



KLEBER SEBASTIÃO JULIANI



GEOMETRIA ESPACIAL
UMA VISÃO DO ESPAÇO PARA A VIDA

LONDRINA
2008

KLEBER SEBASTIÃO JULIANI

GEOMETRIA ESPACIAL
UMA VISÃO DO ESPAÇO PARA A VIDA

Proposta de produção didática pedagógica
apresentada ao Programa de Desenvolvimento
Educativo da Secretaria de Estado da
Educação do Paraná.

Orientador: Prof. Dr. Ulysses Sodré

LONDRINA
2008

JULIANI, Kleber Sebatião. **Geometria Espacial**: uma visão do espaço para a vida. 2008. 134p. Proposta de produção didática pedagógica apresentada ao Programa de Desenvolvimento Educacional da Secretaria de Estado da Educação do Paraná – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2008.

RESUMO

Esta proposta apresenta reflexões históricas e conceituais acerca da geometria espacial para discussões junto a professores de matemática envolvidos com a educação da Rede Pública Estadual do Paraná. Os conteúdos trabalhados nesta proposta são: espaço tridimensional, lugar geométrico, método da exaustão, conceito de poliedros, relação de Euler, prisma, pirâmide e tronco de pirâmide, cilindro, cone e tronco de cone e esfera. A forma de apresentação destes conteúdos compreende um breve contexto histórico seguido de texto de contextualização, um estudo de cada uma das figuras geométricas e sugestões de atividades. Os dados apresentados foram coletados por meio de pesquisa bibliográfica em livros e sites da Internet. Esta proposta tem como objetivo o estudo da geometria espacial relacionando-a ao dia a dia dos alunos. Esperando assim que esta venha contribuir de forma concreta para o processo de ensino e aprendizagem.

Palavras chave: Geometria Espacial, prisma, pirâmide, tronco de pirâmide, cone, tronco de cone, cilindro, esfera,

JULIANI, Kleber Sebatião. **Space geometry**: a vision of space for life. 2008. 134p. Proposta de produção didática pedagógica apresentada ao Programa de Desenvolvimento Educacional da Secretaria de Estado da Educação do Paraná – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2008.

ABSTRACT

This proposal presents historical and conceptual thinking about the spatial geometry for discussions with teachers of math involved with the education of the public state of Parana. The content worked in this proposal are: three-dimensional space, locus, method of exhaustion, concept of polyhedra, Euler's relation, prism, pyramid and torso of pyramid, cylinder, cone and trunk of cone and sphere. The manner of presentation of content includes a brief historical context followed by text of contextualization, a study of each of the geometric figures and suggestions for activities. The data presented were collected through a literature search on books and Internet sites. This proposal aims to study the geometry of space linking it to the everyday life of students. Hoping that this will contribute concretely to the process of teaching and learning.

Key words: Geometry Space, prism, pyramid, trunk of pyramid, cone, trunk cone, cylinder, sphere.

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO	10
1 CONCEITOS FUNDAMENTAIS	13
1.1 Espaço tridimensional	13
1.2 Lugar geométrico	17
1.3 Método da exaustão	18
1.4 Figuras geométricas	19
1.5 Poliedros	20
1.6 Relação de Euler	21
1.7 Sugestão de atividade inicial	22
Referências Bibliográficas	24
2 PRISMA	25
Introdução	25
2.1 Fatos Históricos	25
2.2 Texto de motivação: Embalagens Secundárias de Medicamentos	26
2.3 Conceito geométrico do prisma	27
2.4 Elementos do prisma	30
2.5 Classificação dos prismas	30
2.5.1 Classificação pela base	31
2.5.2 Classificação pela inclinação	31
2.5.3 Prisma regular	32
2.5.4 Casos especiais de prismas quadrangulares	32
2.6 Planificação do prisma	33
2.6.1 Planificação do prisma de base quadrangular	34
2.6.2 Planificação do prisma triangular	34
2.7 Relações matemáticas no prisma	35
2.7.1 Cálculo da área do paralelepípedo	35
2.7.2 Cálculo da diagonal do paralelepípedo	36
2.7.3 Cálculo do volume do prisma	38
2.8 Sugestões de atividades	38
2.8.1 Atividade experimental: cálculo do volume do prisma	38
2.8.2 Atividade experimental: familiarização com as fórmulas do prisma	40
2.8.3 Atividade de aplicação: situações-problema	41
2.8.4 Atividade de pesquisa: produção de texto	44
Referências bibliográficas	44

3 PIRÂMIDE	46
Introdução	46
3.1 Fatos históricos	46
3.2 Texto de motivação: Telhado com quatro águas	47
3.3 Conceito geométrico de pirâmide	50
3.4 Elementos da pirâmide	52
3.5 Classificação das pirâmides	53
3.5.1 Classificação pela base	53
3.5.2 Classificação pela inclinação	54
3.6 Planificação da pirâmide	54
3.6.1 Modelo de planificação do tetraedro	54
3.6.2 Modelo de planificação da pirâmide quadrangular	55
3.7 Relações matemáticas na pirâmide	55
3.7.1 Relações matemáticas no tetraedro	55
3.7.2 Relações matemáticas na pirâmide quadrangular	58
3.8 Tronco de pirâmide	61
3.8.1 Planificação do tronco da pirâmide	62
3.8.2 Relações matemáticas no tronco de pirâmide	62
3.9 Sugestões de atividades	65
3.9.1 Atividade experimental: demonstração do volume da pirâmide	65
3.9.2 Atividade experimental: construção do tronco de pirâmide	66
3.9.3 Atividade de aplicação: situações-problema	68
Referências Bibliográficas	70
4 CILINDRO	72
Introdução	72
4.1 Fatos históricos	72
4.2 Texto de motivação: A panela de pressão	73
4.3 Conceito geométrico de cilindro	75
4.4 Elementos do cilindro	78
4.4.1 Detalhes relativos ao cilindro circular reto	79
4.5 Planificação do cilindro	80
4.6 Relações matemáticas no cilindro circular reto	80
4.7 Sugestões de atividades	81
4.7.1 Atividade experimental: comparação de dados da panela de pressão	81
4.7.2 Atividade de produção de texto: objeto cilíndrico	85
4.7.3 Atividade de aplicação: situações-problema	86
Referências Bibliográficas	88
5. CONE	90
Introdução	90
5.1 Relatos históricos	90
5.2 Texto de motivação: O cone para sinalização viária	92

5.3	Conceitos geométricos de cone	94
5.4	Elementos do cone	97
5.4.1	Detalhes relativos ao cone circular reto	97
5.5	Relações matemáticas no cone circular reto	98
5.6	Planificação do cone	99
5.7	Tronco de cone	101
5.8	Relações matemáticas no tronco de cone	102
5.9	Sugestões de atividades	104
5.9.1	Atividade experimental: volume do cone	104
5.9.2	Atividade experimental: construção do tronco de cone	105
5.9.3	Atividade de aplicação: situações-problema	107
	Referências Bibliográficas	109
6	ESFERA	111
	Introdução	111
6.1	Fatos históricos	111
6.2	Texto de motivação: A bola de futebol	113
6.3	Conceito geométrico de esfera	114
6.4	Elementos da esfera	117
6.5	Relações matemáticas na esfera	118
6.6	Secções na esfera	120
6.6.1	Zona esférica	120
6.6.2	Calota esférica	121
6.7	Sugestões de atividades	123
6.7.1	Atividade experimental: Volume da esfera	123
6.7.2	Atividade experimental: área da superfície da esfera	124
6.7.3	Atividade de aplicação: situações-problema	126
	Referências Bibliográficas	127

