4. VEKTORI

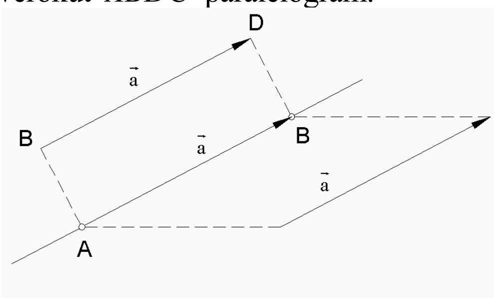
POJAM VEKTORA

Svakodnevno se susrećemo s veličinama za čije je određivanje potreban samo jedan broj. Na primjer udaljenost, površina, volumen,.… Njih zovamo *skalarnim* veličinama.
Međutim, postoje veličine koje ne možemo potpuno odrediti brojem, već je potrebno zadati i njihov *smjer*. Na primjer ubrzanje, strujanje, vjetar,.… Njih zovamo *vektorskim* veličinama.

Vektor kao skup (klasa) usmjerenih dužina

Neka su A, B dvije točke na pravcu, u ravnini ili u prostoru. Dužinu s krajevima A, B označavamo s $\overline{AB}$. Duljinu dužine $\overline{AB}$ označavamo s $|AB|$ ili $d(A, B)$.

Usmjerena dužina $\overrightarrow{AB}$ je dužina za koju se zna *početna točka A* i *završna točka B*.
Za dvije usmjerene dužine $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}$ kažemo da su *ekvivalentne* ako postoji translacija koja prvu prevodi u drugu, tj. ako je četverokut $ABDC$ paralelogram.



Definicija
Skup svih međusobno ekvivalentnih usmjerenih dužina nazivamo *vektorom*.

Dakle, vektor se može predočiti pomoću više različitih usmjerenih dužina – reprezentanata vektora. Često se za vektor upotrebljava i naziv: *klasa* usmjerenih dužina.

Zbog jednostavnosti ćemo bilo koju usmjerenu dužinu (reprezentantu vektora) nazivati vektorom i označavati $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}, \ldots$ ili $\vec{a}, \vec{b}, \ldots$.

Skup svih vektora nekog prostora označavat ćemo sa $\boldsymbol{V}$. Za naše potrebe će $\boldsymbol{V}$ biti jednodimenzionalni prostor $\boldsymbol{V}_1$ (pravac), dvodimenzionalni prostor $\boldsymbol{V}_2$ (ravnina) ili trodimenzionalni prostor $\boldsymbol{V}_3$.

Geometrijski, vektor je opisan (zadan) sa:

- *prevcem nosiocem* na kojem se vektor nalazi,
- *duljinom* ili *modulom*: $\left|\overrightarrow{AB}\right| = d(A, B)$,
- *orijentacijom* na pravcu nosiocu.

Ponekad se govori o *smjeru* vektora. Smjer objedinjuje nosioca i orijentaciju.

OPERACIJE S VEKTORIMA

Kao prvo moramo uvesti (definirati) neke pojmove:

Nul vektor

- vektor duljine 0,
- oznaka: $\vec{0}$,
- vrijedi: $\vec{0} = \overrightarrow{AA} = \overrightarrow{BB} = \ldots$,
- duljina (modul) nul vektora: $|\vec{0}| = 0$.

Jedinični vektor

- vektor duljine 1,
- za zadani vektor $\vec{a}$, duljine $|\vec{a}|$, jedinični vektor je definiran sa $\vec{a}_0 = \dfrac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$,
- $\vec{a}_0$ je vektor koji ima isti smjer kao i $\vec{a}$ a duljina mu je 1.

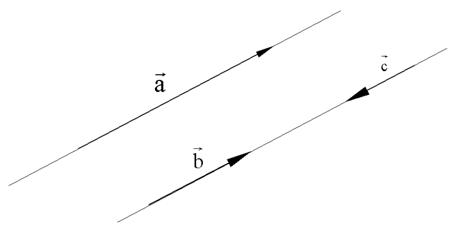
Radijvektor (radijus vektor)

Ako je T neka točka prostora a O ishodište koordinatnog sustava, vektor $\overrightarrow{OT}$ nazivamo *radijvektor* točke T. Zapisujemo ga i $\vec{r}_T$.
Za svaki vektor možemo izabrati njegovog predstavnika tako da mu početna točka bude baš točka O. Na taj se način dobiva radijvektor neke (bilo koje) točke.

Kolinearni vektori

Vektori koji pripadaju istom ili paralelnim pravcima.

-vektori $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ su kolinearni:



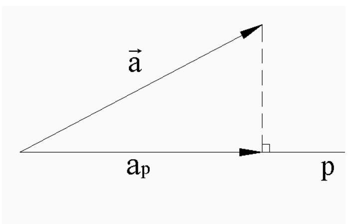
Komplanarni vektori

Vektori koji pripadaju istoj ili paralelnim ravninama.

Projekcija vektora

- Ortogonalna projekcija u ravnini na pravac p je funkcija koja svakoj točki A ravnine pridružuje točku u kojoj okomica na p, koja prolazi točkom A, siječe pravac p.
- Ortogonalna projekcija u prostoru na pravac p je funkcija koja svakoj točki A prostora pridružuje točku u kojoj ravnina koja prolazi točkom A, a okomita je na p, siječe pravac p.

Zadatak: Nacrtati skalarnu, a zatim vektorsku projekciju vektora $\vec{a}$ na pravac p.



