(x)$ differirà da quello di L meno di ε.
(Andriani, Dallanoce, Falcade, Foglia, Gregori, Grugnetti, Maffini, Marchini, Rizza, Vannucci, 2005)

In questa fredda e precisa definizione non viene fatto alcun cenno a entità che "fluiscono", non vi è alcun ricorso a punti e linee in movimento, né si parla di quantità che diventano infinitamente piccole. Tale definizione non contiene altro che numeri reali, oltre all'operazione di addizione (e all'operazione reciproca di sottrazione) e alla relazione "minore di" ed implicita la nozione di valore assoluto. Il linguaggio e il simbolismo non equivoci di Weierstrass e Heine estromettono dal calcolo infinitesimale quella nozione di variabilità tanto cruciale nella genesi storica del suo significato profondo.

Il processo di aritmetizzazione dell'Analisi ha mostrato che il concetto di limite si può assumere come pilastro portante di tante altre costruzioni di interesse matematico: serie, frazioni continue, prodotti infiniti, derivate, integrali, ecc.

1.3.6 Il Novecento

Per lo scopo didattico della trattazione il riassunto delle tappe fondamentali della storia del concetto di limite potrebbe terminare a questo punto; per una maggiore completezza ricorderò brevemente alcuni sviluppi avvenuti nel XX secolo. In particolare la teoria degli insiemi di Cantor e le sue feconde applicazioni hanno portato alla generalizzazione della topologia di $\mathbb{R}$ in spazi topologici astratti, che permettono di definire il limite attraverso la nozione di aperto e di punto di accumulazione, dando luogo ad una nuova concezione del concetto.

Inoltre, fin qui, si è sempre parlato di funzioni reali ad una variabile reale, ma ben presto ci si è accorti che molti fenomeni richiedevano funzioni più complesse per la loro descrizione, esprimibili mediante vettori. Il concetto di limite diventa più complesso e generale. Un primo tipo di generalizzazione ha puntato l'attenzione sul concetto di valore assoluto e, conseguentemente, di distanza. Gli spazi metrici introdotti nel 1910 dal matematico Maurice Fréchet, insiemi in cui è definita una distanza (o metrica), hanno permesso di presentare in modo unitario molti risultati della matematica e sono stati, a loro volta, spunto per altre generalizzazioni.

Se negli spazi metrici possiamo riportare tutto alla definizione di limite di una successione di punti, il che è formalmente identico alla definizione di limite di una successione di numeri, negli spazi più generali le successioni non bastano più. Si è utilizzato dapprima una sorta di generalizzazione delle successioni, con un insieme non numerabile di indici (convergenza alla Moore-Smith), poi si è introdotta la nozione di filtro, da Henri Cartan nel 1937, dalla quale, infine, si è derivata quella di ultrafiltro, che ha fornito un mezzo potente di costruzione e di dimostrazione in topologia generale e in logica. Un secondo tipo di generalizzazione si trova in Bourbaki (1939). In esso si definiscono due diversi tipi di limite, quello induttivo e quello proiettivo utilizzando particolari insiemi ordinati. Ancora più generale è la nozione di limite (e co-limite) di un diagramma in una categoria, concetto introdotto dopo il 1945[16] nella letteratura matematica.

Infine negli anni '60 Abraham Robinson presenta i suoi studi sull’analisi non-standard, ricavata da considerazioni complesse di Logica matematica. Con essa si forniva un supporto teorico alla trattazione degli infiniti ed infinitesimi in atto che tanto avevano fatto discutere dal XVI secolo in poi. In questo approccio il limite perde la sua centralità, ritornano alla ribalta derivate ed integrali che possono essere definiti semplicemente (rispettivamente) come rapporti e come somme, anche di quantità infinitesime.

[16] Il 1945 è la data di pubblicazione di un lavoro di Samuel Eilenberg e Saunders Mac Lane in cui veniva per la prima volta formalizzato il concetto di categoria.

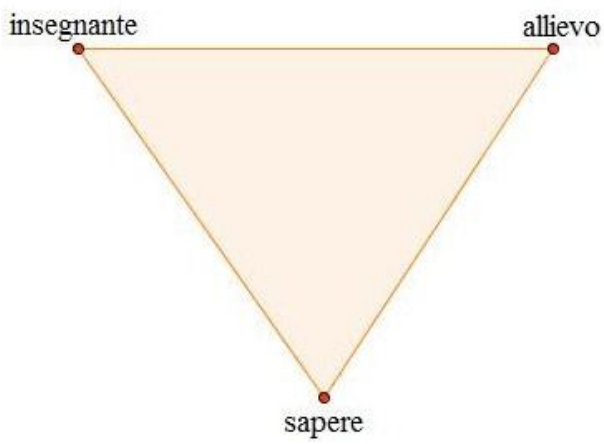
Capitolo 2

Insegnamento - apprendimento del concetto di limite

Gli studi in didattica della matematica che hanno analizzato le problematiche legate ai processi di insegnamento e apprendimento del concetto di limite sono numerosissimi. Per cercare di esaminare i possibili motivi che fanno del limite un soggetto cognitivamente così difficile da essere costruito correttamente, l'attenzione è stata focalizzata in generale sugli allievi. Nel seguente capitolo cercherò di riassumere alcuni risultati di ricerca che toccano varie dimensioni del sapere in gioco e che non sono state ancora prese in considerazione nel capitolo precedente.

2.1 La trasposizione didattica

Agli inizi degli anni '80 i ricercatori in didattica della matematica hanno iniziato a chiedersi quale fosse il rapporto tra il sapere matematico per il matematico e per l'allievo. In lavori di Yves Chevallard a partire dal 1982 viene proposto il famoso schema a forma di triangolo (schema 1) per modellizzare le dinamiche di insegnamento-apprendimento[17].



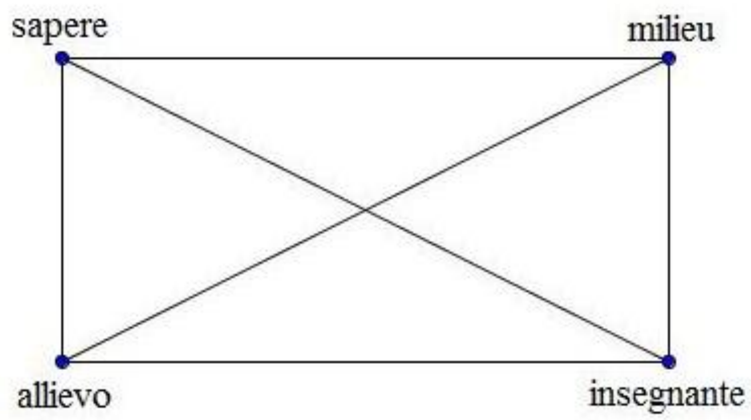
Schema 1

Spesso e volentieri questo modello è stato criticato sotto vari punti di vista. Sicuramente risulta ovvio che nei processi di insegnamento-apprendimento influiscono un'infinità di

[17] Con il termine "sapere" è inteso quello ufficiale, universitario, che Chevallard chiama "savoir savant".

fattori, non controllabili attraverso una qualsiasi modellizzazione; di volta in volta ci si deve limitare a focalizzare l’attenzione su alcune caratteristiche particolari. Ad ogni modo, tale triangolo può essere semplicemente interpretato come un’allusione a tre soggetti che entrano (fisicamente e/o metaforicamente) in contatto tra loro nel momento dell’azione didattica.

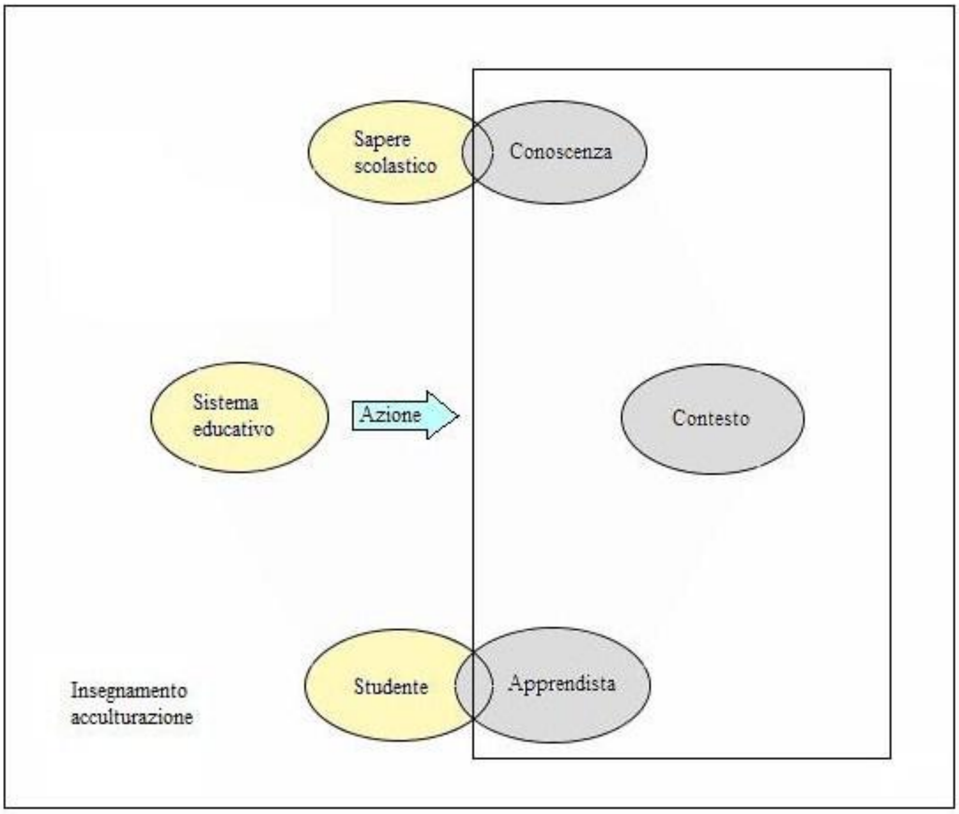
Dalla teoria delle situazioni risulta necessario aggiungere un ulteriore elemento, il “milieu”[18](mediatore). In questo modo il triangolo si trasforma in un quadrilatero (schema 2).



Schema 2

Anche quest’ultimo schema risulta insufficiente, dato che non differenzia i “saperi” scolastici, da insegnare o insegnati, e le conoscenze dell’allievo, che non coincidono tra loro e che funzionano secondo modalità diverse; inoltre risultano diverse anche le peculiarità delle attività del soggetto che apprende. Ciò porta ad avere quanto meno un “esagono della didattica”, reso da Guy Brousseau nello schema riportato qui di seguito (schema 3) che evidenzia il suo significato funzionale.

[18] Dalla teoria delle situazioni si sa che l’insegnante deve suscitare nell’allievo comportamenti che l’allievo stesso, per manifestare la sua conoscenza, dovrebbe assumere autonomamente. Questo è un paradosso. L’unica soluzione è coinvolgere un terzo elemento, il “milieu”, in modo che l’allievo risponda unicamente in riferimento alle necessità del milieu. Quest’ultimo è, quindi, lo strumento attraverso il quale il docente comunica con lo studente ed è costituito da oggetti fisici, culturali, sociali, umani, con i quali il soggetto interagisce in una situazione.

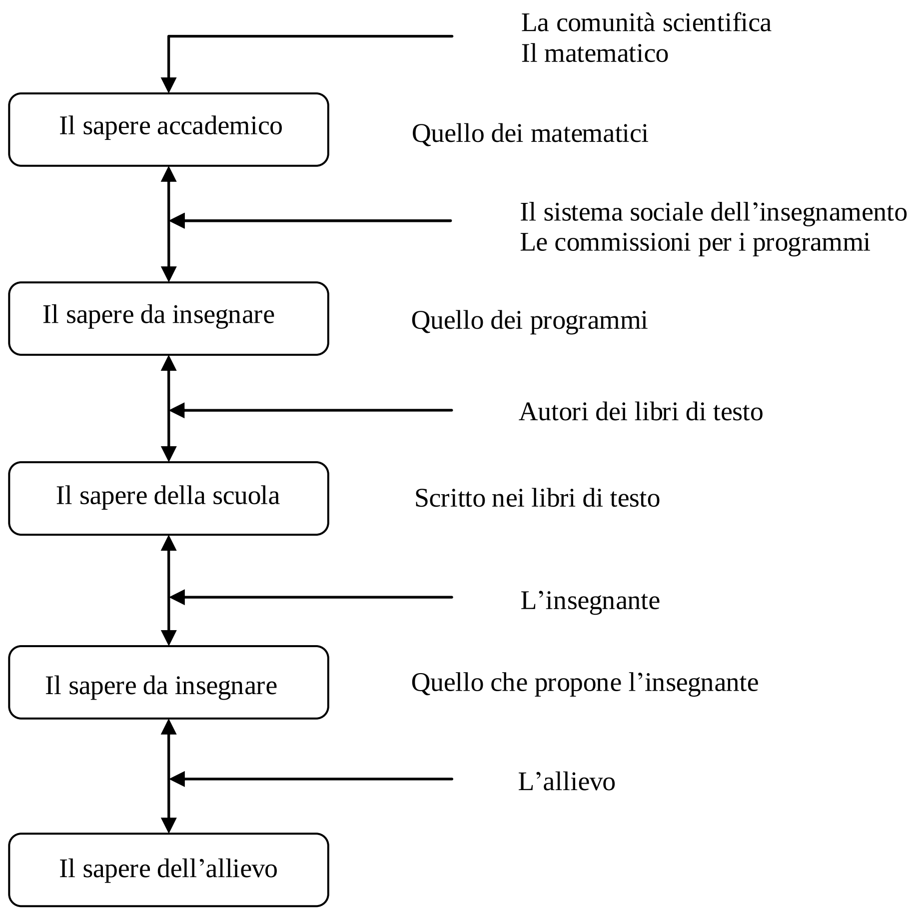


Schema 3

Questi schemi, volti a rappresentare situazioni didattiche, sono stati chiamati “poligoni” della didattica da Brousseau stesso.

Ritornando al triangolo, esso è stato il primo caso in cui si è parlato di “trasposizione didattica”. Tale espressione descrive l’insieme delle trasformazioni che subisce un sapere riconosciuto dalla comunità scientifica per essere insegnato, in funzione del luogo, del pubblico e delle finalità che ci si pone.

Risulta particolarmente significativo il passaggio tra il sapere e il sapere insegnato. Cercando sempre di semplificare e modellizzare tale passaggio può essere utile fare riferimento alla tabella seguente, presente in (Andriani, Dallanoce, Falcade, Foglia, Gregori, Grugnetti, Maffini, Marchini, Rizza, Vannucci, 2005) (schema 4).



Schema 4

Particolarmente complesso e delicato appare il passaggio dal "sapere da insegnare" al "sapere dell'allievo". Lee S. Shulman evidenzia alcune condizioni necessarie affinché questo passaggio riesca: in particolare è necessario che si conosca il contenuto dell'argomento (cioè l'accumulo e l'organizzazione della conoscenza nella mente), il contenuto pedagogico (ossia ciò che rende l'apprendimento di un determinato argomento semplice o difficoltoso, le preconfezioni di studenti di diverse età), infine il contenuto curricolare (cioè la capacità di collegare il contenuto di un dato corso o di una data lezione a questioni ed argomenti trattati simultaneamente in altre discipline).

L'analisi del sapere da insegnare e dei processi di concettualizzazione da parte degli allievi mostra che i concetti matematici non funzionano in modo isolato gli uni dagli altri. Per la loro comprensione e il loro reale apprendimento bisogna considerare insiemi di situazioni la cui trattazione implichi schemi, concetti, teoremi in stretta connessione, varie rappresentazioni linguistiche e simboliche utili per rappresentarli.

2.1.1 Il sapere da insegnare: dalle Indicazioni Nazionali

A proposito del "sapere da insegnare", vorrei ora considerare i nuovi programmi ministeriali per la Scuola Secondaria di II grado, pubblicati recentemente (2010), cercando di ritrovare quali indicazioni sono espresse relativamente al concetto di limite; focalizzerò la mia attenzione sulle indicazioni nazionali riguardanti gli obiettivi specifici di apprendimento per i percorsi liceali.
Si può subito notare come in tutti i particolari percorsi (licei artistici, liceo classico, linguistico, musicale, scientifico, liceo delle scienze umane) le linee guida inerenti alla nozione di limite, e a quelle "propedeutiche" di approssimazione e di numero reale, siano le stesse. In particolare, tra gli obiettivi specifici di apprendimento del primo biennio, per la sezione "Aritmetica e Algebra" si scrive[19]:

Lo studente acquisirà una conoscenza intuitiva dei numeri reali, con particolare riferimento alla loro rappresentazione geometrica su una retta. La dimostrazione dell'irrazionalità di $\sqrt{2}$ e di altri numeri sarà un'importante occasione di approfondimento concettuale. Lo studio dei numeri irrazionali e delle espressioni in cui essi compaiono fornirà un esempio significativo di applicazione del calcolo algebrico e un'occasione per affrontare il tema dell'approssimazione.

Si sottolinea inoltre come

L'acquisizione dei metodi di calcolo dei radicali non sarà accompagnata da eccessivi tecnicismi manipolatori.

Sempre a proposito di numeri reali e approssimazione tra gli obiettivi della stessa sezione per il secondo biennio si legge:

Attraverso una prima conoscenza del problema della formalizzazione dei numeri reali lo studente si introdurrà alla problematica dell'infinito matematico e delle sue connessioni con il pensiero filosofico. Inoltre acquisirà i primi elementi del calcolo approssimato, sia dal punto di vista teorico sia mediante l'uso di strumenti di calcolo.

[19] I testi riportati fanno riferimento agli obiettivi specifici di apprendimento per il liceo artistico, indirizzo architettura e ambiente; questi, però, rimangono gli stessi o dagli stessi contenuti per ogni altro percorso liceale.

Il fatto che questi obiettivi siano trasversali, da raggiungere per ogni percorso liceale, sottolinea una volta di più l’essenzialità delle tematiche legate all’approssimazione e ai numeri reali.
Più vicino al concetto proprio di limite invece appare il primo obiettivo di apprendimento della sezione “Relazioni e funzioni” del quinto anno:

[Lo studente] acquisirà il concetto di limite di una successione e di una funzione e apprenderà a calcolare i limiti in casi semplici. Lo studente acquisirà i principali concetti del calcolo infinitesimale […] anche in relazione con le problematiche in cui sono nati […]. Non sarà richiesto un particolare addestramento alle tecniche di calcolo […]. L’obiettivo principale sarà soprattutto quello di comprendere il ruolo del calcolo infinitesimale in quanto strumento concettuale fondamentale nella descrizione e nella modellizzazione di fenomeni fisici o di altra natura.

L’intenzione è apprezzabile, infatti viene valorizzata la dimensione storica della matematica; si rivaluta il suo aspetto applicativo, strumentale, non fine a se stesso, ma concettuale, legato alla modellizzazione; inoltre viene sottolineato, ancora una volta, come in generale vadano evitate dispersioni in tecnicismi ripetitivi o casistiche sterili, che non contribuiscono in modo significativo alla comprensione dei problemi; l’approfondimento degli aspetti tecnici deve essere funzionale alla comprensione degli aspetti concettuali. Questa stessa idea era già presente nel documento *Matematica 2003. Attività didattiche e prove di verifica per un nuovo curricolo di Matematica. Ciclo secondario* proposto da una commissione nominata dall’Unione Matematica Italiana (UMI, 2003) dove, in generale, si consiglia di:

Non esagerare con le pretese di rigore in matematica e richiedere invece, in ogni occasione, sensatezza e coerenza. Non eccedere nella formalizzazione. Non sottovalutare il ruolo dei ragionamenti intuitivi e non considerarli mai con una valenza negativa.

L’approssimazione può essere un terreno fertile di esplorazione di situazioni legate alla realtà, atte a stimolare e motivare la necessità di una formalizzazione successiva. Spesso problemi nati dall’esperienza legati alla misura sollevano importanti questioni che necessitano di una costruzione teorica per poter essere comprese e analizzate. In questo modo ci si allontana dall’ambito puramente fisico per passare ad un ambito più matematico. Così la formalizzazione diventa l’obiettivo finale dell’attività matematica,

poiché consente di costruire modelli generali, coerenti di alcuni aspetti della realtà.
Per comprendere a fondo il significato del concetto di limite e la necessità di una sua formalizzazione è necessario un lavoro preparatorio di lungo respiro, che inizi già dalle scuole elementari. Questioni relative alla misura e all’approssimazione possono essere rintracciate ed affrontate anche nei precedenti ordini scolastici. Nelle recenti Indicazioni Nazionali per la Scuola Primaria e la Scuola Secondaria di I grado si possono individuare vari riferimenti a tali problematiche, sia in ambito aritmetico, sia geometrico.

2.1.2 Il sapere nella scuola: dai libri di testo

Un’altra tappa del percorso dal sapere al sapere insegnato è occupata dal sapere presentato dai libri di testo. Considerando manuali scolastici tra i più diffusi nei trienni delle scuole superiori italiane, si può notare un’impostazione piuttosto teorica: il limite viene generalmente definito nella formulazione ε-δ o nella variante topologica mediante intorni, inizialmente per successioni e successivamente per funzioni reali; in seguito vengono generalmente introdotti i concetti di continuità e di derivata. Da sottolineare come questa presentazione non sia l’unica possibile, inoltre non considera la cronologia delle “conquiste” matematiche: la definizione ε-δ è posta come punto di partenza e non, come è invece accaduto, come punto di arrivo di una possibile sistemazione dell’analisi infinitesimale. Uno dei maggiori rischi di tale approccio è quello del circolo vizioso, dovuto all’uso implicito della continuità nella formalizzazione del concetto di limite stesso.
Entriamo ora più nel dettaglio della presentazione del concetto di limite proposta da alcuni testi scolastici[20]. La maggior parte dei manuali ha la medesima struttura nella trattazione del concetto di limite, potremmo schematizzarla nel seguente modo:

1. introduzione al concetto;
2. definizioni;
3. teoremi fondamentali;
4. algebra dei limiti;

[20] I libri di testo presi in considerazione per l’analisi sono stati:
- *Lineamenti di analisi e calcolo combinatorio*, N. Dodero, P. Baroncini, R. Manfredi, 2004, Ghisetti e Corvi editori, Milano;
- *Matematica 2°*, R. Bruno, W. Cavalieri, P. Lattanzio, 2003, Arnoldo Mondadori Scuola, Milano;
- *Matematica Tre*, L. Lamberti, L. Mereu, A. Nanni, 2001, Etas, Milano.

5. limiti notevoli.

In particolare vorrei soffermarmi sui primi due punti. In alcuni casi[21] il concetto viene introdotto mediante un esempio tratto dalla fisica, in cui si considera un problema di cinematica e si cerca di entrare in profondità nel concetto di velocità di un corpo, generalmente questo esempio appare isolato dal resto della trattazione. Il cuore dell'introduzione al concetto consiste in esempi di comportamenti di funzioni per valori della variabile indipendente sempre più vicini ad un valore finito o infinito. Questi esempi che fanno riferimento ad un approccio dinamico, utilizzando anche termini del linguaggio comune, sono spesso proposti mediante tabelle. Generalmente, però, non si parla esplicitamente di successioni, nemmeno nel caso in cui queste siano già state introdotte. Consideriamo un esempio tratto da *Lineamenti di analisi e calcolo combinatorio* di N. Dodero, P. Baroncini, R. Manfredi[22]:

Limite finito di una funzione per x che tende a un valore finito

2 Consideriamo la funzione $y = f(x) = \dfrac{2x^2 - x - 1}{x - 1}$

il cui insieme di esistenza è $R - \{1\}$. Ci proponiamo di esaminare il comportamento della funzione (cioè i valori di y), quando si scelgono valori di x prossimi a 1, cioè prossimi al valore in cui la funzione non è definita.

Costruiamo perciò la seguente tabella, calcolando i valori di $f(x)$ corrispondenti a valori di x che si avvicinano sempre più a 1 *per difetto* (per esempio 0,9; 0,99; 0,999; ...) o *per eccesso* (ad esempio 1,1; 1,01; 1,001; ...).

x	0,9	0,99	0,999	1,001	1,01	1,1
$f(x)$	2,8	2,98	2,998	3,002	3,02	3,2

Come si vede, quanto più x si approssima al valore 1, tanto più $f(x)$ si avvicina al valore 3. Si usa dire che, "per x tendente a 1, $f(x)$ ha per limite 3", o anche, che "$f(x)$ tende a 3 per x tendente a 1", e si scrive

$$\lim_{x \to 1} f(x) = 3.$$

Questo approccio permette di introdurre l'idea topologicamente rilevante di

[21] Ad esempio in *Lineamenti di analisi e calcolo combinatorio*, N. Dodero, P. Baroncini, R. Manfredi, 2004, Ghisetti e Corvi editori, Milano.

[22] Esempi analoghi sono presenti anche negli altri testi considerati, anche se in *Matematica Tre* di L. Lamberti, L. Mereu, A. Nanni si cerca di chiarire da un punto di vista più "formale" il concetto di vicinanza e si introduca, almeno intuitivamente, il concetto di punto di accumulazione.

“vicinanza”, che apre la strada alla formalizzazione attraverso il concetto di punto di accumulazione. Inoltre si sottolinea il carattere dinamico del limite, come processo, con evidenti collegamenti ai concetti di approssimazione e di infinito potenziale. Questo approccio, però, andrebbe usato solo nella fase iniziale, per avvertire la necessità di introdurre strumenti opportuni. Infatti esso apre seri problemi, che vanno considerati consapevolmente:

- generalmente in questi esempi si considerano sempre solo funzioni dotate di limite e risulta singolare il criterio per la determinazione del limite: si considerano opportune successioni convergenti ad un certo valore (nell’esempio sopra riportato 1) e si fa osservare come in corrispondenza di questi valori la funzione si avvicini sempre di più ad un numero, che coincide proprio con il limite; in questo ragionamento si utilizza però implicitamente la continuità delle funzioni, o meglio la continuità per successioni delle funzioni[23], la considerazione di un’unica successione convergente va bene solo perché la funzione data è continua[24];
- una delle difficoltà note riguardo la comprensione del concetto di limite è la sua “controvarianza” rispetto all’intuizione, dato che il movimento procede dalla variabile dipendente alla indipendente e non viceversa; con le successioni si enfatizza il movimento naturale;
- solitamente si considerano funzioni il cui valore del limite è intero o al più razionale (se non tende a infinito), la situazione è così riportata a casi molto particolari, con l’idea che il limite possa sempre essere controllato col metodo delle successioni (in sostanza “per tentativi”);
- i valori considerati con le successioni sono sempre “pochi”, non si conosce il comportamento di una successione conoscendo i primi n termini; bisognerebbe far emergere anche l’aspetto attuale con cui va considerata la successione nel momento in cui la si usa per aspetti connessi al concetto di limite, la costruzione di tabelle invece rimanda ad una concezione di tipo potenziale.

---

[23] Il dominio delle funzioni considerate è $\mathbb{R}$, spazio metrico, quindi si dimostra che una funzione f è continua se e solo se è continua per successioni.

[24] Una funzione f è continua per successioni in x_0(appartenente al dominio D della funzione e punto di accumulazione per l’insieme D) se e solo se per ogni successione $\{x_n\}_{n\in N}$ convergente a $x_0$la corrispondente successione $\{f(x_n)\}_{n\in N}$ è convergente a $f(x_0)$.

Spesso e volentieri questi esempi sono accompagnati da giustificazioni e considerazioni in riferimento ai grafici delle funzioni prese in esame.

Terminata l’introduzione al concetto, vengono presentate le varie definizioni[25], i vari casi di limite, solitamente a partire dal caso $\lim_{x\to x_0} f(x) = l$. Le definizioni presenti sui testi sono molto simili, utilizzano ε, δ o intorni, spesso si presentano in una forma “mista” del tipo seguente:

Sia $y = f(x)$ una funzione definita in un intorno completo I del punto c, escluso al più il punto c. Si dice che, per x tendente a c, la funzione $y = f(x)$ ha per limite l e si scrive

$$\lim_{x\to c} f(x) = l$$

Se, comunque si scelga un numero positivo ε, arbitrariamente piccolo, si può determinare, in corrispondenza a esso, un intorno completo di c, contenuto in I, tale che, per ogni x di tale intorno (escluso al più $x = c$), si abbia

$$|f(x) - l| < \varepsilon.$$

(Dodero, Baroncini, Manfredi, 2004)

Oppure nel seguente modo:

Sia f una funzione definita in un intorno I del punto x_0, senza che sia necessariamente definita in x_0.

Si dice che il numero l è il limite della funzione f nel punto x_0 e si scrive:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = l$$

Se fissato comunque un numero $\varepsilon > 0$, è possibile determinare in corrispondenza di esso un numero δ_ε, tale che, per ogni x appartenente a I verificante la condizione:

$$0 < |x - x_0| < \delta_\varepsilon$$

Risulti:

$$|f(x) - l| < \varepsilon.$$

(Lamberti, Mereu, Nanni, 2001)

I punti di criticità in queste definizioni sono molteplici, vorrei solo osservare come il linguaggio sia abbastanza discorsivo, seppure nel primo caso lo sia maggiormente

[25] Vorrei preliminarmente osservare come una definizione, non una notazione, sia un ente sintattico che richiede una teoria esplicita in cui inserirsi. Già Aristotele negli *Analitici secondi* presenta una teoria della Scienza deduttiva, specificando, probabilmente per la prima volta, cosa si intenda per definizione e teorema. Accettando questa impostazione risulta particolare parlare di definizione di limite senza aver presentato nemmeno un sistema assiomatico per i numeri reali.

rispetto al secondo; vengono usate espressioni che rinviano a significati intuitivi a volte superflui, come ad esempio “arbitrariamente piccolo”, e i quantificatori, espressi in parole e non attraverso simboli, non sono sempre utilizzati nel modo adeguato.
Successivamente alla definizione vengono proposti vari esempi di “verifica”[26] del limite mediante la definizione stessa. La loro importanza consiste nella possibilità di consolidare la definizione di limite proposta; di fatto, però, tali esempi spesso si basano sull’applicazione di tecniche di calcolo algebrico non banali; tale complessità rischia di spostare l’attenzione dal significato del risultato ottenuto. Anche per quanto riguarda gli esercizi proposti si insiste sulla “verifica” di limiti e, successivamente, sul calcolo di limiti, operando quindi prevalentemente nel registro algebrico.

2.2 Alcune ipotesi sulla natura della disciplina e sui processi cognitivi

Nel momento in cui si vogliono studiare le dinamiche dei processi di insegnamento - apprendimento in matematica è opportuno chiedersi "come" si impara in matematica e di che natura sono gli oggetti matematici, il sapere matematico.

2.2.1 Le problematiche dei rapporti processo-oggetto

Agli inizi degli anni '90 vari ricercatori in didattica della matematica si sono posti la medesima domanda e hanno cercato di darne una risposta.

2.2.1.1 I primi lavori di Dubinsky e Sfard

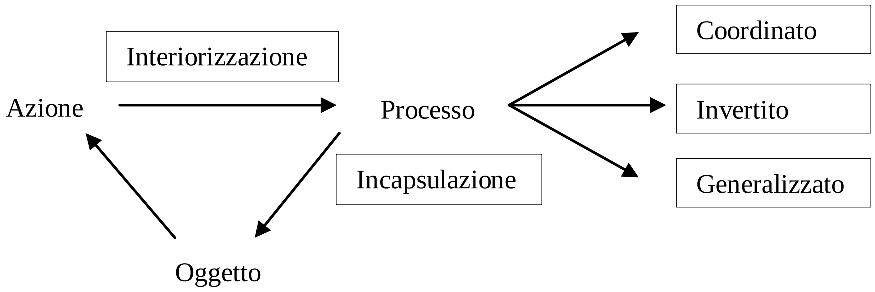
Anna Sfard (Sfard, 1991) ha cercato di fornire un quadro teorico per investigare il ruolo degli algoritmi nel pensiero matematico. Analizzando differenti definizioni e nozioni matematiche ha sottolineato come nozioni astratte, quali ad esempio quella di numero o funzione, possono essere concepite in due modi fondamentalmente diversi: “strutturalmente” (come oggetti) e “operazionalmente” (come processi). Viene, così, evidenziata una natura duale, più che dicotomica, dei concetti matematici: strutturale ed operazionale. Scrive Sfard:

[26] Sarebbe forse più opportuno parlare di dimostrazioni piuttosto che di verifiche.

Seeing a mathematical entity as an object means being capable of referring to it as if it was a real thing - a static structure, existing somewhere in space and time. It also means being able to recognize the idea "at a glance" and to manipulate it as a whole, without going into details. [...] In contrast, interpreting a notion as a process implies regarding it as a potential rather than actual entity, which comes into existence upon request in a sequence of actions. Thus, whereas the structural conception is static (or shall I say, after Frege, 1970, "timeless"), instantaneous, and integrative, the operational is dynamic, sequential, and detailed. [...] In other words, there is a deep ontological gap between operational and structural conceptions.

