1 KOMPLEXA TAL

Uppfattningen om komplexa tal[1] uppstod i samband med upptäckten[2] av enkla ekvationer som inte har reella lösningar, t.ex.

$$x^2 = -3$$

eller

$$x^2 - 10x + 40 = 0\,.$$

De komplexa talen förde länge en suspekt tillvaro inom matematiken såsom nödlösningar till ekvationer som annars saknade lösningar. Situationen ändrades på 1700-talet då den komplexa analysen introducerades och matematiker såsom Euler påvisade nyttan av komplexa tal t.ex. vid lösning av differentialekvationer. År 1893 introducerade Kennelly[3] komplexa tal inom elektrotekniken. De komplexa talen fick en stor praktisk betydelse inom elektricitetsläran där de används för att modellera växelströmmar. Den komplexa variabeln kan samtidigt beskriva både amplitud och fas hos växelströmmen. Numera används komplexa tal och funktioner allmänt för beskrivning av signaler, oberoende av om dessa är elektriska eller inte.

Ett **komplext tal** z definieras som ett par (x, y) av reella tal x och y. Vi säger att det komplexa talet z består av en **reell del** x och en **imaginär del** y. Vi betecknar

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} z &= x \\ \operatorname{Im} z &= y \end{aligned} \tag{1.1}$$

Det komplexa tal z som består av reella delen $\operatorname{Re} z = 0$ och imaginära delen $\operatorname{Im} z = 1$ kallas imaginära enheten[4] och betecknas med i. Enligt matematisk standard skrivs imaginära enheten med antikva (rak stil) till skillnad från matematiska variabler som skrivs med kursiv stil. Den imaginära enheten har egenskapen

$$\mathrm{i}^2 = -1\,. \tag{1.2}$$

Varje komplext tal z kan skrivas i formen

$$z = x + \mathrm{i}y \tag{1.3}$$

eller som $z = x + y\mathrm{i}$. Observera att ett komplext tal z med imaginära delen $\operatorname{Im} z = 0$ är ett reellt tal, $z = x$, medan ett komplext tal med reella delen $\operatorname{Re} z = 0$ kallas ett imaginärt tal, $z = \mathrm{i}y$. Vi betecknar ännu att ett tal är komplext med mängdbeteckningen $z \in \mathbb{C}$.

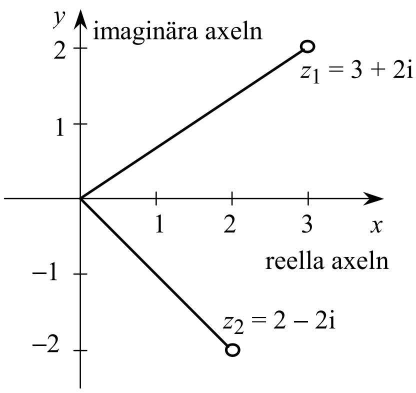
Observera att inom elektrotekniken används allmänt beteckningen j för imaginära enheten, därför att beteckningen i brukar användas som beteckning för elektrisk ström.

Det är vanligt att illustrera komplexa tal som punkter i ett rätvinkligt koordinatsystem där x-axeln kallas reella axeln och y-axeln kallas imaginära axeln. Detta xy-plan kallas det komplexa planet. Ett komplext tal ritas in i det komplexa planet med koordinaterna x och y.

---

[1] Carl Friedrich Gauss (1777 - 1855) introducerade termen "komplexa tal".
[2] Girolamo Cardano (1501 - 1576) var den första som använde komplexa tal som lösningar till ekvationer.
[3] Arthur Edwin Kennelly (1861 - 1939) konsulterande elektriker, Edison General Electric Company och General Electric Company, New York. Senare professor i elektroteknik i Harvard University och MIT.
[4] Leonhard Euler (1707 - 1783) introducerade beteckning i för imaginära enheten år 1777.

Ett sådant diagram kallas även ett *arganddiagram* efter amatörmatematikern Jean-Robert Argand[5].



Figur 1.1.1 Två komplexa tal, $z_1 = 3 + 2i$ och $z_2 = 2 - 2i$, avbildade i det komplexa talplanet.

1.1 Aritmetiska operationer på komplexa tal

Då vi använder oss av beteckningen $z = x + iy$ och definitionen (1.2) för komplexa enheten kan vi tillämpa normala aritmetiska operationer på komplexa tal.

Addition. Summan av två komplexa tal blir

$$z = z_1 + z_2 = (x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)\,. \tag{1.1.1}$$

Exempel 1.1.1. Addera $u = 5 + 2i$ och $v = 3 - 4i$. Summan är $z = u + v = 8 - 2i$.

Subtraktion. Skillnaden mellan två komplexa tal blir

$$z = z_1 - z_2 = (x_1 + iy_1) - (x_2 + iy_2) = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2)\,. \tag{1.1.2}$$

Exempel 1.1.2. Subtrahera $u = 5 + 2i$ från $v = 3 - 4i$. Skillnaden är $z = v - u = -2 - 6i$.

Multiplikation. Produkten $z_1 z_2$ blir

$$z = z_1 z_2 = (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1)\,. \tag{1.1.3}$$

Produkten följer normala multiplikationsregler med beaktande av att $i^2 = -1$.

Exempel 1.1.3. Multiplicera $u = 5 + 2i$ och $v = 3 - 4i$. Produkten är
$$z = uv = (5 + 2i)(3 - 4i) = (15 + 8) + i(-20 + 6) = 23 - 14i\,.$$

Division. Division är multiplikationens inversoperation. Kvoten $z = z_1/z_2$ definieras som det tal z som multiplicerat med z_2 ger z_1. I praktiken utförs division genom att kvoten förlängs med dividendens konjugattal $z_2^* = x_2 - iy_2$, varvid nämnaren blir ett reellt tal och kvoten kan förenklas till standardformen $z = x + iy$.