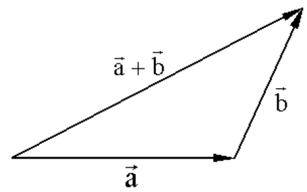
I. Zbrajanje vektora

Neka su $\vec{a}$ i $\vec{b}$ bilo kakvi vektori. *Zbrajanje* vektora je funkcija

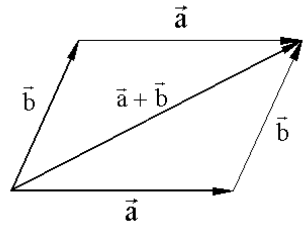
$(+): V \times V \to V$,

$(\vec{a}, \vec{b}) \mapsto \vec{a} + \vec{b}$,

tj. funkcija koja paru vektora $(\vec{a}, \vec{b})$ pridružuje vektor $\vec{a} + \vec{b}$.



Vektore zbrajamo po *pravilu trokuta* ili po *pravilu paralelograma*:



Svojstva operacije zbrajanja:

(1) $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$,

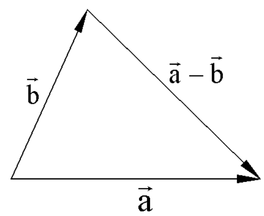
(2) $\vec{a} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{a} = \vec{a}$,

(3) $\vec{a} + (-\vec{a}) = (-\vec{a}) + \vec{a} = \vec{0}$,

(4) $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$.

Oduzimanje vektora

Oduzimanje vektora se definira kao operacija zbrajanja sa suprotnim vektorom: $\vec{a} - \vec{b} := \vec{a} + (-\vec{b})$.



II. Množenje vektora sa skalarom (brojem)

Neka je $\vec{a}$ vektor i λ realni broj. *Množenje vektora sa skalarom* je funkcija

$(\cdot): R \times V \to V$,

$(\lambda, \vec{a}) \mapsto \lambda \vec{a}$,

tj. funkcija koja paru $(\lambda, \vec{a})$ pridružuje vektor $\lambda\vec{a}$.

Za vektor $\overrightarrow{\lambda a}$ vrijedi:

- $\vec{a}$ i $\lambda\vec{a}$ su kolinearni (imaju isti ili paralelni nosač),
- $|\lambda\vec{a}| = |\lambda| \cdot |\vec{a}|$,
- $\lambda > 0 \Rightarrow$ $\vec{a}$ i $\lambda\vec{a}$ su isto orijentitani,
  $\lambda < 0 \Rightarrow$ $\vec{a}$ i $\lambda\vec{a}$ su suprotno orijentirani.

Svojstva operacije množenja sa skalarom:

(5) $\lambda(\vec{a} + \vec{b}) = \lambda\vec{a} + \lambda\vec{b}$,

(6) $(\lambda + \mu)\vec{a} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{a}$,

(7) $(\lambda\mu)\vec{a} = \lambda(\mu\vec{a}) = \lambda\mu\vec{a}$,

(8) $1 \cdot \vec{a} = \vec{a}, \quad (-1) \cdot \vec{a} = -\vec{a}, \quad 0 \cdot \vec{a} = \vec{0}$.

Skup ***V*** s operacijama zbrajanja i množenja sa skalarom te svojstvima (1) – (8) tvori strukturu koju nazivamo *vektorski* (*linearni*) *prostor*, i koju zapisujemo (***V*, +, ·**).

Baza vektorskog prostora

Pojam baze vektorskog prostora spada među najvažnije pojmove *vektorske algebre*. U smislu objašnjavanja i uvođenja pojma baze navest ćemo potrebne definicije i teoreme, od kojih nećemo sve dokazivati. Detaljnije o ovom području može se naći na primjer u Elezović [1].

Definicija (linearna kombinacija)
Neka su $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ vektori i $k_1, k_2, \ldots, k_n$ realni brojevi. Vektor

$$\vec{b} = k_1\vec{a}_1 + k_2\vec{a}_2 + \ldots + k_n\vec{a}_n$$

zovemo *linearna kombinacija* vektora $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ s koeficijentima $k_1, k_2, \ldots, k_n$.

Teorem
Dva vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$ su kolinearna onda i samo onda ako postoji broj $k \in R$ takav da je $\vec{a} = k\vec{b}$.

Teorem
Tri vektora $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ su komplanarna onda i samo onda ako je svaki od njih linearna kombinacija ostalih dvaju.

Definicija (linearna (ne)zavisnost)
Vektori $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ su *linearno nezavisni* ako njihova linearna kombinacija iščezava jedino na trivijalan način, tj. ako

$$k_1\vec{a}_1 + k_2\vec{a}_2 + \ldots + k_n\vec{a}_n = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad k_1 = k_2 = \cdots = k_n = 0 .$$

Vektori $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ su *linearno zavisni* ako njihova linearna kombinacija ne iščezava na trivijalan način, tj. iz

$$k_1\vec{a}_1 + k_2\vec{a}_2 + \ldots + k_n\vec{a}_n = \vec{0} \text{ ne slijedi } k_1 = k_2 = \cdots = k_n = 0 .$$

Teorem
Vektori $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ su linearno nezavisni onda i samo onda ako se ni jedan od njh ne može prikazati kao linearna kombinacija ostalih vektora, odnosno oni su linearno zavisni onda i samo onda ako se jadan od njih može prikazati kao linearna kombinacija ostalih vektora.