(Sfard, 1991)

L'autrice fa l'ipotesi che queste due dimensioni siano complementari, ma che quella operazionale preceda la strutturale sia nello sviluppo storico del pensiero matematico sia in quello cognitivo del soggetto. L'imposizione troppo precoce di un punto di vista strutturale conduce alla formazione di "pseudo-oggetti", oggetti nominati, etichettati, ma non "disincapsulabili", ossia sprovvisti di tutta la flessibilità necessaria dei livelli procedurali che li sostengono e in cui non funziona il gioco dialettico tra processo e oggetto, essenziale nell'attività matematica.
In Ed Dubinsky (Dubinsky, 1991) si nota l'identificazione dei processi di astrazione e di riflessione, particolarmente rilevanti nelle matematiche "avanzate", riferendosi sia alla pratica sia all'osservazione degli allievi. Identificati, questi processi possono essere utili per stabilire delle "scomposizioni genetiche" dei concetti come, ad esempio, quello di limite. I processi di astrazione (si veda lo schema concettuale riportato qui di seguito) mettono in evidenza una costruzione gerarchica: “l'Azione" viene "interiorizzata" in un "Processo", il quale poi, per "incapsulazione", diviene un "Oggetto" utilizzabile a sua volta in un nuovo processo o all'interno di uno "Schema" concettuale più ampio, articolato ad altri processi ed oggetti.



Schema concettuale

In questa costruzione il ruolo chiave è svolto dall'incapsulazione del processo e dal cambiamento qualitativo che esso induce; tale fase viene compiuta quando il soggetto diviene consapevole della totalità del processo, comprende quali trasformazioni possono attuarlo ed è in grado di applicare lui stesso tali trasformazioni.

2.2.1.2 Le evoluzioni successive

In D.Tall (Tall, 1996) i rapporti dialettici tra processi ed oggetti sono considerati attraverso le nozioni di "procept" e di "versatile thinking". La nozione di procept sottolinea il ruolo giocato dal simbolismo nell'incapsulazione. Molti dei simboli matematici hanno la natura propria dei procept, ossia rappresentano sia un processo sia il risultato di tale processo. Un esempio di procept è il simbolo $\lim_{x\to a} f(x)$ che esprime simultaneamente il processo di "tendere verso" e il valore del limite. A differenza, ad esempio, dei processi aritmetici[27], il procept relativo al limite non fornisce nessuna informazione su come ottenere il risultato. La definizione $\varepsilon - \delta$ configura il limite come un processo "disincapsulato", legato alla possibilità, una volta assegnato un ε, che esista un δ opportuno, piuttosto che come un oggetto legato all'esistenza di una funzione $\delta = \delta(\varepsilon)$.

In Tall (2001) si distinguono e contrappongono due tipologie di conoscenza: una conoscenza "enactive", ossia "in azione", e una conoscenza formale. Un ruolo di primaria importanza è svolto dalla conoscenza cosiddetta in azione, poiché a partire dall'esperienza diretta permette di costruire esempi ed immagini dei concetti che contribuiscono a dare un significato personale alle successive definizioni formali. Inoltre Tall sottolinea anche le difficoltà esistenti nel passaggio tra il procept e il livello formale e l'insufficienza delle incapsulazioni del livello di procept per assicurarne la transizione. Approcci visuali e spaziali di concetti, come quello di limite, possono fornire agli allievi dei profondi "insights". In questo modo è possibile ottenere efficaci intuizioni, dare senso a definizioni formali, ma ciò non è sufficiente a rendere operative queste ultime ed a permettere agli studenti un efficace passaggio al livello formale.

Si può ritenere molto vicina a questa posizione anche quella di Furinghetti, Somaglia (1994), che però aggiungono, sulla base di un'indagine sperimentale, la necessità di ritornare al registro semiotico grafico, dopo la fase formale:

[27] Ad esempio “3/4” è un’unione del processo del dividere tre in quattro parti e del concetto di frazione.

L'analisi dei risultati ha messo in evidenza che il grafico, spesso preso solo come punto di partenza per introdurre in maniera morbida i concetti, andrebbe visto anche come punto di arrivo al quale ritornare dopo la formalizzazione poiché è sintesi di molti elementi. In sostanza nella formazione di un concetto possiamo distinguere due livelli di comprensione: uno in cui si delinea in maniera informale il concetto e uno in cui il concetto si formalizza con il linguaggio specifico. Il grafico, sembra agire soltanto nella prima fase senza legami con la seconda, cioè quando si passa alla formalizzazione.

(Furinghetti, Somaglia, 1994)

Il cammino di costruzione dei concetti matematici risulta lento e graduale. La fase del procept, basata su rappresentazioni numeriche, simboliche e visuali, ne costituisce solo un passaggio intermedio fra una fase legata all'esperienza, all'azione, e una fase formale, costituita dalle definizioni e dai teoremi matematici.

Il ruolo fondamentale svolto da una conoscenza intuitiva, che precede e interferisce con la conoscenza formale, è messo in evidenza anche da Efraim Fischbein (Fischbein, 1998). Egli pensa che in matematica esistano nozioni intuitive, accettabili direttamente in quanto autoevidenti, e nozioni logiche, accettabili indirettamente sulla base di dimostrazioni. La conoscenza intuitiva presenta anche caratteristiche di certezza intrinseca, coercizione, estrapolazione, globalità. Quindi solitamente l'evidenza intuitiva è molto forte; in certi casi non fa nemmeno avvertire agli studenti la necessità di una dimostrazione, in altri addirittura si contrappone alla successiva descrizione formale e sopravvive in conflitto con essa[28]. Inoltre Fischbein distingue tra intuizioni primarie, che si sviluppano in modo naturale nell'individuo come effetto delle sue esperienze personali e delle sue interazioni con l'ambiente naturale e sociale, e intuizioni secondarie, che si sviluppano come risultato di un lungo e sistematico "allenamento". L'intuizione secondaria rappresenta il punto di arrivo del processo didattico, che si realizza nel momento in cui una convinzione formale (che può essere coesistita per lungo tempo con una intuizione primaria contraddittoria) prende il sopravvento e diventa una convinzione intuitiva[29].

[28] Può essere utile riprendere l'esempio proposto da Fischbein (1998) per mostrare la persistenza delle intuizioni iniziali: al Lotto normalmente la gente non gioca numeri consecutivi, ad esempio 1, 2, 3, 4, 5, 6, anche se è teoricamente convinta che ogni insieme di sei numeri abbia la stessa probabilità di vincere.

[29] Ad esempio la proprietà dell'inerzia diventa una convinzione intuitiva solo dopo una spiegazione fondata su basi teoriche, perché contraddice la convinzione "naturale" che ogni movimento necessiti di una forza.

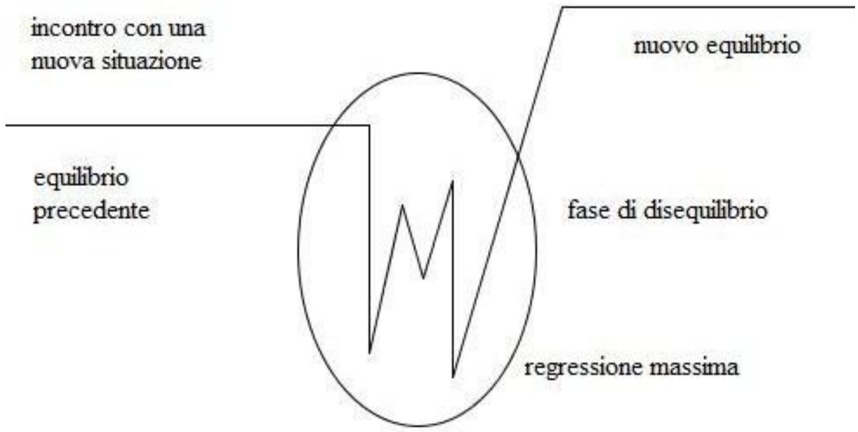
Dal punto di vista didattico è essenziale nel processo di apprendimento che si comprendano le interazioni fra gli aspetti intuitivi e procedurali, da un lato, e quelli formali, strutturali, dall'altro.

2.2.2 Apprendimento, realtà, azione

Esiste un’idea generale, basilare, comune a tutte le varie considerazioni appena fatte: apprendere non consiste nel ricevere in maniera passiva il sapere, ma nell’agire sulle informazioni ricevute da opportune situazioni di apprendimento. Nuove conoscenze sono costruite a partire da altre conoscenze, di cui si è già in possesso e che, spesso, sono in opposizione con esse. Risulta fondamentale anche la dimensione sociale della conoscenza, che si sviluppa attraverso il confronto e il dialogo. Attraverso queste affermazioni stiamo considerando il cosiddetto paradigma “socio-costruttivista”.

Molti tendono a vedere il processo dello sviluppo cognitivo di un individuo come una sorta di “ricerca di organizzazione”, come un’interazione tra il soggetto e l’oggetto del sapere. Questa organizzazione ha la particolarità di tendere ad essere sempre più oggettiva e ciò si realizza attraverso il decentramento rispetto al sapere personale, alle esperienze personali e attraverso una vera e propria costruzione dei saperi e degli strumenti messi in atto per apprendere, sempre più generali e sempre meno legati all’oggetto di conoscenza in sé. Si potrebbe riassumere tutto questo con la parola “adattamento” di uno specifico sapere a qualche cosa di più generale e meno soggettivo.

Le funzioni di “organizzazione” e di “adattamento” sembrano avere un’importanza decisiva. La funzione di adattamento, inoltre, avrebbe riunite in sé altre due funzioni: “l’assimilazione” e “l’accomodamento”. Lo studente osserva oggetti ed eventi e li assimila a schemi dei quali già dispone, dopo di che modifica tali nuovi arrivati nel suo mondo cognitivo, adattandoli agli schemi precedenti. Nel momento in cui questa operazione non riesce, ossia nei casi in cui lo schema posseduto si dimostra inadeguato, allora lo studente deve modificare gli schemi di cui disponeva: questa operazione avrà successo se il conflitto cognitivo originato dalla non adeguatezza provoca abbastanza motivazioni. La situazione si pone come un reale problema da risolvere e le conoscenze precedenti costituiscono un ostacolo da eliminare.



Si potrebbe affermare che un ostacolo è un’idea che, al momento della formazione di un concetto, è stata efficace per affrontare dei problemi precedenti, ma che si rivela fallimentare quando si tenta di applicarla ad un problema nuovo. Visto il successo ottenuto, si tende a conservare l’idea già acquisita e comprovata e, nonostante il fallimento, si cerca di salvarla; questo fatto, però, finisce con l’essere una barriera verso successivi apprendimenti. Da qui nascono le “misconcezioni”: concetti errati che si formano in seguito ad un conflitto, ossia nel momento in cui si è costruito un concetto, ci si è fatti un’immagine di tale concetto e questa non viene validata e rinforzata ma al contrario si rivela inadeguata rispetto ad un’altra immagine dello stesso concetto. Una misconcezione non va sempre vista come una situazione del tutto negativa: non è escluso che per poter raggiungere la costruzione di un concetto si renda necessario passare attraverso una misconcezione momentanea.

Spesso e volentieri, per molti concetti matematici, già prima dell’insegnamento scolastico gli studenti posseggono varie idee, intuizioni, immagini di quel determinato oggetto matematico che derivano dall’esperienza quotidiana, ad esempio dal linguaggio comune e dal significato di certe parole. Queste conoscenze in letteratura sono state chiamate ad esempio concezioni o conoscenze spontanee, rappresentazioni mentali, ecc. Queste idee vanno tenute in considerazione per l’insegnamento futuro, perché come altre conoscenze, non spariscono immediatamente. Prendendo in esame il concetto di limite stesso, ad esempio, si è osservato in varie ricerche come le parole stesse “tende a” o “limite” abbiano già un significato per gli studenti e questo significato permane anche in seguito all’introduzione della definizione formale; ad esempio “tende a” può significare avvicinarsi senza raggiungere, avvicinarsi rimanendo lontano, avvicinarsi e raggiungere, assomigliare.

Ad ogni modo, per costruire una nuova conoscenza bisogna che ne venga realmente riconosciuta e percepita la necessità.
Fondamentali per l’approccio socio-costruttivista sono, da un lato, la presenza di un effettivo problema per l’allievo, che gli faccia percepire la necessità e la pertinenza delle nuove conoscenze da costruire, dall’altro la possibilità di agire, attivamente, sulla stessa situazione-problema, elaborando congetture, fabbricando strategie risolutive possibili e avendo modo di testarne e verificarne direttamente l’efficacia. L’azione riveste un ruolo fondamentale.
La centralità del nesso tra matematica e realtà e di un apprendimento legato all’azione è stata evidenziata da vari psicologi cognitivi che si sono occupati di indagare i processi di apprendimento, ad esempio Gérard Vergnaud. Coinvolgere lo studente in significative esperienze concrete, accompagnarlo a prendere coscienza di ciò che già sa in modo intuitivo, valorizzando la sua curiosità ed il suo desiderio di scoperta risultano di particolare rilevanza nella costruzione di nuove conoscenze.

È necessario che le conoscenze che egli acquisisce siano costruite da lui in relazione diretta con le operazioni che egli è capace di fare sulla realtà, con le relazioni che egli è in grado di cogliere, di comporre e di trasformare, con i concetti che egli costruisce progressivamente.

(Vergnaud, 1981)

Spesso l’insegnamento della matematica si riduce ad un puro addestramento logico in cui sono ritenuti indispensabili un linguaggio rigoroso e una precisione assoluta; ma non è possibile insegnare la matematica come se fosse solo un linguaggio, prescindendo dai contenuti, senza un cammino costruttivo personale di appropriazione dei significati. Radicare l’insegnamento della matematica nella realtà per arrivare poi all’elaborazione dei concetti più astratti permette di suscitare l’interesse di chi apprende e di dotarlo di strumenti efficaci per decifrare la realtà stessa.

Capire implica (almeno come origine, come motivazione che suscita l’energia per un lavoro) essere in rapporto con la realtà, acquisire strumenti di interpretazione della realtà e capire se stesso (le proprie azioni, le proprie domande) in quanto protagonista di questo rapporto.

(Vergnaud, 1981)

Come vedremo nel paragrafo successivo, il ruolo dell’esperienza corporea e della percezione fisica risulta basilare anche nella teoria della “conoscenza incarnata”, descritta nell’opera di George Lakoff e Rafael Nùñez.

2.2.3 Un nuovo approccio cognitivo alla matematica: “embodied cognition theory”[30]

2.2.3.1 Le basi della teoria

Una proposta di giustificazione dell'origine della matematica, molto particolare e suggestiva, è la cosiddetta "embodied cognition theory" di Lakoff, Nuñez (2000), la quale, con i suoi pregi e difetti, non può che ampliare i tentativi di comprensione offrendo un diverso panorama del come si acquisisca conoscenza. L'obiettivo degli autori è quello di applicare la scienza della mente alle idee matematiche umane, considerando che ogni idea umana astratta fa uso di meccanismi cognitivi formulabili in modo preciso che importano modi di ragionamento dall'esperienza senso-motoria. Il punto di vista cognitivo induce a chiedersi se anche il sistema delle idee matematiche sia fondato indirettamente sulle esperienze corporee, e se sì, precisamente come. Come si può già intuire i due autori partono da una posizione epistemologica netta: la matematica come noi la conosciamo è stata creata e usata dagli esseri umani; ciò comporta che sia limitata e strutturata dal cervello umano e dalle capacità mentali umane. Questa affermazione può sembrare ovvia, ma ha importanti conseguenze. Il nuovo cambiamento di prospettiva può portare a una diversa comprensione dei risultati matematici e dei processi di apprendimento della matematica stessa; si hanno, così, anche importanti implicazioni per l’insegnamento della matematica: scoprire le strutture cognitive, identificare in che modo essa sia basata sull’esperienza corporea e come le metafore concettuali ne strutturino le idee può rendere la matematica più accessibile e comprensibile.

Ritornando alla teoria di Lakoff e Nuñez, i concetti e il linguaggio umani non sono casuali o arbitrari, bensì profondamente strutturati e circoscritti, per via dei limiti e della struttura del cervello, del corpo e del mondo; ci si potrebbe chiedere quali siano esattamente i meccanismi del cervello e della mente che permettono di formulare idee

[30] I termini “embodied cognition” letteralmente si potrebbero tradurre con “conoscenza incarnata”, intendendo la scienza dei processi cognitivi intesi come basati sulla nostra fisicità di esseri umani, sia per quanto riguarda il corpo sia il cervello.

matematiche e di ragionare matematicamente. Preliminarmente va osservato come in generale nelle scienze cognitive ci siano stati vari progressi: si è appreso che la natura dettagliata dei nostri corpi, del nostro cervello e del nostro funzionamento quotidiano nel mondo struttura i concetti e i ragionamenti; la maggior parte del pensiero è inconscia, inaccessibile all'introspezione diretta e cosciente; inoltre nella maggior parte dei casi i concetti astratti vengono concettualizzati in termini concreti, utilizzando idee e modelli di ragionamento fondati sul sistema senso-motorio, il meccanismo per cui l'astratto è compreso in termini del concreto viene detto metafora concettuale. Sulla base di queste osservazioni Lakoff e Nunez hanno cercato di estendere gli studi sull’inconscio cognitivo alla conoscenza matematica: ossia, il modo con cui noi comprendiamo implicitamente la matematica, come la produciamo o come parliamo di essa. Il lavoro degli autori è stato quindi quello di esplorare come i meccanismi cognitivi generali utilizzati nel pensiero quotidiano non matematico possano creare comprensione matematica e strutturare le idee matematiche.

Sembra che la struttura cognitiva della matematica avanzata faccia uso del genere di apparato concettuale che costituisce il pensiero quotidiano ordinario. Meccanismi concettuali quotidiani, centrali nella matematica, sono ad esempio[31]:

- Gli **schemi immagine**: primitive concettuali, come ad esempio lo “schema Sopra” (il libro è sopra la scrivania) o lo “schema Contatto” (il libro è a contatto con la scrivania); questi hanno una funzione cognitiva particolare, in quanto sono sia percettivi sia concettuali; in matematica uno schema immagine di grande importanza è lo “schema Contenitore”;
- Gli **schemi aspettuali**: si è osservato come i programmi neurali di controllo motorio abbiano tutti una stessa sovrastruttura (prontezza – inizio - processo principale - possibile interruzione e ripresa- iterazione o continuazione – scopo - completamento - stato finale) che coincide anche con il modo generale di strutturare gli eventi (che i linguisti hanno chiamato aspetto); le idee aspettuali ricorrono in tutta la matematica, ad esempio una rotazione di un certo numero di gradi è concettualizzata come un processo con un punto iniziale e un punto finale;

[31] Ai fini della trattazione si focalizzerà l’attenzione soprattutto sulle metafore concettuale, per un maggiore approfondimento si rinvia a Lakoff, Nuñez (2000).

- La **metafora concettuale**: si tratta di un processo centrale nel pensiero quotidiano che rende possibile il pensiero astratto;
- Infine le **miscele concettuali**: combinazione concettuale di due strutture cognitive distinte, con determinate corrispondenze tra esse; se tali corrispondenze sono date da una metafora la miscela verrà detta miscela metaforica; molte delle idee importanti in matematica sono proprio miscele concettuali metaforiche e comprendere la matematica richiede, quindi, la padronanza di reti estese di miscele metaforiche.

Ora ci interessa porre maggiore attenzione sulla metafora concettuale che, come vedremo, viene considerata lo strumento fondamentale per la comprensione del concetto di limite. Come abbiamo già accennato, i concetti astratti sono compresi tipicamente in termini di concetti più concreti, questo accade proprio attraverso metafore[32]. Si è osservato inoltre come le mappe metaforiche siano sistematiche e non arbitrarie. Sono state studiate in dettaglio centinaia di metafore concettuali; esse sono estremamente comuni nel pensiero e nel linguaggio quotidiani. Nel complesso vengono usate inconsciamente, automaticamente nel dialogo quotidiano, sono parte dell’inconscio cognitivo. Molte, anche se non tutte, sorgono spontaneamente dalle correlazioni nella nostra esperienza comune, soprattutto nella nostra esperienza di bambini. Tali correlazioni all’esperienza sono casi particolari del fenomeno della “fusione”, che consiste nell’attivazione simultanea di due aree distinte del nostro cervello, ciascuna relativa a diversi aspetti della nostra esperienza. È per mezzo di tali fusioni che vengono sviluppati i contatti neurali tra domini, contatti che spesso sfociano in una metafora concettuale, in cui un dominio è concettualizzato in termini dell’altro. Ogni metafora concettuale ha la stessa struttura, ognuna è una mappa unidirezionale da entità in un dominio concettuale a entità corrispondenti in un altro dominio concettuale. La loro

[32] Può essere interessante, per comprendere meglio la novità di queste idee, ripercorrere brevemente l’evoluzione storica del concetto di metafora. Accanto alle concezioni tradizionali, che collocano la metafora in ambito puramente linguistico, come una particolare figura retorica che implica un trasferimento ad un oggetto il nome di un altro secondo un rapporto di analogia, nel corso del ‘900 si è assistito ad un’estensione del ruolo del concetto, si è passati ad una concezione centrata sulla sua natura concettuale. Scienze cognitive e nuove tendenze filosofiche hanno sottolineato come pervada tutta la nostra vita quotidiana, il nostro comportamento comunicativo. Il promotore di questa nuova prospettiva è Max Black con la sua teoria dell’interazione presentata nel saggio *Metaphor* del 1954. Egli evidenzia anche una connessione tra metafore e modelli nelle teorie scientifiche. Da allora la ricerca sulla conoscenza umana ha confermato sempre più il ruolo centrale della metafora nel nostro sistema concettuale, nella nostra percezione delle cose che ci circondano, nel modo in cui interagiamo con il mondo fisico, in particolare con i nostri simili.

funzione primaria è permetterci di ragionare su domini relativamente astratti utilizzando la struttura inferenziale di domini relativamente concreti.

Va infine osservato come gran parte dell’ “astrazione” della matematica più specialistica sia una conseguenza di una stratificazione sistematica di una metafora sull’altra, avvenuta spesso nel corso dei secoli.

Lakoff ritiene che l’idea di infinito in atto,invece, sia basata su una sola metafora, la quale è in grado di caratterizzare un’ampia varietà di concetti matematici in cui è presente l’infinito in atto, ad esempio il concetto di limite. [33]

2.2.3.2 Metafora base dell’infinito

Viene spontaneo pensare che il concetto di infinito non sia embodied, dal momento che il nostro corpo è finito, come pure le nostre esperienze e ogni cosa in questo mondo; eppure è possibile avere idee di infinito, ad esempio gli insiemi infiniti, i punti all’infinito, i numeri transfiniti, ecc. Pensare di definire l’infinto come non finito non può giustificare la ricchezza delle varie forme di infinito. È lecito quindi chiedersi cosa sia effettivamente l’infinito. Lakoff e Nuñez si sono posti questa stessa domanda, a cui hanno dato una risposta concordante con quanto esposto sopra. Per iniziare a vedere l’origine embodied dell’idea di infinito bisogna ricorrere a uno dei più comuni sistemi concettuali umani, il sistema aspettuale, che caratterizza la struttura dei concetti evento, ossia il modo in cui concettualizziamo gli eventi. Alcune azioni sono intrinsecamente iterative, come respirare, altre sono intrinsecamente continue, come muoversi. Nella vita è difficile che si riesca a fare qualcosa che duri per sempre, tuttavia noi concettualizziamo le azioni di respirare e muoversi come non aventi un completamento; questa concettualizzazione viene detta aspetto imperfettivo. Come abbiamo già accennato il concetto di aspetto sembra essere embodied nel sistema cerebrale di controllo motorio. Poiché il sistema aspettuale è embodied, può essere considerato come

---

[33] Al termine di una breve presentazione delle basi teoriche della teoria di Lakoff, Nuñez vorrei inserire un commento proposto da Luis Radford che mi sembrava degno di nota. Egli osserva da alcune sue ricerche come spesso la rilevanza delle esperienze non sia da vedere come un risultato di origine biologica. Senza sottostimare l’importanza dei nostri limiti fisici,

> **the embodiment of experience results from socially constituted practices semiotically mediated by language and other cultural and historical products. Instead of being the origin, the body-as Foucault (2001, p.1011) contended-is a surface of inscription of historical events marked by language. From this perspective, instead of embodied experience, I would probably do better talking about empracticed experience.**
>
> **(Radford, 2003)**

la fonte principale del concetto di infinito. Più precisamente il concetto letterale di infinito può essere il seguente: un processo è considerato infinito se continua (o si itera) indefinitamente senza fermarsi, ossia se ha un aspetto imperfettivo senza un punto finale. Esistono due sottotipi di processi imperfettivi: continuativi e iterativi. Spesso l’idea di azione iterata viene usata in varie forme sintattiche per esprimere l’idea di un’azione continua. Ciò può essere caratterizzato in termini cognitivi tramite la metafora “i processi continui indefiniti sono processi iterativi”[34]. Questa metafora viene usata anche nella concettualizzazione della matematica per suddividere i processi continui in processi infinitamente iterati, nei quali ogni passo è discreto e piccolissimo, ad esempio il processo indefinitamente continuo di raggiungere un limite viene tipicamente concettualizzato tramite questa metafora come una successione infinita di passi ben definiti.

Riprendendo la nomenclatura aristotelica, ciò che si è appena descritto non è altro che la concezione potenziale dell’infinito, che va distinta dalla concezione attuale, ossia l’infinito concettualizzato come “cosa” compiuta[35]. Gli autori ipotizzano che l’idea di infinito attuale in matematica sia metaforica e che i vari esempi di infinito attuale facciano uso del “risultato” metaforico ultimo di un processo senza fine. Letteralmente il risultato di un processo senza fine non esiste, tuttavia il meccanismo della metafora permette di concettualizzare il “risultato” di un processo infinito nei termini di un processo che effettivamente ha una fine. Lakoff e Nuñez ipotizzano che tutti i casi di infinito attuale siano casi particolari di un’unica metafora concettuale generale, nella quale i processi che continuano indefinitamente sono concettualizzati come aventi una fine e un risultato ultimo. Questa metafora è detta “Metafora Base dell’Infinito”, o BMI. Il suo dominio obiettivo è quello dei processi senza fine, ossia i processi imperfettivi, il suo effetto è quello di aggiungere un completamento metaforico al processo in corso, in modo da considerarlo con un risultato, una “cosa” infinita. Il dominio sorgente della

[34] Esistono ragioni di tipo cognitivo per cui dovrebbe esistere una metafora di questo tipo, per maggiori dettagli si rinvia sempre all’opera di Lakoff e Nuñez.

[35] Nella matematica moderna i casi più interessanti di infinito riguardano l’infinito attuale, sebbene la concezione storicamente dominante e ancor’oggi più diffusa sia quella potenziale. Il problema della legittimità e consistenza dell’infinito in atto è sempre stato dibattuto in matematica. Tra la fine dell’Ottocento e gli inizi del Novecento la questione è divenuta oggetto di nuove controversie, significativa è la posizione dell’intuizionismo che ha prodotto, accettando solo l’infinito potenziale, una matematica diversa, la matematica intuizionista; interessante è anche la teoria alternativa degli insiemi, elaborata da Petr Vopěnka, in cui si assume l’ipotesi fondamentale che tutti gli insiemi siano finiti.

BMI consiste in un processo iterativo ordinario, con un numero indefinito (sebbene finito) di iterazioni, con un completamento e uno stato risultante. Il dominio sorgente e il dominio obiettivo hanno alcune caratteristiche comuni, ad esempio entrambi hanno uno stato iniziale, un processo iterativo con un numero non specificato di iterazioni ed entrambi hanno uno stato risultante dopo ogni iterazione. Nella metafora lo stato iniziale, il processo iterativo, il risultato dopo ogni iterazione vengono mandati nei corrispondenti elementi del dominio obiettivo; l’effetto cruciale è quello di aggiungere al dominio obiettivo il completamento del processo e il suo stato risultante. È proprio quest’ultima parte della metafora che permette di concettualizzare il processo in corso in termini di processo completato e quindi di produrre il concetto di infinito attuale.

LA METAFORA BASE DELL’INFINITO		
Dominio sorgente PROCESSI ITERATIVI COMPLETATI		Dominio obiettivo PROCESSI ITERATIVI CHE VANNO SEMPRE AVANTI
Lo stato iniziale	→	Lo stato iniziale
Lo stato risultante dallo stadio iniziale del processo	→	Lo stato risultante dallo stadio iniziale del processo
Il processo: da un dato stato intermedio, si produce lo stato successivo	→	Il processo: da un dato stato intermedio, si produce lo stato successivo
Il risultato intermedio dopo una data iterazione del processo	→	Il risultato intermedio dopo una data iterazione del processo
Lo stato risultante finale	→	**“Lo stato risultante finale” (infinito attuale)**
Conseguenza E: lo stato risultante finale è unico e segue ogni stato non finale	→	**Conseguenza E: lo stato risultante finale è unico e segue ogni stato non finale**

Va evidenziata una conseguenza che si genera nel dominio sorgente e attraverso la metafora è imposta al dominio obiettivo: in ogni processo completato lo stato risultante finale è unico; inoltre, in quanto stato finale, segue che non esiste nessuno stato finale precedente, né tantomeno nessuno stato finale successivo del processo. L’unicità dello stato finale di un processo completo è un prodotto quindi della modalità di conoscenza umana, non un fatto che riguarda il mondo esterno, essa segue dal modo in cui concettualizziamo i processi completati. L’esistenza di gradi di infinito richiede semplicemente applicazioni multiple della BMI. Il risultato della BMI è una creazione metaforica che non si verifica in senso letterale, si tratta di un processo che va avanti indefinitamente e tuttavia possiede un unico stato risultante finale, uno stato “all’infinito”. Un processo iterativo sottintende una nozione di infinito potenziale, la metafora completa questo processo creando una nozione di infinito in atto. Vorrei osservare come in matematica il passaggio dal potenziale all’attuale si ha anche grazie al teorema di ricorsione che afferma l’esistenza in atto e l’unicità di un particolare ente matematico (relazione o funzione) una volta note le modalità di passaggio da un numero al successivo e come si comporti sui primi numeri naturali. Da notare infine che nella metafora non viene specificata la natura del processo, essa è generale, quindi possono essere formulati casi particolari, specificando il processo che si ha in mente; inoltre secondo gli autori tutte le nozioni di infinito in matematica possono essere considerate casi particolari della BMI.

2.2.3.3 Il limite come applicazione della BMI

Una successione infinita di numeri reali viene normalmente concettualizzata come una funzione dai numeri naturali a quelli reali. I numeri naturali costituiscono un insieme infinito concettualizzato mediante la BMI, che quindi viene implicitamente usata per concettualizzare una successione infinita. Comprendere cosa sia il limite di una successione è più complesso: dobbiamo infatti pensare a un numero reale a cui "si avvicinano infinitamente" i valori della successione, quando l'indice dei termini tende "all'infinito". Si consideri, prima di tutto, il caso “prototipo” di una successione monotona, che quindi converge “direttamente” al limite. Comunemente si concettualizza la "convergenza" a un limite per mezzo del concetto di approssimazione o di "avvicinamento": la successione "si avvicina" al limite man mano che il numero dei termini "si avvicina all'infinito"; ovvero, il valore di x_n si avvicina progressivamente a L (il limite), man mano che n "si avvicina" progressivamente "all'infinito". Da qui si può intuire sullo sfondo la presenza della metafora spaziale per la quale i numeri sono punti su una retta, metaforicamente il limite è un punto L fissato sulla retta dei numeri e la distanza tra i punti caratterizzata metaforicamente in termini di differenza tra i numeri. Tale distanza dovrebbe "avvicinarsi a zero" quando n "si avvicina all'infinito". Questo si ottiene usando la BMI come descritto qui di seguito:

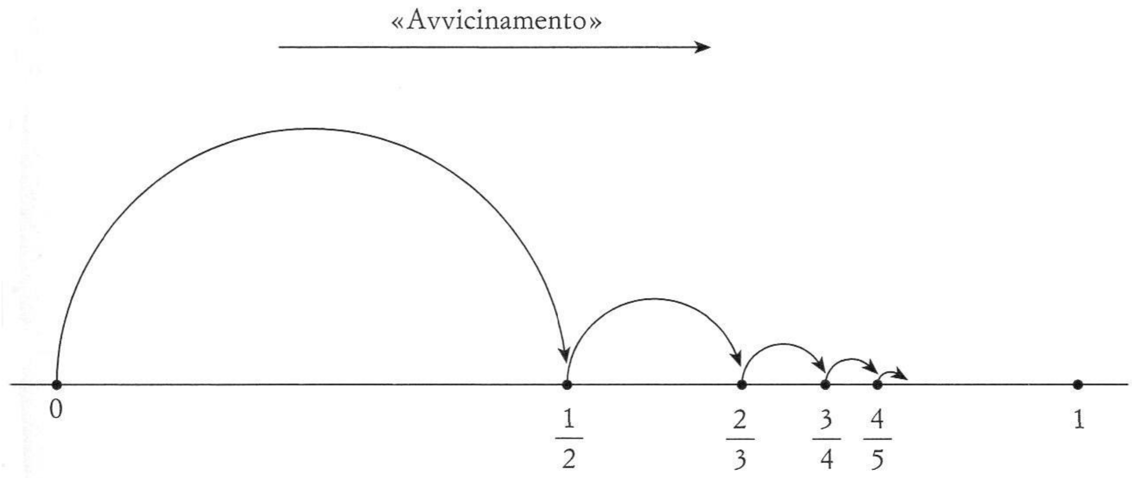
- il concetto "n diventa progressivamente più grande" è caratterizzato dal fatto di considerare come processo iterativo della BMI l'aggiunta di 1 a n;
- il concetto "n si avvicina all'infinito" è caratterizzato attraverso la BMI che crea il finale metaforico, lo stato risultante infinito del processo;
- come già accennato il concetto di "avvicinarsi" usa implicitamente la metafora "i numeri sono punti su una retta, la distanza metaforica tra un termine della successione x_n e il limite L è così un numero reale positivo, la differenza $|x_n - L|$;
- più in dettaglio la distanza tra x_n e il limite L non è altro che l'intervallo tra x_n e L sulla retta dei numeri, che metaforicamente rappresenta un insieme di punti, ognuno dei quali metaforicamente è un numero reale, quindi l'insieme di tali punti è, sempre metaforicamente, l'insieme R_n dei numeri reali r maggiori di zero e minori di $|x_n - L|$;
- "l'avvicinarsi" viene così caratterizzato dal processo iterativo della BMI, per cui la distanza metaforica dal limite (la differenza$|x_n - L|$) diventa più piccola e quindi l'insieme R_n esclude un numero sempre maggiore di reali ($R_n \subset R_{n-1}$);
- sia S_n l'insieme, formato al passo n, contenente i primi n termini della successione;
- con lo stadio finale della BMI sono stati collezionati in S_∞ tutti i termini della successione, inoltre sono stati generati tutti gli insiemi R_n di numeri reali r, tali che $0 < r < |x_n - L|$; allo stato finale R_∞ è vuoto, cioè x_n è diventato così vicino a L che non esiste alcun numero reale positivo r tale che, per ogni numero finito $n, 0 < r < |x_n - L|$.