---

[5] Jean-Robert Argand (1768 - 1822), bokförsäljare i Paris, introducerade arganddiagrammet år 1806.

$$z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 + \mathrm{i}y_1}{x_2 + \mathrm{i}y_2} = \frac{(x_1 + \mathrm{i}y_1)(x_2 - \mathrm{i}y_2)}{(x_2 + \mathrm{i}y_2)(x_2 - \mathrm{i}y_2)} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} + \mathrm{i}\frac{x_2y_1 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}. \qquad (1.1.4)$$

Exempel 1.1.4. Dividera $u = 5 + 2\mathrm{i}$ med $v = 3 - 4\mathrm{i}$. Kvoten är

$$z = \frac{u}{v} = \frac{5+2\mathrm{i}}{3-4\mathrm{i}} = \frac{(5+2\mathrm{i})(3+4\mathrm{i})}{(3-4\mathrm{i})(3+4\mathrm{i})} = \frac{7+26\mathrm{i}}{9+16} = \frac{7}{25} + \frac{26}{25}\mathrm{i} = 0,28 + 1,04\mathrm{i}.$$

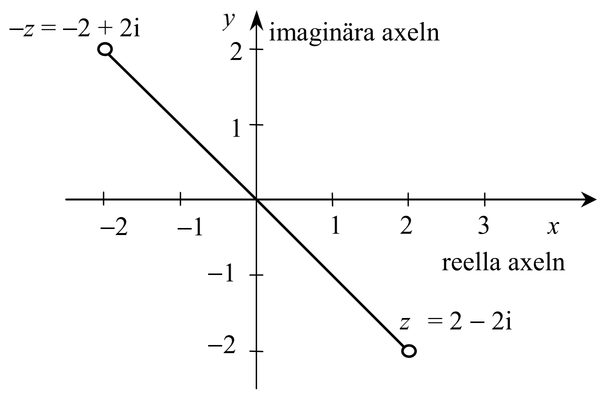
Exempel 1.1.5. $z = \frac{1}{\mathrm{i}} = \frac{1}{\mathrm{i}} \cdot \frac{\mathrm{i}}{\mathrm{i}} = \frac{\mathrm{i}}{-1} = -\mathrm{i}$.

Negation är detsamma som subtraktion från noll,

$$-z = -(x + \mathrm{i}y) = -x + \mathrm{i}(-y). \qquad (1.1.5)$$

Detta innebär att det negativa komplexa talet $-z$ ligger i det komplexa talplanet på linjen från z över origo, men på andra sidan origo.

Exempel 1.1.6. Ett komplext tal, $z = 2 - 2\mathrm{i}$. Dess negation är $-z = -2 + 2\mathrm{i}$.



Figur 1.1.2 Ett komplext tal $z = 2 - 2\mathrm{i}$ och dess negation, $-z = -2 + 2\mathrm{i}$, avbildade i det komplexa talplanet.

Absoluta värdet av ett komplext tal är ett reellt icke-negativt tal, som i det komplexa talplanet definieras som avståndet till origo. Enligt Pytagoras teorem är absoluta värdet av z då

$$|z| = |x + \mathrm{i}y| = \sqrt{x^2 + y^2}. \qquad (1.1.6)$$

1.2 Konjugattal

Betrakta ett komplext tal $z = x + \mathrm{i}y$. Konjugattalet till z är talet $x - \mathrm{i}y$ med beteckningen z^* eller $\bar{z}$.

$$\begin{aligned} z &= x + \mathrm{i}y \\ z^* &= x - \mathrm{i}y \end{aligned} \qquad (1.2.1)$$

Exempel 1.2.1. Konjugattalet till $z = 3 + 2\mathrm{i}$ är $z^* = 3 - 2\mathrm{i}$.

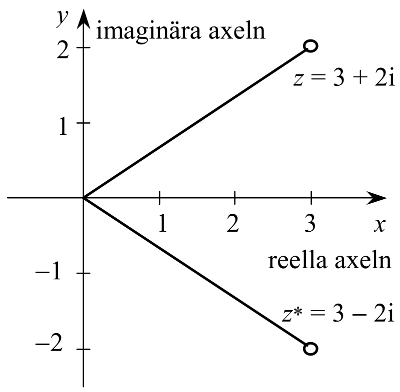
Konjugattalen är viktiga därför att produkten av ett komplext tal och dess konjugattal är alltid ett reellt tal,

$$zz^* = (x + \mathrm{i}y)(x - \mathrm{i}y) = x^2 + y^2 . \tag{1.2.2}$$

Detta utnyttjas t.ex. vid division med komplexa tal, se ekvation (1.1.4) och exempel 1.1.4. Vi observerar att

$$zz^* = |z|^2 . \tag{1.2.3}$$

Konjugattalet till ett reellt tal z är $z^* = z$ medan konjugattalet till ett rent imaginärt tal z är $z^* = -z$.

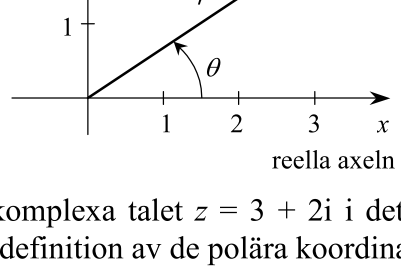


Figur 1.2.1 Det komplexa talet $z = 3 + 2\mathrm{i}$ och konjugattalet $z^* = 3 - 2\mathrm{i}$ i det komplexa talplanet.

1.3 Komplexa tal i polär form

Hittills har vi betraktat komplexa tal i form av en reell och en komplex del, $z = x + \mathrm{i}y$, och dess illustration i ett kartesiskt koordinatsystem, figur 1.1.1. Det är ofta praktiskt att presentera komplexa tal i polära koordinatsystem, figur 1.3.1. Sambandet mellan koordinaterna (x, y) i ett kartesiskt koordinatsystem och koordinaterna (r, θ) i ett polärt koordinatsystem är

$$\begin{aligned} x &= r\cos\theta \\ y &= r\sin\theta \end{aligned} . \tag{1.3.1}$$



Figur 1.3.1. Det komplexa talet $z = 3 + 2\mathrm{i}$ i det komplexa talplanet med definition av de polära koordinaterna.