Primjer:

1. Vektori $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ za koje je $3\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} - \vec{c} = \vec{0}$ linearno su nezavisni. Naime,

$$\vec{a} = -\frac{1}{6}\vec{b} + \frac{1}{3}\vec{c}, \quad \vec{b} = -6\vec{a} + 2\vec{c} \quad \text{i} \quad \vec{c} = 3\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} .$$

Definicija (baza)
Baza vektorskog prostora ***V*** je najveći broj linearno nezavisnih vektora tog prostora.

Pitanje: Koji je najveći broj linearno nezavisnih vektora prostora V_i, $i = 1,2,3$?

Prostor V_1; Svaka dva vektora jednog pravca su linearno zavisna pa zaključujemo da se baza sastoji od jednog jedinog vektora.

Prostor V_2; Svaka tri vektora jedne ravnine su linearno zavisna pa zaključujemo da se baza sastoji od dva vektora, i analogno,

Prostor V_3; Svaka četiri vektora prostora su linearno zavisna pa zaključujemo da se baza sastoji od tri vektora.

Teorem
Prikaz vektora u bazi je jedinstven.

Dokaz
Neka je $B = \{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ baza trodimenzionalnog vektorskog prostora V_3 i neka je

$$\vec{d} = \alpha_1\vec{a} + \beta_1\vec{b} + \gamma_1\vec{c} \qquad (*)$$

prikaz vektora $\vec{d}$ po bazi B. Pretpostavimo da prikaz nije jedinstven. To znači da osim prikaza (*) postoji još barem jedan prikaz vektora $\vec{d}$, tj. postoje brojevi $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$ takvi da je

$$\vec{d} = \alpha_2\vec{a} + \beta_2\vec{b} + \gamma_2\vec{c}\ . \qquad (**)$$

Oduzimanjem (*) - (**) slijedi

$$\vec{0} = \vec{d} - \vec{d} = (\alpha_1 - \alpha_2)\vec{a} + (\beta_1 - \beta_2)\vec{b} + (\gamma_1 - \gamma_2)\vec{c}\ .$$

Budući da su $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ linearno nezavisni (čine bazu) $\Rightarrow$ njihova linearna kombinacija iščezava na trivijalan način, tj.

$$(\alpha_1 - \alpha_2) = (\beta_1 - \beta_2) = (\gamma_1 - \gamma_2) = 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha_1 = \alpha_2, \quad \beta_1 = \beta_2, \quad \gamma_1 = \gamma_2\ .\square$$

III. Skalarni produkt vektora (skalarni umnožak)

Neka su

$\vec{a}, \vec{b}$ – dani vektori, i

$\varphi = \angle(\vec{a}, \vec{b})$ – kut među vektorima $\vec{a}$ i $\vec{b}$.

Skalarni produkt (umnožak) vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$ je funkcija

$(\cdot): V \times V \to R$,

$(\vec{a}, \vec{b}) \mapsto \vec{a} \cdot \vec{b}$,

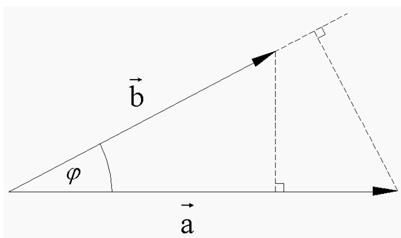
tj. funkcija koja paru vektora $(\vec{a}, \vec{b})$ pridružuje broj (skalar) $\vec{a} \cdot \vec{b} \in R$, definirana sa:

$$\underline{\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}| \cos \varphi\ .}$$

Pomoću skalarnog produkta izračunava se i projekcija vektora na vektor, tj.

$\vec{a} \cdot \vec{b}_0 = |\vec{a}| \cos \varphi = a_b \qquad \Rightarrow$ skalarna projekcija vektora $\vec{a}$ na vektor $\vec{b}$,

$\vec{a}_0 \cdot \vec{b} = |\vec{b}| \cos \varphi = b_a \qquad \Rightarrow$ skalarna projekcija vektora $\vec{b}$ na vektor $\vec{a}$,



$\left(\vec{a}\cdot\vec{b}_0\right)\vec{b}_0 = a_b\vec{b}_0$ $\Rightarrow$ vektorska projekcija vektora $\vec{a}$ na vektor $\vec{b}$,

$\left(\vec{a}_0\cdot\vec{b}\right)\vec{a}_0 = b_a\vec{a}_0$ $\Rightarrow$ vektorska projekcija vektora $\vec{b}$ na vektor $\vec{a}$.

Posljedice skalarnog množenja:

(1) $\vec{a}\cdot\vec{a} = |\vec{a}||\vec{a}|\cos 0 = |\vec{a}|^2$, $|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a}\cdot\vec{a}}$,

(2) $\vec{a}\perp\vec{b} \Rightarrow \vec{a}\cdot\vec{b} = 0$,

$\vec{a}\cdot\vec{b} = 0 \Rightarrow \vec{a}\perp\vec{b}$ ili je barem jedan jednak $\vec{0}$,

(3) $\cos\varphi = \dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}, \left(0\le\varphi\le\pi\right)$.