Quando si dice che la successione infinita degli x_n "si avvicina al limite L", si intende quanto appena descritto[36].

[36] Si noti che n viene usato per dare un nome agli stadi della BMI e anche agli indici dei termini della successione $\{x_n\}$.

LA BMI PER LE SUCCESSIONI (VERSIONE PROTOTIPO)		
Dominio obiettivo PROCESSI ITERATIVI CHE VANNO SEMPRE AVANTI		Caso particolare SUCCESSIONI INFINITE CON UN LIMITE L
Lo stato iniziale (0)	⟶	Il frame della Successione e del Limite
Lo stato (1) risultante dallo stadio iniziale del processo	⟶	S_1= l’insieme contenente il primo termine della successione
Il processo: da uno stato intermedio precedente $(n-1)$, si produce lo stato successivo n	⟶	Da S_{n-1} che contiene i primi $n-1$ termini della successione, si forma S_n che contiene i primi n termini della successione
Il risultato intermedio dopo una data iterazione del processo	⟶	L’insieme S_n; l’insieme R_n che contiene tutti i numeri reali positivi r tali che $0 < r < \|x_n - L\|$; $R_n \subset R_{n-1}$
“Lo stato risultante finale” (l’infinito attuale "∞")	⟶	**L’insieme S_∞ che contiene tutti i Termini della successione; non esiste alcun numero reale positivo r tale che $0 < r < \|x_n - L\|$ per tutti gli $x_i$in S_∞. Quindi, $R_\infty = \emptyset$; L è il limite della successione**
Conseguenza E: lo stato risultante finale ("∞") è unico e segue ogni stato non finale	⟶	**Conseguenza E: L è l’unico limite della successione**

Consideriamo un esempio: il caso della successione $\{x_n\}$ dove $x_n = \frac{n}{n+1}$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Come abbiamo visto a ogni stadio vengono formati due insiemi: gli insiemi S_n raccolgono i termini della successione, mentre gli insiemi R_n caratterizzano i numeri reali tra 0 e $1 - x_n$, cioè la porzione di retta reale tra l'n-esimo termine della successione e il limite. Allo stato risultante finale S_∞ contiene tutti i termini della successione, mentre R_∞ è vuoto. Questo sarà vero solo per il numero che rappresenta il limite, cioè 1. Si noti che in questo caso il limite non appartiene alla successione.



$$S_1 = \left\{\frac{1}{2}\right\} \qquad R_1 = \left\{r : 0 < r < \frac{1}{2}\right\}$$

$$S_2 = \left\{\frac{1}{2}, \frac{2}{3}\right\} \qquad R_2 = \left\{r : 0 < r < \frac{1}{3}\right\}$$

$$S_3 = \left\{\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}\right\} \qquad R_3 = \left\{r : 0 < r < \frac{1}{4}\right\}$$

$$S_4 = \left\{\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}\right\} \qquad R_4 = \left\{r : 0 < r < \frac{1}{5}\right\}$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$S_n = \left\{\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \ldots, \frac{n}{n+1}\right\} \qquad R_n = \left\{r : 0 < r < \frac{1}{n+1}\right\}$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$S_\infty = \{\text{Tutti i termini della successione}\} \qquad R_\infty = \phi$$

Finora, come preannunciato, si è analizzato solo il caso "prototipo" di una successione che converge "direttamente" al limite, molte successioni, però, convergono "indirettamente", oscillando, per poi convergere al limite. Non mi dilungherò a proposito, è sufficiente osservare che si può costruire un ragionamento in modo da ricadere nel caso precedente, considerando semplicemente delle particolari successioni ausiliarie.

L'esempio della BMI relativo alle successioni non si estende direttamente ai limite di funzioni, bisogna invece utilizzare una miscela di altre metafore (legate anche al movimento) e della stessa BMI.

Le idee di Lakoff e Nuñez sembrano una spiegazione parziale e suggestiva di alcuni problemi che il concetto di limite comporta, ad esempio una possibile causa dei problemi che si incontrano nell’imparare la definizione epsilon-delta è individuata nel fatto che generalmente viene insegnata un’idea intuitiva di cosa sia un limite in termini di una metafora di movimento e poi viene detto, in modo non propriamente corretto, che la condizione epsilon-delta esprime proprio questa idea. Va però osservato che viene richiesto un notevole salto concettuale, paragonabile al "salto" concettuale del passare da un insieme con la cardinalità del continuo (R_n) all'insieme vuoto. Dal "rimpicciolimento" degli intervalli non segue una diminuzione del numero di elementi. Diverso è invece il caso degli insiemi S_n, che hanno cardinalità finita, che aumenta all'aumentare di n; il passaggio concettuale che fa passare da S_n a S_∞ appare più giustificabile intuitivamente.

2.2.4 Concetto e rappresentazione

Esiste un ulteriore elemento da considerare, che influisce sui processi di insegnamento e apprendimento in matematica. Si è già evidenziato come in matematica si costruiscano concetti che, in una visione ontologica, assumono il nome di oggetti. Generalmente un oggetto si considera costruito quando l’allievo è in grado di identificare proprietà dell’oggetto, di rappresentarlo, di trasformare tale rappresentazione, di usarla in modo opportuno in una pluralità di situazioni. Gli oggetti matematici, infatti, non esistono concretamente nella realtà, l’unica cosa che si può fare è scegliere un registro semiotico e rappresentare quell’oggetto in quel registro.

Duval definisce i registri semiotici nel seguente modo:

[…] les systèmes sémiotiques doivent, en effet, permettre d’accomplir les trois activités cognitives inhérentes à toute représentation: Tout d’abord, constituer une trace ou un assemblage de traces perceptibles qui soient identifiables comme *une représentation de quelque chose* dans un système déterminé. Ensuite, transformer les représentations pouvant constituer un apport de connaissance

par rapport aux représentations initiales. Enfin, convertir les représentations produites dans un système en représentations d’un autre système, de telle façon que ces dernières permettent d’expliciter d’autres significations relatives à ce qui est représenté. Tous les systèmes sémiotiques ne permettent pas ces trois activités cognitive fondamentales, par exemple le morse ou le code de la route. Mais la langage naturel, les langues symboliques, le graphes, les figures géométriques, etc. les permettent. Nous parlerons alors de registres de représentation sémiotique.[37]

(Duval, 1995)

Dunque in matematica non si impara tanto a maneggiare gli oggetti specifici ma piuttosto le loro rappresentazioni semiotiche. Si individuano così due livelli nella matematica stessa: la noetica e la semiotica[38]. In un linguaggio più tecnico il passaggio da una rappresentazione semiotica ad un’altra nello stesso registro si chiama trasformazione di trattamento, mentre il passaggio da una rappresentazione semiotica ad un’altra in un altro registro è detta trasformazione di conversione. La costruzione degli oggetti matematici è strettamente connessa alla capacità di usare più registri di rappresentazione di quegli oggetti; cioè scegliere i tratti distintivi dell’oggetto e rappresentarli in un dato registro, trattare tali rappresentazioni all’interno di uno stesso registro e convertire tali rappresentazioni da un registro ad un altro. Da un punto di vista matematico, anche storicamente si è data più importanza al trattamento rispetto alla conversione, arrivando a sviluppare:

registri specifici che hanno permesso forme diverse di calcolo (aritmetico, algebrico, analitico, logico…).

(D’Amore, 2001)

Dal punto di vista cognitivo, invece, la costruzione del concetto non può prescindere dalla conversione, dalla capacità di operare con flessibilità all’interno e fra le diverse rappresentazioni. Si è messo così in evidenza anche il profondo legame esistente tra

---

[37] **[…] i sistemi semiotici devono, in effetti, permettere di realizzare le tre attività cognitive inerenti a ogni rappresentazione : prima di tutto, costituire una traccia o un insieme di tracce percettibili che siano identificabili come una rappresentazione di qualcosa in un sistema determinato. Inoltre trasformare le rappresentazioni potendo così apportare conoscenze relative alle rappresentazioni iniziali. Infine convertire le rappresentazioni prodotte in un sistema in rappresentazioni di un altro sistema, in modo che queste ultime permettano di esplicitare altri significati relativi a ciò che viene rappresentato. Non tutti i sistemi semiotici permettono queste tre attività cognitive fondamentali, ad esempio il codice morse o il codice della strada. Ma il linguaggio naturale, i linguaggi simbolici, i grafici, le figure geometriche, ecc. lo permettono. Noi parleremo allora di registri di rappresentazione semiotica.**

[38] Con questi termini si intendono rispettivamente l’acquisizione cognitiva dell’oggetto, quindi l’apprendimento del concetto, e la rappresentazione degli oggetti mediante sistemi di segni.

noetica e costruttivismo.
Va sottolineato che ogni registro ha le proprie regole e una propria sintassi, inclusi i registri grafici, sui quali si basa la visualizzazione; questi ultimi possono apparire come mediatori più semplici da usare, in realtà anch'essi necessitano della mediazione dell'insegnante perché l'utilizzo sia funzionale e non ostacolante l'apprendimento.

L'integrazione delle proprietà concettuali e figurali in strutture mentali unitarie, con la predominanza dei contenuti concettuali su quelli figurali, non è un processo naturale. Essa dovrebbe costituire una continua, sistematica, principale attività del docente.

(Fischbein, 1993)

Tutte queste considerazioni possono essere applicate al concetto di limite. Esso, infatti, implica almeno tre registri principali: geometrico, logico e algebrico. Il registro geometrico riguarda le rappresentazioni grafiche delle funzioni su cui si opera e l'identificazione di opportuni intorni, quello logico riguarda propriamente il linguaggio con cui si esprimono le definizioni e i teoremi relativi al limite, infine quello algebrico è legato alle manipolazioni che conducono al risultato di un limite. Usualmente nelle pratiche scolastiche viene posta maggiore attenzione nei confronti del registro algebrico a discapito, ad esempio, di quello geometrico, a tal proposito si veda ad esempio Bagni (1999). Infatti, nella maggior parte dei casi, si inizia il percorso didattico sfruttando le intuizioni geometriche degli studenti, per poi passare quasi subito alle definizioni formali e alle regole di calcolo dei limiti, solo raramente si torna a riflettere sugli aspetti teorici o sull'interpretazione grafica dei risultati ottenuti attraverso il calcolo. La dimestichezza del trattamento nel registro algebrico produce una buona operatività, ma non favorisce una piena e reale comprensione del concetto di limite; ad esempio le ambiguità e difficoltà legate al conflitto introdotto dal linguaggio naturale tra il senso attribuito ai termini "limite" e "infinito" non influenzano il registro algebrico. Un reale apprendimento del concetto risulta subordinato alla capacità di gestire i tre registri contemporaneamente e di spostarsi dall'uno all'altro a seconda dei problemi presi in considerazione.
Recentemente vari ricercatori hanno cercato di ampliare la definizione di registro di rappresentazione semiotica data da Duval, includendo anche altre tipologie di "segni", come parole pronunciate, gesti, azioni e via di seguito. Ad esempio Luis Radford ritiene

che parlare di rappresentazioni semiotiche non sia sufficiente per tener conto della complessità dei processi di oggettivazione[39] nelle situazioni di apprendimento e insegnamento. Egli parla di “semiotic means of objectification”:

These objects, tools, linguistic devices, and signs that individuals intentionally use in social meaning-making processes to achieve a stable form of awareness, to make apparent their intentions, and to carry out their actions to attain the goal of their activities, I call *semiotic means of objectification.*

(Radford, 2003)

I mezzi semiotici di oggettivazione sono molteplici, e riguardano sia attività intellettuali sia sensoriali; essi comprendono l’attività sensoriale e cinestetica del corpo (azioni, gesti, movimento corporeo, …), gli artefatti (oggetti, strumenti tecnologici, …) e il ricorso a simboli matematici di vario tipo (algebrico, figurale, ...). In generale, i mezzi semiotici di oggettivazione rappresentano i segni che si utilizzano per rendere visibile un’intenzione e per condurre a termine un’azione.

Facendo riferimento al paradigma della “multimodalità”[40] Arzarello, Paola, Robutti e Sabena sottolineano come nei processi di insegnamento-apprendimento svolga un ruolo fondamentale la gestualità, legata sia alle parole utilizzate ma anche a tutte le altre risorse usate per rendere maggiormente accessibile il sapere matematico. In particolare hanno cercato di analizzare alcune situazioni didattiche attraverso un particolare modello teorico, denominato “semiotic bundle”, che tiene conto di quanto appena detto.

Il “semiotic bundle” viene definito nel seguente modo:

---

[39] Radford utilizza il termine “objectification”, egli stesso scrive:

[…] in its etymology, objectification becomes related to those actions aimed at bringing or throwing something in front of somebody or at making something visible to the view.

(Radford, 2003)

Quindi con tale termine egli intende indicare una qualsiasi azione grazie alla quale si rende accessibile un concetto matematico.

[40] Il cosiddetto paradigma della “multimodalità” si è sviluppato negli ultimi anni in molti campi, dalle neuroscienze, alla comunicazione, all’insegnamento. La nuova prospettiva nelle neuroscienze ritiene che il sistema senso-motorio del cervello sia multimodale piuttosto che modulare, nel senso che le modalità di azione e percezione sono integrate al livello del sistema senso-motorio stesso e non attraverso altre aree di associazione, anche nel linguaggio vengono usate tante modalità contemporaneamente, come la vista, l’udito, il tatto, l’azione motoria, ecc.

A semiotic bundle is a system of signs[41][…] that is produced by one or more interacting subjects and that evolves in time. Typically, a semiotic bundle is made of the signs that are produced by a student or by a group of students while solving a problem and/or discussing a mathematical question. Possibly, the teacher too participates in this production, and so the semiotic bundle may include also the signs produced by the teacher.

(Arzarello, Paola, Robutti, Sabena, 2009)

Il semiotic bundle è una struttura (nel senso che è inteso come l'insieme dei segni e delle loro relazioni) dinamica che può cambiare nel tempo a causa delle attività semiotiche[42] dei soggetti. Le relazioni tra i segni possono essere di diversi tipi, una prima tipologia è legata ai segni prodotti contemporaneamente, come quando un soggetto gesticola e parla simultaneamente; altre relazioni concernono invece segni prodotti in momenti diversi, come ad esempio segni che sono trasformati in altri segni. L'elemento innovativo del semiotic bundle è che permette di descrivere l'attività semiotica multimodale dei soggetti in un modo globale, come una produzione dinamica, e la trasformazione di vari segni e delle loro relazioni; in particolare incornicia il ruolo della gestualità nelle attività matematiche. Le dinamiche del semiotic bundle possono essere analizzate in due modi distinti e complementari: attraverso un'analisi sincronica, in cui si considerano le relazioni tra diverse risorse semiotiche attivate simultaneamente dai soggetti in un certo momento, e attraverso un'analisi diacronica, che si focalizza sull'evoluzione dei segni attivati dai soggetti in momento successivi. In questo modo si possono individuare i ruoli che differenti tipologie di segni (gesti, parole, scritti) giocano nei processi cognitivi degli studenti.

Consideriamo ora un esempio proposto dagli stessi ricercatori: il problema è legato al significato della derivata di una funzione, in particolare l'insegnante ha disegnato il grafico di una funzione sulla lavagna e ha chiesto ad un ragazzo, che aveva già risposto correttamente ad un precedente esercizio, di trovare l'equazione della tangente in un

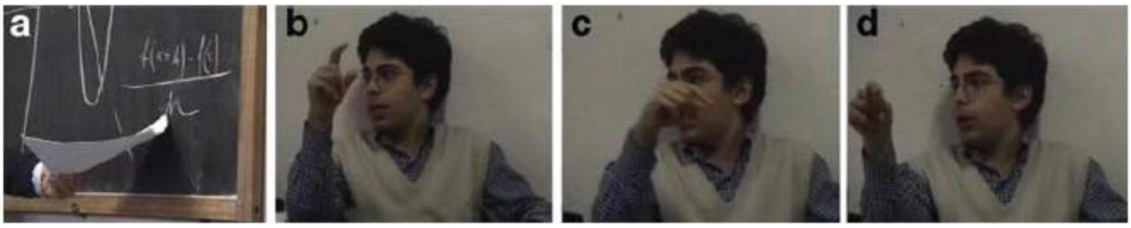
---

[41] Con il termine segno si intende una concezione ampia, in particolare si indica **anything that "stands to somebody for something in some respect or capacity"**

(Arzarello, Paola, Robutti, Sabena, 2009).

[42] Ampliando la definizione di registro semiotico, si amplia anche il significato di attività semiotica, nel senso che ci si riferisce sia alle produzioni, sia ai trattamenti, sia alle conversioni delle rappresentazioni nei semiotic bundles.

punto, di descrivere la procedura usata e i ragionamenti fatti[43]. L’insegnante, in questo modo, ha cercato di stimolare gli studenti ad una conversione del simbolismo algebrico in termini geometrici. Ciò che risulta interessante ai fini della nostra trattazione è che, facendo riferimento al rapporto incrementale $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$, lo studente ha focalizzato la propria attenzione sulla natura di h, un numero speciale, non del tutto un numero, una “invenzione sorprendente”, che chiama infinitesimo e descrive come un numero diverso da zero ma che può essere trattato quasi come zero[44]. Il carattere cruciale di h consiste non tanto nell’essere molto piccolo, ma nel poter divenire sempre più piccolo. Questo processo dinamico non viene espresso solo attraverso il linguaggio, ma anche attraverso il gesto del pollice e dell’indice che poco alla volta vengono avvicinati.



Questo gesto era molto diffuso nella classe e normalmente appariva in contemporanea alle espressioni che si riferivano agli incrementi della x e della y, per questo è stato chiamato “delta gesture”. In questo modo le caratteristiche iconiche del gesto legato ad un segmento nel piano cartesiano si uniscono nel semiotic bundle al riferimento simbolico del processo di limite. Un’analisi diacronica ha mostrato come questo gesto avesse le sue origini in attività precedenti della classe. Inoltre lo stesso semiotic bundle era condiviso anche dall’insegnante, il quale, coordinando parole e gesti degli studenti, è riuscito a promuovere collegamenti tra elementi matematici cruciali per l’evoluzione delle conoscenze:

- la diminuzione di h;
- l’avvicinamento dei punti che corrispondono al rapporto incrementale nel grafico;
- la precisione del valore approssimato della pendenza.

[43] Gli studenti conoscevano la definizione formale di derivata.

[44] Ciò ricorda vagamente i procedimenti usati da Fermat per trovare la tangente ad una curva ed anche il carattere particolare dei differenziali leibniziani.

L'azione dell'insegnante si è sviluppata similmente in altre occasioni: egli ha coordinato le risorse semiotiche usate dagli studenti e in seguito ha guidato lo sviluppo delle conoscenze sfruttando queste stesse risorse. Tipicamente l'insegnante usa gli stessi gesti degli studenti e parafrasa le frasi usando un linguaggio matematico più preciso; in questo modo aiuta gli studenti nella costruzione di un significato corretto. Questo meccanismo è stato chiamato dai ricercatori "semiotic game".

In questi processi in generale è stato osservato come i gesti giochino un doppio ruolo: prima di tutto, come componenti del semiotic bundle, aiutano i processi cognitivi degli studenti e promuovono la trasformazione dal personale all'istituzionale attraverso conversioni da un segno ad un altro; inoltre svolgono anche una funzione comunicativa, sia in riferimento agli studenti, sia all'insegnante.

2.3 La metacognizione

In conclusione del capitolo vorrei spendere qualche riga a proposito di un ricco filone di ricerca, sviluppatosi recentemente, relativo alla metacognizione, ossia alla conoscenza dell'allievo sulla propria conoscenza e alla gestione di tale conoscenza. La metacognizione è emersa come un importante costrutto sia in psicologia sia in educazione, in quanto capace di fare luce sullo sviluppo del pensiero, come pure sul successo scolastico. Il costrutto metacognitivo appare soddisfare sempre più sia lo studio dei processi individuali di elaborazione e apprendimento, sia lo studio del rapporto tra apprendimento e insegnamento disciplinare. Relativamente alla matematica [45], i lavori di ricerca hanno portato a evidenziare due grandi nuclei: quello relativo alla "conoscenza metacognitiva", ossia l'insieme di idee a cui l'individuo perviene sul suo funzionamento psichico grazie a una consapevole riflessione sulle proprie abilità cognitive, e quello sui "processi di controllo", attraverso cui l'individuo controlla, pianifica la propria attività e quindi regola il suo comportamento. Buone prestazioni in matematica sembrano essere imputabili proprio all'insieme di conoscenze che lo studente acquisisce circa la cognizione e la sua regolazione. Fondamentale è anche il ruolo di fattori di tipo affettivo-motivazionale, quali atteggiamenti, convinzioni, emozioni, sia per l'allievo sia per l'insegnante. Le abilità metacognitive dello studente si

[45] Nella ricerca didattica il campo del problem solving è quello in cui maggiormente si è sviluppato l'interesse nei confronti della metacognizione.

sviluppano naturalmente con l’età, ma anche la scuola può intervenire in modo determinante nella loro evoluzione. È necessario, quindi, che un insegnante sia convinto della loro importanza ed intervenga opportunamente, ad esempio ponendo maggiore attenzione ai processi di pensiero piuttosto che ai prodotti.

Capitolo 3
Il questionario

L'intera tesi cerca di dare una risposta, sicuramente non esaustiva, alla domanda sul perché il concetto di limite risulti difficile da apprendere (e da insegnare). Come già ricordato, in letteratura sono già presenti varie ricerche che hanno cercato di dare risposte a tale questione e che sono state la base di partenza del presente lavoro. Qui si è cercato in particolare di scomporre la complessità del concetto, in modo da poter ricercare e analizzare singolarmente alcuni aspetti rilevanti. L'obiettivo principale del lavoro è verificare quale conoscenza del concetto di limite abbiano gli studenti e individuare le maggiori misconcezioni inevitabili[46] presenti tra studenti che hanno già incontrato i limiti nel loro percorso scolastico e hanno già dato anche una formalizzazione al concetto. Le domande di ricerca che hanno preceduto il lavoro erano essenzialmente inerenti al rapporto tra definizione e concetto di limite, ai problemi legati alla lingua comune, ai vari registri di rappresentazione e ai loro rapporti, al legame tra limite, approssimazione e misura e infine ai problemi aperti dalle nozioni di infinito attuale e potenziale. Da questi punti di partenza è stato costruito un questionario composto da otto domande, sette delle quali riguardanti il concetto di limite, mentre una maggiormente legata ad aspetti filosofici-epistemologici della matematica, infatti era presente anche la curiosità di conoscere l'idea, l'immagine di matematica che gli studenti di un liceo scientifico posseggono al termine del loro percorso di studi e il legame, se ne esiste uno, tra questa immagine e l'approccio tenuto nelle varie risposte ai quesiti. Il questionario è stato proposto a studenti frequentanti due licei scientifici: il liceo Rinaldo Corso di Correggio (RE) e il liceo Giacomo Ulivi di Parma. La ricerca, inoltre, ha seguito due linee d'inchiesta: le domande infatti sono state poste a studenti che avevano

[46] In (Sbaragli, 2005) viene fatta la distinzione tra misconcezioni evitabili e inevitabili: le prime si riferiscono a misconcezioni che derivano direttamente da problematiche legate alla trasposizione didattica e all’ingegneria didattica e quindi sono una conseguenza immediata delle scelte dell’insegnante; le seconde invece derivano solo indirettamente dalle scelte dell’insegnante, sono legate ad esempio ad ostacoli di natura non strettamente didattica, al rapporto tra concetto e sua rappresentazione, alla necessaria gradualità del sapere.

trattato l'argomento durante l'anno scolastico precedente[47], in particolare 7-8 mesi prima, e a studenti che invece avevano appena trattato la nozione di limite[48]; in questo modo si è cercato di comprendere quali aspetti sono rimasti maggiormente nella mente degli studenti anche a distanza di tempo e fare considerazioni sulle varie differenze, se presenti. Si sono considerate classi con insegnanti differenti, in modo da ricercare misconcezioni inevitabili, non dovute direttamente alla trasposizione didattica e alle particolari pratiche di insegnamento. Complessivamente il questionario è stato proposto a 123 studenti, tra cui 64 avevano analizzato l'argomento l'anno precedente.
Di seguito esporrò i risultati dell'analisi delle risposte, cercando anche di spiegare come sono nate le domande e a quali problematiche sono legate.

3.1 Aspetti linguistici e concettuali: la I domanda

L’apprendimento non avviene mai in un contesto socio-culturale neutro. Riguarda persone con una loro storia, che hanno interiorizzato rappresentazioni e atteggiamenti nei riguardi della loro lingua naturale, che anch’essa ha una propria storia rappresentativa della storia del gruppo umano che la parla (Unesco, 1995).
Il linguaggio impiegato nella trattazione del limite è un elemento importante, esso infatti può favorire la formazione di modelli spontanei sui quali poi possono basarsi misconcezioni. Per comunicare nozioni analitiche i matematici usano molte parole e frasi tratte dal linguaggio quotidiano, ad esempio: limite, tende a, si avvicina, converge. In analisi queste parole assumono un significato particolare, che non sempre coincide con il significato più comune. È noto da varie ricerche che questa non coincidenza di significati può causare difficoltà nell’apprendimento. Ad esempio Monaghan (1991) concentra la propria ricerca proprio sugli aspetti riferiti alla comprensione che gli studenti hanno del linguaggio utilizzato dagli insegnanti per comunicare i concetti del Calcolo, egli conclude:

***Approssima* sembra presentare la più netta difficoltà per gli studenti, in quanto è un termine vago. *Tende a* è spesso visto come simile a *si avvicina* in un contesto matematico, sebbene il suo impiego**

[47] Ossia alle classi V B pni, V A e V A linguistico del liceo Corso.

[48] Più precisamente il questionario è stato sottoposto alle classi V B pni e V F pni del liceo scientifico Ulivi e alla classe IV B pni del liceo scientifico Corso.

quotidiano non suggerisca situazioni riferibili a limiti. Ad entrambe le frasi è data un'interpretazione dinamica. *Converge* può generare confusione in quanto il suo significato quotidiano è fortemente associato a linee convergenti. Molti studenti non riescono a immaginare come una successione di numeri possa convergere. Il *limite* è spesso immaginato come un punto di confine. Accade come per i termini di una successione, ad esempio $0,\overline{9}$, con il termine più vicino dopo il confine, cioè 1. Gli studenti incontrano molte effettive difficoltà in questo misterioso balzo verso l'infinito

(Monaghan, 1991)

Con la prima domanda del questionario si vuole proprio valutare l'influenza del linguaggio naturale sull'apprendimento del concetto, anche in seguito ad una trattazione formalizzata e all'introduzione di una definizione rigorosa. Con essa si richiede:

Spiega cosa significa per te il termine *limite*.

Leggendo le varie risposte date dagli studenti si osserva subito come queste siano molto varie, sia nella forma sia nei contenuti, inoltre alcuni studenti hanno espresso più concetti nella stessa risposta[49]. Inizialmente si è cercato di classificare tali risposte, distinguendo dapprima la forma scelta dallo studente, infatti alcuni studenti hanno semplicemente riportato la definizione di limite, mentre altri hanno cercato di argomentare in forma più discorsiva. Nel grafico 1 sono riportate le risposte degli studenti che avevano appena trattato il concetto in classe (che per brevità in seguito chiamerò studenti 1), mentre nel grafico 2 sono riportate le risposte degli studenti che avevano introdotto l'argomento l'anno precedente (che per brevità in seguito chiamerò studenti 2).

[49] In questi casi si sono considerate tutte le varie risposte date.

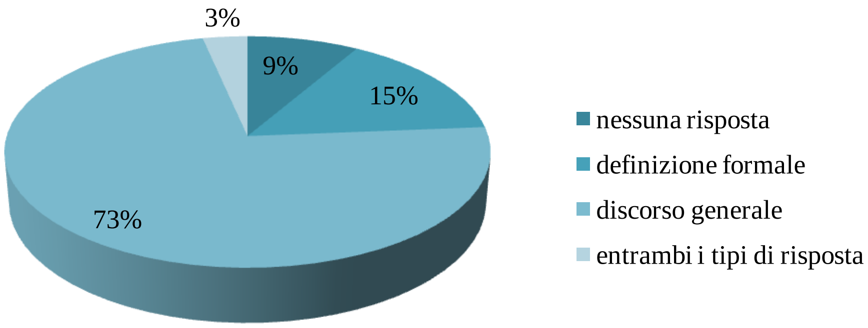


Grafico 1

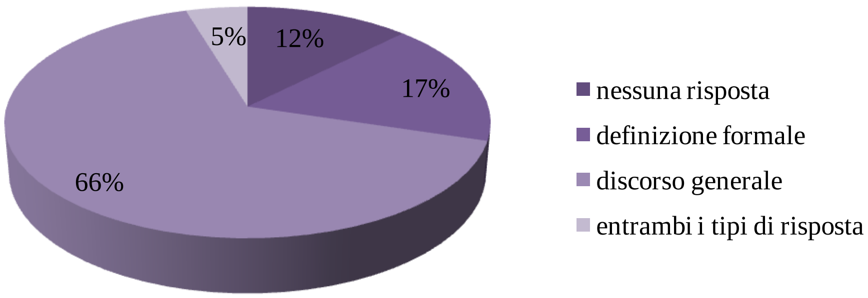


Grafico 2

Si può osservare come in entrambi i casi la risposta più utilizzata sia un discorso generale in cui si cerca di spiegare a parole cosa sia un limite, forse questo è dovuto anche alla forma della domanda stessa, più colloquiale, probabilmente se fosse stata posta una domanda del tipo "Definisci il concetto di limite" la percentuale delle definizioni sarebbe notevolmente aumentata. In generale si può però notare che la percentuale di risposte vuote aumenta per gli studenti 2, forse a causa di un maggiore imbarazzo e incertezza di fronte ad un argomento trattato l'anno precedente, di contro però si può anche constatare un leggero aumento di risposte attraverso una definizione formale.

Analizzando le risposte in forma discorsiva si può osservare una grande ricchezza di idee di non facile classificazione, inoltre emergono incertezze non strettamente legate alla nozione di limite, ad esempio vari studenti parlando di funzioni considerano incognite e parametri, inoltre spesso la ricerca di un limite è associata alla risoluzione di un’equazione. Dietro a questi errori sono presenti misconcezioni legate all’algebra: ogni volta che si parla di x si considerano incognite, non variabili, anche se i significati sono profondamente diversi, e nel momento in cui si è di fronte ad operazioni si pensa di dover risolvere un’equazione, non avendo compreso effettivamente cosa sia un’equazione; questo succede ancora in classi quinte di licei scientifici. Preliminarmente vorrei anche osservare come non sempre gli studenti facciano riferimento al significato matematico del termine *limite*, in alcuni casi si distingue proprio tra significato matematico e non (ad esempio un significato più filosofico), mentre in altri alcuni studenti riportano unicamente il significato non matematico (grafico 3 e grafico 4).