Insättning av (1.3.1) i uttrycket för det komplexa talet ger den polära formen av ett komplext tal,

$$z = x + \mathrm{i}y = r\cos\theta + \mathrm{i}r\sin\theta = r(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)\,, \tag{1.3.2}$$

där r och θ definieras i figur 1.3.1 såsom avståndet till origo respektive vinkeln från x-axeln. Observera att θ alltid bör anges i radianer. Det komplexa talets absoluta värde betecknas här r. Den allmänna beteckningen är $|z|$,

$$|z| = r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{zz^*}\,. \tag{1.3.3}$$

θ kallas det komplexa talets argument och betecknas arg z. Vinkeln θ är emellertid inte entydig. Den har en periodicitet om 2π,

$$z = r(\cos(\theta + 2n\pi) + \mathrm{i}\sin(\theta + 2n\pi)) \text{ där } n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \tag{1.3.4}$$

representerar alla samma komplexa tal. Normalt ges θ i intervallet $-\pi < \theta \le \pi$ och kallas då argumentets principalvärde. I figur 1.3.1 ser vi att argumentet θ för det givna exemplet ges av $\theta = \arctan(y/x)$. Då arcustangensfunktionen endast ger värden i intervallet $(-\pi/2\,;\ \pi/2)$ måste emellertid argumentet ges en mera invecklad definition. Vi skall definiera argumentet som

$$\theta = \arg z = \begin{cases} \arctan\dfrac{y}{x}\,, & \text{om } x > 0 \\ \arctan\dfrac{y}{x} + \pi\,, & \text{om } x < 0,\ y \ge 0 \\ \arctan\dfrac{y}{x} - \pi\,, & \text{om } x < 0,\ y < 0 \end{cases} \tag{1.3.5}$$

vilket alltid resulterar i argumentets principalvärde

$$-\pi < \arg z \le \pi\,. \tag{1.3.6}$$

Vi observerar ännu att argumentet är odefinierat för talet $z = 0$.

Exempel 1.3.1. Talet $u = 5 + 2\mathrm{i}$ har absoluta värdet

$$r = |u| = \sqrt{5^2 + 2^2} = \sqrt{29} \approx 5{,}3852$$

och argumentet

$$\theta = \arctan(2/5) \approx 0{,}3805\,.$$

Talet $v = 3 - 2\mathrm{i}$ har absoluta värdet

$$r = |v| = \sqrt{3^2 + (-2)^2} = \sqrt{13} \approx 3{,}6056$$

och argumentet

$$\theta = \arctan(-2/3) \approx -0{,}5880\,.$$

Negation. Vilket är sambandet mellan de komplexa talen z och $-z$ i polär form? Talen z och $-z$ har samma absoluta värde, $|z|$, men argumentet är förskjutet med π, antingen

$$-z = -(x + \mathrm{i}y) = r\left[\cos(\theta + \pi) + \mathrm{i}\sin(\theta + \pi)\right], \tag{1.3.7}$$

eller

$$-z = -(x + \mathrm{i}y) = r\left[\cos(\theta - \pi) + \mathrm{i}\sin(\theta - \pi)\right], \tag{1.3.8}$$

beroende på vilkendera formen som ger principalvärdet.

Exempel 1.3.2. Betrakta ett komplext tal,

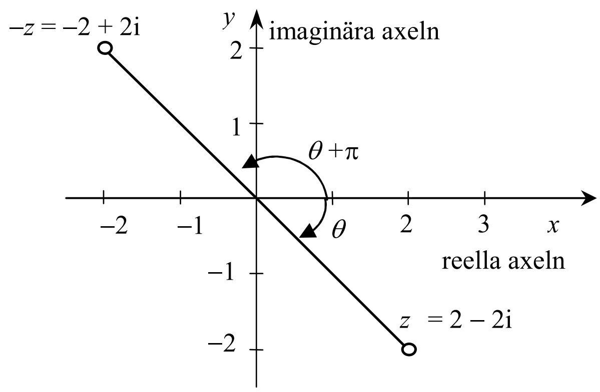
$$z = 2 - 2\mathrm{i} = \sqrt{8}\left[\cos(-\tfrac{\pi}{4}) + \mathrm{i}\sin(-\tfrac{\pi}{4})\right]$$

Dess negation är

$$-z = -2 + 2\mathrm{i} = \sqrt{8}\left[\cos(\tfrac{3\pi}{4}) + \mathrm{i}\sin(\tfrac{3\pi}{4})\right]$$

där argumentet är

$$\arg(-z) = \theta + \pi = -\frac{\pi}{4} + \pi = \frac{3\pi}{4}.$$



Figur 1.3.2 Ett komplext tal $z = 2 - 2\mathrm{i}$ och dess negation, $-z = -2 + 2\mathrm{i}$, avbildade i det komplexa talplanet.

1.3.1 Multiplikation och division i polär form

Vi skall multiplicera två komplexa tal i polär form. Vi har talen

$$z_1 = r_1(\cos\theta_1 + \mathrm{i}\sin\theta_1) \text{ och } z_2 = r_2(\cos\theta_2 + \mathrm{i}\sin\theta_2). \tag{1.3.9}$$

Produkten blir enligt ekvation (1.1.3)

$$z = z_1 z_2 = r_1 r_2\left[(\cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2) + \mathrm{i}(\sin\theta_1\cos\theta_2 + \cos\theta_1\sin\theta_2)\right]. \tag{1.3.10}$$

Genom att utnyttja formler för produkter av trigonometriska funktioner kan uttrycket förenklas till multiplikationsregeln

$$z = z_1 z_2 = r_1 r_2\left[\cos(\theta_1 + \theta_2) + \mathrm{i}\sin(\theta_1 + \theta_2)\right]. \tag{1.3.11}$$

Vi har alltså följande egenskaper vid multiplikation

$$|z_1 z_2| = |z_1||z_2|, \tag{1.3.12}$$

$$\arg(z_1 z_2) = \arg z_1 + \arg z_2, \tag{1.3.13}$$

där summan av argumenten vid behov kan justeras till sitt principalvärde genom att addera eller subtrahera 2π.