Svojstva skalarnog množenja:

(1) $\vec{a}\cdot\vec{a}\ge 0,\ \vec{a}\cdot\vec{a} = 0 \Leftrightarrow \vec{a} = \vec{0}$, - pozitivnost

(2) $\lambda\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right) = \left(\lambda\vec{a}\right)\cdot\vec{b} = \vec{a}\left(\lambda\vec{b}\right)$, - homogenost

(3) $\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{b}\cdot\vec{a}$, - komutativnost

(4) $\vec{a}\cdot\left(\vec{b}+\vec{c}\right) = \vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}$. - distributuvnost

Primjer:

Za vektore $\vec{a},\vec{b}$ vrijedi: $|\vec{a}| = \sqrt{5}, |\vec{b}| = \sqrt{30}, \angle\left(\vec{a},\vec{b}\right) = 45^\circ$. Neka su $\vec{e} = 4\vec{a}-\vec{b}, \vec{f} = \vec{a}+3\vec{b}$.

Izračunati $\vec{e}\cdot\vec{f}$.

$\vec{e}\cdot\vec{f} = \left(4\vec{a}-\vec{b}\right)\cdot\left(\vec{a}+3\vec{b}\right) = 4\vec{a}\cdot\vec{a}+11\vec{a}\cdot\vec{b}-3\vec{b}\cdot\vec{b} = \cdots = -70+55\sqrt{3}$.

IV. Vektorski produkt vektora (vektorski umnožak)

Neka su

$\vec{a},\vec{b}$ – dani vektori, i

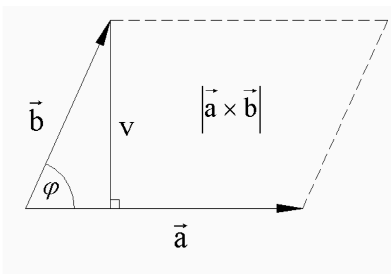
$\varphi = \angle\left(\vec{a},\vec{b}\right)$ – kut među vektorima $\vec{a}$ i $\vec{b}$.

Vektorski produkt (umnožak) vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$ je funkcija

$(\times): V\times V\to V$,

$\left(\vec{a},\vec{b}\right)\mapsto\vec{a}\times\vec{b}$,

tj. funkcija koja paru vektora $\left(\vec{a},\vec{b}\right)$ pridružuje vektor $\vec{a}\times\vec{b}$.



Za vektor $\vec{a}\times\vec{b}$ vrijedi:

- $\left|\vec{a}\times\vec{b}\right| = |\vec{a}||\vec{b}|\sin\varphi$

  Geometrijski, modul vektorskog produkta jednak je površini paralelograma što ga zatvaraju vektori $\vec{a}$ i $\vec{b}$. To vidimo iz: $\left|\vec{a}\times\vec{b}\right| = |\vec{a}||\vec{b}|\sin\varphi = |\vec{a}|v$.

- Vektor $\vec{a}\times\vec{b}$ je $\perp$ na vektor $\vec{a}$ i na vektor $\vec{b}$.
  $\vec{a}, \vec{b}$ kolinearni $\Rightarrow$ $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{0}$,
  $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{0}$ $\Rightarrow$ $\vec{a}, \vec{b}$ kolinearni ili je barem jedan od njh $\vec{0}$.
- Trojka vektora $\left(\vec{a}, \vec{b}, \vec{a}\times\vec{b}\right)$ čini *desnu trojku*, tj. gledano iz vrha vektora $\vec{a}\times\vec{b}$ rotacija iz $\vec{a}$ u $\vec{b}$ suprotna je gibanju kazaljke na satu.

Svojstva vektorskog množenja:

(1) $\vec{a}\times\vec{a}=\vec{0}$,

(2) $\lambda\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)=\left(\lambda\vec{a}\right)\times\vec{b}=\vec{a}\times\left(\lambda\vec{b}\right)$, - homogenost

(3) $\vec{a}\times\vec{b}=-\left(\vec{b}\times\vec{a}\right)$, - antikomutativnost

(4) $\vec{a}\times\left(\vec{b}+\vec{c}\right)=\vec{a}\times\vec{b}+\vec{a}\times\vec{c}$. - distributuvnost

V. Mješoviti produkt vektora

Neka su $\vec{a},\vec{b}$ i $\vec{c}$ dani vektori. *Mješoviti produkt* (umnožak) vektora $\vec{a},\vec{b}$ i $\vec{c}$ je funkcija

$$(\ ): V\times V\times V\to R,$$

$$\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right)\mapsto\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c},$$

tj. funkcija koja trojki vektora $\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right)$ pridružuje broj $\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c}\in R$.

Oznaka: $\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c}=\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right)$

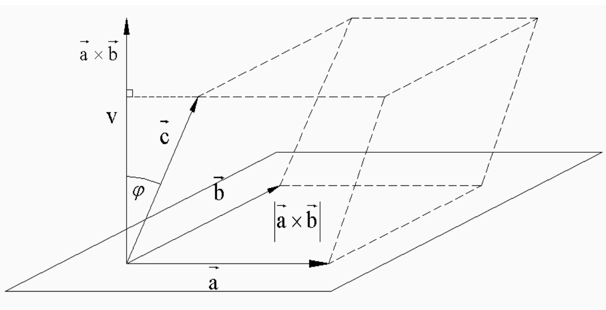
Svojstva:

(1) $\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c}=\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)\cdot\vec{a}=\left(\vec{c}\times\vec{a}\right)\cdot\vec{b}$,

(2) $\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c}=-\left(\vec{b}\times\vec{a}\right)\cdot\vec{c}$.

Geometrijska interpretacija mješovitog produkta:

Neka su
$\vec{a},\vec{b}$ i $\vec{c}$ - zadani nekomplanarni vektori, i
$\alpha=\angle\left(\vec{a}\times\vec{b},\vec{c}\right)$
- kut među vektorima $\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)$ i $\vec{c}$.