LISTA DE FIGURAS

Figura 1.1 – Representação do ponto no espaço 3D	15
Figura 1.2 – Representação da reta em 3D	15
Figura 1.3 – Representação do plano em 3D	16
Figura 1.4 – Modelo de espaço cartesiano	16
Figura 1.5 – Copo sobre a mesa	17
Figura 1.6 – Circunferência de centro C	18
Figura 1.7 – Poliedro convexo	20
Figura 1.8 – Poliedro não convexo	20
Figura 1.9 – Poliedros platônicos	21
Figura 1.10 – Cubo	22
Figura 2.1 – Modelos de prismas	29
Figura 2.2 – Caixa secundária de medicamento	29
Figura 2.3 – Prisma e suas partes	30
Figura 2.4 – Prisma triangular	31
Figura 2.5 – Prisma quadrangular	31
Figura 2.6 – Prisma pentagonal	31
Figura 2.7 – Prisma hexagonal	31
Figura 2.8 – Prisma quadrangular reto	32
Figura 2.9 – Prisma quadrangular oblíquo	32
Figura 2.10 – Ortoedro	32
Figura 2.11 – Cubo	33
Figura 2.12 – Planificação da caixa de medicamento	33
Figura 2.13 – Modelos de planificação de prismas quadriláteros	34
Figura 2.14 – Planificação de um prisma triangular	34
Figura 2.15 – Caixa de remédio e suas dimensões	35
Figura 2.16 – Diagonal do prisma e da base	37
Figura 3.1 – Casa com telhado de quatro águas	49
Figura 3.2 – Modelos de pirâmides	51
Figura 3.3 – Pirâmide com destaque do apótema	52
Figura 3.4 – Pirâmide triangular	53
Figura 3.5 – Pirâmide quadrangular	53
Figura 3.6 – Pirâmide pentagonal	53
Figura 3.7 – Pirâmide hexagonal	53
Figura 3.8 – Pirâmide quadrangular reta	54
Figura 3.9 – Pirâmide hexagonal oblíqua	54
Figura 3.10 – Exemplo de planificação do tetraedro	54
Figura 3.11 – Planificação da pirâmide quadrangular	55
Figura 3.12 – Tetraedro	55
Figura 3.13 – Ampliação do triângulo formado no interior do tetraedro	56
Figura 3.14 – Ampliação de uma das faces do tetraedro	56
Figura 3.15 – Relação entre o volume do prisma e da pirâmide	57
Figura 3.16 – Pirâmide quadrangular regular	58
Figura 3.17 – Destaque do triângulo no interior da pirâmide	59
Figura 3.18 – Formação do tronco de pirâmide	61
Figura 3.19 – Tronco de pirâmide	61
Figura 3.20 – Planificação do tronco de pirâmide de base quadrada	62

Figura 3.21 – Altura do tronco da pirâmide	63
Figura 3.22 – Esboço de frasco de perfume	69
Figura 4.1 – Panela de pressão	73
Figura 4.2 – Modelos de cilindro	77
Figura 4.3 – Cilindro formado por rotação	78
Figura 4.4 – Elementos do cilindro	78
Figura 4.5 – Planificação do cilindro	79
Figura 5.1 – Cone de circulação viária	92
Figura 5.2 – Cone amarelo e preto	93
Figura 5.3 – Modelos de cone	96
Figura 5.4 – Construção do cone por rotação	96
Figura 5.5 – Elementos do cone	97
Figura 5.6 – Elementos do cone circular reto	98
Figura 5.7 – Planificação do cone	99
Figura 5.8 – Relação do volume do cone com o volume do cilindro	101
Figura 5.9 – Formação do tronco de cone	101
Figura 5.10 – Construção do tronco de cone por rotação	102
Figura 5.11 – Planificação do tronco de cone	103
Figura 5.12 – Relações entre cone e tronco de cone	103
Figura 6.1 – Bola de futebol	113
Figura 6.2 – Construção da esfera por rotação	116
Figura 6.3 – Elementos da esfera	117
Figura 6.4 – Cilindro circunscrito na esfera	118
Figura 6.5 – Relação entre área do círculo máximo e a superfície da esfera	119
Figura 6.6 – Relação entre o volume do cone e o volume da esfera	120
Figura 6.7 – Zona esférica por rotação	120
Figura 6.8 – Calota esférica rotacional	121

INTRODUÇÃO

Esta proposta apresenta reflexões históricas e conceituais acerca da geometria espacial para discussões junto a professores de matemática envolvidos com a educação da Rede Pública Estadual do Paraná, com a finalidade de ampliar o debate desse tema e possivelmente ser aplicado por esses professores.

Pretendemos nesta proposta trabalhar com os conteúdos dispostos em seis capítulos distribuídos da seguinte maneira:

No primeiro capítulo serão discutidos alguns conceitos relacionados com a geometria espacial e são eles: noção de espaço tridimensional (3D), tais como noções de ponto, reta e plano no espaço, conceito de lugar geométrico, o método da exaustão, um breve comentário sobre figuras geométricas, conceito de poliedros e a relação de Euler. Também, no final deste capítulo será proposta uma atividade que consiste num levantamento de objetos relacionados com a geometria espacial.

No segundo capítulo será estudado o prisma e esse estudo será abordado da seguinte maneira: inicialmente a apresentação do contexto histórico e um texto sobre embalagens secundárias de medicamentos como exemplo de contextualização em seguida o estudo do prisma em si, tais como: o seu conceito, os seus elementos principais, como eles são classificados, exemplos de planificações e as relações matemáticas do prisma, por exemplo, cálculo de área e volume. Para encerrar esse capítulo, foram propostas quatro atividades que o professor poderá trabalhar com seus alunos.

No terceiro capítulo serão discutidos a pirâmide e o tronco da pirâmide e essa discussão será iniciada com contexto histórico e um texto sobre telhado de quatro águas cujo formato é piramidal e na seqüência será discutido o conceito da pirâmide, seus elementos, como são classificadas, exemplos de planificações e as suas relações matemáticas, tais como, cálculo de área e volume. Posteriormente, será discutida a secção da pirâmide em um plano paralelo a sua base, ou seja, o tronco da pirâmide e consecutivamente as suas aplicações, como por exemplo:

planificação, cálculo de área, cálculo de volume e outros. Ao final do capítulo serão propostas três atividades que o professor poderá trabalhar com seus alunos.

No quarto capítulo será estudado o cilindro, iniciando com o contexto histórico e um texto sobre a panela de pressão e logo em seguida será discutido o seu conceito matemático, os seus elementos principais, exemplo de planificação e as relações matemáticas pertinentes a essa figura geométrica. Para encerrar o capítulo 4, serão propostas três atividades que o professor poderá trabalhar na íntegra ou adaptá-las para a realidade de sua escola.

No quinto capítulo será discutidos o cone e o tronco do cone e essa abordagem terá início com contexto histórico e um texto sobre o cone de sinalização em seguida será discutido o conceito matemático do cone, os seus principais elementos, exemplo de planificação, as relações matemáticas pertinentes a essa figura geométrica e mais adiante, será estudado o tronco de cone dando ênfase a planificação e o cálculo de áreas e volumes. Para encerrar esse capítulo, serão propostas três atividades que o professor poderá trabalhá-las na íntegra ou adaptá-las para a realidade de sua escola.

No sexto e último capítulo estudaremos a esfera e durante esse estudo será discutido o seu contexto histórico e um texto sobre a bola de futebol, em seguida será abordaremos o conceito matemático da esfera, os seus principais elementos, relações matemáticas pertinentes a essa figura geométrica e algumas o estudo de algumas seções da esfera. Para encerrar esse capítulo, serão propostas três atividades em que o professor poderá trabalhá-las na íntegra ou adaptá-las para a realidade de sua escola.

A apresentação desta proposta tem como objetivo o estudo da geometria espacial relacionando-a ao dia a dia dos alunos e, assim, despertar aos mesmos o interesse em observar e analisar o meio em que vive e, com isso, interagir e transformar esse meio.

Esperamos que essa proposta venha contribuir de forma concreta para o processo de ensino-aprendizagem, em especial da matemática, e que essa possa

favorecer o desenvolvimento intelectual e social dos envolvidos no processo educacional.

1 CONCEITOS FUNDAMENTAIS

Introdução

Neste capítulo discutiremos alguns conceitos que estão relacionados com a geometria espacial para que possamos entender os capítulos posteriores com maior clareza.

Inicialmente será discutido a noção de espaço tridimensional (3D) e durante a discussão serão abordados as noções de ponto, reta e plano no espaço. Num segundo momento, será discutido o conceito de lugar geométrico, pois em vários pontos do trabalho será usado esse conceito e na seqüência será apresentado o método da exaustão.

Em seguida será feito um breve comentário sobre figuras geométricas com o objetivo de introduzir o conceito de poliedros que se encontra logo na seqüência e, ainda, para completar esses conceitos foi introduzida a relação de Euler.

Para o encerramento desse capítulo foi sugerida uma atividade, propondo um levantamento de objetos espaciais que se encontra em nossa casa, para serem usados como exemplos no estudo dos capítulos seguintes.

1.1 Espaço Tridimensional

A Terra é um planeta rico em objetos, tanto natural como criados pelas mãos dos homens. Estes objetos fazem parte do espaço que está ao nosso redor, no entanto, ele vai bem além daquilo que podemos enxergar, aliás, segundo a teoria do Big-Bang, que denomina o espaço de universo, o universo está em constante expansão, portanto, o que pode ser visto é infinito.