Man bör observera att i vissa praktiska tillämpningar t.ex. inom signalbehandling har argument utanför intervallet $[\pi, -\pi)$ en signifikant betydelse och då bör man inte justera argumentet till sitt principalvärde.

Vid division med komplexa tal är kvoten $z = z_1/z_2$ det komplexa tal z som satisfierar ekvationen

$$zz_2 = z_1 \,. \tag{1.3.14}$$

Kombination av ekvation (1.3.12), (1.3.13) och (1.3.14) ger

$$|zz_2| = |z||z_2| = |z_1| \tag{1.3.15}$$

$$\arg(zz_2) = \arg(z) + \arg(z_2) = \arg(z_1)\,. \tag{1.3.16}$$

Ekvation (1.3.15) och (1.3.16) ger reglerna för division i polär form,

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|} \tag{1.3.17}$$

$$\arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \arg(z_1) - \arg(z_2)\,, \tag{1.3.18}$$

som igen kan justeras till sitt principalvärde genom att vid behov addera eller subtrahera 2π. Vi kan nu formulera divisionsregeln för de komplexa talen (1.3.9),

$$z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}\left[\cos(\theta_1 - \theta_2) + \mathrm{i}\sin(\theta_1 - \theta_2)\right]. \tag{1.3.19}$$

Formlerna (1.3.11) och (1.3.19) ger oss direkt en formel för heltalspotenser av komplexa tal,

$$z^n = r^n\left[\cos(n\theta) + \mathrm{i}\sin(n\theta)\right], \tag{1.3.20}$$

som gäller både för positiva och negativa heltal.

Exempel 1.3.2. $z^0 = (x + \mathrm{i}y)^0 = \left[r(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)\right]^0 = r^0(\cos 0 + \mathrm{i}\sin 0) = 1$.

Vi kan observera en fördel med den polära formen jämfört med den ursprungliga formen $z = x + \mathrm{i}y$. Multiplikation och speciellt division är mycket enklare i den polära formen och vi får en enkel formel för potensering.

1.3.2 Rötter till komplexa tal

Vi skall definiera n:e-roten av ett komplext tal som ett tal u, sådant att

$$z = u^n\,, \tag{1.3.21}$$

där n är ett positivt heltal (n = 1, 2, 3, ...) . Vi betecknar n:e-roten med

$$u = \sqrt[n]{z}\,, \tag{1.3.22}$$

med den vanliga förenklingen att kvadratroten kan skrivas som $u = \sqrt{z}$. Med denna definition kommer n:e-roten av ett komplext tal inte att vara entydig. n:e-roten av ett komplext tal har alltid n värden. Vi har här en skillnad till den reella analysens n:e-rot, som anses ha ett entydigt reellt värde, eller i vissa fall inget värde.

Ekvation (1.3.20) kan användas för att bestämma rötterna till komplexa tal. Vi inför först beteckningar för de polära formerna av z och u,

$$\begin{aligned} z &= r_z(\cos\theta_z + \mathrm{i}\sin\theta_z) \\ u &= r_u(\cos\theta_u + \mathrm{i}\sin\theta_u) \end{aligned}$$

och skriver sedan om ekvation (1.3.21) med hjälp av ekvation (1.3.20)

$$r_z(\cos\theta_z + \mathrm{i}\sin\theta_z) = r_u^n(\cos n\theta_u + \mathrm{i}\sin n\theta_u)\,.$$

Detta ger oss två ekvationer för att bestämma r_u och θ_u,

$$\begin{cases} r_z = r_u^n \\ \theta_z = n\theta_u \end{cases}.$$

Den första ekvationen ger lösningen $r_u = \sqrt[n]{r_z}$, som här är den entydiga reella n:e-roten, ty både r_u och r_z är reella positiva tal. Den andra ekvationen har oändligt många lösningar då vi beaktar argumentens periodicitet. Vi är endast intresserade av de värden hos θ_u som ger distinkta komplexa tal. Dessa värden är

$$\theta_u = \frac{\theta_z}{n} + \frac{2k\pi}{n}\,,$$

där k är heltal $k = 0, 1, 2, ..., n - 1$. Vi kan nu ge formeln för n:e-roten av ett komplext tal $z \neq 0$,

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\theta + 2k\pi}{n} + \mathrm{i}\sin\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right), \quad k = 0, 1, \ldots, n-1\,. \tag{1.3.23}$$

Vid behov kan argumentet justeras till sitt principalvärde genom att subtrahera 2π.

Ekvation (1.3.23) ger n distinkta värden för n:e-roten av ett komplext tal. Dessa talvärden ligger i det komplexa talplanet på en cirkel med medelpunkten i origo och med radien $\sqrt[n]{r}$. De är dessutom jämnt fördelade på cirkeln, så att vinkeln mellan punkterna är $2\pi/n$.

Kvadratroten $u = \sqrt{z}$ av ett komplext tal har två värden

$$u_1 = \sqrt{r}\left(\cos\frac{\theta}{2} + \mathrm{i}\sin\frac{\theta}{2}\right) \quad \text{och} \quad u_2 = \sqrt{r}\left[\cos\left(\frac{\theta}{2} + \pi\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{\theta}{2} + \pi\right)\right].$$

Vi observerar att $u_2 = -u_1$. Således kan vi förenkla formeln för kvadratroten av ett komplext tal till

$$\sqrt{z} = \pm\sqrt{r}\left(\cos\frac{\theta}{2} + \mathrm{i}\sin\frac{\theta}{2}\right)\,. \tag{1.3.24}$$

Exempel 1.3.3. Kvadratrötter av några komplexa tal.