Tada je

$$\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c}=\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|\cdot\left|\vec{c}\right|\cos\alpha$$

$$\cos\alpha=\frac{v}{\left|\vec{c}\right|},\quad v=\left|\vec{c}\right|\cos\alpha,\quad B=\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|$$

$\underline{\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c}=B\cdot v=\pm V}$, tj. apsolutna vrijednost mješovitog produkta triju vektora jednaka je volumenu paralelepipeda kojeg tvore ti vektori.

KOORDINATNI SUSTAV

Kartezijev pravokutni koordinatni sustav

Kartezijev trodimenzionalni pravokutni koordinatni sustav čine 3 međusobno okomite osi:

Ox − os *apscisa,*

Oy − os *ordinata,*

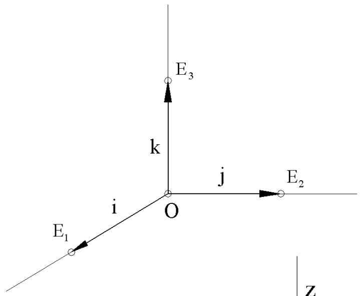
Oz − os *aplikata,*

točka O − *ishodište koordinatnog sustava,* i jedinični vektori $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ odabrani na sljedeći način:

$E_1(1,0,0)$ → radijvektor $\overrightarrow{OE_1} = \vec{i}$ → $|\vec{i}| = 1$,

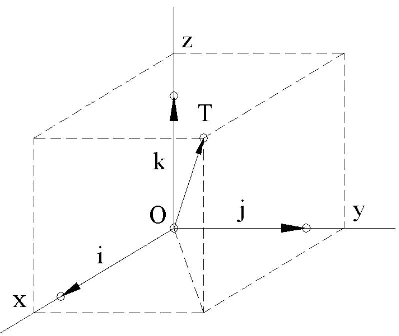
$E_2(0,1,0)$ → radijvektor $\overrightarrow{OE_2} = \vec{j}$ → $|\vec{j}| = 1$,

$E_3(0,0,1)$ → radijvektor $\overrightarrow{OE_3} = \vec{k}$ → $|\vec{k}| = 1$.



Zapisujemo ga: $\left(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$.

Prikaz vektora u koordinatnom sustavu $\left(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$



Neka je $T(x, y, z)$ bilo koja točka.
Radijvektor točke T:

$$\underline{\vec{r}_T = \overrightarrow{OT} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}}\text{, gdje je}$$

$\vec{r}_T \cdot \vec{i} = \left(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}\right) \cdot \vec{i} = x$ … skalarna projekcija vektora $\overrightarrow{OT}$ na vektor $\vec{i}$, i analogno:

$\vec{r}_T \cdot \vec{j} = y$ … skalarna projekcija vektora $\overrightarrow{OT}$ na vektor $\vec{j}$,

$\vec{r}_T \cdot \vec{k} = z$ … skalarna projekcija vektora $\overrightarrow{OT}$ na vektor $\vec{k}$.

$x\,\vec{i}$ … vektorska projekcija vektora $\overrightarrow{OT}$ na vektor $\vec{i}$,

$y\,\vec{j}$ … vektorska projekcija vektora $\overrightarrow{OT}$ na vektor $\vec{j}$,

$z\,\vec{k}$ … vektorska projekcija vektora $\overrightarrow{OT}$ na vektor $\vec{k}$.

Dakle, imamo pridruženje:

točka $T(x, y, z)$ ↔ vektor $\overrightarrow{OT} = \{x, y, z\}$, pri čemu su

x, y, z koordinate točke T, i

x, y, z komponente vektora $\overrightarrow{OT}$.

Modul (duljina) vektora $\overrightarrow{OT}$: $\underline{\left|\overrightarrow{OT}\right| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$.

Primjer:
Odrediti skalarne i vektorske komponente radijvektora $\vec{r}_T$ točke $T(1,5,3)$. Izračunati modul vektora $\vec{r}_T$.

$T(1,5,3) \longrightarrow \vec{r}_T = 1\vec{i} + 5\vec{j} + 3\vec{k}$

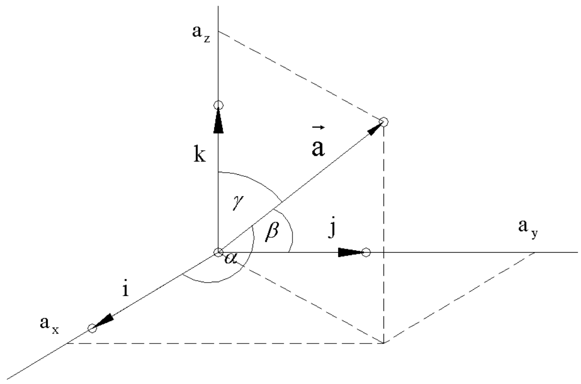
Skalarne komponente: $r_x = x = 1,\ \ r_y = y = 5,\ \ r_z = z = 3.$

Vektorske komponente: $\vec{r}_x = r_x\vec{i} = 1\cdot\vec{i} = \vec{i}\ ,\ \ \vec{r}_y = r_y\vec{j} = 5\vec{j}\ ,\ \ \vec{r}_z = r_z\vec{k} = 3\vec{k}\ .$

Modul vektora $\vec{r}_T$: $|\vec{r}_T| = \sqrt{1^2 + 5^2 + 3^2} = \sqrt{35}\ .$

Kosinusi smjera vektora

Neka su α, β, γ kutovi što ih vektor $\vec{a}$ zatvara s koordinatnim osima.