Entretanto, para o estudo proposto neste trabalho, é suficiente entender a noção de espaço em um determinado local e, principalmente, representar a localização deste, através do que será chamado de espaço tridimensional, ou seja, espaço cartesiano.

Para isso, pode-se partir da idéia de plano, ou ainda, do velho conhecido plano cartesiano, que consta de dois eixos imaginários, geralmente, convencionados como abscissa (x) e ordenada (y). No entanto, o plano cartesiano é suficiente para representar graficamente os pontos, as retas e as figuras planas.

Neste momento, a grande pergunta é: como representar uma figura tridimensional, como por exemplo, um copo sobre a mesa de sua casa. Qual a posição espacial desse copo?

Para isso, basta considerar o copo como um ponto e a mesa como um plano cartesiano bidimensional e adotar um dos cantos (quina) como ponto de origem e um lado como a abscissa e o outro, perpendicular a este, a ordenada e assim medir a distância do copo na vertical e na horizontal em relação ao ponto de origem e teremos a posição do corpo em relação a essa mesa.

Porém, isso não é suficiente para saber a posição desse copo em relação à cozinha de sua casa, uma vez que é necessário conhecer a posição espacial do mesmo, para isso, é preciso mais uma coordenada, isto é, a altura do tampo dessa mesa em relação ao piso da cozinha.

Pensando um pouco mais no exemplo do copo, pode-se dizer que o topo da mesa é apenas um plano particular em relação à cozinha, portanto, têm-se infinitos planos paralelos a este, logo, pode-se concluir que plano cartesiano bidimensional é um caso particular do espaço tridimensional.

Visto que o objetivo deste trabalho é entender o espaço tridimensional, deve-se deixar de lado o plano cartesiano e adotar um modelo tridimensional, ou seja, um espaço tridimensional teórico (3D), cujas dimensões serão convencionadas com x , y e z .

Para entender essa representação espacial, iniciar-se-á a representação do ponto e chegará à representação de um objeto tridimensional, evidentemente, passando pela representação da reta e do plano, a saber:

Na figura 1.1, representar-se-á um ponto $P=(x_1, y_1, z_1)$ e o ponto $O=(0,0,0)$ origem, no espaço 3D:

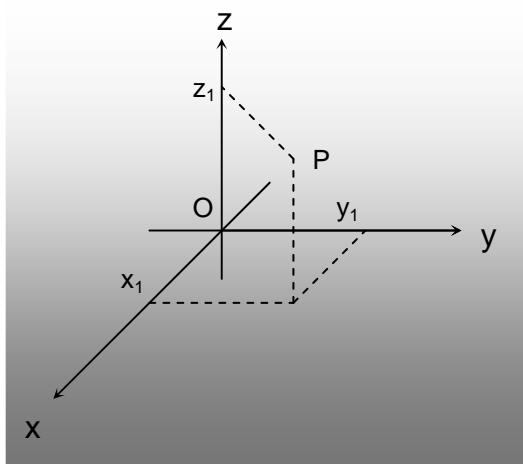


Figura 1.1 - Representação do ponto no espaço 3D

Veja como é simples representar um ponto num espaço tridimensional, para dar continuidade a essa idéia será representada uma reta neste espaço, para isso, basta representar dois pontos, pois pela geometria plana euclidiana sabemos que por dois pontos passa uma e somente uma reta.

Considere a reta r que passa pelos pontos $A=(x_1, y_1, z_1)$ e $B=(x_2, y_2, z_2)$ no espaço 3D, conforme figura 1.2:

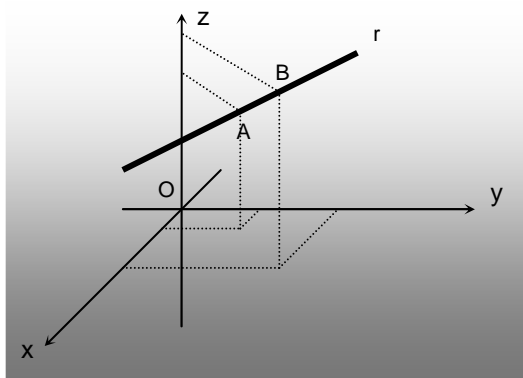


Figura 1.2 – Representação da reta em 3D

Da geometria plana euclidiana, sabe-se, também, que três pontos não colineares, define um plano, assim sendo, considere os pontos $A=(x_1, y_1, z_1)$, $B=(x_2, y_2, z_2)$ e $C=(x_3, y_3, z_3)$ no espaço 3D, traçando as retas que passam por AB, BC e AC, tem-se um plano, veja na figura 1.3:

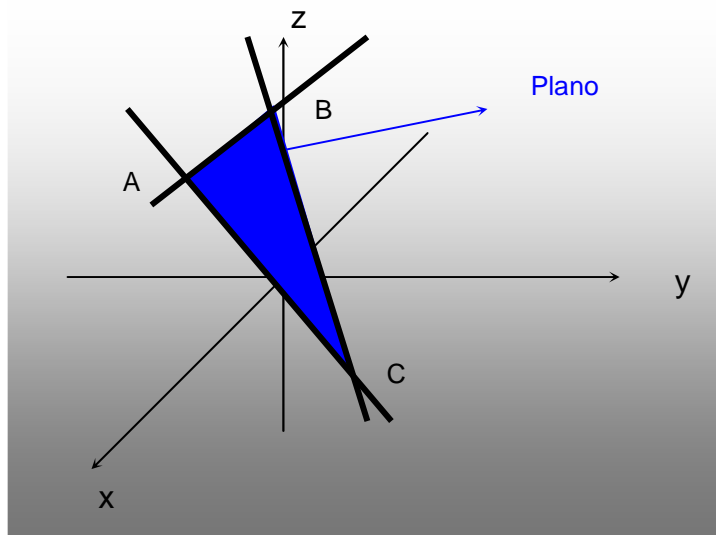


Figura 1.3 - Representação do plano em 3D

Podemos voltar à questão inicial: como localizar o copo sobre a mesa na cozinha de sua casa, mas no espaço 3D, no entanto, será considerada a cozinha como sendo uma parte do espaço tridimensional, conforme o modelo da figura 1.4:

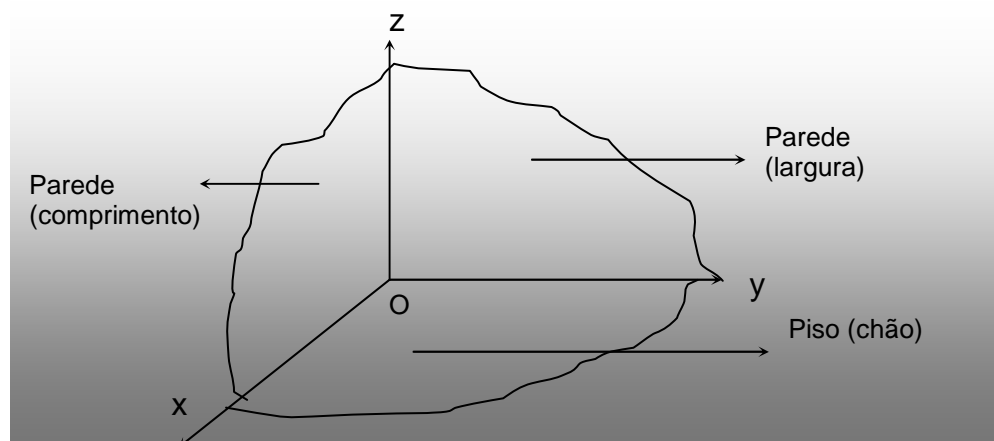


Figura 1.4 - Modelo de espaço cartesiano

Na figura 1.5, temos a foto de uma mesa com um copo sobre a mesma, portanto, mostrando através da situação proposta no início deste a noção de espaço tridimensional (3D).



Figura 1.5 – Copo sobre a mesa – Foto: Kleber Sebastião Juliani

Através do espaço cartesiano tridimensional podemos representar objetos tridimensionais, o que seria impossível no plano cartesiano.

Sendo que o objetivo deste trabalho é estudar as figuras espaciais, faz-se necessário a visão espacial e, ao mesmo tempo, deve ser levado em consideração, que tudo que vemos e tocamos estão inseridos neste espaço infinito que se chama universo e de uma forma ou de outra é necessário criar modelos para a localização desses objetos no espaço ou em um determinado espaço, por exemplo, a cozinha de sua casa.