$$z = 4 = 4(\cos 0 + \mathrm{i}\sin 0)$$

$$u = \sqrt{z} = \pm\sqrt{4}\left(\cos\frac{0}{2} + \mathrm{i}\sin\frac{0}{2}\right) = \pm 2(1 + \mathrm{i}\cdot 0) = \pm 2$$

$$z = \mathrm{i} = \cos\frac{\pi}{2} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{2}$$

$$v=\sqrt{\mathrm{i}}=\pm\left[\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)+\mathrm{i}\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right]=\pm\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\mathrm{i}\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}(1+\mathrm{i})$$

$$z=-1=\cos\pi+\mathrm{i}\sin\pi$$

$$w=\sqrt{-1}=\pm\left[\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)+\mathrm{i}\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right]=\pm(0+\mathrm{i}\cdot 1)=\pm\mathrm{i}$$

Exempel 1.3.4. Komplexa kubikroten av ett reellt tal.

$$z=27=27(\cos 0+\mathrm{i}\sin 0)$$

$$u=\sqrt[3]{27}=3\left(\cos\frac{0+2k\pi}{3}+\mathrm{i}\sin\frac{0+2k\pi}{3}\right),\quad k=0,1,2$$

$$u_1=3(\cos 0+\mathrm{i}\sin 0)=3$$

$$u_2=3\left(\cos\frac{2\pi}{3}+\mathrm{i}\sin\frac{2\pi}{3}\right)=3\left(-\frac{1}{2}+\mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$u_3=3\left(\cos\frac{4\pi}{3}+\mathrm{i}\sin\frac{4\pi}{3}\right)=3\left(-\frac{1}{2}-\mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

Exempel 1.3.5. Bestäm alla lösningar till tredjegradsekvationen

$$x^3=1.$$

Lösningarna ges av

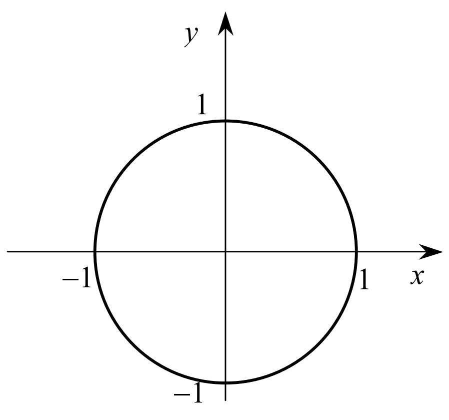
$$x=\sqrt[3]{1},$$

således

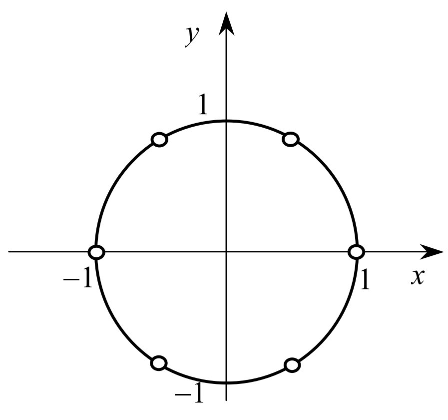
$$x_1=1,\ x_2=-\frac{1}{2}+\mathrm{i}\frac{1}{2}\sqrt{3},\ x_3=-\frac{1}{2}-\mathrm{i}\frac{1}{2}\sqrt{3}.$$

1.3.3 Enhetscirkeln

Ekvationen $|z|=1$ satisfieras av alla komplexa tal vars avstånd till origo i det komplexa talplanet är 1. Ekvationen beskriver en cirkel med radien 1 i det komplexa planet. Denna cirkel kallas enhetscirkeln.



Figur 1.3.3. Enhetscirkeln i komplexa talplanet.

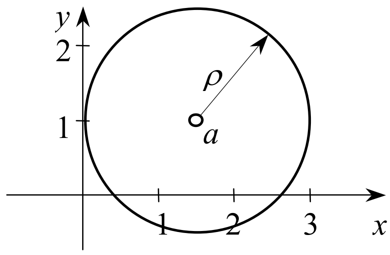


Figur 1.3.4. Enhetscirkeln med alla lösningar till ekvationen $x^6=1$.

Exempel 1.3.6. Ekvationen $x^n = 1$ har n lösningar som är jämnt utspridda på enhetscirkeln i komplexa planet. T.ex. ekvationen $x^6 = 1$ har lösningarna $x = \sqrt[6]{1}$ med $|x| = 1$ och $\arg x = 0, \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \pi, -\frac{2\pi}{3}, -\frac{\pi}{3}$, som alla ligger på enhetscirkeln, se figur 1.3.4.

Avståndet mellan två punkter z och a i komplexa planet är $|z-a|$. En cirkel med radien ρ och medelpunkt i det komplexa talet a beskrivs av ekvationen

$$|z-a| = \rho . \tag{1.3.25}$$



Figur 1.3.5. En cirkel med radien ρ och medelpunkten a i komplexa planet har ekvationen $|z-a| = \rho$.

Olikheten

$$|z-a| < \rho \tag{1.3.26}$$

beskriver alla punkter inne i cirkeln. Dessa punkter kallas en omgivning till a.

1.4 Komplexa funktioner

En komplex funktion

$$w = f(z) \tag{1.4.1}$$

är en regel som till varje värde z i en komplex värdemängd hänför ett komplext värde w. T.ex. $w = z^2 + 3z$ är en komplex funktion av z. Enligt definitionen på funktion motsvaras varje värde z av ett enda värde w. Den komplexa kvadratroten $w = \sqrt{z}$ är således inte en funktion, då varje värde z motsvaras av två värden w.

Variabeln z kan beskrivas med två reella tal, x och y, som $z = x + \mathrm{i}y$ och likaså kan w beskrivas med två reella tal, u och v, som $w = u + \mathrm{i}v$. Den komplexa funktionen $w = f(z)$ kan då beskrivas med två reella funktioner som

$$w = f(z) = u(x, y) + \mathrm{i}v(x, y) . \tag{1.4.2}$$

Den komplexa funktionen är således ekvivalent med ett par av reella funktioner i två variabler, $u(x, y)$ och $v(x, y)$. Detta ger en grund för behandling av komplexa funktioner.