Kosinusi tih kutova računaju se prema formulama:

$$cos\,\alpha = \frac{a_x}{|\vec{a}|},\quad cos\,\beta = \frac{a_y}{|\vec{a}|},\quad cos\,\gamma = \frac{a_z}{|\vec{a}|},$$

i nazivaju *kosinusi smjera* vektora $\vec{a}$.

Slijedi:

- projekcije vektora $\vec{a}$ na koordinatne osi:
  $a_x = |\vec{a}|cos\,\alpha\ ,\ \ a_y = |\vec{a}|cos\,\beta,\ \ a_z = |\vec{a}|cos\,\gamma\ ,$
- komponente jediničnog vektora vektora $\vec{a}$:
  $$\vec{a}_o = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = \frac{1}{|\vec{a}|}\{a_x, a_y, a_z\} = \left\{\frac{a_x}{|\vec{a}|}, \frac{a_y}{|\vec{a}|}, \frac{a_z}{|\vec{a}|}\right\} = \{cos\,\alpha, cos\,\beta, cos\,\gamma\},$$
- $|\vec{a}_o| = 1 \ \Rightarrow$
  $$\sqrt{cos^2\alpha + cos^2\beta + cos^2\gamma} = 1\ \Big|^2$$
  $$\underline{cos^2\alpha + cos^2\beta + cos^2\gamma = 1}\ .$$

Računanje s vektorima u koordinatnom zapisu

Neka su zadani vektori $\vec{a}$ i $\vec{b}$ svojim komponentama:

$$\vec{a} = \{a_x, a_y, a_z\} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}\ ,$$
$$\vec{b} = \{b_x, b_y, b_z\} = b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k}\ .$$

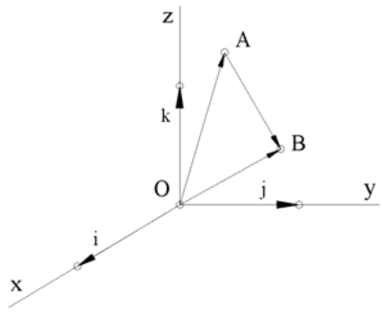
Zbrajanje i oduzimanje

$$\vec{a} \pm \vec{b} = \left(a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}\right) \pm \left(b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k}\right) = (a_x \pm b_x)\vec{i} + (a_y \pm b_y)\vec{j} + (a_z \pm b_z)\vec{k}$$
$$\vec{a} \pm \vec{b} = \{a_x \pm b_x, a_y \pm b_y, a_z \pm b_z\}$$

Zadatak (Vektor zadan dvjema točkama):
Neka je zadan vektor $\vec{a}$ svojim komponentama a_x, a_y, a_z:

$$\vec{a} = \{a_x, a_y, a_z\} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k} .$$

Pitamo kako bismo odredili a_x, a_y, a_z ako znamo da je $A(x_1, y_1, z_1)$ početna a $B(x_2, y_2, z_2)$ završna točka vektora $\vec{a}$?



Radijvektori točaka A i B:

$$\overrightarrow{OA} = x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}$$
$$\overrightarrow{OB} = x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}$$
$$\Rightarrow \ \vec{a} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \left(x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}\right) - \left(x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}\right)$$
$$\Rightarrow \ \underline{\vec{a} = \overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1)\vec{i} + (y_2 - y_1)\vec{j} + (z_2 - z_1)\vec{k} = \{x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1\}}.$$

Primjeri:

1. Odrediti komponente i modul vektora zadanog točkama $A(1,2,4)$, $B(3,0,-2)$.

$$\overrightarrow{AB} = \{2,-2,-6\}, \qquad \left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{44}\ ; \qquad \overrightarrow{BA} = \{-2, 2, 6\}\ , \qquad \left|\overrightarrow{BA}\right| = \sqrt{44}\ .$$

2. Odrediti početnu točku vektora $\overrightarrow{CD} = \{0, 5, -1\}$, ako je završna točka $(1, 2, 3)$.

$$\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OC} \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{CD} = \{1, 2, 3\} - \{0, 5, -1\} = \{1, -3, 4\}$$
$$\Rightarrow \quad C(1, -3, 4).$$

3. Vektor $\vec{c}$ u bazi $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ ima komponente (16, -15, 12). Odrediti koordinate vektora $\vec{d}$ ako je $\vec{d}$ koolinearan s $\vec{c}$, suprotno orijentiran i ako je $\left|\vec{d}\right| = 75$.

$$\vec{d} = \alpha(16,-15,12) = 16\alpha\vec{i} - 15\alpha\vec{j} + 12\alpha\vec{k}$$
$$\left|\vec{d}\right| = \sqrt{\alpha^2\left(16^2 + 15^2 + 12^2\right)} = \ldots = 25|\alpha|$$
$$\left|\vec{d}\right| = 25|\alpha| = 75 \ \Rightarrow |\alpha| = 3 \Rightarrow \alpha = 3 \vee \alpha = -3$$
$$\vec{d} = -3(16,-15,12) = (-48,45,36).$$

Množenje sa skalarom

$$\lambda\vec{a} = \lambda\left(a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}\right) = \lambda a_x\vec{i} + \lambda a_y\vec{j} + \lambda a_z\vec{k} = \{\lambda a_x, \lambda a_y, \lambda a_z\} = \lambda\{a_x, a_y, a_z\}$$

Skalarni produkt vektora

Skalarni umnošci jediničnih vektora $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$:

$\vec{i}\cdot\vec{i} = |\vec{i}||\vec{i}|\cos 0 = 1 \quad \Rightarrow \quad \vec{j}\cdot\vec{j} = \vec{k}\cdot\vec{k} = 1$,

$\vec{i}\cdot\vec{j} = |\vec{i}||\vec{j}|\cos\frac{\pi}{2} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{j}\cdot\vec{k} = \vec{k}\cdot\vec{i} = 0$.