1.2 Lugar geométrico

É muito comum o uso de lugar geométrico na matemática, sobretudo, no estudo da geometria, portanto, faz-se necessário entender claramente esse conceito para que possamos dar continuidade a este trabalho.

Neste trabalho, lugar geométrico será entendido como um lugar do espaço que consiste em um conjunto de pontos que respeitam uma determinada propriedade matemática.

Na figura 1.6, podemos verificar um exemplo, ou seja, uma circunferência de centro C. Observe que todos os segmentos de reta que partem de C e chegam à circunferência são todos de mesma medida, portanto, podemos dizer que a circunferência é o lugar geométrico em que todos os seus pontos estão eqüidistantes do ponto chamado centro.

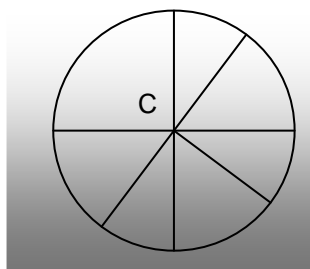


Figura 1.6 - Circunferência de centro C

1.3 Método da exaustão

O método da exaustão ou método de Eudoxo de Cnido (408 – 355 a.C) é um método bastante usado na geometria, pois ele ajuda calcular áreas e volumes de figuras e objetos geométricos. Por exemplo, para calcular a área de uma determinada figura plana desconhecida é só ir completando essa figura com polígonos conhecidos de tal forma que a soma desses polígonos vão se convergindo para a área da figura, esse método é bastante usado no cálculo integral.

Quando pensamos em volume a idéia do método é a mesma, por exemplo, para calcular a capacidade de um recipiente desconhecido podemos comparar com a capacidade de um recipiente conhecido e com isso no decorrer da história da matemática encontram-se relações, tais como, o volume de uma esfera é quatro vezes o volume de um cone de base circular de raio igual o da esfera e altura, também, igual ao seu raio.

No dia a dia, usamos esse método, por exemplo, quando precisamos saber a quantidade de leite que devemos colocar em um bolo e não temos um recipiente graduado com a medida indicada podemos usar outro recipiente menor e graduado para medir a quantidade indicada na receita, para isso basta ir colocando aos poucos até completar a quantidade necessária.

1.4 Figuras Geométricas

Neste trabalho iremos relacionar os objetos espaciais que se encontra em nosso cotidiano com os conceitos teóricos adotados na geometria espacial euclidiana. Para tanto será lançado mão das figuras geométricas mais conhecidas dentro dos cursos de geometria espacial, que muitos autores chamam de sólidos geométricos.

Alguns livros didáticos trazem o conceito de sólido geométrico como uma porção finita do espaço ilimitado por superfícies planas e curvas. No entanto, procurando a palavra “sólido” no dicionário encontra-se, segundo Bueno, 1996: “que tem consistência, integro, maciço, firme,...”.

Até este ponto, está tudo bem, no entanto, percebem-se algumas contradições quando denominamos a esfera, o cilindro, o cone, o cubo, o tetraedro e assim por diante como sólidos geométricos.

Segundo alguns livros didáticos o cubo, por exemplo, é um sólido geométrico limitado por seis faces quadradas, de fato, pensando no conceito de sólido, em especial sólido geométrico, está correto, ou seja, é uma porção finita do espaço, portanto, um corpo maciço. No entanto, os mesmos livros que definem o cubo como um sólido, fazem a planificação do mesmo, o que aparentemente contradiz com o seu próprio conceito, portanto, não pode afirmar que o cubo é um sólido geométrico.

Mas, então o que é o cubo? Pode-se dizer que é uma superfície que envolve um sólido, portanto, cubo é apenas o formato do sólido (sólido cúbico), assim como a esfera, o cilindro e as outras figuras geométricas.

Portanto, neste trabalho serão estudadas as superfícies dos sólidos e quando for necessário estudar o próprio sólido, será denominado de sólido com seu formato, por exemplo, sólido esférico, sólido cilíndrico, sólido com o formato de uma pirâmide e assim por diante.

1.5 Poliedros

Defini-se poliedro como sendo o formato de um sólido limitado por polígonos planos, por exemplo: o cubo, o paralelepípedo, o tetraedro, o hexaedro e assim por diante, geralmente, são divididos em poliedros convexos e não convexos.

Poliedros convexos são os poliedros em que qualquer segmento de reta que una dois de seus pontos está contido no interior desse poliedro, evidentemente, que o não convexo existe uma reta que não está contida neste poliedro.

Pode-se verificar através da figura 1.7:

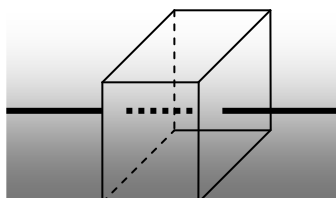


Figura 1.7 - Poliedro convexo

Observe que o segmento tracejado está totalmente no interior do poliedro, portanto é um exemplo de poliedro convexo.

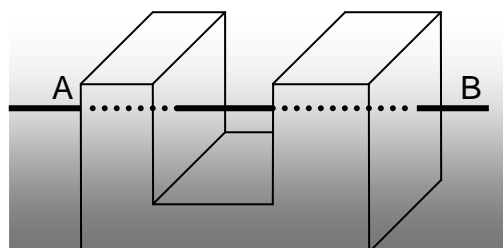


Figura 1.8 - Poliedro não convexo

Agora observe na figura 1.8, que parte do segmento AB está fora do poliedro, portanto, é um exemplo de poliedro não convexo.

Entretanto, este estudo irá se restringir aos poliedros convexos, que podem ser regulares ou não.

São chamados de poliedros regulares, os poliedros em que suas faces são polígonos regulares, portanto, quando suas faces não são polígonos regulares serão poliedros não regulares.

No grupo dos polígonos convexos regulares existem somente cinco elementos e também, podem ser chamados de poliedros platônicos, a saber: tetraedro, cubo, hexaedro, dodecaedro e icosaedro, veja na figura 1.9:

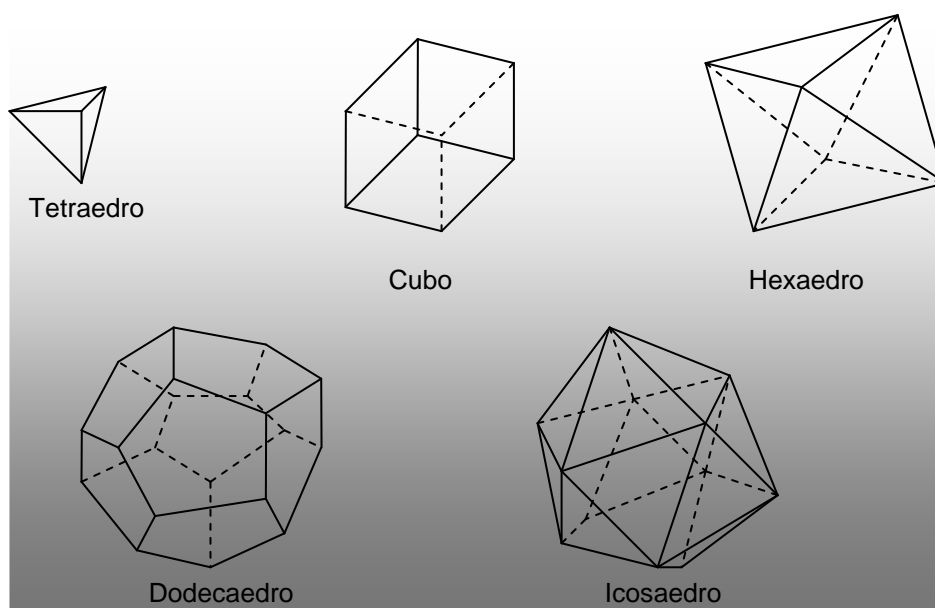


Figura 1.9 – Poliedros platônicos

1.6 Relação de Euler

O matemático Leonhard Paul Euler demonstrou a relação conhecida como “relação de Euler” que relacionam as “partes” dos poliedros convexos, ou seja, o número de faces (F) somado com o número de vértices (V) é igual o número de arestas (A) somado com 2, isto é:

$$F + V = A + 2$$

Observação: essa relação é válida para qualquer poliedro convexo, porém é válida apenas para os poliedros convexos.

Por exemplo, vamos verificar se o cubo é um poliedro convexo, para isso, podemos usar a relação de Euler. Observe na figura 1.10 que no cubo conta-se 6 faces ($F=6$), 8 vértices ($V=8$) e 12 arestas ($A=12$).