Exempel 1.4.1. Skriv funktionen $f(z) = \dfrac{1}{z}$ i formen (1.4.2).

$$f(z) = \frac{1}{z} = \frac{1}{x+\mathrm{i}y}\frac{x-\mathrm{i}y}{x-\mathrm{i}y} = \frac{x-\mathrm{i}y}{x^2+y^2} = \frac{x}{x^2+y^2} - \mathrm{i}\frac{y}{x^2+y^2} = u(x,y) + \mathrm{i}v(x,y).$$

Således är $u(x,y) = \dfrac{x}{x^2+y^2}$ och $v(x,y) = -\dfrac{y}{x^2+y^2}$.

1.4.1 Gränsvärde och kontinuitet

Vi skall betrakta en komplex funktion $f(z)$, som är definierad i en omgivning av punkten z_0 i det komplexa planet, men eventuellt inte i punkten z_0. Vi definierar gränsvärdet

$$g = \lim_{z\to z_0} f(z) \tag{1.4.3}$$

som det värde g i värdemängden som $f(z)$ närmar sig då z närmar sig z_0, oberoende från vilken riktning z närmar sig z_0. Gränsvärdet existerar alltså endast om $f(z)$ närmar sig samma värde g från alla riktningar.

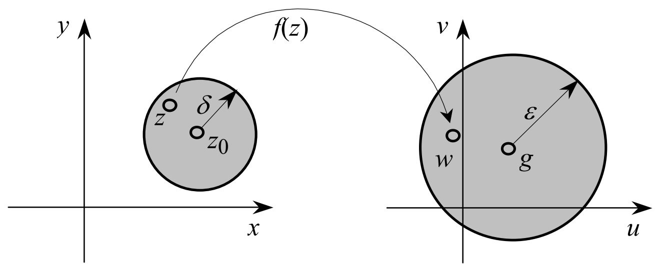
Matematiskt definierar vi gränsvärdet på följande sätt. Gränsvärdet g enligt ekvation (1.4.3) existerar om vi för varje positivt reellt tal ε kan finna att positivt reellt tal δ sådant att för alla tal $z \neq z_0$ i omgivningen $|z - z_0| < \delta$ finns motsvarande funktionsvärde i omgivningen

$$|f(z) - g| < \varepsilon. \tag{1.4.4}$$

En komplex funktion $f(z)$ är kontinuerlig i en punkt $z = z_0$ om funktionen är definierad i denna punkt och

$$\lim_{z\to z_0} f(z) = f(z_0). \tag{1.4.5}$$

En funktion sägs vara kontinuerlig i en definitionsmängd om den är kontinuerlig i alla punkter i denna mängd.



Figur 1.4.1. Omgivningen $|z - z_0| < \delta$ i definitionsmängden och omgivningen $|f(z) - g| < \varepsilon$ i den komplexa funktionens $w = f(z)$ värdemängd.

Exempel 1.4.2. Funktionen $f(z) = \dfrac{1}{z}$ är inte kontinuerlig i $\mathbb{C}$, ty den är odefinierad i $z = 0$.

1.4.2 Derivatan av en komplex funktion

Derivatan $f'(z_0)$ av funktionen $f(z)$ i punkten $z = z_0$ definieras som

$$f'(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}. \tag{1.4.6}$$

Funktionen $f(z)$ är deriverbar i punkten $z = z_0$ om gränsvärdet (1.4.6) existerar. Vi kan även beteckna derivatan med $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} f(z)$. Till skillnad från derivatan av reella funktioner beskriver inte derivatan av komplexa funktioner någon vinkelkoefficient eller lutning hos grafen.

Exempel 1.4.3. Bestäm derivatan av funktionen $f(z) = z^2$.

$$f'(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{z^2 - z_0^2}{z - z_0} = \lim_{z \to z_0} \frac{(z - z_0)^2 + 2z_0(z - z_0)}{z - z_0} =$$
$$= \lim_{z \to z_0} (z - z_0 + 2z_0) = 2z_0.$$

Gränsvärdet existerar för alla $z_0 \in \mathbb{C}$ varför derivatan är $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} z^2 = 2z$ för alla $z \in \mathbb{C}$.

Då gränsvärden uppför sig välartat vid aritmetiska operationer kommer derivatan av komplexa funktioner att följa samma regler som derivatan av reella funktioner. Så har vi t.ex. följande deriveringsregler som är analoga med motsvarande regler för reella funktioner:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}[f(z) \pm g(z)] = f'(z) \pm g'(z), \tag{1.4.7}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}[f(z)g(z)] = f'(z)g(z) \pm f(z)g'(z), \tag{1.4.8}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{f'(z)g(z) - f(z)g'(z)}{[g(z)]^2}, \tag{1.4.9}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\{f[g(z)]\} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}g} f[g(z)] \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} g(z). \tag{1.4.10}$$

Derivator av rationella funktioner av komplexa variabler är desamma som motsvarande derivator av reella variabler. Detsamma gäller för rotuttryck så länge vi betraktar ett enskilt värde av roten i fråga.

1.4.3 Analytiska funktioner

En komplex funktion $f(z)$ sägs vara analytisk i $z = z_0$ om den är definierad i $z = z_0$ och om den är deriverbar och derivatan är kontinuerlig i en omgivning till $z = z_0$.

Alla rationella funktioner, d.v.s. funktioner $f(z)/g(z)$ där $f(z)$ och $g(z)$ är polynom, är analytiska i det komplexa planet, förutom i de punkter där $g(z) = 0$.

1.5 Exponentialfunktionen

Vi skall definiera exponentialfunktionen e^z för komplexa tal, även betecknad med exp z eller exp(z). Då man utökar definitionsmängden för en konventionell funktion, e^x från de reella talen till en komplex funktion e^z bör den nya definitionen uppfylla vissa villkor, t.ex. bör

- $\mathrm{e}^z = \mathrm{e}^x$ för $z = x \in \mathbb{R}$.
- e^z bör vara en analytisk funktion och derivatan bör överensstämma med den reella exponentialfunktionens derivata, d.v.s. $(\mathrm{e}^z)' = \mathrm{e}^z$.
- Potensserieutvecklingen $\mathrm{e}^z = 1 + z + \dfrac{z^2}{2!} + \dfrac{z^3}{3!} + \cdots$ bör gälla även för den nya funktionen.