Slijedi:

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = \left(a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}\right)\cdot\left(b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k}\right) = \ldots\ldots = \underline{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}$$

Posljedice:

(1) $\vec{a}\cdot\vec{a} = a_x^{\,2} + a_y^{\,2} + a_z^{\,2} = |\vec{a}|^2, \quad |\vec{a}| = \sqrt{a_x^{\,2} + a_y^{\,2} + a_z^{\,2}}$,

(2) $\cos\varphi = \dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} = \dfrac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{a_x^{\,2} + a_y^{\,2} + a_z^{\,2}}\sqrt{b_x^{\,2} + b_y^{\,2} + b_z^{\,2}}}, \quad \left(0 \le \varphi \le \dfrac{\pi}{2}\right)$.

Primjer:

Neka su zadani vektori $\vec{a} = \{3, 3, 3\}$ i $\vec{b} = \{1, 1, 0\}$. Odrediti skalarnu i vektorsku projekciju vektora $\vec{a}$ na vektor $\vec{b}$.

$$\vec{b} = \{1, 1, 0\} \quad \Rightarrow \quad |\vec{b}| = \sqrt{2} \quad \Rightarrow \quad \vec{b}_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}\{1, 1, 0\} = \left\{\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right\}$$

Skalarna projekcija vektora $\vec{a}$ na $\vec{b}$: $a_b = \vec{a}\cdot\vec{b}_0 = \{3,3,3\}\cdot\left\{\dfrac{\sqrt{2}}{2}, \dfrac{\sqrt{2}}{2}, 0\right\} = \dfrac{3\sqrt{2}}{2} + \dfrac{3\sqrt{2}}{2} = 3\sqrt{2}$.

Vektorska projekcija vektora $\vec{a}$ na $\vec{b}$: $\overrightarrow{a_b} = a_b\,\vec{b}_0 = 3\sqrt{2}\left\{\dfrac{\sqrt{2}}{2}, \dfrac{\sqrt{2}}{2}, 0\right\} = \{3, 3, 0\} = 3\vec{i} + 3\vec{j}$.

Vektorski produkt vektora

Vektorski umnošci jediničnih vektora $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$:

$\vec{i}\times\vec{i} = \vec{j}\times\vec{j} = \vec{k}\times\vec{k} = \vec{0}$,

$\vec{i}\times\vec{j} = -\left(\vec{j}\times\vec{i}\right) = \vec{k}; \quad \vec{j}\times\vec{k} = -\left(\vec{k}\times\vec{j}\right) = \vec{i}; \quad \vec{k}\times\vec{i} = -\left(\vec{i}\times\vec{k}\right) = \vec{j}$.

Slijedi:

$$\vec{a}\times\vec{b} = \left(a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}\right)\times\left(b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k}\right) = \ldots\ldots =$$
$$= \underline{\left(a_y b_z - a_z b_y\right)\vec{i} + \left(a_z b_x - a_x b_z\right)\vec{j} + \left(a_x b_y - a_y b_x\right)\vec{k}}$$

Drukčiji način zapisivanja (pomoću determinante trećeg reda):

$$\vec{a}\times\vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = \ldots\ldots = \underline{\left(a_y b_z - a_z b_y\right)\vec{i} + \left(a_z b_x - a_x b_z\right)\vec{j} + \left(a_x b_y - a_y b_x\right)\vec{k}}$$

Mješoviti produkt

Neka su zadani vektori $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ svojim komponentama:

$$\vec{a} = \{a_x, a_y, a_z\} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}\ ,$$
$$\vec{b} = \{b_x, b_y, b_z\} = b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k}\ ,$$
$$\vec{c} = \{c_x, c_y, c_z\} = c_x\vec{i} + c_y\vec{j} + c_z\vec{k}\ .$$

Mješoviti produkt vektora $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ je broj

$$\left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \cdot \vec{c} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} \cdot \left(c_x\vec{i} + c_y\vec{j} + c_z\vec{k}\right) = \ldots =$$
$$\underline{= \left(a_y b_z - a_z b_y\right)c_x - \left(a_x b_z - a_z b_x\right)c_y + \left(a_x b_y - a_y b_x\right)c_z}$$

Drukčiji način zapisivanja (pomoću determinante trećeg reda):

$$\left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \cdot \vec{c} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} = \cdots = \underline{\left(a_y b_z - a_z b_y\right)c_x - \left(a_x b_z - a_z b_x\right)c_y + \left(a_x b_y - a_y b_x\right)c_z}$$

Sada je lako provjeriti valjanost sljedećeg teorema:

Teorem

Vektori $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ su komplanarni ako i samo ako je ispunjeno $\left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \cdot \vec{c} = 0$. □

Primjeri:

1. Odrediti volumen i visinu paralelepipeda kojeg razapinju vektori $\vec{a} = \{1, 2, 0\}$, $\vec{b} = \{-2, -2, 1\}$ i $\vec{c} = \{0,4,1\}$.