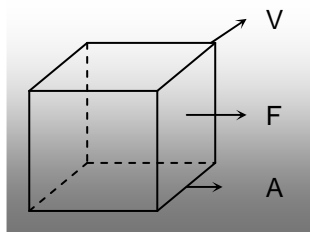


Figura 1.10 – Cubo

Substituindo o número de faces, de vértices e arestas na relação de Euler, tem-se:

$$6 + 8 = 12 + 2$$

Portanto, como os dois lados da equação ficaram com o mesmo valor podemos concluir que o cubo é um poliedro convexo.

1.7 Sugestão de Atividade Inicial

Como primeira atividade proposta por esse material é iniciar o curso de Geometria Espacial para o Ensino Médio, pedindo aos alunos que montem uma relação de objetos espaciais existentes em sua casa, a única instrução, neste momento, será que procurem esses objetos independentemente do ambiente, ou seja, na cozinha, na sala, nos quartos, na área de serviço e inclusive no quintal.

Após esse levantamento, os alunos deverão montar uma lista comum para a turma, para isso, o professor ficará no quadro escrevendo o nome dos objetos, enquanto os alunos vão falando e, ao mesmo tempo, deverá ser eleito um secretário para fazer anotações, uma vez que será usada em aulas posteriores.

Neste momento da aula é possível que os alunos percebam que todos os objetos que estão em sua casa, inclusive a própria casa, são objetos espaciais.

Poderá ser pedido para que eles tragam para a aula seguinte algum desses objetos citados, este procedimento estará levando o aluno a se familiarizar com os objetos espaciais.

Após fazer uma discussão sobre objetos que os alunos trouxeram, será pedido para o aluno (secretário), ler item por item anotado, para que possa ser separado, cada um desses objetos, em grupos de formas geométricas semelhantes (parecidas), por exemplo: balcão da cozinha no mesmo grupo do guarda roupa, ou a panela de pressão no mesmo grupo do rolo de papel higiênico e assim por diante.

Nesta aula o aluno terá a oportunidade de perceber que alguns objetos têm formatos parecidos e alguns deles podem ter uma parte semelhante a um objeto e uma outra parte semelhante a um outro objeto, por exemplo, garrafa pet de alguns refrigerantes, que tem sua parte superior parecida com um “chapeuzinho de festa infantil”, enquanto o seu corpo tem o mesmo formato de um cilindro de amassar pão. Também, possivelmente, terão objetos que não serão parecidos com outros, tais como o garfo, a faca e outros. Esses objetos deverão ser estudados posteriormente.

Depois de feito essa separação, deve-se começar a denominar cada grupo com o nome técnico das figuras geométricas, por exemplo, esfera, cone e assim por diante. Neste momento o professor poderá incentivar o aluno a entender o significado da palavra cujo nome representa cada um dos grupos, se for necessário, deverá recorrer ao professor de Português.

Uma vez classificado e nomeado cada um desses objetos em seus respectivos grupos, deverá começar o estudo de cada um deles. Durante o estudo, deve ser feito, quando possível, planificações e com isso calcular grandezas como área da superfície dos objetos, cálculo de diagonais e, também, pode ser feito cálculo da capacidade (se for recipiente) ou volume que o sólido ocupa no espaço.

É sempre interessante, na medida em que for estudando, voltar a essa relação e, quando possível, fazer medidas usando régua ou fita métrica e comparar com os cálculos formais pertinentes aos objetos estudados. Também, quando possível, comparar com as quantidades indicadas pelo fabricante, principalmente, quando se tratar de recipientes.

Ainda, durante o curso deve pedir aos alunos que fotografem em diversos ângulos os objetos que estão estudando, pois ao final do mesmo será proposta a montagem de uma apresentação para interação com os colegas de sala e posteriormente para ser disponibilizada na Internet.

Na perspectiva de ter uma quantidade maior de material e ao mesmo tempo uma interação mais significativa entre os alunos é interessante que o professor divida a sala em pequenos grupos (grupos de 4 ou 5 alunos) e cada grupo escolha um objeto que represente cada uma das figuras geométricas a ser estudada.

Referências Bibliográficas:

BOYER, Carl Benjamin. **História da Matemática**. São Paulo: Edgard Blücher, 1974.

BUENO, Francisco da Silveira. **Minidicionário da língua portuguesa**. São Paulo. FTD. 1996.

EVES, Howard. **Introdução à História da Matemática**. Campinas, SP: Unicamp, 2004.

BONGIOVANNI, Domenico; VISSOTO, Eugenio; LOUREANO, José. **Matemática e Vida**. São Paulo: Ática, 1993. v.2.

SMOLE, Kátia Cristina Stocco; Diniz, Maria Ignez de Souza Vieira. **Matemática: Ensino Médio**. 5.ed. São Paulo: Saraiva, 2005. v.2.

RUBIÓ, Angel Panadés; FREITAS, Luciana Maria Tenuta de. **Matemática e suas Tecnologias**. São Paulo: IBEP, 2005. v.3.

2 PRISMA

Introdução

No capítulo 1 foram discutidos alguns conceitos básicos da geometria espacial. Discutiremos agora o prisma e esta discussão terá como seqüência o contexto histórico deste tema dentro da matemática, logo após será apresentado um texto sobre embalagens secundárias de medicamentos como exemplo de contextualização, logo em seguida será discutido o conceito do prisma referenciado em alguns sites e autores de livros didáticos.

Na seqüência, serão apresentados os elementos principais do prisma, como eles são classificados, exemplos de planificações e suas relações matemáticas, tais como, cálculo de área e volume.

Para encerrar o capítulo 2, foram propostas quatro atividades que o professor poderá trabalhar com seus alunos.

2.1 Fatos Históricos

Textos históricos mostram que o prisma é uma figura geométrica conhecida desde antes de 2000 a.C., pois, segundo Eves (2004), os estudiosos da época já mostram-se familiarizados com o volume do paralelepípedo reto retângulo e, mais geralmente, do volume do prisma reto de base trapezoidal.

Estudos produzidos historicamente mostram que diversos estudiosos dedicaram-se ao estudo do prisma. Dentre estes estudiosos podemos destacar Platão, Demócrito e Arquimedes.

Platão, que viveu no IV século a.C., dentre os seus estudos geométricos mostrou interesse pelo estudo do cubo quando estudou os poliedros regulares. Ele associava cada poliedro com um dos elementos naturais, sendo que o cubo era associado com o elemento terra. Enquanto, Demócrito, comparou o volume do prisma com o volume da pirâmide e Arquimedes (287 – 212 a.C.) definiu os sólidos arquimedianos.

Baseado nestes e outros dados, diversos matemáticos dedicaram-se ao estudo do prisma com objetivos diversos, neste trabalho será abordado o conceito de prisma segundo alguns autores contemporâneos.

2.2 Texto de motivação: Embalagem Secundária de Medicamentos

Nos dias atuais, quase tudo o que compramos ou vendemos acaba sendo entregue em embalagens. Podemos observar isso nas compras rotineiras como na compra de pães que normalmente vem embalado em saquinhos de papel ou de plástico, assim como na compra de outros objetos, tais como: geladeiras, liquidificadores, máquinas de lavar que, geralmente, vêm protegidos por isopor ou plástico bolha e embaladas em grandes caixas de papelão.

Mas, afinal o que é embalagem? Podemos dizer que embalagens são todos os materiais que envolvem um determinado produto e tem como objetivo proteger e ao mesmo tempo manter as características originais do produto, durante o seu transporte e armazenamento até chegar ao consumidor final.

Podemos observar que alguns produtos se apresentam com mais de uma embalagem, por exemplo: os medicamentos, que, geralmente, vêm dentro de uma caixa de papel, entretanto, não é o remédio que vem dentro dessa caixa, mas uma outra embalagem que o contém, por exemplo: um frasco, um tubo e assim por diante. Essa embalagem é chamada de secundária.

A função principal da embalagem secundária é fazer com que o medicamento chegue até o consumidor sem alterar as suas características e

validades. Além disso, essas embalagens trazem impressas muitas informações importantes para quem vai fazer uso desse medicamento. Aliás, essas informações não são impressas aleatoriamente, mas existem determinações legais para tais impressões, por exemplo: o número do lote, data de fabricação, dosagem, registro do Ministério da Saúde e etc..., totalizando mais de vinte informações obrigatórias.