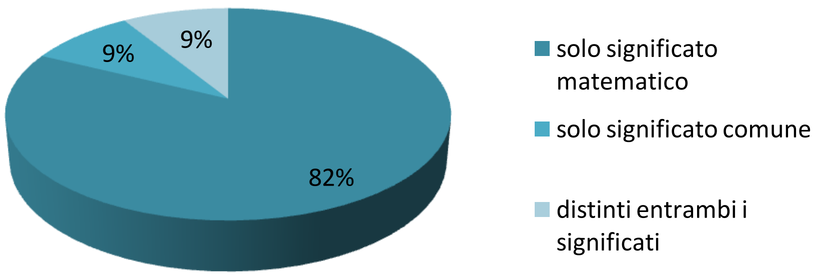


Grafico 3 - Studenti 1

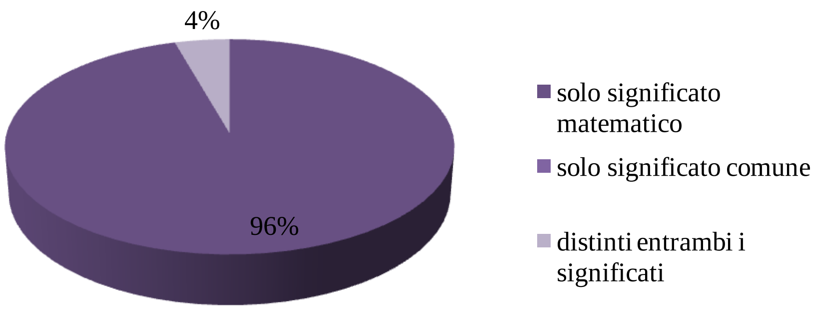
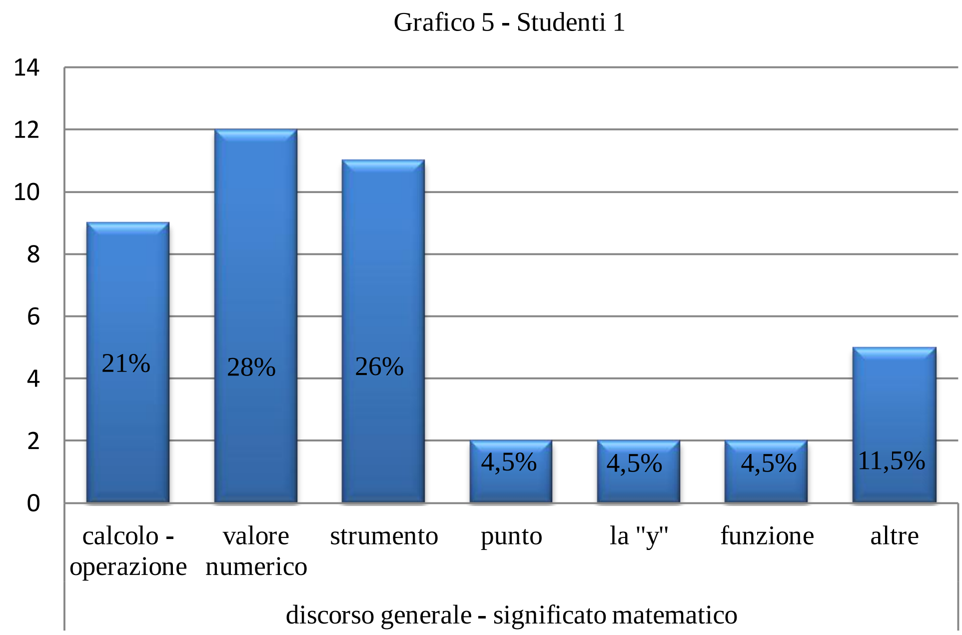


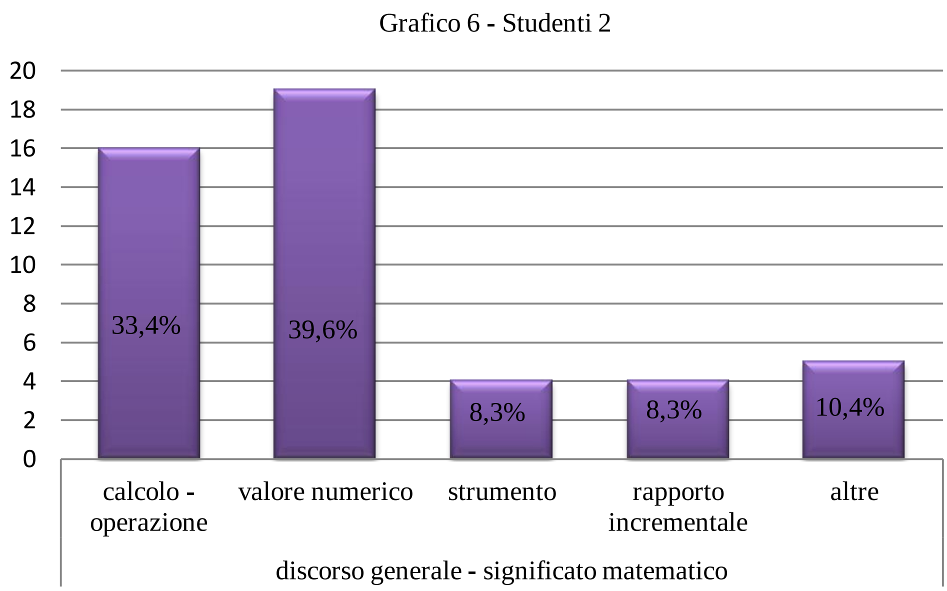
Grafico 4 - Studenti 2

Da notare come ci siano maggiori “resistenze” dei significati comuni tra studenti che hanno appena trattato il concetto. Nei casi di risposte “miste” o di risposte non matematiche i significati maggiormente attribuiti al termine limite sono stati di barriera, muro e di confine[50]; da notare come ciò sia successo soprattutto tra gli studenti 1, a riprova anche della difficoltà che si ha nel cambiare – sostituire un’immagine del concetto così radicata. In Alberti, Andriani, Bedulli, Dallanoce, Falcade, Foglia, Gregori, Grugnetti, Marchini, Molinari, Pezzi, Rizza, Valenti (2000) si ipotizza che l’idea di barriera costituisca un ostacolo nel percorso che porta alla comprensione del concetto di limite in quanto renda più difficile mettere in relazione il limite con un’idea di interazione (con un processo) e impedisca di accettare la possibilità di un limite infinito. Quest’idea non è certo aiutata dall’utilizzo in matematica dei termini limite e limitato, l’ambiguità tra questi due termini funge da ulteriore ostacolo, come sottolineato da alcuni autori (Prodi, 1970). Come vedremo in seguito le idee di limite-barriera e limite-confine sono ancora presenti anche in risposta al significato matematico del termine.

Ritornando alla classificazione delle risposte degli studenti, queste potrebbero essere analizzate in tantissimi modi, ponendo maggiore attenzione su alcuni aspetti rispetto ad altri: qui per l’analisi si è posta molta attenzione al lato linguistico, sui termini stessi usati dagli studenti. In particolar modo nelle risposte in cui gli alunni hanno fatto riferimento al significato matematico del termine, si sono evidenziate le parole usate per definire il limite e, in seguito, si è sottolineato l’utilizzo frequente di alcuni vocaboli particolari usati impropriamente nelle risposte. Va inoltre osservato come tra le risposte discorsive nessuna sia completamente corretta, nel senso che non presenti errori concettuali. Nel grafico 5 si sono riportati i termini che definiscono il limite per gli studenti 1 e nel grafico 6 i termini usati dagli studenti 2, sempre nel caso di risposte discorsive, in seguito, a parte, si analizzeranno le definizioni formali date dagli studenti.

[50] Questi sono anche i maggiori significati attribuiti al termine limite da studenti che non hanno ancora incontrato i limiti in matematica, si rinvia ad esempio alle ricerche di Cornu (1980) e Alberti, Andriani, Bedulli, Dallanoce, Falcade, Foglia, Gregori, Grugnetti, Marchini, Molinari, Pezzi, Rizza, Valenti (2000).





Innanzitutto si può osservare come sia per gli studenti 1 sia per gli studenti 2 i limiti vengano descritti maggiormente e si riducano a calcoli o valori numeri. Sicuramente influisce su questa prospettiva la maggior parte degli esercizi svolti e presenti sui libri di testo, che, come abbiamo visto, fanno riferimento prevalentemente al registro algebrico; come si può notare questo risulta maggiormente per gli studenti 2. Con "strumenti" si sono riunite varie risposte in cui gli studenti non hanno detto cosa sia il limite, ma hanno descritto a cosa serva, scrivendo, nella maggior parte dei casi, che il limite è uno

strumento che serve “per studiare l’andamento di una funzione” o “per trovare valori a cui la funzione si avvicina”, sottintendendo in questo caso una visione dinamica del concetto. Questo tipo di risposta è maggiormente presente tra gli studenti 1.
Balza subito alla vista come alcuni studenti 2 abbiano risposto che “il limite è il rapporto incrementale”; da questa risposta emerge non solo come non sia chiaro il concetto di limite, ma pure quello di derivata di una funzione. Avendo probabilmente definito la derivata di una funzione attraverso il concetto di limite, questi due oggetti matematici si sono sovrapposti nella mente di alcuni studenti.
Ecco alcuni esempi di risposta:

- “Il limite è il valore che raggiunge l’incognita avvicinandosi sempre di più ad un punto”, “il limite è il valore che la funzione assume quando la x ha il valore indicato”
- “Significa calcolare a che cosa tende la funzione in casi particolari, ma la funzione non raggiungerà mai il tal punto limite”, “il limite è quell’operazione matematica che permette di verificare a quale valore di y una funzione data tende quando mi avvicino ad un certo valore di x”, “il limite è quell’operazione che si utilizza per calcolare il valore di un certo parametro in una funzione”, “il limite è il calcolo di una funzione in cui, data l’ascissa che tende a un certo numero, bisogna ricavare l’ordinata, cioè l’immagine dalla x data nel grafico della funzione”;
- “i limiti sono procedimenti che ci permettono di capire l’andamento delle funzioni e cosa accade in aree molto grandi o molto piccole di queste”;
- “un punto a cui una funzione tende ma che non tocca mai”;
- “il termine limite significa l’immagine a cui una determinata funzione tende”.

Tra le risposte “altre” ho inserito casi isolati di risposte particolari, ad esempio:

- “È un’espressione matematica tramite cui posso arrivare a calcolare un intorno di un determinato numero o di infinito”;
- “È la costruzione di un intorno di un punto dato e a cui tende la x”;
- “la corrispondenza tra il valore k di una $f(x)$ quando x tende ad un valore t”.

Da queste semplici risposte si può notare la confusione nell’utilizzare termini quali intorno, infinito, ecc. Qui di seguito si sono riportati, nei grafici 7 e 8, le percentuali di studenti che hanno risposto in maniera discorsiva e che hanno utilizzato alcuni termini in modo inappropriato, sottintendendo quindi una mancata o una parziale comprensione del concetto.

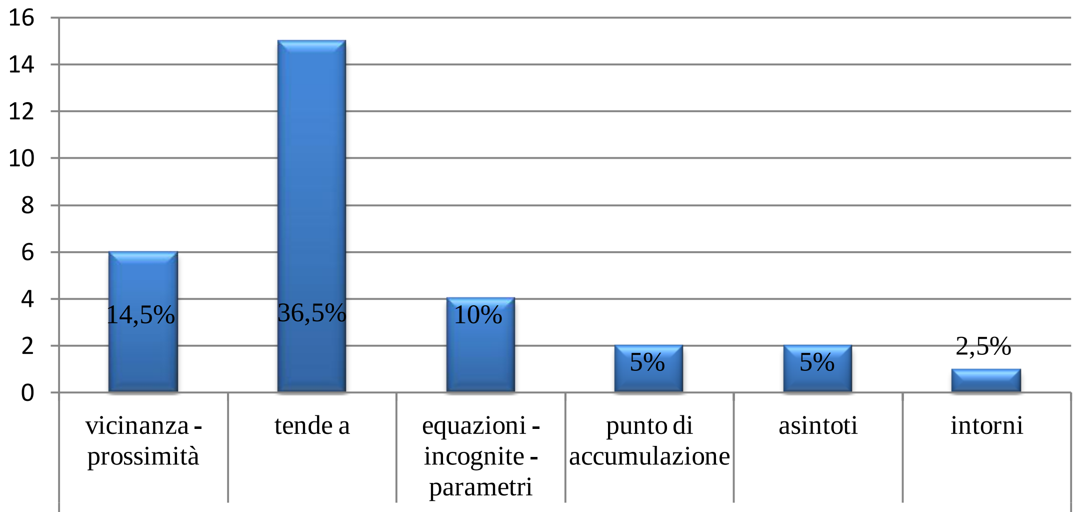


Grafico 7 - Studenti 1

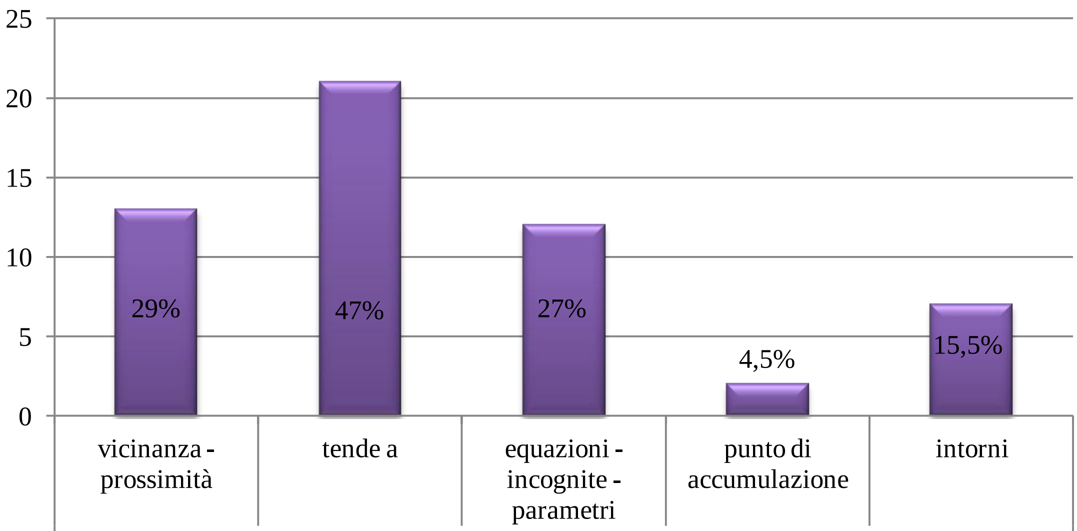


Grafico 8 - Studenti 2

Come già accennato, in varie risposte è ancora presente l’idea di confine o barriera, in particolare si sottolinea come il valore limite non possa mai essere raggiunto o come non possa mai essere oltrepassato, ad esempio nelle risposte:

- “Il limite è quel valore al quale la funzione, calcolata in un intorno di x, si avvicina ma senza mai raggiungerlo”;
- “per limite si intende un valore per il quale la funzione ad esso assegnata, per

quanto si avvicini a tale valore, non lo raggiungerà mai”;

- “il valore a cui una funzione o una successione tende, un “tetto” per il quale non può andare oltre o assumere tale valore;
- “il concetto di limite si riferisce a qualcosa che non possiamo superare”.

Più precisamente il 15% degli studenti 1 che hanno dato una risposta discorsiva in termini matematici ha fatto riferimento all’idea di confine, mentre il 27% ha fatto riferimento all’idea di barriera; tra gli studenti 2 il 18% ha fatto riferimento all’idea di barriera mentre nessuno ha richiamato l’idea di confine. Il problema se una funzione o una successione raggiunga il limite oppure no è di natura anche filosofica e riguarda la natura della matematica e dell’infinito; la definizione formale $\varepsilon - \delta$ evita tale questione. Passiamo ora alle risposte in cui si fornisce una definizione matematica: gli studenti hanno scelto in generale di fornire la definizione di limite di una funzione in un punto, pochissimi hanno cercato di esporre più definizioni per comprendere il maggior numero di casi e qualcuno ha anche considerato le successioni. Vorrei osservare che tra gli studenti 1 ben il 72% degli studenti che hanno fornito una definizione ha risposto in maniera esaustiva, mentre tra gli studenti 2 solo il 28%, mentre gli altri hanno riportato i simboli non scrivendo in realtà cosa sia un limite (ad esempio “$\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta_\varepsilon > 0: \forall x \in \mathbb{R}\ |x - x_0| < \delta_\varepsilon\ \rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$”), dandolo presumibilmente per scontato, ma dando anche l’impressione di una conoscenza mnemonica. In generale le definizioni riportate sono sia in termini di ε e δ, sia in termini topologici di intorni, sia “miste”, come ricordato precedentemente nel paragrafo sulla trattazione dei limiti nei libri di testo (grafici 9 e 10).

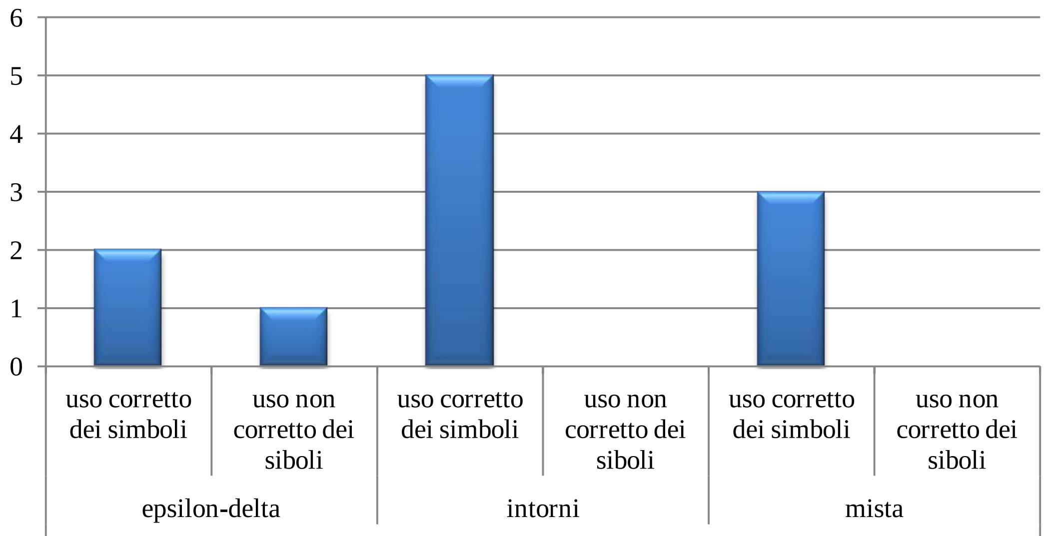


Grafico 9 - Studenti 1

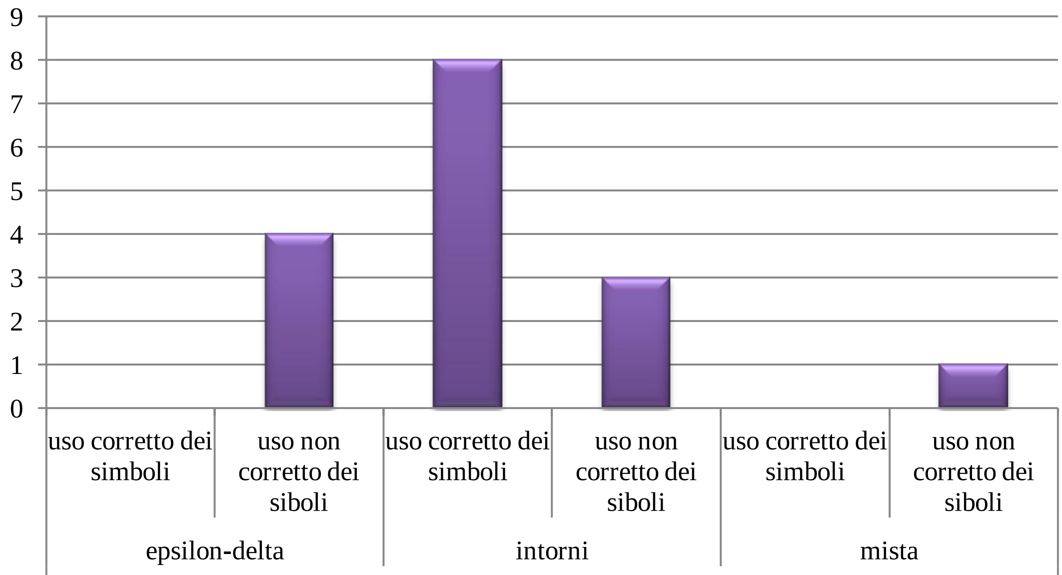


Grafico 10 - Studenti 2

È possibile notare come, tra gli studenti 1, chi ha scelto di dare una definizione matematica abbia poi dato una definizione corretta, solo 1 persona ha sbagliato l’utilizzo dei simboli nella definizione $\varepsilon - \delta$; al contrario tra gli studenti 2 la metà ha sbagliato nel dare la definizione. In entrambi i casi si conta un minor numero di errori nelle definizioni topologiche, in concordanza anche con altre ricerche in didattica della matematica che vedono positivamente proprio l’utilizzo di definizioni in termini di intorni.

3.2 I limiti e la logica predicativa: la definizione formale

Varie ricerche in didattica affermano come sia difficile per gli studenti comprendere il concetto di limite attraverso la definizione $\varepsilon - \delta$; una debole comprensione del concetto relativo all’esatta definizione di limite può confondere la stessa comprensione. Effettivamente tale definizione racchiude più di una difficoltà. In primis il simbolismo della logica predicativa, con i suoi quantificatori, di cui molto spesso non si sottolinea l’importanza e l’esigenza; inoltre nei simboli utilizzati si nascondono problemi concettuali, come ad esempio nel caso della “notazione” δ_ε o $\delta(\varepsilon)$, usata molto spesso anche dagli studenti a cui è stata sottoposto il questionario, in realtà si cela l’assioma di scelta. Il concetto di punto di accumulazione apre nuovi problemi e per questo generalmente non viene trattato nei libri di testo.
Considerando già preliminarmente tutte le problematicità legate alla definizione, è stato inserita nel questionario una domanda che ricercasse le difficoltà riscontrate dagli studenti.

3.2.1 La II domanda

Si è scelto a tal proposito un esercizio presente nel manuale *Lineamenti di analisi e calcolo combinatorio* di N. Dodero, P. Baroncini, R. Manfredi:

Dimostrare l’eguaglianza, utilizzando la definizione:

$$\lim_{x\to 9}\frac{x-6}{3}=1$$

Come già accennato, negli stessi libri di testo sono presenti vari esercizi che riguardano la “verifica” di un limite attraverso la definizione. Quindi nella lettura delle risposte va considerato che non si tratta di un esercizio “nuovo”, bensì di un esercizio appartenente ad una tipologia ben nota. L’obiettivo è capire se gli studenti conoscono una definizione di limite, se hanno compreso il significato di tale definizione e se posseggono una qualche abilità argomentativa. Inoltre nell’analisi delle risposte si è cercato anche di evidenziare se la definizione utilizzata risultasse coerente con quanto esposto nella risposta alla prima domanda.
Leggendo le risposte date dagli studenti si è potuto notare fin da subito che molti hanno cercato di dare una soluzione con “metodi alternativi”, seppure la stessa domanda

chiedesse di fare riferimento alla definizione di limite. In particolare la maggior parte ha ritenuto opportuno sostituire il valore 9 alla variabile x nell’espressione riportata per dimostrare il risultato; anche alcuni studenti che hanno cercato di dimostrare il risultato attraverso la definizione hanno operato tale sostituzione, probabilmente per convincersi dell’esattezza del risultato; una persona inoltre ha riportato la definizione appoggiandosi invece sulla sostituzione per la dimostrazione. In questa metodologia di dimostrazione in realtà si nasconde una particolare comprensione del concetto di limite, che, come anche scaturito dalle risposte al primo quesito, viene visto essenzialmente come un conto e quindi basta effettuare questo conto con le opportune tecniche per “dimostrare” la correttezza dello stesso; in questo caso poi, probabilmente, i legami del concetto con la continuità della funzione possono apportare difficoltà alla comprensione e dimostrazione del risultato. Dai grafici qui sotto riportati si può osservare come tra gli studenti 2 sia ancora più diffusa tale scelta, anche a discapito delle risposte vuote che invece diminuiscono. Quindi a distanza di tempo ciò che rimane maggiormente nella mente degli studenti sono le tecniche di calcolo; inoltre gli studenti acquistano anche maggiore convinzione sulla coincidenza dell’oggetto matematico limite con le operazioni necessarie per il calcolo di un limite.

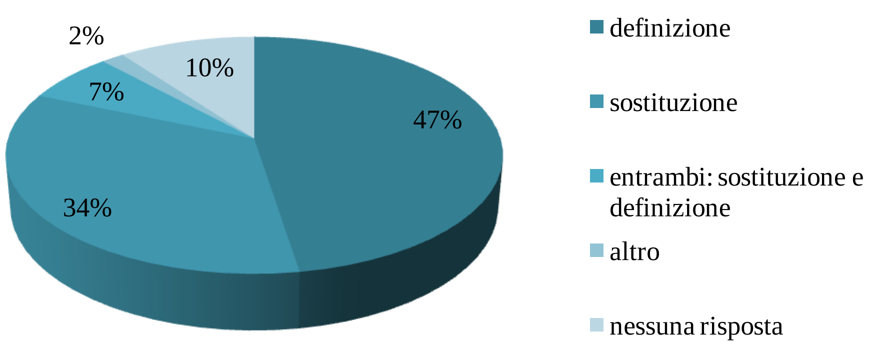


Grafico 1 - Studenti 1

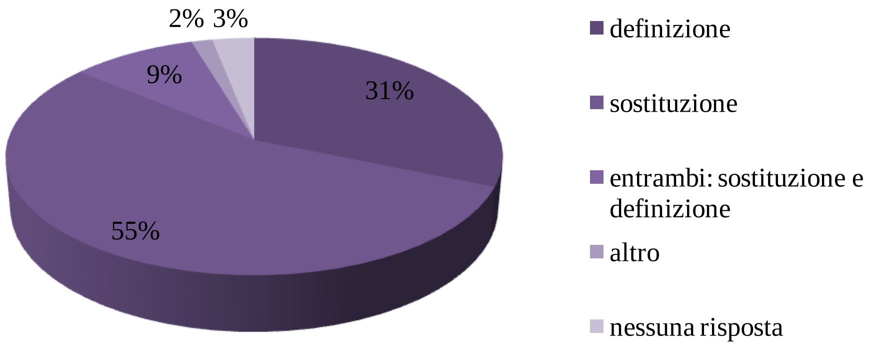


Grafico 2 - Studenti 2

Non tutte le risposte però sono uguali, sia per quanto riguarda l’utilizzo della definizione sia per le varie sostituzioni compiute. Chi ha cercato di utilizzare una definizione di limite spesso ha riportato preliminarmente tale definizione, in particolare tra gli studenti 1 ben il 75% ha esposto la definizione che avrebbe poi utilizzato, mentre tra gli studenti 2 solo il 23%; questo a prova del fatto che generalmente gli studenti si dimenticano la definizione formale. Inoltre non tutte le definizioni riportate risultano corrette, nel senso che non sempre i simboli sono stati utilizzati correttamente (anche qui a riprova di una mancata comprensione tra studenti che invece si sentivano abbastanza sicuri, avendo deciso di riportarla). Tra gli studenti 1, che hanno scelto di scrivere preliminarmente la definizione, il 37,5% ha commesso degli errori, mentre tra gli studenti 2 il 33%. Inoltre le definizioni utilizzate implicitamente o esplicitamente nella maggior parte dei casi sono state la definizione $\varepsilon - \delta$ o la definizione “mista”; in generale chi ha utilizzato la definizione e aveva anche risposto alla prima domanda attraverso la definizione non è stato coerente, ci sono stati vari studenti che nella prima domanda hanno riportato la definizione topologica con gli intorni, mentre in questa domanda hanno riscritto preliminarmente la definizione $\varepsilon - \delta$. Gli studenti che correttamente hanno cercato di sfruttare la definizione per rispondere alla domanda, come d’altronde suggerito dal testo stesso, non sempre sono riusciti a dimostrare il risultato. Si è cercato di classificare gli “errori” commessi in alcune categorie, infatti le maggiori cause di fallimento sono state:

- Errori algebrici, soprattutto legati alla risoluzione di una disequazione che presentava un valore assoluto;
- Definizioni errate che hanno portato a un’impostazione non corretta della dimostrazione;
- Mancato completamento della definizione, sia per problemi algebrici, ma anche per problemi di comprensione, dato che gli studenti non sempre avevano chiaro che cosa significassero i vari calcoli portati avanti.

Gli ultimi due punti sono entrambi legati a una mancata o errata comprensione della definizione. Inoltre in generale si è osservato come gli studenti abbiano dato delle risposte “meccanizzate”, prive di una qualsiasi argomentazione, come se le procedure effettuate fossero sterili e imparate a memoria; anche chi ha saputo portare a termine la “dimostrazione” spesso non ha giustificato il risultato ma lo ha semplicemente esposto, e anche nei casi di giustificazione questa spesso si è tradotta solo nel dire: “intorno di 9, quindi limite verificato”. Nei grafici 3 e 4 si sono riportate le percentuali riferite agli studenti che hanno cercato di utilizzare una definizione.

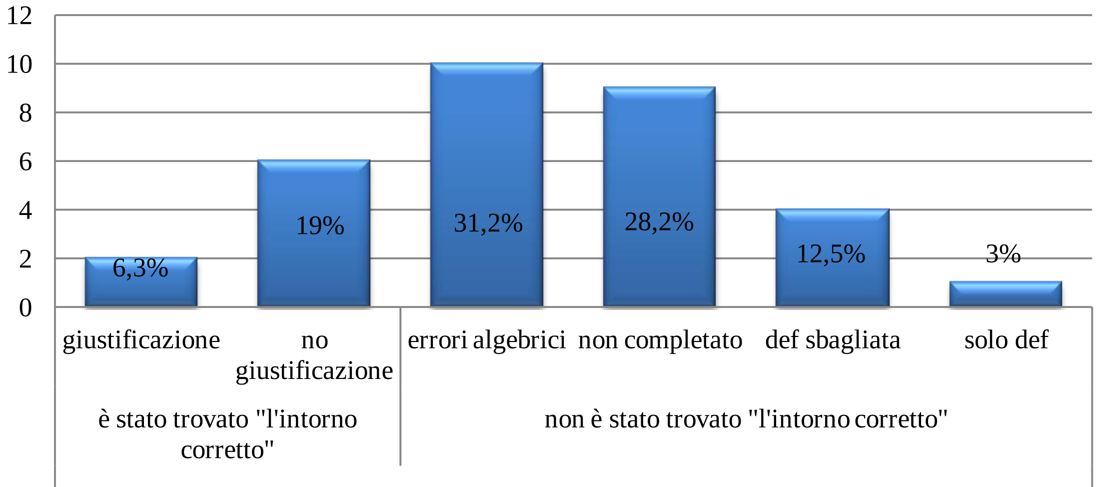


Grafico 3 - Studenti 1

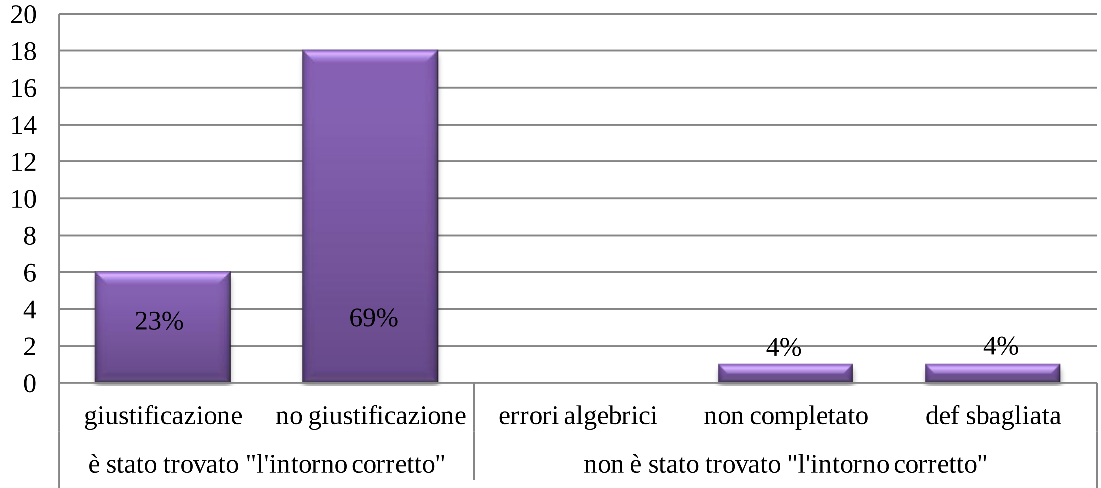


Grafico 4 - Studenti 2

Contrariamente a quanto ci si poteva aspettare si può osservare dai grafici come in generale gli studenti 2 siano riusciti maggiormente a portare a termine la dimostrazione, anche chi aveva riportato una definizione non corretta è riuscito a “dimostrare” il risultato. Anche questo fatto è indice in realtà di come per gli studenti la dimostrazione attraverso la definizione sia una procedura abbastanza “meccanizzata” e di come la definizione non sia stata realmente compresa nel suo significato.

Cercando ora di analizzare le risposte degli studenti che hanno usato la sostituzione del valore, si può osservare come in generale si effettui semplicemente il calcolo $\frac{9-6}{3}=\frac{3}{3}=1$, alcuni, invece, cercano di argomentare, “dimostrare” attraverso ragionamenti legati al concetto di avvicinamento (il 25% degli studenti 1 che hanno scelto la sostituzione e il 29% degli studenti 2), ad esempio:

- “Sappiamo che l’incognita è un numero che si avvicina per eccesso o per difetto a 9. Possiamo per comodità dire che $x=9 \to \lim_{x\to 9}\frac{x-6}{3}=\frac{9-6}{3}=1$ quindi il risultato è un numero molto vicino a 1 per eccesso o per difetto”;
- “$\frac{9-6}{3}=1 \to \frac{3}{3}=1 \to 1=1$ la funzione $f(x)=\frac{x-6}{3}$ per x che si avvicina al numero 9 tende a sua volta ad avvicinarsi al valore 1”.

Un fatto interessante però riguarda due studenti che, per giustificare la sostituzione, disegnano il grafico della funzione e fanno osservare con alcune frecce che più la variabile indipendente si avvicina a 9 più il valore della funzione si avvicina a 1. La rappresentazione grafica è stata utilizzata anche da alcuni studenti che avevano scelto di

utilizzare la definizione per la dimostrazione, essi infatti hanno trovato utile rappresentare graficamente l’intorno di 9 trovato al termine dei conti.
Ultimo fattore da sottolineare: nessuno studente fa uso dei quantificatori universale ed esistenziale.