$$\pm V = \left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \cdot \vec{c} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -2 & -2 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \end{vmatrix} = \cdots = -2 \Rightarrow V = 2\,,$$

$$\left(\vec{a} \times \vec{b}\right) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = \cdots = 2\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k} \quad \Rightarrow \quad \left|\vec{a} \times \vec{b}\right| = 3 \quad \Rightarrow \quad v = \frac{\left|\left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \cdot \vec{c}\right|}{\left|\vec{a} \times \vec{b}\right|} = \frac{2}{3}.$$

2. Da li su vektori $\vec{a} = \{1, -4, 5\}$, $\vec{b} = \{2, 6, -8\}$ i $\vec{c} = \{-4,2,4\}$. komplanarni?

Drugim riječima pitamo se da li je $\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} = 0$?

$$\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} = -124 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \text{nisu.}$$

3. Ispitati da li su vektori $\vec{a} = \vec{i} + 2\vec{j}$, $\vec{b} = \vec{j} - 3\vec{k}$ i $\vec{c} = \vec{i} + 2\vec{k}$ linearno nezavisni.

   Da bi vektori bili linearno nezavisni njihova linearna kombinacija mora iščezavati na trivijalan način. Dakle, ispitujemo da li $\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c} = \vec{0} \Rightarrow \alpha = \beta = \gamma = 0$.

$$\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c} = \vec{0},$$
$$\alpha(\vec{i} + 2\vec{j}) + \beta(\vec{j} - 3\vec{k}) + \gamma(\vec{i} + 2\vec{k}) = \vec{0},$$
$$(\alpha + \gamma)\vec{i} + (2\alpha + \beta)\vec{j} + (-3\beta + 2\gamma)\vec{k} = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \alpha + \gamma = 0 \\ 2\alpha + \beta = 0 \\ -3\beta + 2\gamma = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \alpha = \beta = \gamma = 0.$$

4. Neka su $A(1,-2,2)$, $B(5,-6,2)$, $C(1,3,-1)$ vrhovi trokuta. Izračunati duljinu visine spuštene iz vrha B na stranicu AC.

   1. način:

$$\left|\overrightarrow{AC}\right| \cdot h = \left|\overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AB}\right|, \quad h = ?$$

$$\left|\overrightarrow{AC}\right| = \left|\{0,4,-3\}\right| = \sqrt{16 + 9} = 5$$

$$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \left|\{4,-5,0\}\right| = \sqrt{16 + 25} = \sqrt{41}$$

$$\overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AB} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 4 & -3 \\ 4 & -5 & 0 \end{vmatrix} = -15\vec{i} + 12\vec{j} + 16\vec{k}$$

$$\left|\overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{15^2 + 12^2 + 16^2} = 25 \quad \Rightarrow \quad h = \frac{25}{5}.$$

   2. način:

$$\left.\begin{aligned} \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} &= \left|\overrightarrow{AB}\right| \cdot \left|\overrightarrow{AC}\right| \cos\alpha = \sqrt{41} \cdot 5 \cos\alpha \\ \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} &= \{4,-5,0\} \cdot \{0,4,-3\} = -20 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \cos\alpha = -\frac{4}{\sqrt{41}}$$

$$\left|\overrightarrow{AD}\right| = \left|\overrightarrow{AB} \cdot \frac{\overrightarrow{AC}}{\left|\overrightarrow{AC}\right|}\right| = \left|\{4,-5,0\} \cdot \left\{0, \frac{4}{5}, -\frac{3}{5}\right\}\right| = |-4| = 4$$ ...duljina projekcije vektora $\overrightarrow{AB}$ na $\overrightarrow{AC}$

$$h^2 = \left|\overrightarrow{AB}\right|^2 - \left|\overrightarrow{AD}\right|^2 = 41 - 16 = 25 \Rightarrow \quad h = 5 \quad .$$

5. Izračunati površinu paralelograma čije su dijagonale $\vec{e} = \vec{m} + 2\vec{n}$ i $\vec{f} = 3\vec{m} + \vec{n}$, gdje je $|\vec{n}| = 1$, $|\vec{m}| = 2$ a $\vec{m}$ i $\vec{n}$ zatvaraju kut od 60°.

$\vec{a}$ i $\vec{b}$ su stranice paralelograma

$$\left.\begin{aligned} \vec{a} + \vec{b} &= \vec{e} \\ \vec{a} - \vec{b} &= \vec{f} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad \begin{aligned} \vec{a} &= \frac{\vec{e} + \vec{f}}{2} \\ \vec{b} &= \frac{\vec{e} - \vec{f}}{2} \end{aligned}$$

$$P = \left|\vec{a} \times \vec{b}\right| = \left|\frac{1}{2}\left(\vec{e} + \vec{f}\right) \times \frac{1}{2}\left(\vec{e} - \vec{f}\right)\right| = \frac{1}{4}\left|2\left(\vec{f} \times \vec{e}\right)\right|$$

$$P = \frac{1}{2}\left|\left(\vec{m} + 2\vec{n}\right) \times \left(3\vec{m} + \vec{n}\right)\right| = \frac{1}{2}\left|3\vec{m} \times \vec{m} + \vec{m} \times \vec{n} + 2\vec{n} \times 3\vec{m} + 2\vec{n} \times \vec{n}\right|$$

$$P = \frac{5}{2}\left|\vec{n} \times \vec{m}\right| = \frac{5}{2}\left|\vec{n}\right| \cdot \left|\vec{m}\right| \cdot sin\left[\angle\left(\vec{m}, \vec{n}\right)\right] = \frac{5}{2} \cdot 1 \cdot 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{5\sqrt{3}}{2} \, .$$