Deve ser lembrado, também, que essas caixas se apresentam com faixas e cada faixa tem certo significado, ou seja, a faixa vermelha quer dizer que o medicamento deve ser vendido apenas com prescrição médica, entretanto, sem controle especial, enquanto que para a venda ou distribuição de medicamentos com faixa preta é necessário um controle especial do médico e consecutivamente dos pontos de venda ou distribuição.

Portanto, podemos verificar que essas embalagens não servem apenas para proteger os medicamentos no transporte, mas também para informar, controlar e ao mesmo tempo proteger o consumidor de possíveis adulterações.

2.3 Conceito geométrico do prisma

Na Geometria Espacial, o formato da embalagem secundária da maioria dos medicamentos representa uma figura espacial importante, chamado de prisma. Portanto, vamos estudar detalhadamente as embalagens secundárias dos medicamentos, evidentemente, dando ênfase a matemática.

Na preocupação de definir o prisma, foi feita uma pesquisa na Internet através de enciclopédias e dicionários relacionados à matemática e dessa pesquisa estão sendo destacados alguns dos conceitos encontrados, listados na seqüência:

1. “Prisma é um sólido geométrico delimitado por faces planas, no qual as bases se situam em planos paralelos. Quanto à inclinação das arestas laterais, os prismas podem ser retos ou oblíquos”. (PRISMA, Matemática essencial, 2008).

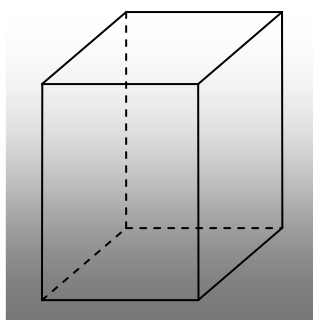
2. “Um prisma é todo poliedro formado por uma face superior e uma face inferior paralelas e congruentes (também chamadas de bases) ligadas por arestas. As laterais de um prisma são paralelogramos. A nomenclatura dos prisma é dada de acordo a forma da bases. Assim, se temos hexágonos nas bases, teremos um prisma hexagonal. O prisma pode ser classificado em reto quando suas arestas laterais são perpendiculares às bases, e oblíquo quando não são.”. (PRISMA, Wikipédia, 2008)
3. “Um poliedro para os quais dois lados são polígonos (as bases do prisma), enquanto os outros lados (as faces laterais) são paralelogramos. As bases são congruentes e localizados em planos paralelos. Um prisma é chamado reto se os planos das faces laterais são ortogonais com os planos das bases”. (PRISM, Springer Link, 2008).
4. “A figura cujas bases sólidas ou extremidades têm o mesmo tamanho e formato e são paralelas entre si, e cada um dos lados é um paralelogramo”.(PRISMA, The Free Dictionary By Farlex, 2008)

Também foi feita uma pesquisa em livros didáticos para uso no Ensino Médio de matemática e dessa pesquisa estão sendo destacados alguns dos conceitos encontrados, listados na seqüência:

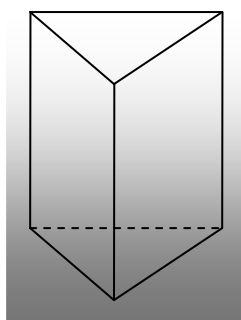
1. “Prismas são sólidos limitados por duas superfícies poligonais convexas de n lados, paralelas e congruentes, por n superfícies determinadas por paralelogramos”. (BONGIOVANNI; VISSOTO; LAUREANO, 1993).
2. “[...] temos dois planos paralelos α e β , um polígono convexo [...], contido em α , e uma reta r , secante aos dois planos. Imagine todos os segmentos paralelos a r , com extremos num ponto do polígono e num ponto em β . O conjunto de todos esses segmentos é um sólido poliédrico chamado prisma”. (RUBIÓ; FREITAS, 2005).
3. “Sejam plano α e β dois planos paralelos, R uma superfície poligonal contida em α e s uma reta que intercepta α . A reunião de todos os segmentos de reta com uma extremidade em R e a outra em β , paralelos a s , é denominada prisma”. (SMOLE; DINIZ, 2005).

Baseado nas definições pesquisadas, concluímos que o prisma é um poliedro que consta de duas faces poligonais idênticas e paralelas entre si e, ainda, circundada por polígonos quadriláteros, tanto quanto o número de lados das faces poligonais idênticas.

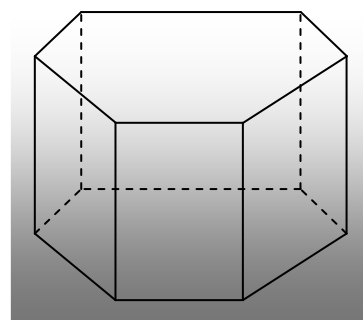
Na figura 2.1 podemos observar alguns modelos de prismas:



Prisma quadrangular



Prisma triangular



Prisma hexagonal

Figura 2.1 – Modelos de prismas

As embalagens secundárias (caixas de remédio), geralmente, têm o formato de um prisma de base retangular, ou seja, as suas bases são superfícies retangulares. Veja, na figura 2.2, um modelo de embalagem de medicamento no formato de um prisma de base retangular:



Figura 2.2 – Caixa secundária de medicamento

2.4 Elementos do prisma

Com base na definição adotada por este trabalho, podemos destacar os elementos do prisma, conforme figura 2.3.

- *Bases* (b) são as duas superfícies poligonais paralelas que caracteriza o prisma;
- *Altura* é a distância entre os planos que contém as bases;
- *Faces Laterais* (F L) são todas as superfícies (paralelogramos) que contornam as bases do prisma;
- *Superfície lateral* é a união de todos os paralelogramos que formam as faces laterais, cuja medida chama-se área lateral do prisma;
- *Superfície das Bases* é a união das duas bases, cuja medida chama-se área das bases do prisma;
- *Superfície Total* é a união entre a superfície lateral e a superfície das bases, cuja medida chama-se área total do prisma;
- *Vértices* (V) são pontos de encontro entre três faces, ou seja, duas faces laterais e a face de uma das bases;
- *Arestas* (a) são os segmentos de reta comum entre duas faces;

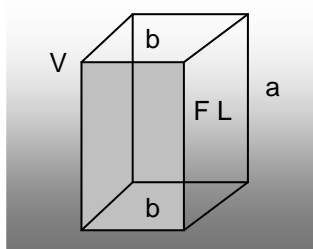


Figura 2.3 – Prismas e suas partes

2.5 Classificação dos prismas

Um prisma pode ser classificado de acordo com o polígono que contém a sua base e a sua inclinação.

2.5.1 Classificação pela base

De acordo com a base do prisma, temos, por exemplo:

Prisma triangular – prisma cujas bases são triângulos, conforme figura 2.4:

Prisma quadrangular – prisma cujas bases são quadriláteros, conforme figura 2.5:

Prisma pentagonal – prisma cujas bases são pentágonos, conforme figura 2.6;

Prisma hexagonal – prisma cujas bases são hexágonos, conforme figura 2.7.

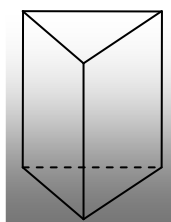


Figura 2.4 – Prisma triangular

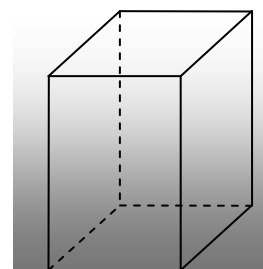


Figura 2.5 – Prisma quadrangular

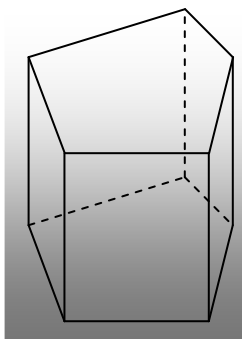


Figura 2.6 – Prisma pentagonal

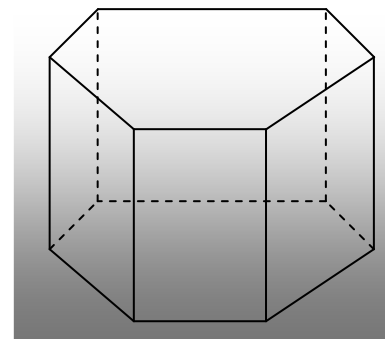


Figura 2.7 – Prisma hexagonal

Observe que a caracterização do prisma é dada pela sua base, ou seja, o nome do prisma é dado conforme o número de lados do polígono que contém a base.