En definition som uppfyller dessa krav och har ytterligare egenskaper gemensamt med den reella exponentialfunktionen är exponentialfunktionen av den komplexa variabeln $z = x + \mathrm{i}y$,

$$\mathrm{e}^z = \mathrm{e}^x(\cos y + \mathrm{i}\sin y)\,. \tag{1.5.1}$$

Om z är en reell variabel, $z = z + \mathrm{i}0$, får vi $\mathrm{e}^z = \mathrm{e}^x(\cos y + \mathrm{i}\sin y) = \mathrm{e}^x(\cos 0 + \mathrm{i}\sin 0) = \mathrm{e}^x$. Vi ser alltså att den komplexa exponentialfunktionen reduceras till den reella exponentialfunktionen för en reell variabel. Exponentialfunktionens derivata är

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\mathrm{e}^z = \mathrm{e}^z\,. \tag{1.5.2}$$

Härledning av derivatan ligger utanför ramen för detta kompendium. Potensserieutvecklingen ovan gäller även om även denna härledning inte heller kan göras här. Däremot skall vi undersöka produkten av två exponentialfunktioner

$$\begin{aligned}\mathrm{e}^{z_1}\mathrm{e}^{z_2} &= \mathrm{e}^{x_1}(\cos y_1 + \mathrm{i}\sin y_1)\mathrm{e}^{x_2}(\cos y_2 + \mathrm{i}\sin y_2) = \\ &\quad \mathrm{e}^{x_1}\mathrm{e}^{x_2}\left[(\cos y_1 \cos y_2) - \sin y_1 \sin y_2 + \mathrm{i}(\cos y_1 \sin y_2 + \sin y_1 \cos y_2)\right].\end{aligned}$$

e^{x_1} och e^{x_2} är reella exponentialfunktioner, varför $\mathrm{e}^{x_1}\mathrm{e}^{x_2} = \mathrm{e}^{x_1+x_2}$. Genom att använda trigonometriska formler för produkter av sinus- och cosinusfunktioner kan uttrycket skrivas som

$$\mathrm{e}^{z_1}\mathrm{e}^{z_2} = \mathrm{e}^{x_1+x_2}\left[\cos(y_1 + y_2) + \mathrm{i}\sin(y_1 + y_2)\right] = \mathrm{e}^{z_1+z_2}\,, \tag{1.5.3}$$

vilket överensstämmer med motsvarande egenskap hos den reella exponentialfunktionen.

Sätter vi $z = \mathrm{i}y$ in i definitionen (1.5.1) får vi Eulers formel,

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}y} = \cos y + \mathrm{i}\sin y\,, \tag{1.5.4}$$

som anger det viktiga sambandet mellan trigonometriska funktioner och komplexa tal. Vi tar ännu absoluta värdet av Eulers formel,

$$\left|\mathrm{e}^{\mathrm{i}y}\right| = \left|\cos y + \mathrm{i}\sin y\right| = \sqrt{\cos^2 y + \sin^2 y} = 1\,, \tag{1.5.5}$$

vilket är ett viktigt resultat.

Den komplexa exponentialfunktionen har väldigt långt samma egenskaper som den reella exponentialfunktionen. I ett avseende skiljer den sig märkbart: den är periodisk med perioden 2π längs den imaginära axeln. Periodiciteten ges direkt ur definitionen (1.5.1).

1.5.1 Komplexa tal i polär form

Vi kan fråga oss varför det är viktigt att beskriva den komplexa exponentialfunktionen i denna elementära beskrivning av komplexa tal. Orsaken är att det är vanligt att komplexa tal beskrivs i form av exponentialfunktioner. Vi skall rekapitulera den polära formen av komplexa tal, ekvation (1.3.2),

$$z = x + \mathrm{i}y = r(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)\,. \tag{1.5.6}$$

Kombination med Eulers formel, ekvation (1.5.4), ger den polära formen av komplexa tal i form av en exponentialfunktion,

$$z = x + \mathrm{i}y = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} \tag{1.5.7a}$$

eller med nomenklaturen från ekvation (1.3.3-4) som

$$z = x + \mathrm{i}y = |\,z\,|\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\arg z} \tag{1.5.7b}$$

Om vi använder oss av egenskapen (1.5.3) på det komplexa talet $z = x + \mathrm{i}y$ kan vi skriva exponentialfunktionen av z som

$$\mathrm{e}^{z} = \mathrm{e}^{x}\mathrm{e}^{\mathrm{i}y}\,. \tag{1.5.8}$$

Då vi tar absoluta värdet av (1.5.8) med användning av ekvation (1.5.5) kan vi visa att

$$\left|\,\mathrm{e}^{z}\,\right| = \mathrm{e}^{x}\,. \tag{1.5.9}$$

Exempel 1.5.1. Talet $z = 1 + \mathrm{i}\sqrt{3}$ har absoluta värdet

$$r = |\,z\,| = \sqrt{1+3} = 2$$

och argumentet

$$\theta = \arctan(\sqrt{3}\,/\,1) = \pi\,/\,3\,.$$

Vi kan skriva talet som

$$z = 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/3}\,.$$

Talet $u = -\sqrt{3} - \mathrm{i}$ har absoluta värdet

$$r = |\,u\,| = \sqrt{3+1} = 2$$

och argumentet

$$\theta = \arctan(1\,/\,\sqrt{3}) - \pi = -5\pi\,/\,6\,.$$

Observera att vi har subtraherat π i argumentet enligt ekvation (1.3.5) då både x och y är negativa. Vi kan skriva talet som

$$u = 2\mathrm{e}^{-5\mathrm{i}\pi/6}\,.$$

Exempel 1.5.2. Multiplicera talen $z = 1 + \mathrm{i}\sqrt{3}$ och $u = -\sqrt{3} - \mathrm{i}$. Vi använder oss av formlerna för multiplikation av komplexa tal i polär form, ekvation (1.3.12-13). Produkten är

$$zu = (1 + \mathrm{i}\sqrt{3})(-\sqrt{3} - \mathrm{i}) = 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/3}2\mathrm{e}^{-\mathrm{i}5\pi/6} = 2\cdot 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\pi/3-5\pi/6)} = 4\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/2},$$

vilket är detsamma som det rent imaginära talet −4i.