3.3 Rappresentazioni grafiche

Come ricordato nel capitolo precedente, il concetto di limite implica almeno tre registri semiotici: algebrico, logico e geometrico. Già dalle risposte date alle prime due domande si nota come nella prassi scolastica si operi soprattutto nell’ambito del registro algebrico, ma una reale comprensione del concetto è subordinata almeno alla capacità dello studente di gestire i tre registri e di spostarsi dall’uno all’altro a seconda dei problemi presi in considerazione, il problema didattico centrale consiste proprio nel come produrre tale capacità.
L’approccio grafico al concetto di limite è spesso utilizzato dai libri di testo con lo scopo di favorire, attraverso la visualizzazione, la costruzione di immagini mentali significative che facciano avvertire l’esigenza di una definizione formale e, una volta data, permettano di comprendere più a fondo il significato. Bisogna, però, sottolineare fin da subito che quello visualizzato non è il grafico della funzione, ma una parte di tale grafico e spesso le informazioni che si richiede di dedurre da esso riguardano proprio la parte non visualizzata. Si chiede quindi di immaginare le parti mancanti estendendo ad esse le proprietà (ad esempio continuità, monotonia, ecc.) delle parti visibili. Alcune difficoltà da considerare nell’attività di lettura di un grafico in relazione al concetto di limite sono ad esempio:

- Il rischio di mescolare e confondere la globalità di un grafico di una funzione con la località del limite; un uso attento di tecnologie informatiche potrebbe favorire il passaggio dal globale al locale e ovviare a tale problematica;
- La richiesta di una lettura dinamica (in termini di avvicinamento) di un oggetto statico (il grafico come insieme di coppie ordinate);
- Il “senso opposto” della lettura rispetto alla definizione di limite (dalle ascisse alle ordinate).

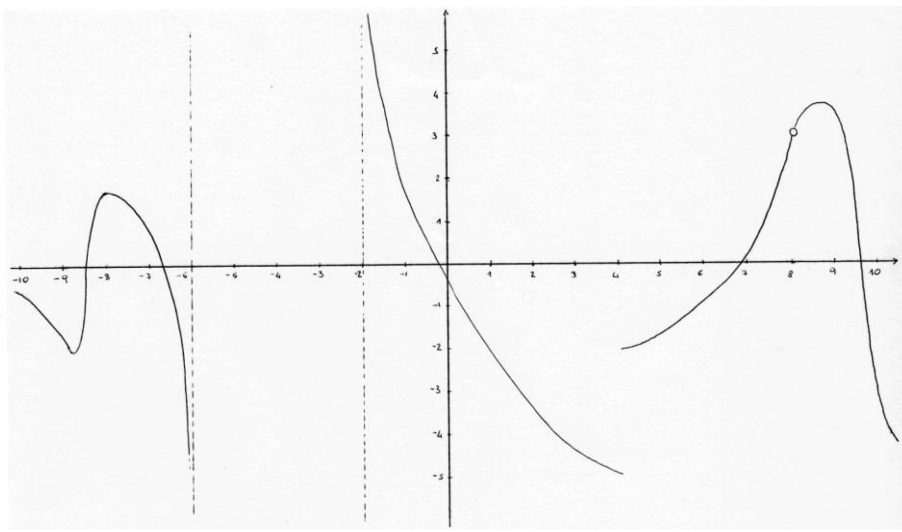
L’uso delle proprietà delle rappresentazioni visuali è importante e delicato nella didattica del limite. La varietà dei registri rappresentativi non è un obiettivo semplice da raggiungere: a volte gli stessi grafici cartesiani possono essere fonte di dubbi e perplessità per l'allievo (fino a contribuire al sorgere di misconcezioni). L'impiego di tecniche visuali è intuitivo e dunque didatticamente utile, ma deve essere controllato dall'insegnante. L'apprendimento mediante le rappresentazioni grafiche non può essere condotto basandosi soltanto sull'interpretazione spontanea delle figure. Fischbein, nella propria *Teoria dei concetti figurali,* afferma che dovrebbe essere cura dell'insegnante controllare l'integrazione delle proprietà concettuali e figurali in strutture mentali unitarie, con la predominanza dei contenuti concettuali su quelli figurali.

Nel questionario si è pensato di introdurre due quesiti (le domande tre e cinque) che facessero maggiormente riferimento al registro geometrico, con l'obiettivo di evidenziare eventuali difficoltà e misconcezioni sia nell'estrapolazione di informazioni da un grafico di una funzione, sia nella "costruzione" di una funzione soddisfacente determinati requisiti.

3.3.1 La III domanda

Dedurre, dal grafico sottostante, i valori dei limiti richiesti, se esistono, sapendo che le rette $x = -2$ e $x = -6$ sono asintoti della funzione. Ci sono limiti, fra quelli proposti, per i quali pensi che il grafico non ti fornisca sufficienti informazioni per la risposta? Quali? Perché?

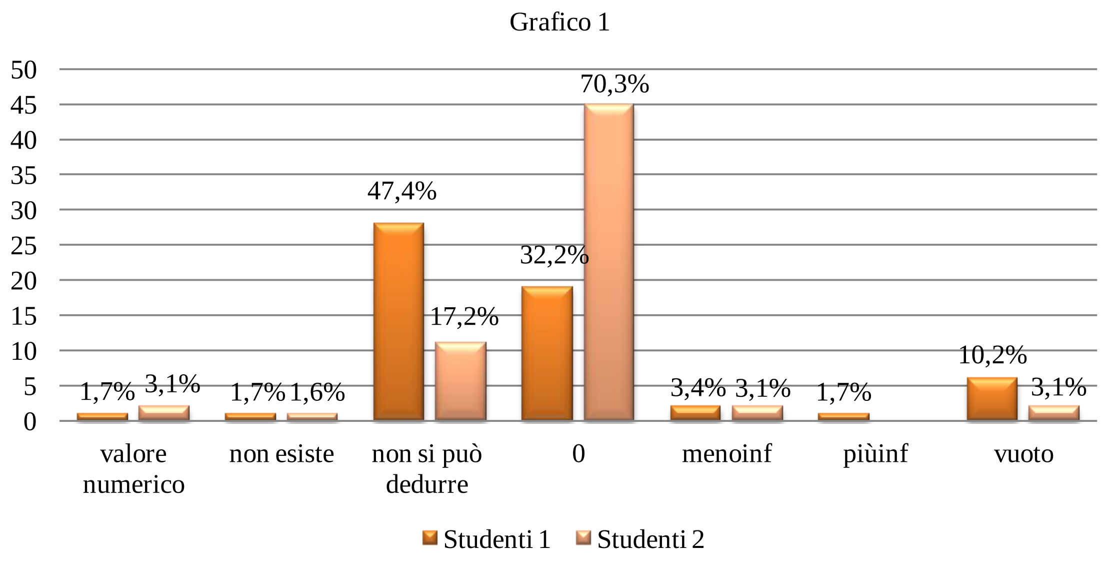
$$\lim_{x\to-\infty} f(x) \quad \lim_{x\to-6^-} f(x) \quad \lim_{x\to-6^+} f(x) \quad \lim_{x\to-2^-} f(x) \quad \lim_{x\to-2^+} f(x) \quad \lim_{x\to4^-} f(x) \quad \lim_{x\to4^+} f(x)$$
$$\lim_{x\to8^-} f(x) \quad \lim_{x\to8^+} f(x) \quad \lim_{x\to+\infty} f(x)$$



Nella domanda tre si è cercato di considerare una funzione che mostrasse varie possibili problematiche. Innanzitutto sono presenti due punti di discontinuità: nel punto di ascissa 8 si vuole anche osservare se "il pallino vuoto" influisce sulla determinazione del limite, mentre nel punto di ascissa 4 si è in presenza di una discontinuità di tipo salto, intenzionalmente non si sono utilizzati né pallini pieni né vuoti, per osservare anche le eventuali scelte degli studenti; inoltre in questo punto si può osservare se discontinuità, esistenza del limite e dei limiti destro e sinistro possono essere alla base di potenziali conflitti. Nei casi di $\lim_{x\to+\infty} f(x)$, $\lim_{x\to-\infty} f(x)$, $\lim_{x\to-6^+} f(x)$, $\lim_{x\to-2^-} f(x)$ si vuole osservare quanti studenti considerano il grafico della funzione come interamente rappresentato sul foglio. Nonostante le informazioni aggiuntive sugli asintoti, il grafico non consente di rispondere a tutte le richieste.

Cerchiamo di analizzare le risposte date dagli studenti. Un primo dato interessante consiste nel numero di studenti che hanno lasciato il foglio in bianco, infatti solo una persona tra gli studenti 1 e una tra gli studenti 2 ha operato questa scelta. Considererò le varie risposte date ai singoli limiti.

Nel grafico 1 sono riportate le varie risposte date dagli studenti[51] al $\lim_{x\to-\infty} f(x)$.



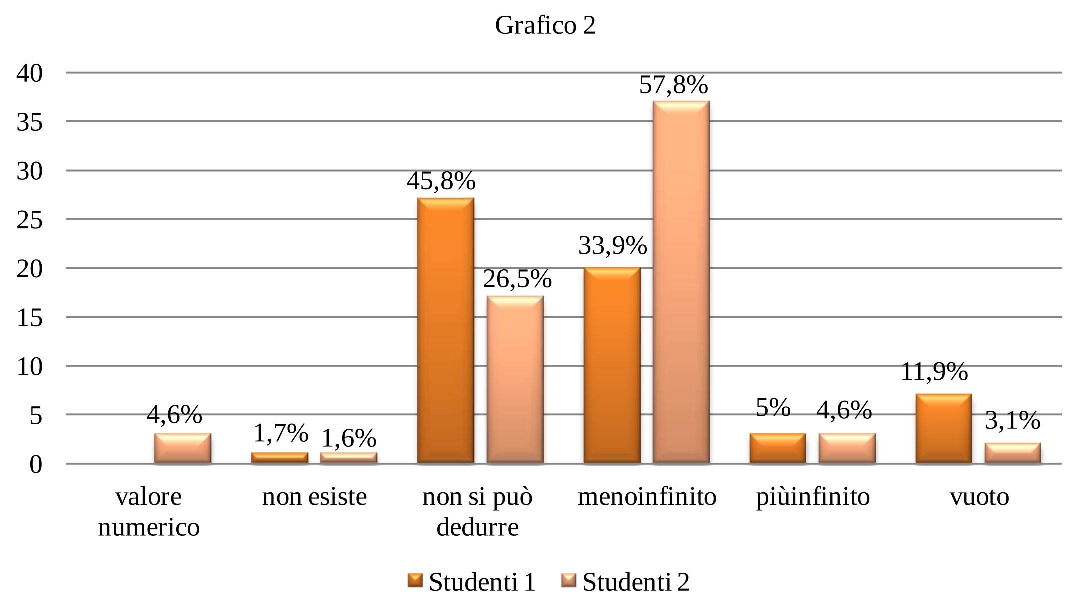
Si può subito notare che le risposte date con maggiore frequenza sono state non si può dedurre dal grafico, argomentando che non si può conoscere l'andamento della funzione non avendo altre informazioni, e zero, in cui gli studenti hanno pensato di estendere l'andamento della funzione che si osservava dalla parte di grafico presente sul foglio. In

[51] Si è scelto di utilizzare un unico grafico per rappresentare le risposte sia degli studenti 1 sia degli studenti 2, in modo da confrontarle in maniera più diretta. Bisogna però ricordare che gli studenti 1 sono 59 in totale, mentre gli studenti 2 sono 64.

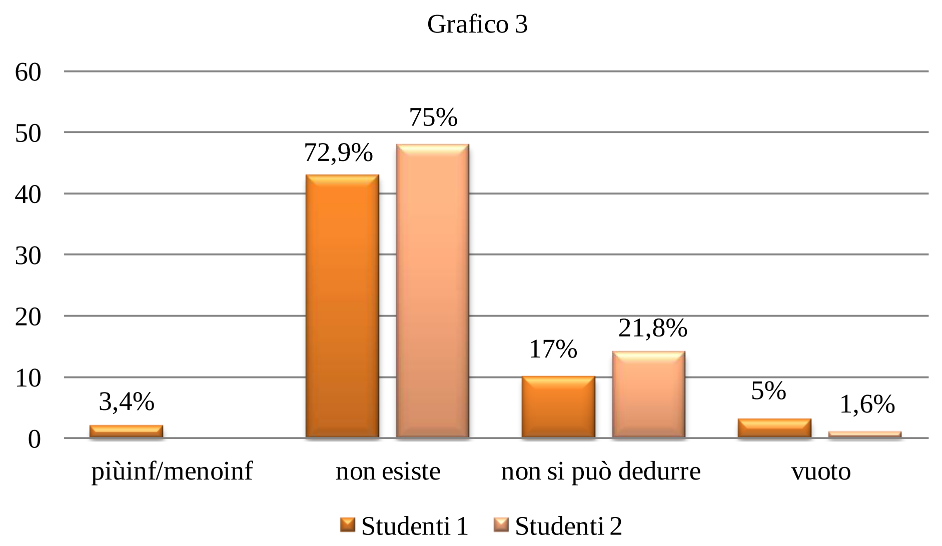
generale gli studenti 1 hanno maggiormente notato la non deducibilità, mentre gli studenti 2, forse a causa di una maggiore confidenza con i grafici di funzioni, hanno ritenuto sufficienti le informazioni riportate. Inoltre qualche studente in più tra gli studenti 1 ha scelto di non rispondere, forse a causa di un numero maggiore di dubbi a proposito. Sono presenti, inoltre, pochi studenti sia tra studenti 1 sia tra studenti 2 che hanno fornito risposte più particolari, che potrebbero essere legate ad altre problematiche:

- uno studente tra studenti 1 e due tra studenti 2 hanno riportato l'ultimo valore della funzione che si trovava sul foglio, come se pensassero che trovare il limite per x che tende a meno infinito o più infinito significa trovare l'ultimo valore della funzione che si ha a disposizione;
- due studenti sia tra studenti 1 sia tra studenti 2 hanno risposto meno infinito, questo errore può essere legato alla controvarianza del limite, probabilmente questi studenti osservavano i valori delle ascisse.

Ora consideriamo il $\lim_{x \to +\infty} f(x)$, nel grafico 2 sono riportate le risposte.



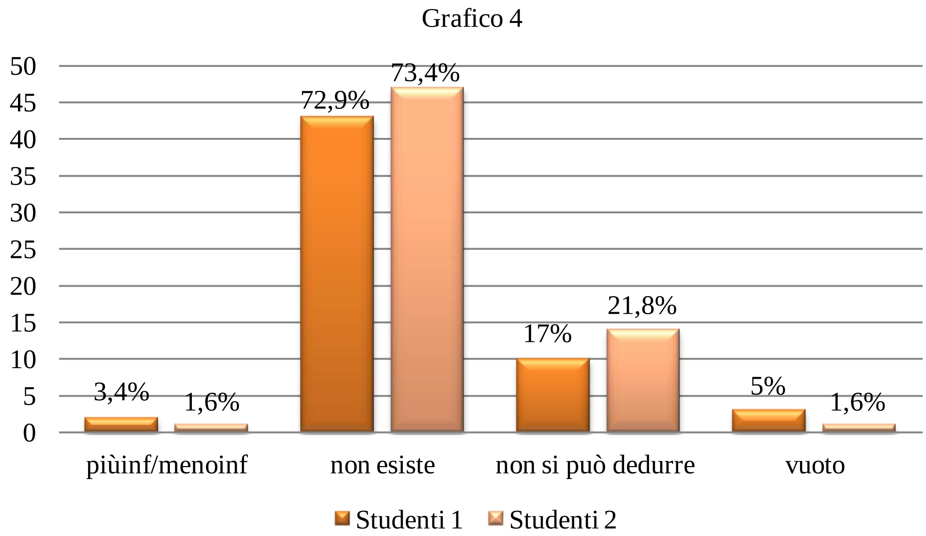
In generale le percentuali di risposte sono molto simili alle precedenti, anche se non tutti quelli che hanno risposto non si può dedurre nel caso precedente hanno poi risposto in modo analogo e nemmeno chi aveva esteso l'andamento della funzione l'ha fatto anche in questo caso. In particolare la differenza più evidente è tra gli studenti 2, infatti in questo caso molti meno studenti hanno ritenuto opportuno estendere l'andamento della funzione oltre alla parte di grafico riportata, probabilmente perché risulta meno chiaro in questo caso come si comporterà la funzione; ciò rinforza la convinzione che in generale gli studenti facciano fin troppo affidamento sulla parte di grafico riportata per dedurre informazioni su ciò che non si vede. Va considerato, però, che spesso e volentieri questo comportamento è legato ad aspetti di un contratto didattico implicito[52], che necessariamente viene evocato quando si richiede di dedurre da un grafico informazioni che esso non può dare. A consolidamento di ciò sta proprio il fatto che soprattutto gli studenti 2 si trovano in questa situazione, studenti che hanno “più esperienza” in caso di grafici. Appaiono legate a clausole di un contratto didattico implicito anche le risposte a $\lim_{x\to -6^+} f(x)$ $\lim_{x\to -2^-} f(x)$ (riportate nei grafici 3 e 4 rispettivamente).



[52] Definito da Guy Brousseau come l’insieme di

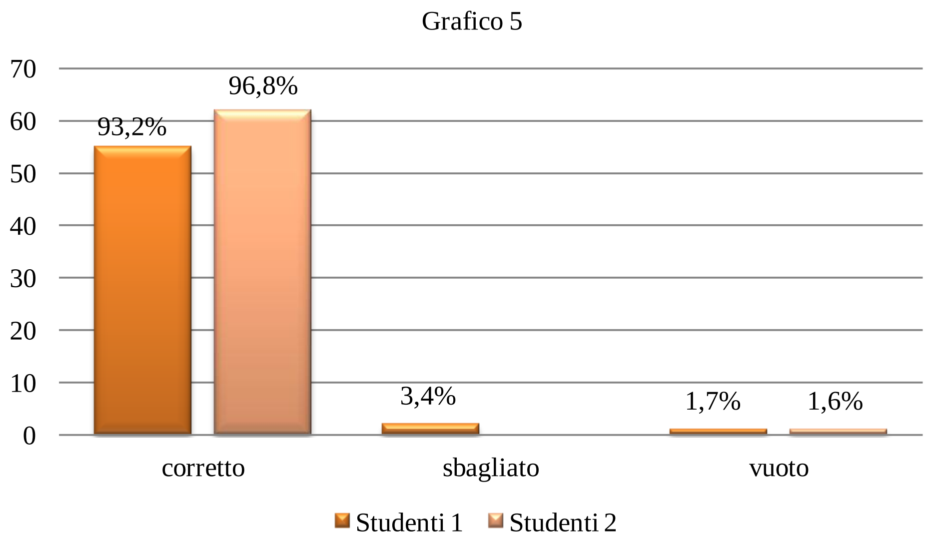
abitudini (specifiche) del maestro attese dall’allievo e i comportamenti dell’allievo attesi dal docente costituiscono il contratto didattico

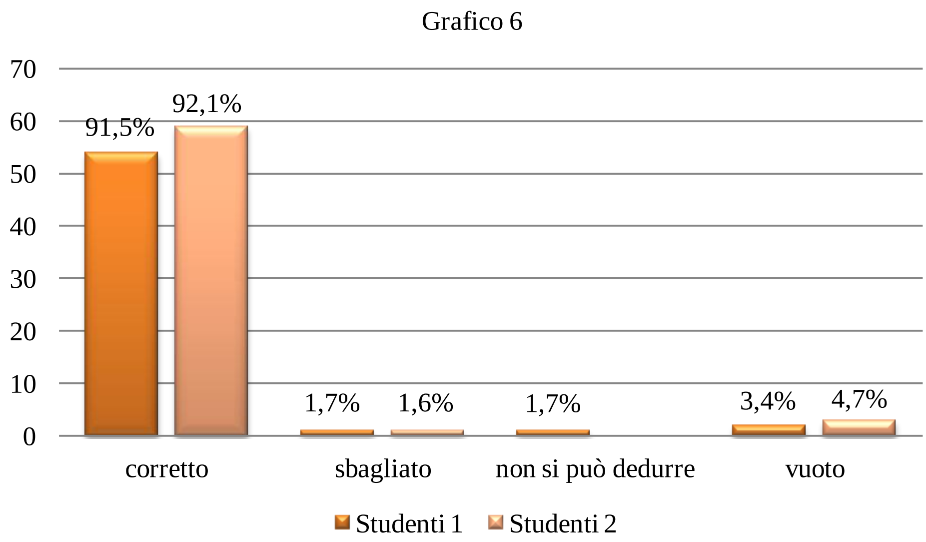
(D’Amore, 1999)



Si può infatti osservare che anche in questi due casi la risposta più frequente, sia tra gli studenti 1 sia tra gli studenti 2, è stata “non esiste”, in quanto, per contratto, se la funzione non viene rappresentata in una parte di piano si presume che qui non esista.

Analizzando le risposte date ai $\lim_{x\to -6^-} f(x)$, $\lim_{x\to -2^+} f(x)$ (grafici 5 e 6) si può osservare come in generale gli studenti abbiano risposto correttamente, quindi, oltre a basarsi sul grafico, hanno fatto riferimento all’informazione sugli asintoti e hanno saputo “tradurla” nei limiti.





Passiamo ora all’analisi delle risposte ai limiti legati ai punti di discontinuità.

Consideriamo i $\lim_{x\to 4^-} f(x)$, $\lim_{x\to 4^+} f(x)$ (le risposte sono riportate nei grafici 7 e 8).

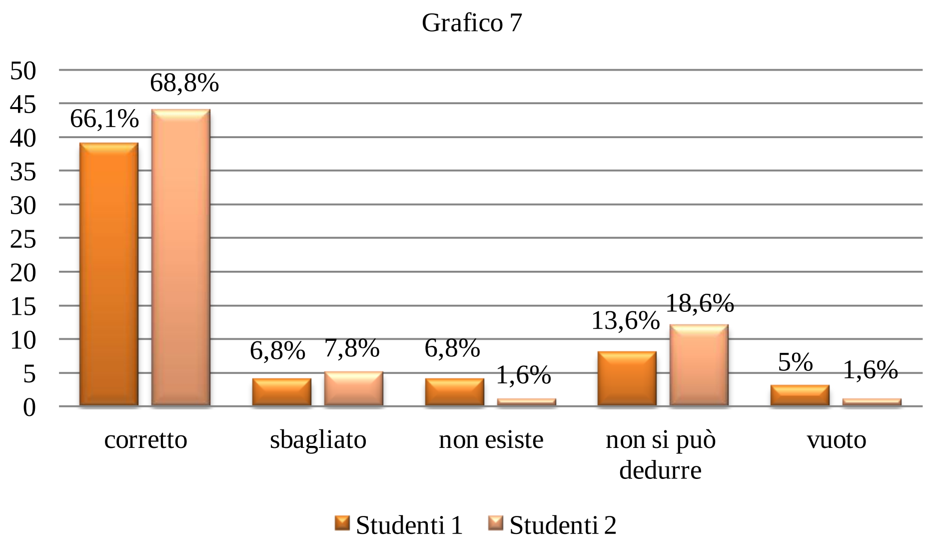
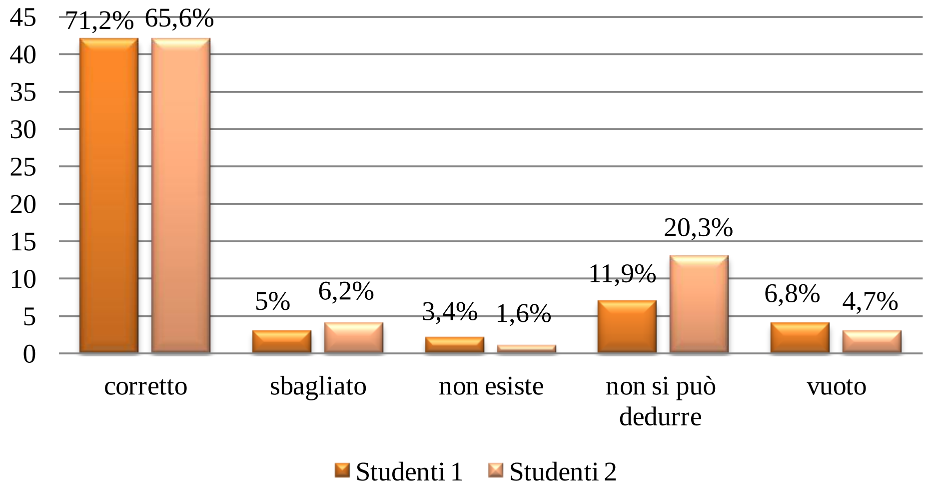


Grafico 8



Si può osservare che in generale la maggior parte degli studenti ha dato le risposte corrette, ad ogni modo sono presenti vari studenti che hanno presentato dubbi in proposito. In particolare un buon numero sia tra gli studenti 1, ma soprattutto tra gli studenti 2, ha ritenuto di non poter dedurre dal grafico i valori dei limiti, alcuni hanno risposto in maniera errata, mentre altri, sebbene pochi, hanno pensato che non esistessero tali limiti, probabilmente avendo imparato che se limite destro e sinistro non coincidono allora non esiste il limite, non facendo però attenzione al fatto che erano richiesti proprio limite destro e limite sinistro. Inoltre alcuni, che non hanno risposto, hanno giustificato la scelta dicendo che c'è discontinuità quindi non si può calcolare, altri dicendo che non avendo l'equazione della funzione non si possono calcolare, quindi ancora una volta sottolineando la supremazia del registro algebrico. Altri alunni che hanno sbagliato, invece, hanno risposto semplicemente 4, leggendo ancora una volta i valori a cui tende la variabile indipendente. Confrontando queste risposte con le risposte ai $\lim_{x\to 8^-} f(x)$ $\lim_{x\to 8^+} f(x)$ (grafici 9 e 10) si è notato che in generale chi ha risposto correttamente ai primi non sempre ha risposto correttamente anche ai secondi e viceversa.

Grafico 9

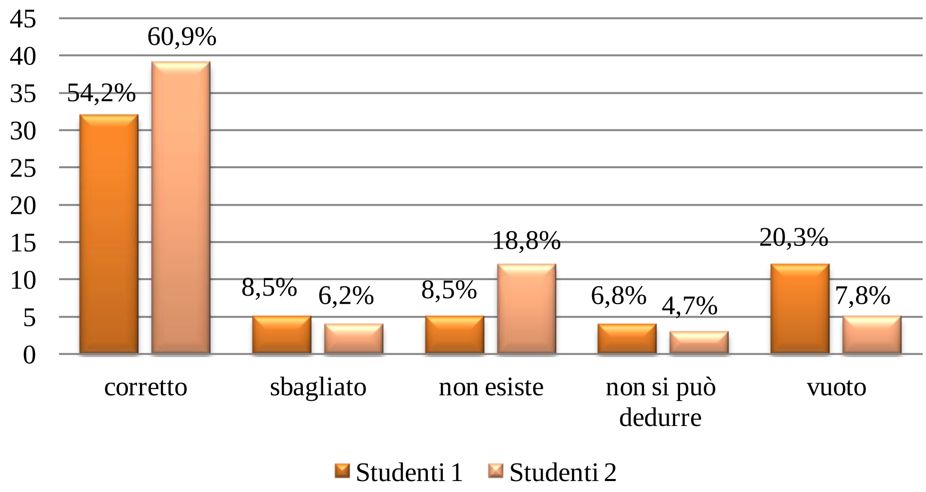
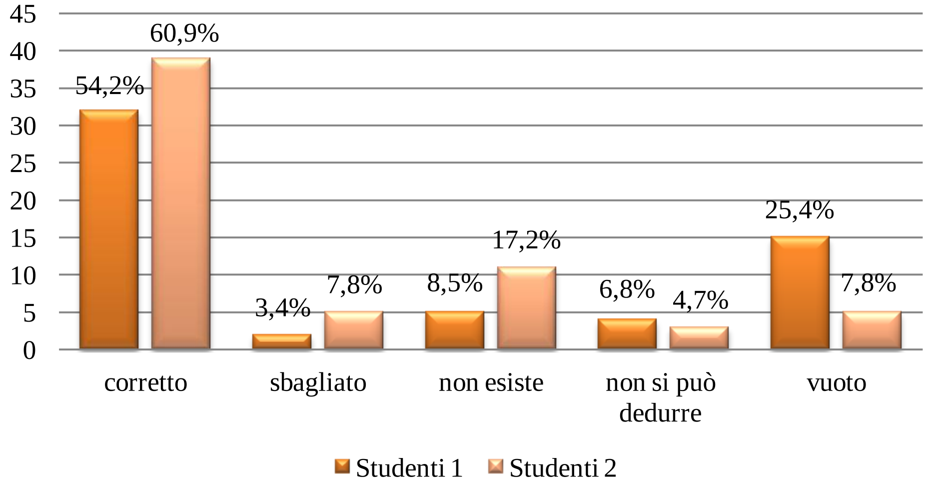


Grafico 10



Da questa considerazione e osservando che in generale ci sono state meno risposte corrette in questi ultimi casi, si può ipotizzare che in realtà ciò che reca maggiore disturbo sia il "pallino vuoto", ossia il fatto che la funzione non assuma nessun valore specifico in $x = 8$, e non tanto la discontinuità in sé (anche se ovviamente i due aspetti sono strettamente legati). Alcuni hanno affermato esplicitamente "non si capisce qual è l'immagine". Questo è confermato anche da alcune risposte ai $\lim_{x\to 4^-} f(x)$, $\lim_{x\to 4^+} f(x)$: molti studenti hanno sentito l'esigenza di disegnare i due pallini alle due estremità del grafico, molti che hanno risposto correttamente hanno disegnato in realtà due pallini pieni, non pensando che dovesse trattarsi di una funzione e quindi non considerando cosa sia una funzione, in questo modo non hanno risposto altro se non i valori "assunti" dalla funzione per $x = 4$; alcuni che hanno risposto in maniera errata o hanno risposto “non esiste” o “non si può dedurre” lo hanno fatto perché, giustamente, avevano disegnato un pallino vuoto e uno pieno e quindi nel caso pieno hanno risposto correttamente mentre nel caso vuoto no. Queste risposte sono legate a quella che Bagni, in (Bagni, 1999), chiama “misconcezione della funzione valutata nel punto”: il valore assunto dalla funzione f per $x = a$ viene interpretato come il limite $\lim_{x\to a} f(x)$ (talvolta tale valore è considerato insieme all’effettivo valore del limite, e questo provoca contraddizioni con il teorema di unicità del limite).

3.3.2 La V domanda

La quinta domanda è meno convenzionale rispetto alla terza, si richiede:

Disegna il grafico di una funzione il cui dominio sia $(-\infty, \mathbf{0}) \cup (\mathbf{0}, \mathbf{4}) \cup (\mathbf{6}, +\infty)$ e tale che:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0^+ \quad \lim_{x\to 0^-} f(x) = -\infty \quad \lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty \quad \lim_{x\to 4^-} f(x) = +2^-$$
$$\lim_{x\to 6^+} f(x) = -1^- \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = +2^-$$

Nei grafici 11 e 12, qui sotto riportati, si può notare che sia gli studenti 1 sia gli studenti 2 si sono trovati in maggiore difficoltà e hanno tracciato grafici di funzioni non soddisfacenti le richieste.

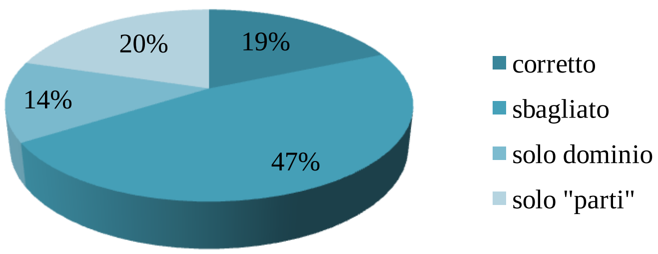


Grafico 11

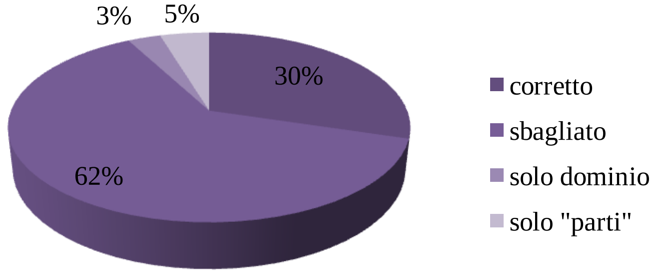


Grafico 12

Con “solo dominio” ho indicato gli studenti che hanno scelto di rimarcare sul piano cartesiano soltanto il dominio della funzione (come mostrato ad esempio in figura 1); mentre con “solo parti” ho indicato quegli studenti che hanno disegnato unicamente dei tratti del grafico della funzione, facendo riferimento ai vincoli richiesti, e che si sono trovati in difficoltà nel momento di “unire” questi tratti (esempio in figura 2).