2.5.2 Classificação pela inclinação

Quanto à inclinação, um prisma é classificado de duas maneiras:

Prisma reto – as arestas laterais são perpendiculares aos planos que contém as bases, conforme figura 2.8;

Prisma oblíquo – as arestas laterais não são perpendiculares aos planos que contém as bases, conforme figura 2.9.

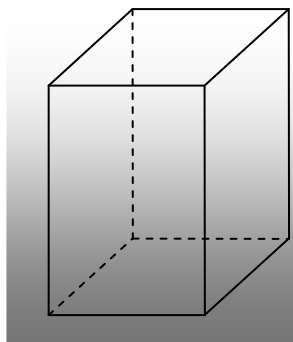


Figura 2.8 – Prisma quadrangular reto

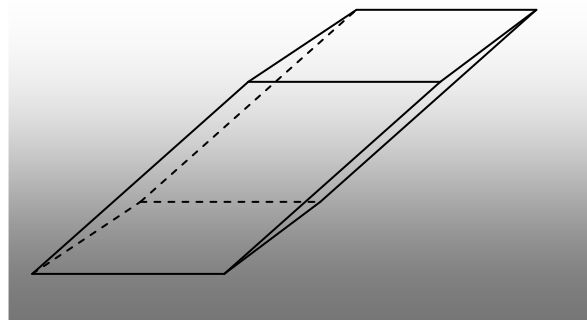


Figura 2.9 – Prisma quadrangular oblíquo

Entretanto, neste trabalho será dada ênfase apenas aos prismas retos.

2.5.3 Prisma regular

Um prisma reto é dito regular quando o polígono da sua base for regular, ou seja, todos os seus lados ou arestas das bases são congruentes.

2.5.4 Casos especiais de prismas quadrangulares

Quando a base do prisma for um quadrilátero, ele poderá ser denominado por: cubo ou paralelepípedo.

Paralelepípedo

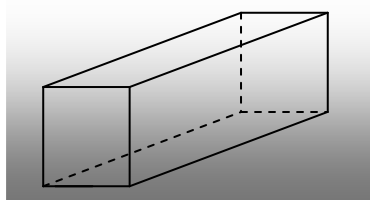


Figura 2.10 – Ortoedro

É dito paralelepípedo o prisma em que suas bases são paralelogramos e quando esse paralelepípedo for reto pode ser chamado de paralelepípedo retângulo ou ortoedro. Na figura 2.10 temos um exemplo de ortoedro.

Cubo

O cubo é um caso particular do paralelepípedo retângulo em que todas as suas arestas são congruentes entre si, ele pode ser chamado, também, de hexaedro regular. Na figura 2.11 temos um exemplo de hexaedro regular:

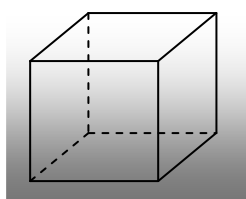


Figura 2.11 – Cubo

2.6 Planificação do prisma

Na figura 2.12 podemos verificar uma foto da planificação de uma embalagem secundária de medicamento, observe que a caixa foi aberta e esticada sobre um plano.



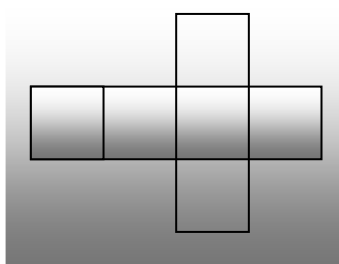
Figura 2.12 – planificação da caixa de medicamento

Podemos observar, também, que com a planificação da embalagem podemos calcular a quantidade de material a ser usado para construí-la. Se tirarmos

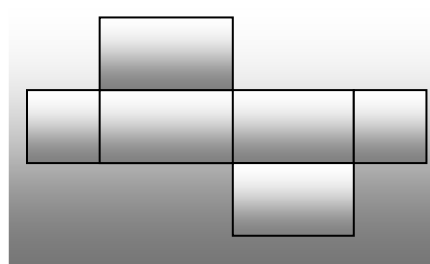
as dobras para colagem, teremos a superfície planificada dessa figura geométrica espacial.

2.6.1 Planificação do prisma quadrangular

Na figura 2.13 podemos observar a planificações de prismas quadrangulares retos:



Planificação do cubo



Planificação do paralelepípedo

Figura 2.13 – Modelos de planificações de prismas quadrangulares

Portanto, a planificação de um poliedro nada mais é do que as suas faces (seis quadriláteros) dispostas em um plano, logo, pode-se dizer que é a quantidade de material para construir o poliedro, evidentemente, sem considerar as dobras.

2.6.2 Planificação do prisma triangular

No prisma quadrangular da figura 2.13 observamos as seis faces dispostas num plano.

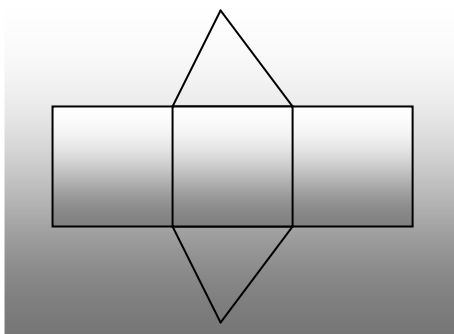


Figura 2.14 - planificação de um prisma triangular

Entretanto, na figura 2.14 podemos verificar a planificação de um prisma triangular que consiste em cinco faces (dois triângulos e três quadriláteros) dispostas em um plano:

Assim pode-se estender a idéia da planificação, para todos os prismas, independentemente, da sua base.

2.7 Relações matemáticas no prisma

2.7.1 Cálculo da área no paralelepípedo

Nas planificações da figura 2.13, podemos observar que para calcular a área total da superfície de um prisma basta somar as áreas das superfícies dispostas em sua planificação e para isso podemos usar o método da exaustão.



Figura 2.15 – Caixa de remédio e suas dimensões – Foto: Kleber Sebastião Juliani

Observe na figura 2.15 uma caixa de remédio em que a sua base é um retângulo cujas medidas são “x” e “y” e, ainda a altura da mesma é dada por “z”, então a sua planificação constará de dois retângulos de dimensões x e y, dois retângulos de dimensões x e z e dois retângulos de dimensões y e z. Portanto, sabendo que a área de um retângulo é o produto entre as suas dimensões, então a área total da superfície do prisma de base retangular (paralelepípedo) que chamaremos de A_{PR} é dada por:

$$A_{PR} = 2(xy + xz + yz)$$

Área da superfície do cubo

Sendo o cubo, um caso particular, do paralelepípedo pode calcular a área de sua superfície (A_C) usando a relação do paralelepípedo.

Portanto, sabendo que o x, y e o z são as arestas e no cubo as arestas são congruentes, chamaremos de a, temos:

$$A_C = 6 a^2$$

Área da superfície de um prisma de qualquer base

Na figura 2.14 podemos verificar um exemplo de planificação de um prisma triangular, observe que ele é formado por dois triângulos e três quadriláteros. Logo para calcular a área da superfície de um prisma triangular, basta somar duas vezes a área do triângulo de sua base com a soma da área dos quadriláteros que formam a sua superfície lateral.

Podemos verificar que não tem como determinar uma fórmula fixa para todos os prismas, uma vez que, os prismas podem ter bases diferentes. Portanto, para calcular a área da superfície de um prisma qualquer deverá ser feito o cálculo de cada face e depois somá-las.

Pode-se concluir que o número de quadriláteros laterais são iguais ao número de lados do polígono que forma a base, por exemplo, se a base for hexágono, a área da superfície de um prisma hexagonal será duas vezes a área da superfície de um hexágono somado com a área de seis retângulos.