Exempel 1.5.3. Dividera $u = 5 + 2\mathrm{i}$ med $v = 3 - 4\mathrm{i}$ (se exempel 1.1.4). Talen kan skrivas om i polär form som

$$u = |u|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\arg u} = \sqrt{5^2 + 2^2}\cdot\mathrm{e}^{\mathrm{i}\arctan(2/5)} \approx 5{,}3852\cdot\mathrm{e}^{0{,}3805\mathrm{i}}$$

och

$$v = |v|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\arg v} = \sqrt{3^2 + (-4)^2}\cdot\mathrm{e}^{\mathrm{i}\arctan(-4/3)} \approx 5\cdot\mathrm{e}^{-0{,}9273\mathrm{i}}.$$

Kvoten blir enligt ekvation (1.3.17-18),

$$z = \frac{u}{v} = \left|\frac{u}{v}\right|\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\arg u - \arg v)} \approx \frac{5{,}3852}{5}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(0{,}3805+0{,}9273)} \approx 1{,}0770\cdot\mathrm{e}^{1{,}3078\mathrm{i}}.$$

Vi kan jämföra resultatet med exempel 1.1.4 genom att sätta in absoluta värdet och argumentet för kvoten z i formeln för den polära formen av komplexa tal, ekvation (1.3.2),

$$z = r(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta) \approx 1{,}0770(\cos 1{,}3078 + \mathrm{i}\sin 1{,}3078) \approx$$
$$1{,}0770(0{,}2600 + 0{,}9656\mathrm{i}) \approx 0{,}2800 + 1{,}0400\mathrm{i}.$$

Formlerna för heltalspotenser (1.3.20) och n:e-rötter (1.3.23) kan nu kompletteras med motsvarande exponentialformer

$$z^n = r^n\left[\cos(n\theta) + \mathrm{i}\sin(n\theta)\right] = r^n\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta}, \tag{1.5.10}$$

och

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\theta + 2k\pi}{n} + \mathrm{i}\sin\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right) = \sqrt[n]{r}\cdot\exp\left(\mathrm{i}\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right), \quad k = 0, 1, \ldots, n-1. \tag{1.5.11}$$

Vid behov kan argumenten justeras till sina principalvärden genom att subtrahera en lämplig multipel av 2π.

Exempel 1.5.4. Eulers formel, ekvation (1.5.4) ger en intressant möjlighet att beskriva reella trigonometriska funktioner med komplexa exponentialfunktioner. Vi skriver Eulers formel som

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} = \cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta.$$

För negativa argumentet gäller

$$\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta} = \cos(-\theta) + \mathrm{i}\sin(-\theta) = \cos\theta - \mathrm{i}\sin(\theta).$$

Adderar vi dessa uttryck får vi

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta} = 2\cos\theta$$

och således

$$\cos\theta = \frac{1}{2}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}).$$

Om vi alternativt subtraherar $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ och $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}$ får vi uttrycket för $\sin\theta$

$$\sin\theta = \frac{1}{2\mathrm{i}}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}).$$

Formlerna som härleds i exempel 1.5.4 är inte några kuriositeter. De är grundläggande för frekvensanalysen inom signalbehandlingen och har således stor praktisk användning. Exempel 1.5.5 nedan visar hur vi kan härleda formler för reella trigonometriska funktioner genom att utnyttja den komplexa eponentialfunktionen.

Exempel 1.5.5. Bevisa formeln $\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$, som vi kan hitta i formelsamlingen.

$$2\cos^2\alpha - 1 = 2\left[\frac{1}{2}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha})\right]^2 - 1 = \frac{1}{2}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha})^2 - 1 =$$

$$\frac{1}{2}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\alpha} + 2\mathrm{e}^{0} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\alpha}) - 1 = \frac{1}{2}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\alpha} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\alpha}) = \cos 2\alpha.$$

Sammanfattning av kapitel 1: Komplexa tal.

$$\mathrm{i}^2 = -1$$

$$z = x + \mathrm{i}y = r(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta) = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$$

$$r = |\,z\,| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\theta = \arg z = \begin{cases} \arctan\dfrac{y}{x}, & \text{om } x > 0 \\ \arctan\dfrac{y}{x} + \pi, & \text{om } x < 0,\ y \geq 0 \\ \arctan\dfrac{y}{x} - \pi, & \text{om } x < 0,\ y < 0 \end{cases}$$

$$z = x + \mathrm{i}y, \quad z^* = x - \mathrm{i}y \quad \Rightarrow \quad zz^* = x^2 + y^2$$

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 \left[\cos(\theta_1 + \theta_2) + \mathrm{i}\sin(\theta_1 + \theta_2)\right] = r_1 r_2 \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta_1 + \theta_2)}$$

$$z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}\left[\cos(\theta_1 - \theta_2) + \mathrm{i}\sin(\theta_1 - \theta_2)\right] = \frac{r_1}{r_2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta_1 - \theta_2)}$$

$$|z| = \left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$$

$$z^n = r^n\left[\cos(n\theta) + \mathrm{i}\sin(n\theta)\right] = r^n \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta}$$

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\theta + 2k\pi}{n} + \mathrm{i}\sin\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right) = \sqrt[n]{r}\cdot\exp\left(\mathrm{i}\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right), \quad k = 0, 1, \ldots, n-1$$

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} = \cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta$$

$$\cos\theta = \frac{1}{2}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta})$$

$$\sin\theta = \frac{1}{2\mathrm{i}}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta})$$