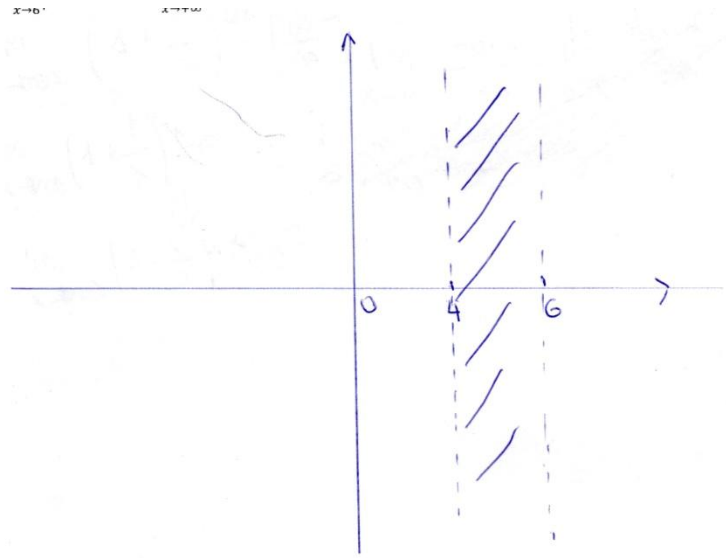


Figura 1

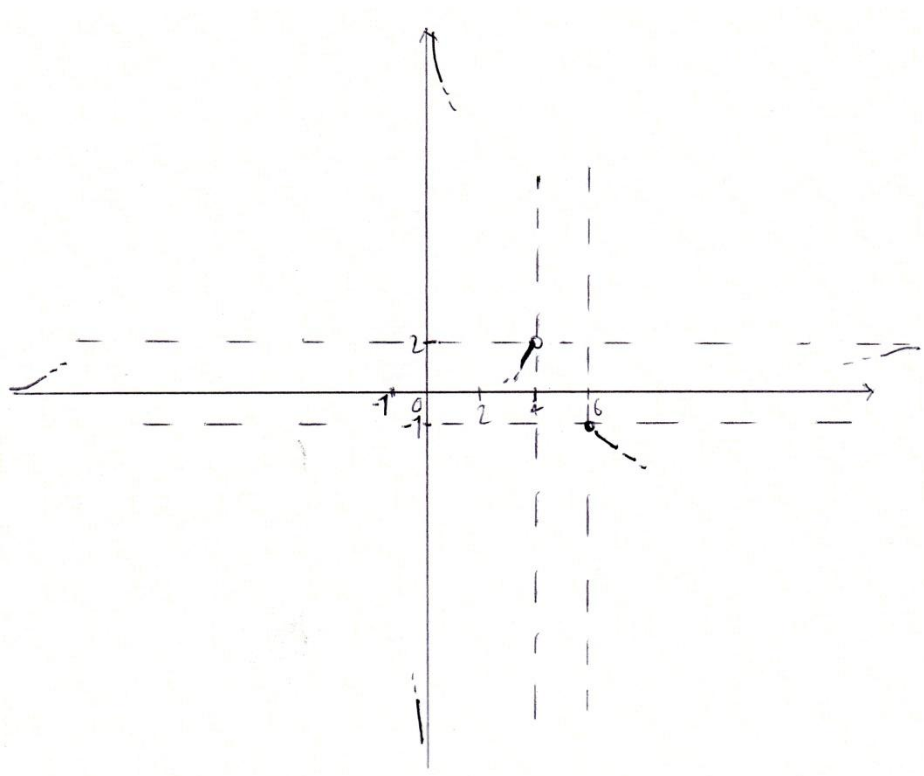


Figura 2

Dai grafici si può evidenziare che in generale gli studenti 1 sono stati più “cauti”, hanno riconosciuto le proprie incertezze e, sebbene il 47% abbia sbagliato, più studenti hanno scelto di rappresentare unicamente il dominio o “alcune parti”.

Cerchiamo ora di analizzare le risposte sbagliate e cercare di capire le cause di questi errori. Alcuni dei vincoli proposti dall’esercizio sono “particolari”, nel senso che implicano funzioni diverse da quelle usualmente considerate negli esercizi scolastici. In generale gli errori più frequenti non interessano la rappresentazione del grafico di una funzione, che deve soddisfare certi limiti, e gli asintoti sono disegnati correttamente nella maggior parte dei casi. Ciò che viene sbagliato con maggiore frequenza è la “direzione” del grafico, ad esempio nel caso $\lim_{x\to 6^+} f(x) = -1^-$ è stato molto difficile per gli studenti pensare ad una funzione che si avvicinasse a -1 “dal basso” e non “dall’alto”; questo forse potrebbe sembrare un cavillo nella comprensione del concetto di limite, però nasconde una difficoltà legata alla rappresentazione delle funzioni e ad una pratica scolastica frequente, anche perché gli stessi studenti che in quel caso hanno sbagliato hanno in altri contesti mostrato di conoscere sia la notazione +, - sia il significato di tale notazione. Tali errori quindi non sono stati provocati da una mancanza di conoscenza, ma piuttosto dalla “stranezza” della richiesta, avendola ben compresa. In alcune risposte si nota tale difficoltà, legata anche alla scelta di chi ha rappresentato unicamente parti del grafico e non è riuscito a unire tali parti. Il motivo di ciò si può riscontrare ad esempio nel fatto che spesso l’approccio grafico al concetto di limite avviene mediante grafici di funzioni note. In questo caso, inoltre, gli studenti non si trovavano nemmeno di fronte a un grafico già pronto, come nell’esercizio precedente, ma dovevano pensare in prima persona al grafico di una particolare funzione. Nei grafici 13 e 14 sono riportati gli errori più frequenti, si può notare che la maggior parte coincide proprio con le richieste più inconsuete.

Grafico 13

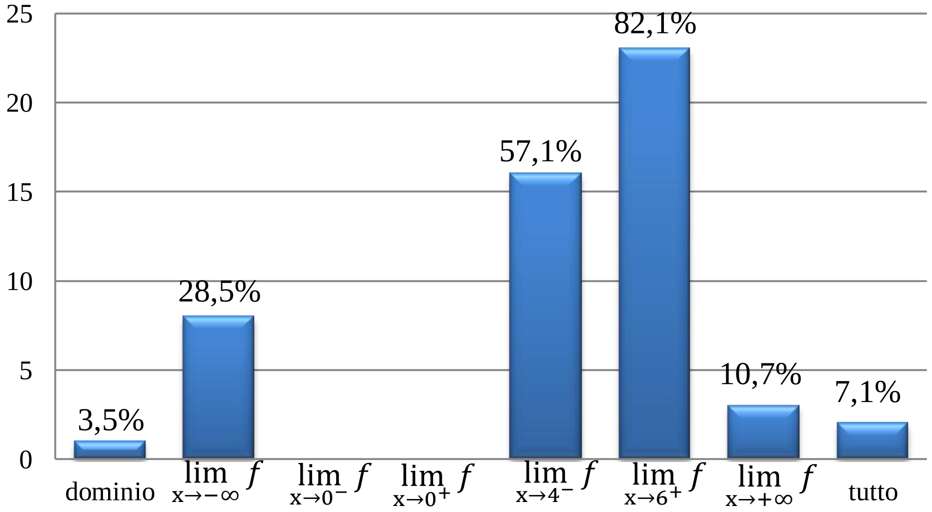
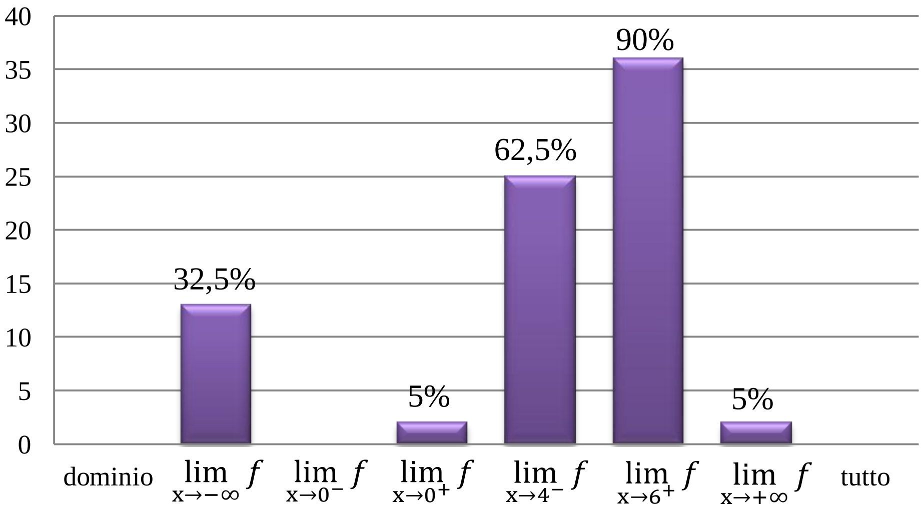


Grafico 14



Ecco due esempi di grafici di funzioni "belle".

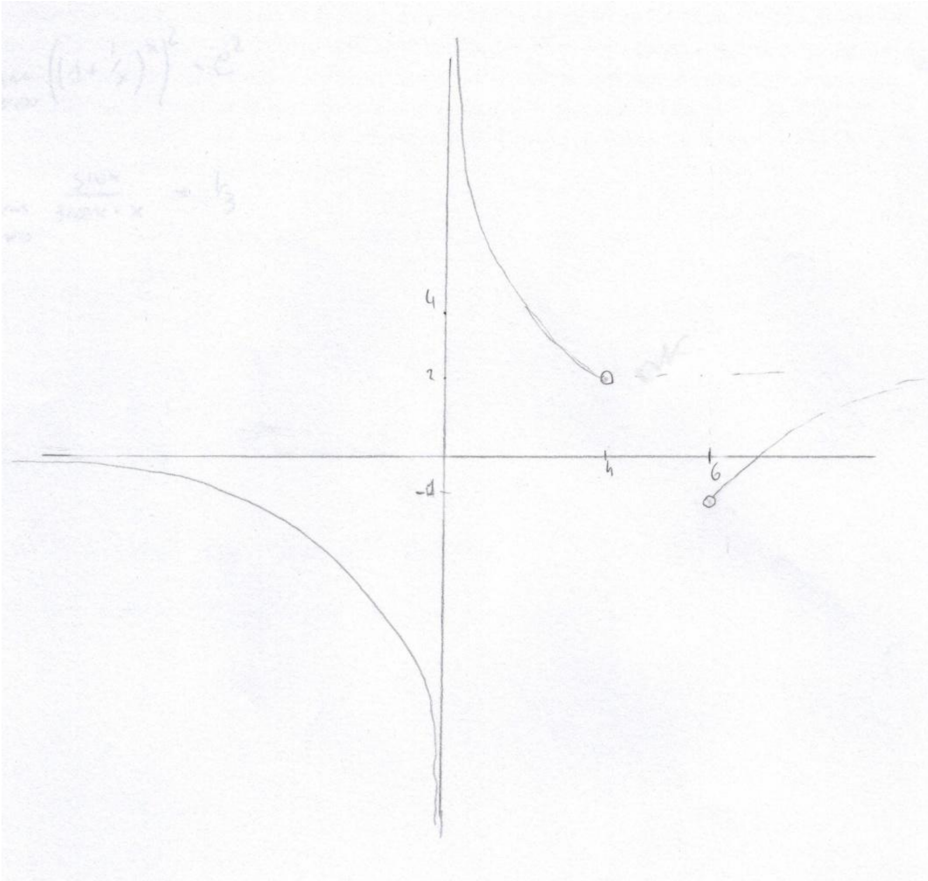


Figura 3

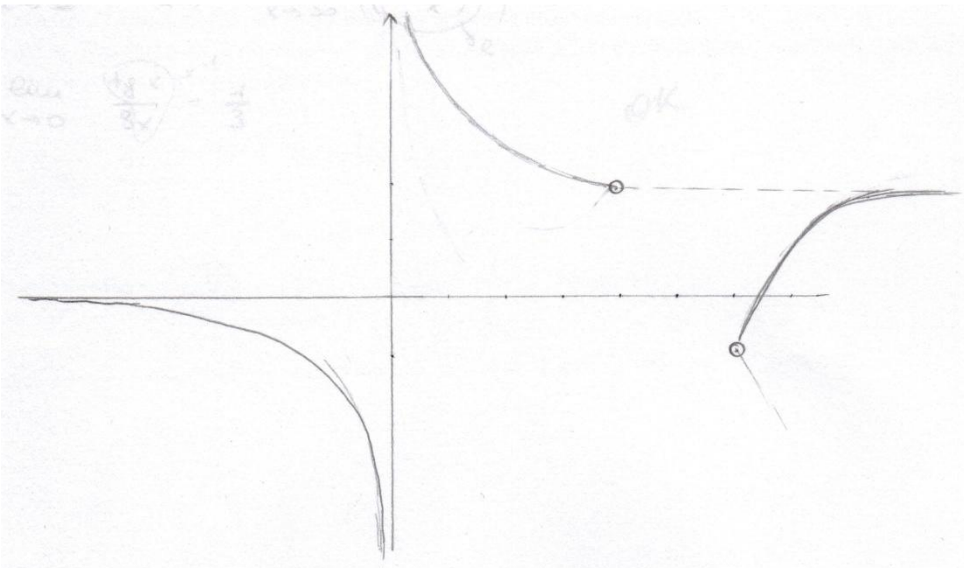


Figura 4

Le differenze tra studenti 1 e 2 nelle tipologie di errori non sono particolarmente significative.

3.4 Misura e approssimazioni: la IV domanda

Nel primo capitolo è stato osservato come le problematiche relative al concetto di limite nascano e si intreccino con quelle relative alla misura di aree e lunghezze e siano anche legate al rapporto tra continuo (la geometria) e discreto (l’aritmetica). Generalmente nella trattazione scolastica dei limiti non si accenna a tali problematiche, si richiamano problemi di misura unicamente nel momento in cui si parla di integrali e quindi di misura di aree, ma ciò avviene successivamente alla trattazione dei limiti. Potrebbe essere utile invece introdurre, anche solo intuitivamente, problemi di analisi infinitesimale proprio a partire da problemi legati alla misura dell’area di figure “irregolari” o lunghezze di segmenti “curvilinei”, proponendo vari metodi di approssimazione. Si tratta di attività ricche di stimoli per la loro concretezza e la possibilità di un continuo passaggio dal registro numerico a quello grafico.
Bisogna considerare, però, che il problema della misura è complesso, vanno infatti distinti un significato “fisico” del termine ed uno matematico, la possibilità teorica di misurare ad esempio un’area irregolare risulta diversa dalla effettiva fattibilità pratica. L’operazione di misura nel suo significato fisico è legata alla sensibilità di uno strumento che “misura” e quindi le misure fisiche sono necessariamente soggette ad incertezze; da un punto di vista matematico la misura è una funzione che ad una figura, considerata misurabile sotto opportune ipotesi, associa un numero reale; l’unicità, più che l’esistenza, caratterizza la misura matematica rispetto a quella fisica. Brousseau scrive:

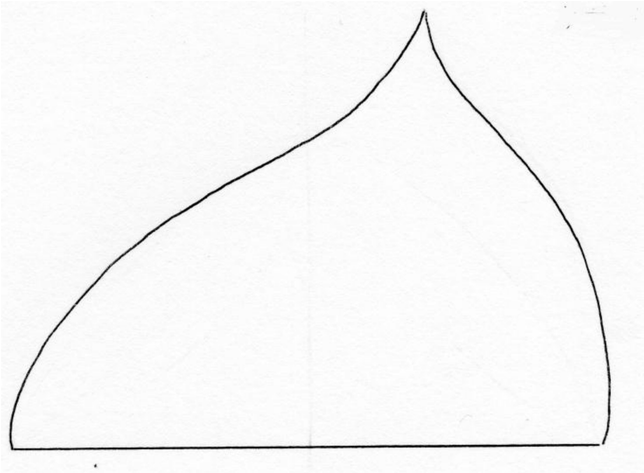
Riteniamo che per concepire una misura bisogna che vi siano almeno tre nozioni: la prima per descrivere la cosa da misurare, la seconda per descrivere la struttura numerica che misura la cosa, la terza descrive il mezzo di far corrispondere un oggetto alla misura. Le tre nozioni di base non sono indipendenti. […] La storia mostra come è stato necessario separare progressivamente e perfezionare alternativamente o congiuntamente l’una o l’altra di queste nozioni.

(Brousseau, 2000)

Nel questionario si è scelto di inserire una domanda che fosse inerente al tema della misura, in particolare la domanda quattro chiede:

L'ingegnere Bianchi deve misurare la lunghezza del contorno di una finestra, dalla forma

particolare, per poter far costruire l'intelaiatura (qui sotto è riportata una rappresentazione in scala di tale finestra). Vista la crisi egli ha a disposizione unicamente delle righe rigide, non flessibili. Per questo si trova in difficoltà e non sa come fare. Riusciresti ad aiutarlo? Prova a misurare la lunghezza del contorno di questa finestra:



Scala 1:20

Come pensi di fare? Spiega il procedimento che hai scelto.

n.b. hai a disposizione solo un righello e devi misurare nel modo più preciso possibile.

L’obiettivo era analizzare l’approccio scelto dagli studenti per confrontarsi con un problema di misura che non poteva essere risolto per via elementare, avendo già alle spalle una trattazione del concetto di limite e quindi in teoria idee anche a proposito del concetto di approssimazione. Nell’analisi delle risposte si è considerato anche che gli studenti 2 stavano trattando in classe gli integrali al momento della somministrazione del questionario e quindi avevano già incontrato problemi legati alla misura di aree. In realtà la domanda 4 è stata quella che ha generato maggiore imbarazzo in aula durante la prova (oltre all’ultima domanda), probabilmente perché agli occhi degli studenti non esistevano legami evidenti con i limiti e inoltre risultava una domanda atipica rispetto a quelle abitualmente svolte: il calcolo risulta marginale rispetto all’argomentazione, si richiede di immaginare uno sviluppo dinamico della situazione e inoltre è necessario fare uso di approssimazioni.

Come prima cosa si è cercato di distinguere risposte pertinenti da risposte non pertinenti, nel senso che vari studenti hanno cercato metodi sia per misurare l’area della figura racchiusa all’interno della finestra, sia hanno dato risposte “tecniche”, ad esempio affermando che sarebbe utile avere un filo di lana, oppure costruire un’intelaiatura da misurare, sia fornendo semplicemente un numero; in tutti questi casi non si è risposto alla reale domanda proposta (nei grafici 1 e 2 sono rappresentate le percentuali di studenti che hanno risposto nei vari modi).

Grafico 1- Studenti 1

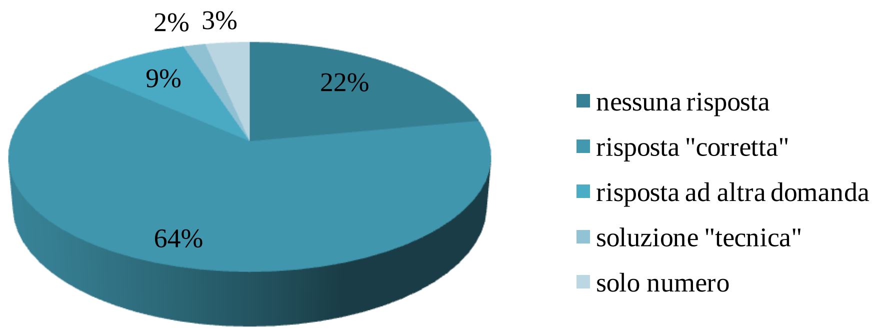
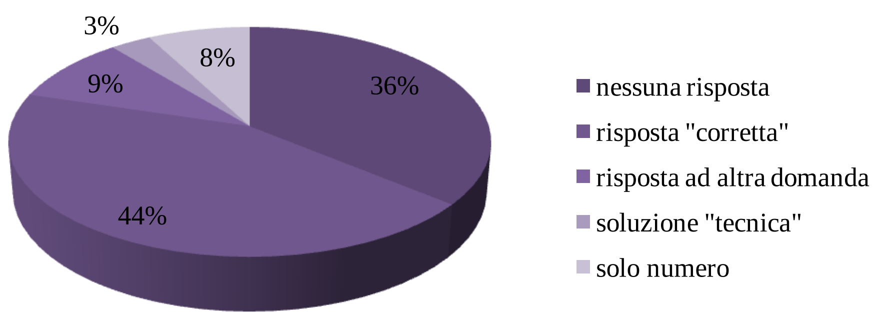


Grafico 2 - Studenti 2



Dai due grafici si può osservare che in generale gli studenti 2 scelgono in maggior numero di non rispondere alla domanda, mostrando in questo modo maggiore imbarazzo, sebbene si siano già trovati di fronte a problemi di misura. L'aver già trattato situazioni di misura di aree può essere stato un ostacolo per gli studenti, avendo a che fare in questo contesto con misure di lunghezze; si è potuto notare questo anche in tutti gli alunni che hanno cercato metodi per misurare l'area della figura, essi hanno infatti tutti ripreso la classica introduzione agli integrali definiti, presente anche sui manuali scolastici, considerando somme superiori e inferiori. Con "risposta corretta" si sono intese tutte le risposte pertinenti, ossia risposte inerenti alla misura della lunghezza del bordo della finestra. Si è cercato in primo luogo di classificare i vari metodi esposti dagli studenti, nei grafici 3 e 4 sono proposte anche le percentuali degli studenti che hanno risposto "correttamente" e hanno scelto un particolare metodo.

Grafico 3 - Studenti 1

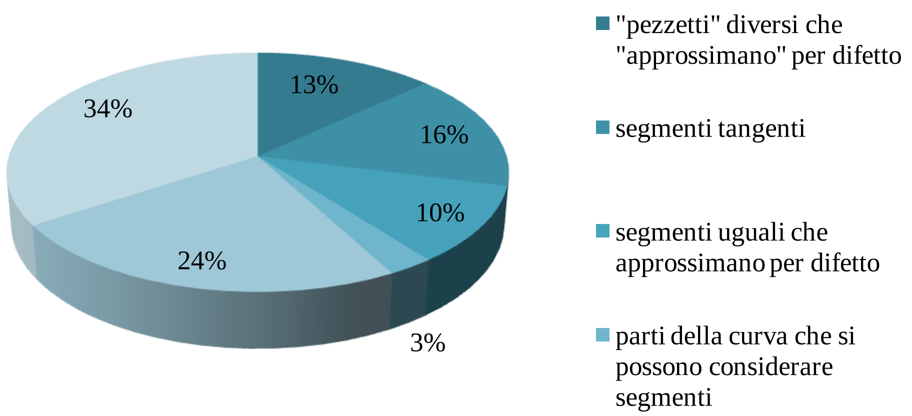
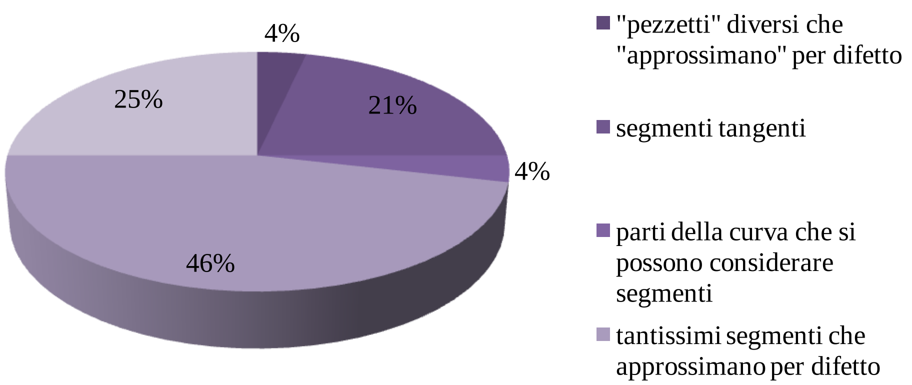


Grafico 4 - Studenti 2



In generale tutti gli studenti hanno risposto affermando che si potrebbe trovare la misura della lunghezza del bordo della finestra sommando le misure delle lunghezze di particolari segmenti; la scelta di questi segmenti ha differenziato le varie risposte: vari studenti hanno scelto segmenti aventi i vertici sulla curva e tutti della stessa lunghezza, altri hanno scelto tanti segmenti "cortissimi" in modo da approssimare la curva, altri ancora hanno cercato di considerare figure geometriche note che assomigliassero alla figura della finestra e da lì hanno calcolato il perimetro, ecc. (in generale le varie tipologie sono riprese nei grafici sopra).

Cercando di entrare più nello specifico delle singole tipologie di risposta si può osservare che vari studenti hanno scelto di utilizzare segmenti tangenti alla curva per approssimare tratti di linea; sebbene non risulti chiaro dalle risposte in che modo si scelgano tali segmenti, può risultare una buona intuizione tra gli studenti 1, che non hanno ancora trattato il concetto di derivata. L’altra tipologia di risposte su cui vorrei soffermarmi brevemente è quella legata all’uso di figure geometriche note. I problemi legati alla misura solitamente, con qualche eccezione nella scuola primaria, si riducono al calcolo di perimetri, di aree o di volumi di figure particolari attraverso formule specifiche. Questa impostazione alimenta negli allievi la convinzione che ogni problema matematico si possa risolvere con una formula o un algoritmo particolare e che non sia sempre lecito usare metodi di approssimazione. Questa convinzione risulta fortemente limitativa e può costituire un ostacolo per l’apprendimento del concetto di limite e di tutta l’analisi infinitesimale. Tale impostazione si può notare nelle risposte di vari studenti che cercano proprio di ricondursi ai perimetri di figure note come triangoli o rettangoli. Molti tra essi cercano di usare teoremi conosciuti per ricavare le misure delle lunghezze dei segmenti piuttosto di usare direttamente il righello, essi probabilmente hanno sia il bisogno di ricondursi a situazioni già affrontate in precedenza sia la convinzione che ciò che si ottiene con un teorema matematico sia più “preciso” e “corretto” di ciò che si ottiene con una misurazione fisica.

Vorrei infine osservare che in varie risposte gli studenti hanno aggiunto al proprio metodo frasi del tipo “altrimenti si potrebbe fare con i limiti”, oppure hanno scritto che “l’uso dei limiti avrebbe agevolato la risoluzione del problema”, altri addirittura hanno aggiunto calcoli di limiti non pertinenti con la domanda stessa. Presumibilmente tali studenti hanno ritenuto che se la domanda era stata proposta all’interno di un questionario “sui limiti” qualcosa con i limiti doveva c’entrare, siamo ancora in presenza di clausole di un contratto didattico implicito.

In generale inoltre si è osservata la consapevolezza della necessità di approssimazioni: in quasi tutte le risposte sono presenti termini come “approssimativamente” o “circa”, spesso inoltre si è sottolineato se la misura era per eccesso o per difetto. Nella maggior parte dei casi oltre ad una argomentazione verbale gli studenti hanno cercato di

rappresentare anche graficamente la propria soluzione. Ad ogni modo la maggior parte delle risposte presenta un uso pressappochista di termini specifici, che può nascondere anche errori concettuali. Da notare inoltre come solo il 24% degli studenti 1 e il 4% degli studenti 2 risponde interamente alla domanda fornendo una misura approssimata, in generale l’ attenzione in queste risposte è stata posta sul metodo.
Un ulteriore fattore che stupisce tra gli studenti che rispondono in maniera più o meno “corretta” è l’unicità della soluzione data, essi infatti in generale non sottolineano il possibile miglioramento del risultato. Solo pochi studenti evidenziano come il risultato approssimato possa divenire sempre migliore immaginando “raffinamenti” del metodo di misura scelto (il 16% degli studenti 1 e il 21% degli studenti 2). Due risposte tra quelle date dagli studenti 2 risultano degne di nota rispetto a quelle dei coetanei: in esse infatti si è osservato come le lunghezze dei “segmenti” considerati dovrebbero tendere a zero per poter avere una misura precisa.
In conclusione, in generale, non sono presenti risposte brillanti; in seguito alla trattazione dei limiti, solo pochi studenti hanno sottolineato la possibilità di migliorare l’approssimazione, in generale si è fornito un unico risultato-metodo; probabilmente gli stessi studenti avrebbero risposto in modo analogo anche qualche anno fa. Interessanti a questo proposito risultano varie considerazioni presenti in alcune ricerche di didattica della matematica, in cui si proponevano a studenti di vari livelli scolastici domande simili alla quattro, da cui si è presa ispirazione, esposte in (Alberti, Andriani, Bedulli, Dallanoce, Falcade, Foglia, Gregori, Grugnetti, Marchini, Molinari, Pezzi, Rizza, Valenti, 2000).

3.5 Il calcolo: la VI domanda

Come si è potuto intravedere già dalla trattazione nei libri di testo e da alcune risposte alle prime domande, in generale si fa riferimento prevalentemente al registro algebrico. Nel questionario è stata quindi inserita una domanda che potesse valutare la dimestichezza degli studenti con il calcolo di alcuni limiti. A tal proposito si sono ripresi due esercizi dal manuale *Lineamenti di analisi e calcolo combinatorio* di N. Dodero, P. Baroncini, R. Manfredi che non presentassero particolari difficoltà “tecniche”:

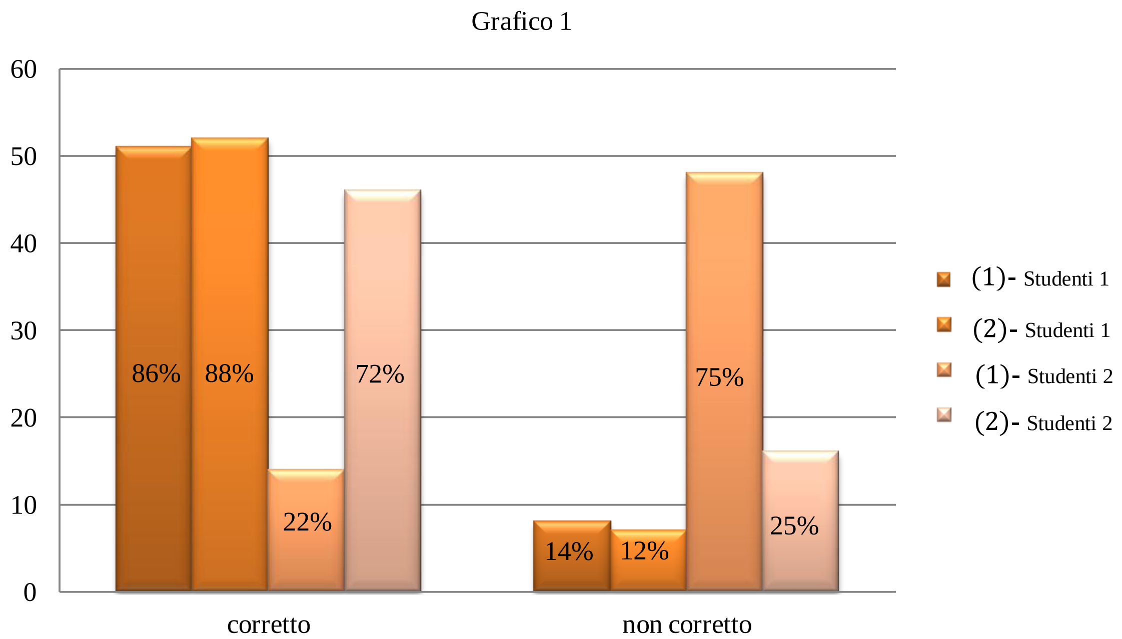
Calcolare i seguenti limiti:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{2x} \quad ; \quad \lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{3x}$$

(1) (2)

Preliminarmente si è ipotizzato che gli studenti avrebbero incontrato minori difficoltà, rispetto alle precedenti domande, e sarebbero stati in grado di eseguire operazioni algebriche standard per trovare il limite di funzioni, vista la maggiore abitudine a risolvere questo tipo di esercizi.

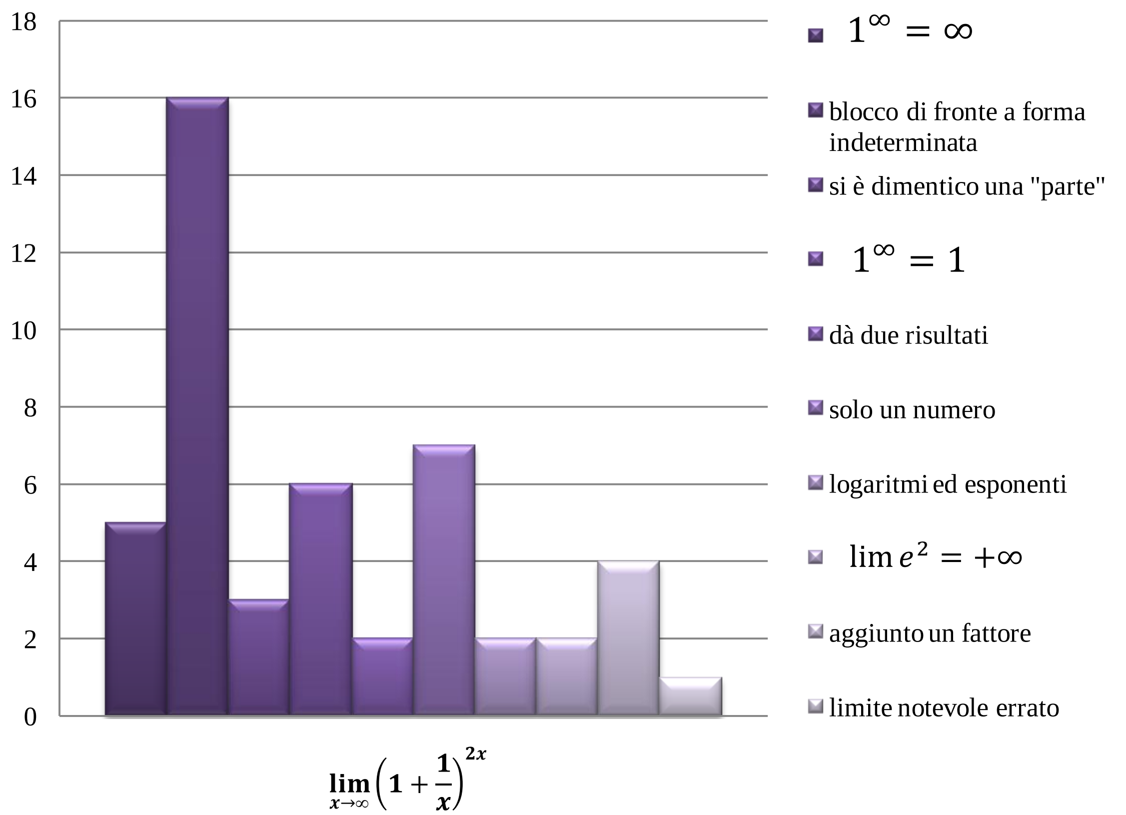
Come prima cosa ho scelto di evidenziare le percentuali di risposte corrette sia tra gli studenti 1 sia tra gli studenti 2, come riportato nel grafico 1.

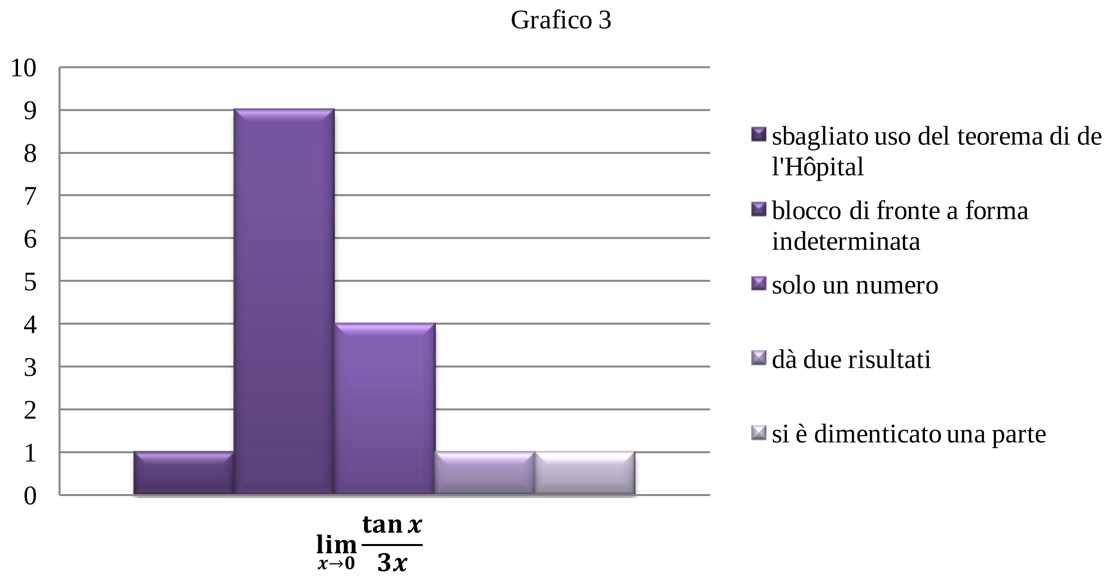


Dal grafico si può osservare che in generale gli studenti 1 hanno avuto meno difficoltà rispetto ai colleghi che avevano trattato i limiti l'anno precedente, soprattutto in merito al primo limite da calcolare, quello che ha a che fare con il numero e. Inoltre bisogna anche sottolineare che nessuno degli studenti 1 ha lasciato bianco il foglio, mentre 2 studenti 2 hanno scelto di non rispondere alla domanda.

Solo da questo semplice dato emerge quanto in generale l'abilità e le tecniche degli studenti nei calcoli algebrici dei limiti, se non accompagnate da una più profonda comprensione, anche solo a distanza di meno di un anno possono essere perse e dimenticate. Gli studenti 1 che hanno risposto correttamente, in generale, hanno tutti usato tecniche legate all'uso dei cosiddetti limiti notevoli, sia per il calcolo di (1) sia per (2). Gli studenti 2 che hanno risposto correttamente invece, probabilmente non ricordando perfettamente tali limiti notevoli, che solitamente vengono trasmessi come puri risultati da memorizzare, si sono appellati ad altri metodi, come ad esempio al teorema di de l'Hôpital (appena trattato in classe, per il calcolo di (2)), all'uso di logaritmi (per (1)) oppure anche all'osservazione che in un intorno di 0 $\tan x \sim x$. Più interessanti sono gli errori che hanno portato a risposte non corrette. Tra gli studenti 1 la causa maggiore di errore è stata la disattenzione, nel senso che spesso gli studenti hanno dimenticato di scrivere fattori moltiplicativi; alcune risposte invece sono apparse incomplete: gli studenti di fronte ad una "forma indeterminata" si sono bloccati e non hanno proseguito i calcoli. Gli studenti 2 invece presentano un ventaglio più ampio di errori (riportati nei grafici 2 e 3).

Grafico 2





Anche tra gli studenti 2 si può osservare che nella maggior parte dei casi di fronte ad una forma indeterminata non si è proseguito, non sapendo cosa fare. Ad ogni modo più di uno studente ha risposto in (1) ∞ o 1 dato che $1^\infty = \infty$ o $1^\infty = 1$, oppure ha risposto sia ∞ sia 1, dando due risposte, non avendo nemmeno ben compreso cosa in realtà significhi determinare il limite di una funzione. Con “solo un numero” si sono indicate quelle risposte che hanno fornito semplicemente solo un numero, sbagliato, senza scrivere nient’altro.

3.6 Successioni, Progressioni, Serie

Successioni, progressioni e serie sono argomenti strettamente legati ai concetti di limite e di infinito. In Andriani, Dallanoce, Falcade, Foglia, Gregori, Grugnetti, Maffini, Marchini, Rizza, Vannucci (2005) si sottolinea più volte come ad esempio l’argomento delle progressioni geometriche possa costituire una delle prime occasioni di approccio ad un processo infinito e all’idea di limite. Nel paragrafo successivo si riprenderanno alcune considerazioni generali, rimandando però ad un qualsiasi manuale di analisi per maggiori approfondimenti tecnici.

3.6.1 Un breve ripasso

Si può affermare che una successione di (o in) un insieme A è una funzione avente come dominio l'insieme $\mathbb{N}$ dei numeri naturali (eventualmente privato di un insieme finito di elementi) e come codominio l'insieme A. Spesso le successioni sono rappresentate con le immagini dei primi elementi, ma queste rappresentazioni contrastano con la presentazione di successioni come funzioni, confondendo la successione (funzione) con l'insieme immagine della funzione stessa. La maggiore difficoltà che forse suggerisce di utilizzare questo tipo di linguaggio è il conflitto tra infinito in atto e in potenza, di cui si è già parlato in precedenza. Una successione può essere convergente (nel caso in cui abbia un limite finito), divergente (se ha limite infinito) o indeterminata. Se ad esempio si considerano le due successioni di reali $(2^n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $\left(\frac{n}{n+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ si può osservare che: $\lim_{n\to+\infty} 2^n = +\infty$ e $\lim_{n\to+\infty} \frac{n}{n+1} = 1$. Cosa significano queste due scritture? Nel primo caso si può illustrare il significato affermando che, fissato un numero $M > 0$, da un certo punto in poi i termini della successione diventano maggiori di M; nel secondo caso si può dire che i termini della successione diventano sempre più vicini ad 1, ossia, fissato un numero $\varepsilon > 0$, da un certo punto in poi i termini della successione differiscono da 1 meno di ε. Questa situazione "da un certo punto in poi" è la chiave di volta per comprendere come l'infinito in atto sia indispensabile per il concetto di limite, anche se la presentazione a parole cerca di ricondurre il problema all'infinito in potenza: si consideri la successione $\left(\frac{n}{n+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ che ha limite 1, si sostituiscano i suoi primi 5 termini con quelli dell'altra successione, costruendo così una nuova successione, il fatto che ci interessa "da un certo punto in poi" la trasformazione non altera il limite; ciò succede anche se si sostituiscono i primi 10^{1000} termini. Per il limite ciò che interessa è la "coda" della successione, che si riesce ad afferrare solo considerando la successione come funzione e quindi come insieme di infinite coppie ordinate, insieme da considerarsi infinito in atto.

Particolari successioni sono le progressioni geometriche, successioni di numeri reali positivi tali che il rapporto fra un termine e il suo precedente è costante, tale rapporto costante viene detto ragione della progressione geometrica; nulla, se non una prassi consolidata, vieta di considerare anche progressioni con termini negativi (con ragione positiva e primo termine negativo) o a segni alternati (con ragione negativa). I termini della più semplice progressione geometrica di ragione a sono pertanto:

$$1, a, a^2, a^3, a^4, \dots$$

I primi termini di una progressione geometrica di ragione a e primo termine b sono invece:

$$b, ba, ba^2, ba^3, ba^4, \ldots$$

Le progressioni geometriche sono, come è noto, divergenti se la ragione è maggiore di 1, infinitesime (tendenti a 0) se la ragione è strettamente compresa fra -1 e 1, indeterminate se la ragione è minore o uguale a -1[53].

Consideriamo ora per comodità solo progressioni di ragione positiva. La somma dei primi n termini di una semplice progressione geometrica non è altro che $S_n = 1 + a + a^2 + a^3 + a^4 + \cdots + a^{n-1}$; se $a = 1$ si ha immediatamente che $S_n = n$, mentre se $a \neq 1$ ed è positivo, con alcuni semplici passaggi, si ottiene:

$$S_n = \frac{1 - a^n}{1 - a}.$$

Analogamente la somma dei primi n termini di una progressione di primo termine b e ragione a è:

$$S_n = b\frac{1 - a^n}{1 - a}.$$

La successione di termine generale S_n è detta successione delle somme parziali o serie geometrica. Si tratta di una successione crescente, che risulta divergente nel caso $a > 1$, mentre risulta convergente se $0 < a < 1$. In questo caso il limite, come si intuisce considerando che il termine a^n tende a 0, è:

$$S = b\frac{1}{1 - a} \ (0 < a < 1).$$

Tale limite viene anche detto somma della serie e indicato con il simbolo $\sum_{n=0}^{\infty} a^n$ (scrittura compatta di quello che molti testi (impropriamente) indicano come la "somma" di infiniti addendi)[54]. Una delle difficoltà messe in evidenza in tali contesti si

---

[53] Non si considera il caso di ragione uguale a 1 in quanto la progressione si riduce ad una successione costante.

[54] Il concetto di serie risulta di fondamentale importanza nella gestione concettuale di numerose situazioni problematiche. Nonostante questo esiste un non univoco riconoscimento del concetto, a causa della complessità e delle diverse sfaccettature del concetto stesso. Alcuni utilizzano il termine serie per indicare in termini formali una somma di infiniti termini. Tale proposta presenta diverse incongruenze, ad esempio non è ben chiaro come si debba effettuare tale somma o a quale operazione di addizione faccia riferimento. Tutti i problemi sono riconducibili al fatto che ci si muove in un ambito infinito. Un modo per ovviare al problema è ricondurci ad un processo di addizione al finito, un po' come abbiamo inteso in questa stessa breve trattazione. La definizione di serie come successione ha alcune particolarità: ad esempio i termini della serie sono effettive somme, la serie come oggetto matematico ha un suo interesse indipendente da condizioni di convergenza, divergenza o di indeterminatezza della successione delle

riferisce alla naturale percezione che un processo potenzialmente infinito non possa avere un risultato finito. Nel caso di una serie geometrica di ragione compresa fra 0 e 1 si realizza quindi una situazione del tutto anti-intuitiva: "sommando" infiniti addendi il "risultato" è un numero.

Le progressioni geometriche possono essere viste anche in chiave geometrica come risultato della successiva applicazione di un'omotetia di rapporto fissato ad una figura iniziale. Una visualizzazione può favorire la formazione di un'immagine del concetto di successione convergente o divergente più accessibile rispetto a quella che può essere elaborata operando all'interno del solo registro numerico. Esistono vari esempi di rappresentazioni grafiche di serie geometriche, in particolare della serie di ragione $\frac{1}{2}$: molte costruzioni si basano sul progressivo riempimento di una figura data o sul ricoprimento di una linea.

3.6.2 La VII domanda

Non sempre gli studenti incontrano tali tematiche nel proprio percorso scolastico e anche nei casi di una trattazione in aula questa spesso si riduce a una memorizzazione di regole per determinare se una successione-serie è convergente o divergente, a discapito di una reale comprensione. Nel questionario si è scelto di inserire una domanda che avesse a che fare con tali problematiche. Il testo è stato ispirato dal paradosso di Zenone (già trattato nel primo capitolo) e da numerosi esempi esposti in Bisso, Foglia, Grugnetti, Maffini, Marchini, Rapuano, Rizza, Vannucci (2009). L'obiettivo era

---

somme parziali, l'idea di processo legata al continuare ad aggiungere un termine della successione alla somma dei termini precedenti viene attualizzato nella successione delle somme parziali, riportando al concetto di limite la successiva condizione legata all'infinito, conseguentemente c'è la possibilità di passare dal processo all'oggetto successione e quindi di riportare al concetto di limite la gestione di questa somma infinita. Ad ogni modo la terminologia utilizzata è riconosciuta da diversi autori come "infelice" o "inadeguata", ad esempio Prodi scrive:

26.3 Osservazione. La terminologia che si è formata riguardo alle serie non è la più chiara e coerente che si potrebbe desiderare; d'altra parte, essa è ormai così radicata nell'uso, che non è il caso di tentare di cambiarla. Così il numero (eventualmente uguale a $\pm\infty$) $s = \lim_{n\to\infty} S_n$ viene detto somma della serie, anziché limite della serie o, più chiaramente,, somma (dei termini) della successione. I simboli

$$\sum_0^\infty a_n, \text{ oppure } a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots$$

Vengono poi usati indifferentemente sia per indicare la serie, cioè – come abbiamo detto- la successione delle somme parziali, sia la somma della serie. Comunque, questa imperfezione della terminologia non porta inconvenienti, una volta che se ne sia consapevoli.

(Prodi, 1970)

Le scritture riprese anche poc'anzi da Prodi rischiano di divenire fuorvianti soprattutto se, come succede solitamente, non è noto il comportamento della serie: se la serie fosse divergente o indeterminata non sarebbe possibile associare un significato alle due scritture.

analizzare i metodi usati dagli studenti per rispondere alla domanda, osservando in particolare se è presente una qualche necessità di formalizzazione.

Marco è un ragazzo di 17 anni di Milano. Il suo sogno più grande è comprare il nuovo MacBook Pro di Apple. I suoi genitori, però, sono contrari all'acquisto, dato il prezzo dell'articolo. Infatti esso costa ben 2000 euro. Marco è un ragazzo intraprendente e decide quindi di chiedere i soldi ai nonni. Il nonno, però, è un anziano che ama gli indovinelli e le sfide; dice al nipote di accettare l'offerta, ma ad una condizione: egli non avrà tutti i soldi subito, ma riceverà 1000 euro subito, 500 euro dopo quindici giorni e, in seguito, ogni 15 giorni riceverà la metà dei soldi avuti la volta prima, inoltre se deciderà di non comprare l'articolo scelto dovrà ridare i soldi al nonno. Nonostante questa clausola Marco accetta la proposta del nonno.
Secondo te il ragazzo ha fatto bene ad accettare? Riuscirà a comprare il nuovo MacBook Pro? Scrivi in dettaglio i tuoi calcoli e la tua spiegazione.

Nel problema i soldi che Marco riesce, poco alla volta, ad ottenere dal nonno costituiscono una successione i cui termini sono 1000, 1000+500, 1000+500+250,… Si tratta di una serie geometrica di ragione $\frac{1}{2}$ e primo termine 1000. La successione ha come termine generale $S_n = 2000\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right)$, è convergente ed ha limite 2000. Questo significa che da un punto di vista matematico Marco non arriverà ad ottenere i soldi necessari per acquistare il MacBook Pro poiché gli occorrerebbero infiniti anni. Tuttavia, da un punto di vista realistico e pratico, l’acquisto risulta possibile sia grazie ad una piccolissima aggiunta di denaro, che Marco potrebbe riuscire ad ottenere in un altro modo, sia con un piccolissimo sconto del venditore; ad esempio dopo 120 giorni Marco avrà ottenuto 1996,09375 euro, dopo 150 giorni 1999,023438 euro, e così via. Alla base di questo ragionamento c’è il concetto di limite: occorre fissare un ε e determinare di conseguenza i giorni dopo i quali la cifra raggiunta differirà da 2000€ meno di ε. Inoltre bisogna anche tenere presente la moneta che si considera, l’euro, che non può essere suddivisa oltre il centesimo; quindi perché la soluzione rimanga realistica è necessario un passaggio dal continuo dei numeri reali al discreto dei centesimi. Un altro concetto implicato nel problema è quello dell’approssimazione e dell’utilizzo di una macchina, ad esempio la calcolatrice.

Passiamo ora all’analisi delle risposte degli studenti. Come già anticipato l’obiettivo era osservare i vari “metodi” usati dagli studenti per rispondere e la loro relazione con le risposte stesse. A questo scopo si è cercato di classificare tali metodi, in particolare si è osservato che in generale gli studenti hanno risposto seguendo tre metodologie: hanno eseguito vari calcoli e in seguito hanno tratto una conclusione da questi conti (nei grafici chiamerò questo metodo “tanti conti”), o hanno cercato di impostare il problema in modo più formale, facendo ricorso alle serie geometriche (nei grafici chiamerò questo metodo “tentativo di formalizzazione corretto”), oppure hanno dato una risposta “intuitiva” nel senso che hanno cercato di argomentare in base a loro idee intuitive circa il problema. Nei grafici 1 e 2 sono riportate le percentuali di risposte rispettivamente per quanto riguarda gli studenti 1 e gli studenti 2.

Grafico 1 - Studenti 1

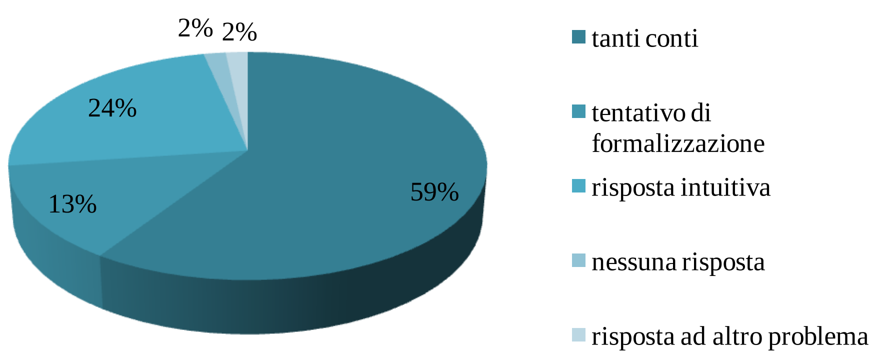
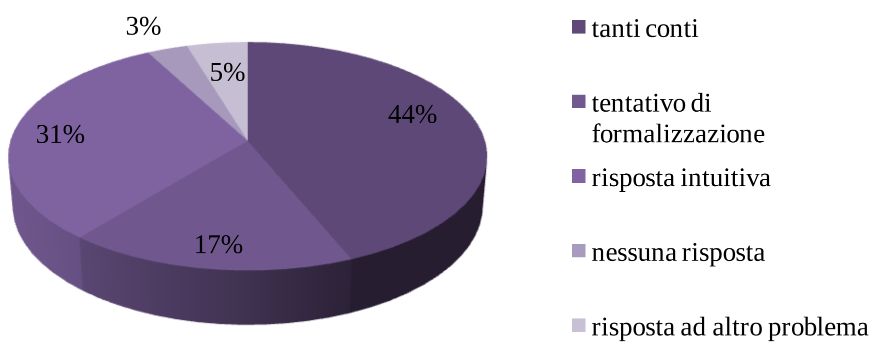


Grafico 2 - Studenti 2



Dai grafici si può osservare che in generale non sono presenti evidenti differenze tra i metodi scelti dagli studenti 1 e 2. Il metodo che ha riscosso più successo è stato quello legato ai calcoli, tra gli studenti 1 è stato ancora maggiormente seguito. Si può notare che un maggior numero di studenti 2 ha cercato una formalizzazione al problema, questo dato però è anche accompagnato da un maggior numero di risposte intuitive tra gli stessi. Va inoltre osservato che al termine di una risposta “intuitiva” o con “tanti conti” circa il 10% degli studenti 1 e il 19% degli studenti 2 ha cercato di aggiungere un ultimo commento che facesse riferimento ai limiti, cercando una funzione che fungesse da modello per il problema, in realtà considerando funzioni non corrette per il problema; alcuni invece, giusto perché per contratto didattico il problema doveva essere inerente ai limiti, hanno aggiunto che si poteva anche rispondere osservando che il limite era zero, non specificando nulla di più. Un altro spunto di riflessione interessante è fornito da alcuni studenti (il 3% tra gli studenti 1 e il 12,5% tra gli studenti 2) che hanno scelto di argomentare la risposta facendo anche uso di grafici, in particolare riportando sull’asse delle ascisse il tempo e sull’asse delle ordinate il denaro accumulato, disegnando il grafico di una funzione continua e facendo osservare che tale funzione all’infinito tendeva a 2000 €; l’idea è sicuramente interessante, va però osservata la facilità degli studenti nel passare dal discreto al continuo.

Con “risposta ad altro problema” si sono indicate le risposte degli studenti che non hanno ben compreso il problema, nel senso che alcuni pensavano che Marco avrebbe ricevuto sempre 500€ o avrebbe ricevuto la metà dei soldi di cui era in possesso ogni volta e, quindi, hanno risposto osservando che in poco tempo avrebbe ottenuto i 2000€ richiesti.

Cerchiamo ora di entrare nel dettaglio delle risposte, facendo riferimento ai singoli metodi utilizzati.

3.6.2.1 Tanti conti

Nei grafici 3, 4 e 5, 6 sono riportate le varie risposte date dagli studenti che hanno scelto di eseguire vari calcoli per risolvere il problema.

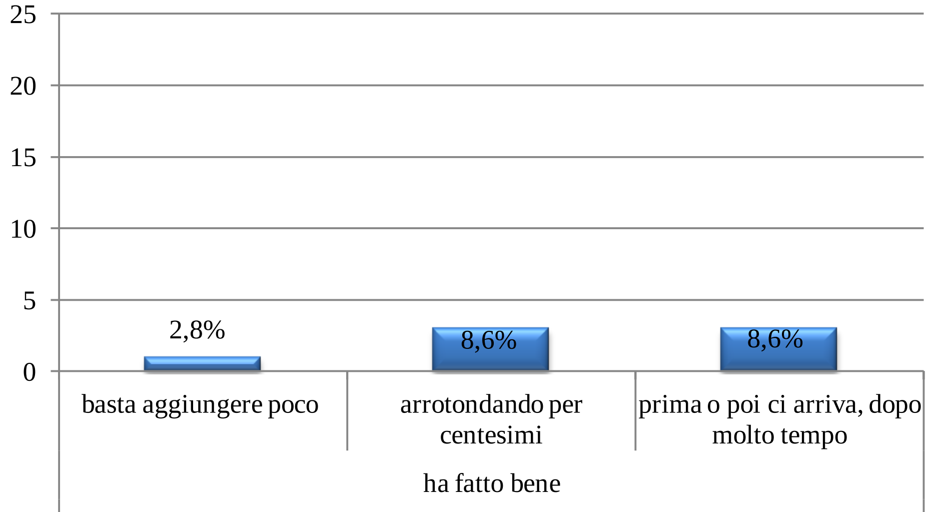


Grafico 3 – Studenti 1

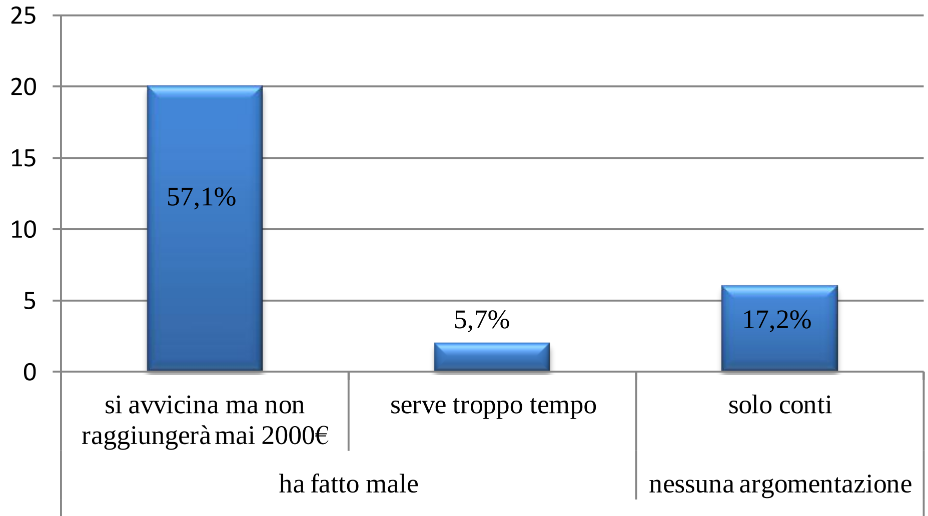


Grafico 4 – Studenti 1

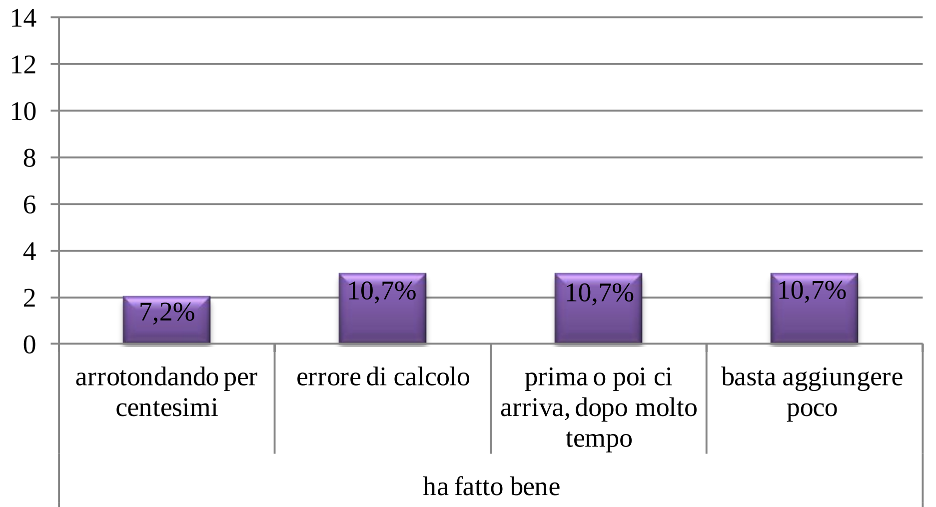


Grafico 5 – Studenti 2

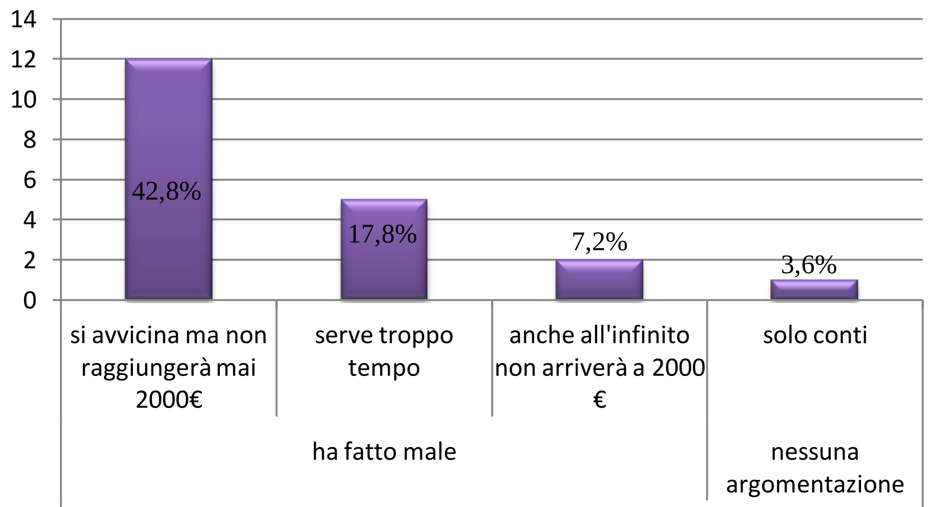


Grafico 6 – Studenti 2

[55]Si può subito osservare che sia tra gli studenti 1 sia tra gli studenti 2 la conclusione più diffusa è stata che Marco non ha fatto bene ad accettare la proposta del nonno perché, osservando i calcoli, "si avvicinerà ad ottenere 2000€, ma non raggiungerà mai questa somma"; questo tipo di risposta evidenzia ancora una volta il carattere dinamico del limite, l'avvicinamento, legato ad un infinito potenziale, a cui rimanda anche la procedura stessa, i continui calcoli. Viene sottolineato il fatto che tale valore non verrà

[55] Prima di tutto va notato che tre studenti 2 hanno dato entrambe le risposte (ha fatto bene e ha fatto male), riflettendo sulla tipologia di problema, nel grafico queste risposte si sono considerate doppie, la percentuale però è stata calcolata sul numero di studenti che hanno scelto di eseguire tanti conti e non sul numero di risposte.

mai raggiunto, addirittura qualche studente 2 risponde che neanche all’infinito si raggiungerà il valore limite. Anche in altre risposte si possono osservare problemi con l’infinito, ad esempio uno studente risponde: “Marco raggiungerà la somma prima o poi essendo i numeri infiniti ma non gli conviene in quanto sarà vecchio”.
Il 5,7% degli studenti 1 e il 17,8% degli studenti 2 che hanno scelto di eseguire vari calcoli hanno concluso sempre che Marco ha fatto male ad accettare, essi però hanno argomentato osservando che dopo n mesi egli avrà ottenuto m euro (con calcoli a supporto) quindi Marco ha fatto male perché ci vorrà troppo tempo, non escludono che otterrà i 2000 euro, ma per motivi di mercato (potrebbe uscire un nuovo modello di computer) o di età del nonno (il nonno potrebbe morire prima di arrivare a 2000€) Marco non ha fatto bene. In questo caso gli studenti hanno riposto, per così dire, troppa fiducia nei calcoli fatti e nei numeri ottenuti, tenendo sempre slegato il problema dalla realtà e considerando anche 10 cifre decimali per i soldi ottenuti dal nonno. Ad ogni modo anche chi ha risposto che Marco ha fatto bene ad accettare l’ha fatto per motivi legati alla necessaria approssimazione dei valori ottenuti dai calcoli, infatti solo l’8,6% degli studenti 1 e il 7,2% degli studenti 2 ha scelto la risposta per questo motivo (va inoltre osservato che gli studenti 2 che hanno fatto questa scelta in realtà hanno dato le due risposte, dicendo precedentemente che i 2000 € in teoria non potrebbero essere raggiunti), altri giustamente hanno fatto osservare che basterebbe poco per ottenere i 2000€, quindi Marco ha fatto bene perché facilmente riuscirà a trovare qualche centesimo. Nessuno studente ha evidenziato la possibile-necessaria approssimazione dei valori ottenuti con la calcolatrice (strumento usato in generale per eseguire i calcoli) e tutti hanno scritto tutte le cifre riportate sullo schermo della calcolatrice. Infine alcuni studenti sono convinti, come altri che avevano risposto che ha fatto male, che i 2000€ siano raggiungibili sebbene si debba aspettare molto tempo, anche infiniti anni come visto nella risposta esposta poco sopra (alcuni danno anche una stima del tempo, sebbene non sia chiaro il metodo seguito per tale calcolo), altri invece semplicemente hanno sbagliato qualche conto e quindi ottengono anche più di 2000 euro come risultato. Bisogna infine osservare che alcuni studenti, dopo aver eseguito parecchi calcoli, non danno nessuna risposta, ciò è indice anche di una scarsa abitudine in generale a “valutare l’andamento di un fenomeno”, essi fanno molti calcoli ma poi hanno difficoltà ad interpretare questi “strani risultati parziali”; questa osservazione è

comune anche ad altre ricerche legate all'argomento, si vedano ad esempio alcuni risultati relativi al RMT[56].

3.6.2.2 Tentativo corretto di formalizzazione

Passiamo ora ad analizzare le risposte date dagli studenti che hanno scelto la via della formalizzazione matematica. Nei grafici 7 e 8 sono riportate tali risposte.

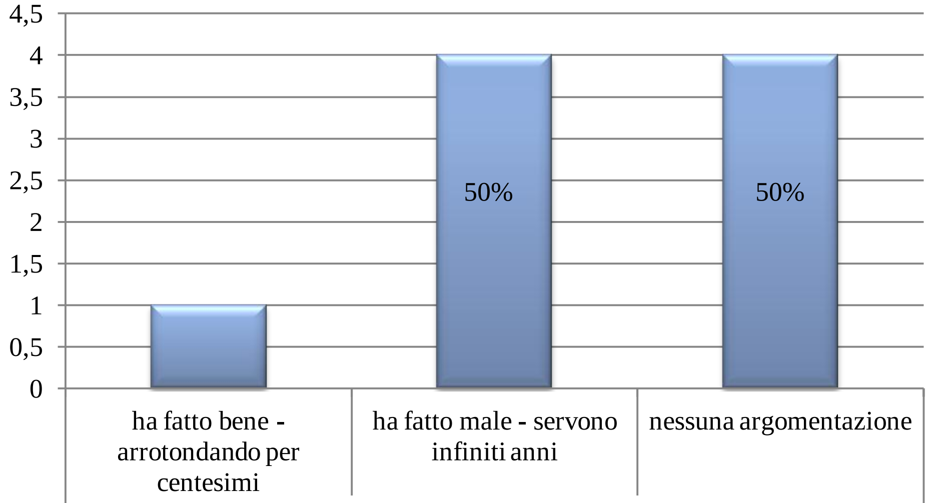


Grafico 7 – Studenti 1

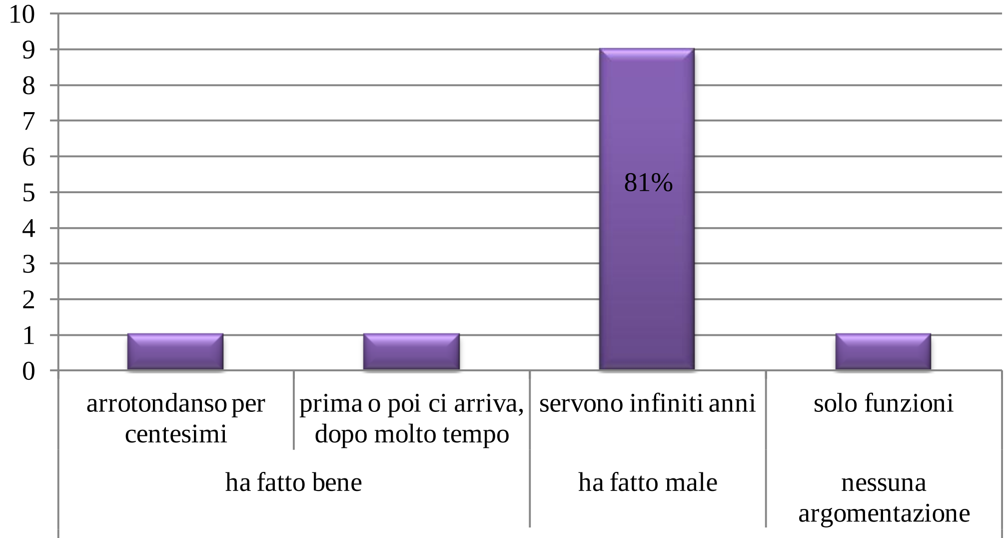


Grafico 8 – Studenti 2

Prima di tutto si può osservare che chi dà una risposta, sia tra gli studenti 1 sia tra gli studenti 2, rimane su un piano teorico e risponde che Marco non ha fatto bene ad accettare poiché servirebbero infiniti anni. Da questo tipo di risposta si nota una

[56] Rally matematico transalpino.

differenza rispetto a chi ha scelto di eseguire i calcoli, oppure, come vedremo, chi ha dato una risposta intuitiva, infatti è sottolineato il carattere attuale del processo infinito. Due studenti che hanno dato tale risposta (uno tra gli studenti 1 e uno tra gli studenti 2) hanno poi anche distinto il piano realistico da quello teorico-matematico, affermando che nella realtà a causa dei centesimi sono necessarie approssimazioni e quindi in realtà Marco ha fatto bene ad accettare. Uno studente tra gli studenti 2 rimane ancora convinto che Marco riesca a raggiungere i 2000€, anche se dopo molto tempo, questo è indice del fatto che spesso gli studenti riescono a "imparare" determinate procedure, ma non comprendono appieno il significato, hanno una comprensione solo parziale del concetto: lo studente in questione aveva infatti formalizzato correttamente il problema, aveva considerato la giusta serie geometrica ed aveva concluso che tale serie era convergente con limite 2000. A conferma di quest'ultima riflessione c'è l'ultimo dato che si può leggere da tali risposte: la metà degli studenti 1 che hanno modellizzato-formalizzato correttamente il problema non ha dato nessuna risposta, ha semplicemente scritto la serie geometrica interessata e ha osservato la sua convergenza, ma non ha concluso se Marco ha fatto bene oppure no.

3.6.2.3 Risposta intuitiva

Consideriamo infine le risposte "intuitive" (grafici 9 e 10-11).

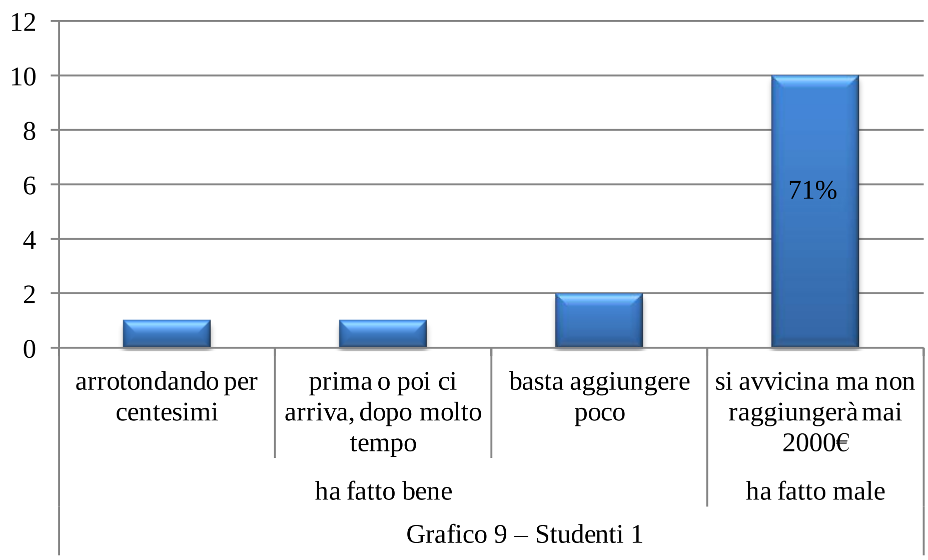


Grafico 9 – Studenti 1

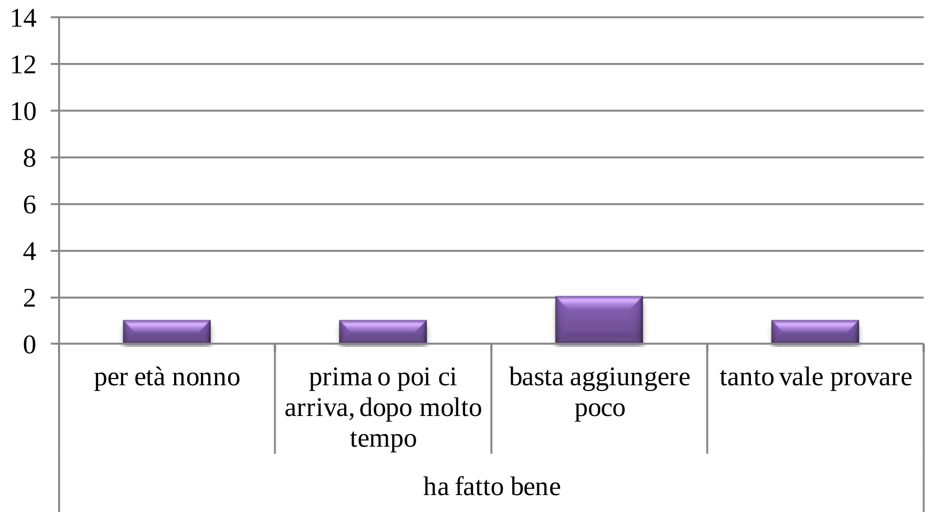


Grafico 10 – Studenti 2

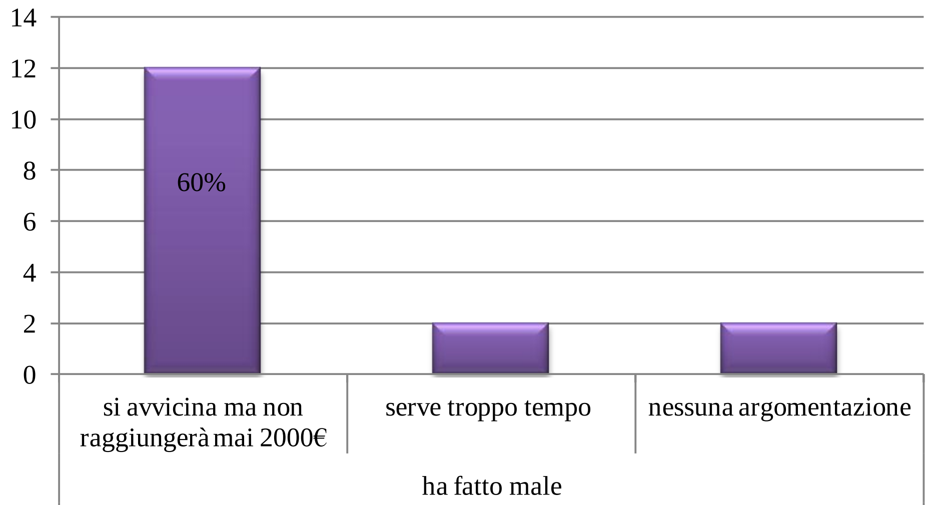


Grafico 11 – Studenti 2

Anche in questo caso la maggior parte degli studenti risponde che Marco ha fatto male in quanto non riuscirà mai a raggiungere 2000€, sebbene si avvicini sempre di più; si ritrova qui, come nelle risposte per mezzo di calcoli, il carattere potenziale dell’infinito legato al processo, che in questi casi spesso entra in conflitto con il valore finito del limite, ad esempio uno studente scrive: “Per me è impossibile arrivare a 2000€ in quanto è un calcolo infinito e il limite tende a $+\infty$”. Molte risposte “intuitive” sono state giustificate da una mancanza di altri mezzi, ad esempio alcuni studenti scrivono che, non avendo a disposizione una calcolatrice, sono costretti a fare un ragionamento intuitivo (anche in questo tipo di risposte è sottolineata l’importanza, la necessità e l’infallibilità della calcolatrice per gli studenti); un altro studente ha scritto che per risolvere il problema servivano le serie geometriche, ma non si ricordava le formule, anche da questa risposta si può osservare il carattere prevalentemente mnemonico che spesso assume l'insegnamento della matematica, inoltre probabilmente siamo ancora in presenza di una clausola del contratto didattico, nel senso che questo studente ritiene di dover risolvere il problema unicamente per mezzo di formule matematiche; infine ancora un altro studente risponde: "avrei dovuto usare le successioni, ma visti i numeri sono andato per tentativi".

3.7 Che cos'è la matematica?

Non esiste una risposta univoca e "corretta" a tale domanda. Ciascuno di noi, con la sua storia personale, i suoi studi e i suoi interessi, si è formato una particolare immagine della matematica ed una particolare idea riguardo agli oggetti matematici. A tal proposito sono stati scritti fiumi di lettere, anche dai più celebri matematici e filosofi di ogni epoca. In questa sede non mi interessa riprendere le principali correnti filosofiche a proposito, l'interesse maggiore è piuttosto indirizzato all'immagine della matematica che uno studente di liceo scientifico (che quindi dovrebbe aver avuto maggiori occasioni di contatto con la matematica) si forma al termine del proprio percorso di studi, in modo da osservare possibili riflessi sull'approccio alla disciplina e alla risoluzione di problemi. A questo scopo si è inserita al termine del questionario la domanda:

Secondo te cos'è la matematica?

Oltre agli aspetti per così dire legati alla disciplina e agli oggetti matematici, bisogna anche considerare che solo il nome "matematica" suscita nelle persone sentimenti contrastanti, ad esempio rispetto, ammirazione o anche timore e repulsione. Preliminarmente si è quindi ipotizzato di ritrovare all'interno delle varie risposte due possibili piani, infatti, presumibilmente, gli studenti avrebbero risposto sia da un punto di vista disciplinare sia da un punto di vista emotivo-motivazionale. Effettivamente questo è successo, anche se non tutti hanno risposto riprendendo entrambi gli ambiti, alcuni hanno considerato unicamente i propri "sentimenti" nei confronti della matematica, mentre altri hanno dato unicamente una risposta "disciplinare". Nell'analisi delle risposte si metteranno in evidenza entrambi i piani.

Va premesso che l'analisi che segue non risulta assolutamente esaustiva della problematica, nasce semplicemente da una curiosità personale che si è pensato di approfondire; tutte le tematiche trattate andrebbero investigate ulteriormente.

3.7.1 Immagine della matematica

Consideriamo prima di tutto il piano disciplinare all’interno delle risposte. Queste ultime risultano molto varie, i termini stessi per indicare cosa sia la matematica sono molteplici, ad esempio scienza, disciplina, strumento, materia scolastica,… e ciascuno di essi ha delle implicazioni epistemologiche; si è cercato quindi di considerare l’idea fondamentale espressa nelle varie risposte per poi classificarle. Nei grafici 1 e 2 sono riportate le tipologie di risposte, le idee fondamentali sono state esposte nella tabella sottostante.

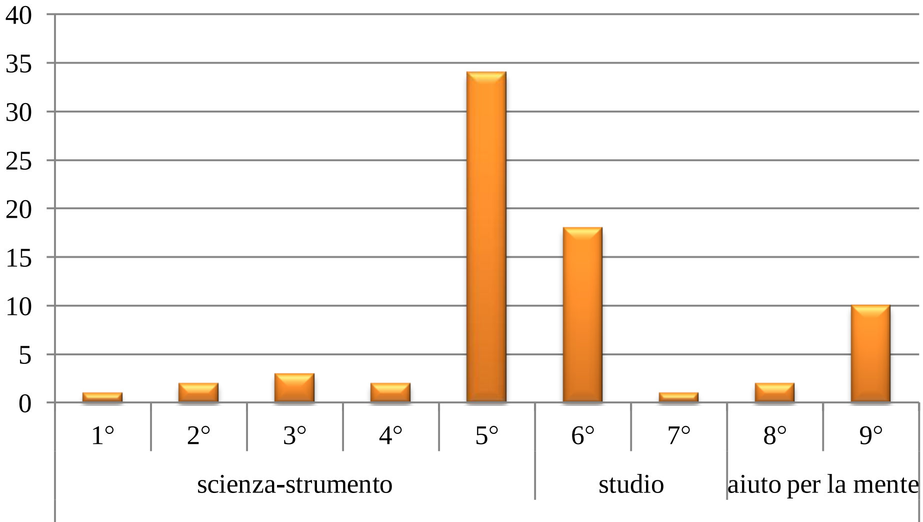


Grafico 1

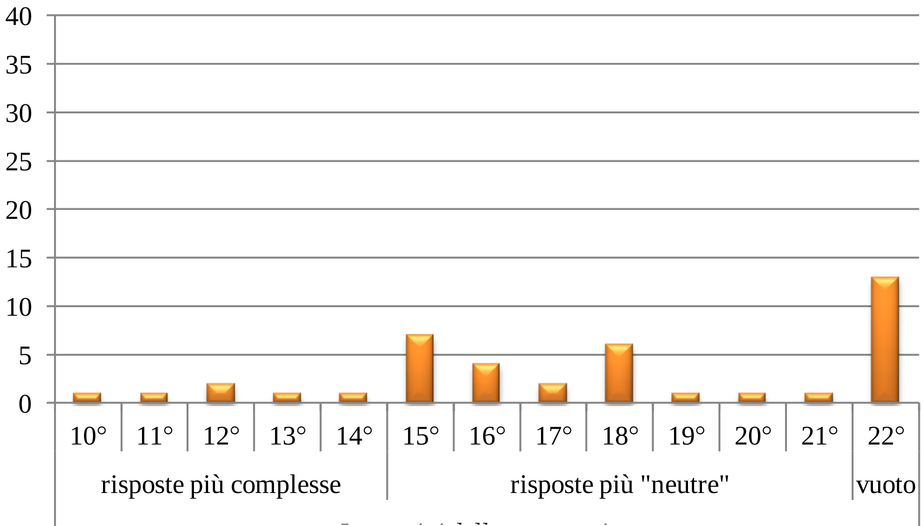


Grafico 2

1° strumento per calcolare e raggruppare dati
2° strumento/modo per interpretare l'incognito, ciò che non si conosce
3° strumento per risolvere problemi matematici con procedimenti logico-matematici
4° scienza/strumento che parte dalla realtà e arriva a conseguenze teoriche attraverso dimostrazioni
5° scienza/strumento che permette di spiegare/modellizzare la realtà, attraverso l'uso di leggi e numeri
6° modo di capire/materia che studia e usa i numeri, le varie operazioni tra essi
7° scienza che studia lo spazio usando numeri
8° facoltà della mente umana, che poco alla volta è diventata sempre più complessa
9° allenamento per il cervello, "sorta di antistress", allarga la mente, aiuta a ragionare
10° la matematica è una porta sull'infinito, insieme di "schemi di ordini segreti e misteriosi"
11° è tante cose, ancora ci chiediamo cosa sia, ha rapporto con filosofia
12° un linguaggio, con suo valore a prescindere dalle applicazioni
13° scienza astratta, ragionamento e "speculazione filosofica", logica e "libero sfogo dell'intelligenza umana", frutto dell'ambizione intellettuale umana
14° stile di vita, schema mentale, filosofia di vita
15° materia scolastica
16° insieme della geometria e dell'algebra / insieme di varie branche
17° solo “è una scienza”
18° scienza/disciplina alla base delle altre scienze
19° insieme di leggi che permette di stabilire <u>con certezza</u> se una tesi è vera o falsa
20° insieme di regole
21° "sicuramente non lo so"
22° nessuna risposta

Tabella 1

Si può osservare che in generale le immagini della matematica più diffuse tra gli studenti sono legate all’utilizzo di numeri e operazioni, in relazione anche ad una possibile spiegazione della realtà. Dall’imbarazzo generale di fronte a questo tipo di domanda, ma anche dal numero di risposte lasciate in bianco, si può dedurre che generalmente gli studenti non si interrogano su questi aspetti legati alla matematica, qualche studente scrive esplicitamente “non me lo sono mai chiesto”. Nel momento in cui lo fanno presentano, nella maggior parte dei casi, una visione “naturalistica” della matematica, in base alla quale gli oggetti sarebbero idealizzazioni del mondo fisico, proponendo in questo modo un’opinione molto simile a quella galileiana: il pensiero matematico interpreta e sistema i dati dall’esperienza, utilizzando numeri e “leggi”. Una studentessa sottolinea come il mondo sia scritto in termini matematici, rimandando ancora una volta allo scienziato pisano. Nella maggior parte delle risposte, però, a questa immagine della matematica si associa anche la sua utilità, la si considera come uno strumento nelle mani dell’uomo; anche nelle risposte che non rimandano esplicitamente a quest’idea si sottolinea la sua utilità nella vita quotidiana. Inoltre, sempre in generale, si evidenziano alcune caratteristiche che accompagnano la matematica, quali il rigore, la razionalità, “l’assolutezza” dei propri metodi.

Passiamo ora all’analisi del piano emotivo-motivazionale. Le risposte date dagli studenti si possono per così dire dividere in due gruppi: alcuni alunni (seppure per lo più casi isolati) esprimono di essere affascinati dalla matematica, la maggior parte invece si esprime in maniera negativa nei confronti della matematica, ecco alcuni esempi:

- “sono anni che cerco di capirlo ma non ci sono ancora saltato fuori”;
- “è 5 anni che cerco di capirlo con scarsissimi risultati, quindi se può darmi una mano lei le sarei molto grato dato che qui navighiamo in alto mare…”;
- “sicuramente non il mio mestiere”;
- “è temibile per gli studenti”;
- “uno strumento per l'uomo ma alla nostra età è più uno sfinimento psicologico che altro".

Due studenti addirittura, probabilmente in modo provocatorio, affermano che parlare di matematica significa parlare di morte o dell’inferno; sono presenti risposte anche del tipo: “una materia per persone intelligenti (anche se ci provo)”. Questo tipo di risposte non è sicuramente un dato positivo, considerando anche il fatto che i processi emozionali guidano e aiutano i processi di apprendimento, come riportato da varie ricerche legate alla metacognizione della matematica.

3.7.2 Possibili legami tra immagine della disciplina e metodi di risoluzione di problemi

Cerchiamo ora di mettere in luce eventuali legami tra l’immagine disciplinare della matematica espressa nella domanda VIII e il metodo scelto dagli studenti per rispondere alla domanda VII, ossia per risolvere il problema legato alle serie geometriche visto e analizzato in precedenza. Innanzitutto un dato interessante si ritrova considerando gli studenti che avevano formalizzato correttamente il problema esposto nella domanda VII: il 58% di questi studenti ha esposto un’immagine della matematica particolarmente ricca, ha mostrato di possedere idee ben precise e di porsi in maniera critica nei confronti della disciplina stessa (gli studenti che hanno dato le risposte dalla 10° alla 14° avevano tutti formalizzato correttamente il problema precedente); vi sono poi gli altri studenti che avevano scelto questo particolare metodo per risolvere il problema che alla domanda VIII hanno lasciato in bianco o hanno risposto “sicuramente non lo so”, questi studenti denunciano invece passività nei confronti della matematica, sono in grado di formalizzare correttamente il problema, ma non si sono mai posti in maniera critica nei confronti dei metodi e delle procedure seguite.

Va inoltre sottolineato che il 65% di chi ha dato una risposta del tipo 5° e il 61% di chi ha dato una risposta del tipo 6° (sottolineando quindi l’importanza dei numeri e dei calcoli) ha effettivamente scelto il metodo “tanti conti” per risolvere il problema, come anche tutti gli studenti che hanno dato una risposta del tipo 10°, viceversa si può osservare che circa il 73% di chi aveva scelto il metodo “tanti conti” ha poi dato una risposta appartenente a queste tre tipologie.

Il resto degli studenti, che invece ha dato risposte più “neutre”, aveva nella maggior parte dei casi risposto in modo più intuitivo oppure aveva scelto il metodo qui denominato “tanti conti”.

In conclusione si può osservare una possibile corrispondenza tra metodi scelti per risolvere il problema e immagine della matematica posseduta, questa però andrebbe approfondita ulteriormente.

Conclusioni

L’analisi qualitativa e quantitativa delle risposte al questionario proposto suggeriscono che gli allievi abbiano incontrato varie difficoltà nell’apprendimento del concetto di limite, in analogia anche con quanto riportato da altre ricerche sul tema. Si può inoltre evidenziare come, in generale, tale apprendimento risulti superficiale o legato maggiormente ad alcuni aspetti rispetto ad altri, che poi nel tempo vengono ugualmente perduti; un’ulteriore fattore a favore di tale ipotesi è fornito da un’ultima riflessione che riguarda la “coerenza” degli studenti nel rispondere alle domande: in generale, infatti, si è osservato che alunni che hanno risposto in modo “soddisfacente” ad alcune domande legate al registro algebrico non hanno fatto altrettanto per domande maggiormente legate al registro geometrico, e viceversa.
Le diverse concezioni, i vari ostacoli cognitivi, la ricchezza e complessità del concetto rendono i processi di insegnamento-apprendimento della nozione di limite estremamente delicati. Da alcune ricerche e da numerosi tentativi scaturisce come non sia sufficiente solo una chiara esposizione per consentire la comprensione; risulta fondamentale rendere consapevoli gli studenti della complessità intrinseca di tale nozione e riflettere sulle loro stesse intuizioni e idee. La storia e alcune nuove tecnologie, se utilizzate propriamente, potrebbero fungere da validi mezzi di soccorso per alcune problematiche in merito.

Bibliografia

Aczel, A. D. (2000). *The Mystery of the Aleph*. New York, USA: Basic Books
Trad. italiana Aczel, A. D. (2010). *Il mistero dell’alef*, traduzione di Gianluigi Oliveri. Milano, Italia: il Saggiatore.

Agostini, A. (1925). La teoria dei limiti in Pietro Mengoli. *Periodico di matematiche*, V, 18-30.

Alberti, N., Andriani, M. F., Bedulli, M., Dallanoce, S., Falcade, R., Foglia, S., Gregori, S., Grugnetti, L., Marchini, C., Molinari, F., Pezzi, F., Rizza, A., Valenti, C. (2000). Sulle difficoltà di apprendimento del concetto di limite. *Rivista matematica università Parma*, (6) 3*, 1-21.

Andriani, M. F., Dallanoce, S., Falcade, R., Foglia, S., Gregori, S., Grugnetti, L., Maffini, A., Marchini, A., Rizza, A., Vannucci, V. (2005). *Oltre ogni limite*. Bologna, Italia: Pitagora editrice.

Arrigo, G., D’Amore, B., Sbaragli, S. (2010). *Infiniti infiniti*. Trento, Italia: Erickson.

Artigue, M. (2000). L’evoluzione delle problematiche nella didattica dell’analisi. *La matematica e la sua didattica*, 4, 380-402.

Arzarello, F., Paola, D., Robutti, O., Sabena, C. (2009) Gestures as semiotic resources in the mathematics classroom. *Educational studies in mathematics*, 70 (2), 97-109.

Bachelard, G. (1938). *La formation de l’ésprit scientifique*. Parigi, Francia: Librairie Philosophique J. Vrin
Trad. italiana Bachelard, G. (1995). *La formazione dello spirito scientifico*, traduzione di Castelli Gattinara, E. Milano, Italia: Raffaello Cortina Editore.

Bagni, G. T. (1997). Il metodo di esaustione nella storia dell’analisi infinitesimale. *Periodico di matematiche*, 7, 4, ½, 15-33.
http://www.syllogismos.it/history/Esaustione.pdf

Bagni, G. T. (1999). Limite e visualizzazione: una ricerca sperimentale. *L’insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, 22B, 4, 353-372.

Bagni, G. T., D’Amore, B., Radford, L. (2006). Ostacoli epistemologici e prospettiva socio-culturale. *L’insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, 29B (1), 11-40.
http://www.dm.unibo.it/rsddm/it/articoli/damore/549%20Ostacoli.pdf

Bisso, C., Foglia, S., Grugnetti, L., Maffini, A., Marchini, C., Rapuano, M., Rizza, A., Vannucci, V. (2009). *Il sogno di Cirillo e la sfida della tartaruga*. Bologna, Italia: Pitagora editrice.

Bottazzini, U., Freguglia, P., Toti Rigatelli, L. (1992). *Fonti per la storia della matematica*. Firenze, Italia: Biblioteca Universale Sansoni.

Brousseau, G. (2000). I differenti universi della misura e le loro situazioni fondamentali, http://dipmat.math.unipa.it/~grim/misura.pdf

Bruno, R., Cavalieri, W., Lattanzio, P. (2003). *Matematica 2°*. Milano, Italia: Arnoldo Mondadori Scuola.

Caponi, B., Falco, G., Focchiatti, R., Cornoldi, C., Lucangeli, D. (2006). *Didattica metacognitiva della matematica*. Trento, Italia: Erickson.

Cassina, U. (1936) Storia del concetto di limite. *Periodico di matematiche*, IV. XVI, 10-19, 82-103.

Cornu, B. (1980). Interference des modèles spontanes dans l’apprentissage de la notion de limite. *Cahier du Seminaire de Didactique des Mathematiques et de l’Informatique*, 8, 57-83.

Cornu, B. (1991). Limits. In Tall D. *Advanced Mathematical Thinking*. Dordrecht, Olanda: Kluwer Academic Publishers, 153-166.

D’Amore, B. (1999). *Elementi di Didattica della Matematica*. Bologna, Italia: Pitagora editrice.

D’Amore, B. (2001). Concettualizzazione, registri di rappresentazioni semiotiche e noetica. *La matematica e la sua didattica*, 2, 150-173.

D’Amore, B. (2007). Epistemologia, didattica della matematica e pratiche di insegnamento. *La matematica e la sua didattica*, 21(3), 347-369.

Dimarakis, I., Gagatsis, A. (1997). Alcune difficoltà nella comprensione del concetto di limite. *La matematica e la sua didattica*, 2, 132-149.

Dodero, N., Baroncini, P., Manfredi, R. (2004). *Lineamenti di analisi e calcolo combinatorio*. Milano, Italia: Ghisetti e Corvi editori.

Dupont, P. (1981). *Appunti di storia dell’analisi infinitesimale*. I. Torino, Italia: libreria scientifica Cortina.

Dupont, P. (1994). Storia e didattica del concetto di limite. In Gallo, E., Giacardi, L., Pastrone, F. *Conferenze e seminari*, 140-168.

Duval, R. (1995). *Sémiosis et pensée humaine*. Berna, Svizzera: Peter Lang.

Enriques, F. (1938). *Le matematiche nella storia e nella cultura*. Bologna, Italia: Zanichelli.

Enriques, F., Lazzeri, G. (1921). Ai lettori. *Periodico di Matematiche*, I.IV, 1-5.

Euclide (1970). *Gli Elementi*, a cura di Frajese, A., Maccioni, L. Torino, Italia: UTET.

Fischbein, E. (1993). The theory of figural concepts. *Educational studies in mathematics*, 24, 139-162.

Freguglia, P. (1999). *La geometria fra tradizione e innovazione*. Torino, Italia: Bollati Boringhieri.

Furinghetti, F., Somaglia, A. (1994). Uno studio longitudinale sulla funzione. In Piochi, B. *Funzioni, Limiti, Derivate come, perché, quando, con quali strumenti insegnare l’Analisi nei diversi ordini di scuola*, 67-74.

Geymonat, L. (1947). *Storia e filosofia dell’Analisi infinitesimale*. Torino, Italia: Levrotto e Bella.

Giaquinta, M. (2010). *La forma delle cose*. Roma, Italia: Edizioni di Storia e Letteratura.

Gilbert, T., Rouche, N. (2001). *La notion d’infini. L’infini mathématique entre raison et mystère*. Parigi, Francia : Ellipses
Trad. italiana Gilbert, T., Rouche, N. (2004). *L’infinito matematico tra mistero e ragione*, traduzione di Gragori, S., Grugnetti, L., Marchini, C., Rizza, A. Bologna, Italia: Pitagora editrice.

Giusti, E. (2002). Dalla géometrie al calcolo: il problema delle tangenti e le origini del calcolo infinitesimale. *Storia della scienza*, V, 453-473.

Grimellini Tomasini, N. (2004). Teaching physics from a cultural perspective: Examples from research on physics education. *Proceedings of the International School of Physics “Enrico Fermi”*, Course CLVI, 559-582.

Kline, M. (1972). Mathematical thought from ancient to modern times. New York, USA: Oxford University Press.

Lakoff, G., Núñez, R. (2000). *Where Mathematics Comes From. How the Embodied Mind Brings Mathematics into Being.* New York, USA: Basic Books
Trad. italiana Lakoff, G., Núñez, R. (2005) *Da dove viene la matematica*, traduzione di Robutti, O., Ferrara, F., Sabena, C. Torino, Italia: Bollati Boringhieri.

Lamberti, L., Mereu, L., Nanni, A. (2001). *Matematica Tre*. Milano, Italia: Etas.

Miur (2010). Indicazioni nazionali riguardanti gli obiettivi specifici di apprendimento concernenti le attività e gli insegnamenti compresi nei piani degli studi previsti per i percorsi liceali di cui all'articolo 10, comma 3, del decreto del Presidente della Repubblica 15 marzo 2010, n. 89, in relazione all'articolo 2, commi 1 e 3, del medesimo regolamento.

Monaghan, J. (1991). Problems with the language of Limits. *For the learning of mathematics*, 11 (3), 20-24.

Prodi, G. (1970). *Analisi matematica*. Torino, Italia: Bollati Boringhieri.

Radford, L. (1997). On Psychology, Historical Epistemology and the Teaching of Mathematics: Towards a Socio-Cultural History of Mathematics. *For the learning of mathematics*, 17 (1), 26-33.

Radford, L. (2003). Gestures, Speech, and the Sprouting of Signs: A Semiotic-Cultural Approach to Students' Types of Generalizations. Mathematical thinking and learning, 5 (1), 37-70,
http://oldwebsite.laurentian.ca/educ/lradford/gestures.pdf

Sbaragli, S. (2005). Misconcezioni "inevitabili" e misconcezioni "evitabili". *La matematica e la sua didattica*, 1, 57-71, http://www.dm.unibo.it/rsddm/it/articoli/sbaragli/Le%20misconcezioni%20inevitabili%20evitabili.pdf

Sierpinska, A. (1985). Obstacles epistemologiques relatifs à la notion de limite. *Recherches en didactiques des mathématiques*, 6(1), 5-68.

Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions : reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational studies in mathematics*, 22, 1-36.

Speranza, F. (1992). Il ruolo della storia nella comprensione dello sviluppo della scienza. *Cultura e scuola*, 31 (123), 201-208.

Speranza, F. (1996). I fondamenti epistemologici della matematica. In *I fondamenti della Matematica per la sua didattica e nei loro legami con la società contemporanea*. Atti del Congresso Nazionale della Mathesis, Verona, 29-29-30 Novembre 1996.

Tall, D., Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particolar reference to limits and continuity. *Educational studies in mathematics,* 12 (2), 151-169.

UMI (2003). Matematica 2003. Attività didattiche e prove di verifica per un nuovo curricolo di Matematica. Ciclo secondario.
http://umi.dm.unibo.it/old/italiano/Matematica2003/prima/premessa2.pdf

Vergnaud, G. (1981). *L’enfant, la mathématique et la realité*. Berna, Svizzera : Peter Lang. Trad. italiana Vergnaud, G. (1994). *Il bambino, la matematica, la realtà*, traduzione di Longo, A. P. Roma, Italia: Armando.

Alcune immagini sono state prese dai siti:

http://areeweb.polito.it/didattica/polymath/htmlS/argoment/CABRI/Cabri_Mar08/Sfera

_ScodellaGalileo.htm

http://www.vialattea.net/esperti/php/risposta.php?num=13722

Ringraziamenti

Vorrei innanzitutto ringraziare il Professor Paolo Negrini per avermi dato la possibilità di svolgere questa tesi e avermi seguito nella sua realizzazione.
Desidero inoltre ringraziare gli insegnanti Maria Enrica Brunetti, Annalisa Canarini e Nicola Lini del liceo Rinaldo Corso di Correggio e Achille Maffini del liceo Giacomo Ulivi di Parma per avermi offerto con grande disponibilità e gentilezza l’opportunità di realizzare concretamente tale progetto. Ringrazio anche tutti gli studenti delle classi V A, V A sezione linguistico, IV e V B p.n.i. del liceo Corso e gli studenti delle classe V B p.n.i. e V F p.n.i. del liceo Ulivi per l’impegno e la serietà dimostrati.
Infine, ma non per importanza, un grazie speciale al Professor Carlo Marchini, a cui sarò sempre grata e riconoscente, per ciò che mi ha insegnato, per la passione e curiosità intellettuale che è stato capace di trasmettermi, per i consigli sempre puntuali, per la costante disponibilità e cortesia avute nei miei confronti.