2.7.2 Cálculo da diagonal de um paralelepípedo

Para calcular a diagonal do prisma (D), segmento de reta imaginário que liga um vértice ao vértice oposto da outra base do prisma, basta lançar mão do

teorema de Pitágoras, usando o triângulo retângulo destacado na construção do paralelepípedo da figura 2.16:

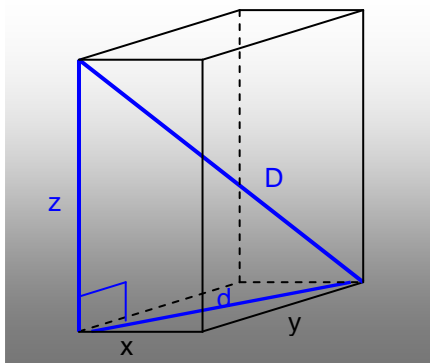


Figura 2.16 – Diagonal do prisma e da base

Aplicando o teorema de Pitágoras e adotando as arestas do prisma da figura 2.16 de x , y e z , temos:

$$D^2 = d^2 + z^2$$

Substituindo a diagonal da base (d) do prisma, temos:

$$D^2 = \left(\sqrt{x^2 + y^2}\right)^2 + z^2$$

Simplificando e extraíndo a raiz, temos:

$$D = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

Cálculo da diagonal do cubo

Sendo o cubo um caso particular do paralelepípedo, podemos usar a mesma fórmula para calcular a sua diagonal, para isso, basta substituir os valores de x , y e z por a (aresta do cubo), uma vez que, as arestas do cubo são congruentes entre si, nestas condições, temos:

$$D = a\sqrt{3}$$

2.7.3 Cálculo do volume do prisma

Para calcular o volume que o prisma ocupa no espaço, basta multiplicar a área da base pela altura do mesmo:

$$V = A_B \cdot h$$

Sendo $A_B = x \cdot y$ e $h = z$, então:

$$V = x \cdot y \cdot z$$

Cálculo do volume do cubo

Sendo o cubo um caso particular do paralelepípedo, podemos afirmar que $x = y = z = a$, então, temos:

$$V = a^3$$

Podemos calcular o volume que qualquer prisma reto ocupa no espaço, independentemente da sua base, para isso basta multiplicar a área da base pela sua altura, por exemplo: se o prisma for triangular o seu volume é a área de um triângulo vezes sua altura, se for um prisma pentagonal é a área de um pentágono vezes a sua altura e assim por diante.

2.8 Sugestões de atividades

São sugeridas quatro atividades sendo que as duas primeiras são experimentais, a terceira são 10 situações-problema e a quarta é uma atividade de pesquisa com posterior produção de texto. Essas atividades poderão ser usadas na íntegra ou adaptadas pelo professor, conforme realidade da escola.

2.8.1 Atividade experimental: cálculo do volume do prisma

Através de uma demonstração prática vamos demonstrar a fórmula do volume de um prisma de qualquer base.

Fórmula do volume do prisma

Para demonstrar a fórmula do cálculo do volume do prisma, identificada por:

$$V = A_b \cdot h$$

Objetivo

Demonstrar a relação $V = A_b \cdot h$.

Material

- Papel gramatura 180g/m²;
- Cola;
- Tesoura;
- Régua/esquadro;
- Areia lavada;
- Fita métrica;
- Copo graduado.

Procedimento

1. Dividir a turma em pequenos grupos, cada grupo deverá fazer um trabalho;
2. Construir um prisma com base e altura que o grupo escolher;
3. Medir as dimensões do prisma construído, ou seja, comprimento, largura e profundidade.
4. Fazer o cálculo do volume usando a fórmula proposta;

5. Encher o prisma construído até a borda com areia lavada;
6. Despejar essa areia no copo graduado (com isso poderá observar, através da graduação do copo, a quantidade de areia gasta para encher o prisma);
7. Comparar a quantidade de areia indicada pelo copo graduado com os cálculos de volume feito com o uso da fórmula;
8. Fazer um relatório concluindo a sua observação.

Observação: O professor poderá propor que um aluno de cada grupo vá fotografando ou filmando o procedimento passo a passo para montagem de uma apresentação no computador e posterior explicação para os colegas.

2.8.2 Atividade experimental: familiarização com as fórmulas do prisma

Através da manipulação de objetos do cotidiano vamos trabalhar de uma forma prática com as fórmulas pertinentes aos prismas.

Aplicação das fórmulas do prisma

Através da experimentação vamos manusear algumas sucatas com o formato de prismas com diversas bases.

Objetivo

Manusear objetos com o formato de prisma, medindo as dimensões desses objetos e aplicar as fórmulas mostradas no texto.

Material

- Objetos com o formato de prisma;
- Régua/esquadro;
- Fita métrica;
- Areia lavada;
- Copo graduado

Procedimento

1. Dividir a turma em pequenos grupos, cada grupo deverá fazer um trabalho;
2. Cada grupo deverá trazer 4 objetos com o formato de prisma, preferencialmente, de bases diferentes;
3. Medir as dimensões de um desses objetos;
4. Fazer um desenho com a planificação desse objeto, use escala, caso o objeto seja grande;
5. Calcular a área da superfície desse objeto, usando a fórmula proposta;
6. Calcular o volume desse objeto, usando a fórmula, e se possível comparar o volume usando o copo graduado;
7. Fazer o cálculo das diagonais do objeto.
8. Repetir o procedimento 3 a 7 para os outros 3 objetos;
9. Fazer um relatório concluindo a sua observação.

Observação: O professor poderá propor que um aluno de cada grupo vá fotografando ou filmando o procedimento passo a passo para montagem de uma apresentação no computador e posterior explicação para os colegas.

2.8.3 Atividade de aplicação: situações-problema

Nesta atividade são propostas 10 situações-problema contextualizadas, porém, o professor, se necessário, poderá elaborar outros ou extrair novas situações em livros didáticos de Ensino Médio.

1. Devemos construir uma caixa com o formato de um paralelepípedo, cujo objetivo é embalar um forno de microondas, cujas dimensões são: 60 cm de largura, 30 cm de altura e 40 cm de profundidade. Entretanto, o microondas vem protegido por uma capa de isopor de 2 cm em todas as suas dimensões. Qual o volume que essa caixa deverá ter?

Dica: Fazer um esboço da caixa (prisma de base retangular) e aplicar a fórmula do volume discutida no texto.

2. Na situação problema 01, a caixa foi construída de papelão. Considerando 10% a mais de papelão para as dobras. Qual a quantidade de papelão (área da superfície), em m^2 , usada para produzir essa caixa?

Dica: Procurar no texto a fórmula da área da superfície do prisma retangular e revisar o conteúdo de porcentagem.

3. Uma caixa d'água construída em fibra tem o formato de um cubo, entretanto, não temos o valor de sua aresta, mas sabemos que o comprimento de sua diagonal é $6\sqrt{3}$ m. Será que com apenas esse dado temos condições de calcular o seu volume? Caso a sua resposta for afirmativa, qual será esse valor?

Dica: Analisar a associação entre a aresta e a diagonal do cubo através das relações dadas no texto.

4. Uma piscina, em fibra, cujas dimensões são $4 \times 8 \times 1,4$ m (4 metros de largura, 8 metros de comprimento e 1,4 metros profundidade), de borda a borda, sendo que a borda tem 20 cm. Qual a quantidade de água necessária para encher essa piscina até 10 cm da sua superfície?

Dica: Cálculo do volume ou da capacidade da piscina conforme relação dada no texto.

5. Numa caixa de papelão, com o formato de paralelepípedo, com 40 cm de comprimento, 20 cm de largura e 20 cm de altura, é usada para transportar um determinado medicamento, da fábrica até o revendedor, sabendo que a embalagem secundária desse medicamento tem o formato de um cubo com aresta 10 cm. Qual a quantidade de medicamentos são transportados nessas caixas?

Dica: Comparar o volume entre prismas de tamanhos diferentes através do cálculo do volume dos mesmos.

6. Uma embalagem secundária de um perfume francês tem o formato de um prisma hexagonal regular com aresta da base 5 cm e altura 10 cm, feita com

um material acrílico. Qual a quantidade (área da superfície total do prisma), em cm^2 , de acrílico para produzir 1000 dessas embalagens?

Dica: Calcule a área da superfície de uma caixa e multiplique pelo total de caixas.

7. Uma cozinheira fez um bolo com uma forma, cujo formato é um prisma triangular regular em que a aresta da base mede 30 cm e a altura 5 cm. Entretanto, alguém abriu o forno antes do bolo assar totalmente e o mesmo solou, ficando com apenas 3 cm de altura. Qual o volume final do bolo?

Dica: Através das dimensões da forma e altura do bolo calcule o volume do bolo.

8. Um silo para armazenamento de grãos foi construído como o formato de um prisma octogonal regular com a aresta da base 5m e altura 10m. Qual a capacidade total (volume do prisma) desse silo?

Dica: Manipular as fórmulas do volume do prisma discutidas no texto.

9. Uma fábrica de artefatos de cimento constrói por dia 5 mil pilares, para construção de cercas, com o formato de paralelepípedos, cujas dimensões são 10 cm de largura, 15 cm de comprimento e 2,5 m de altura. Qual a quantidade de concreto (volume do prisma), em m^3 , essa fábrica gasta por dia?

Dica: Calcule o volume de um pilar e estende para o total.

10. Uma criança ganhou de seus pais um cubo, de 10 cm de aresta, cheio de massa de modelar e resolveu dividir em potes menores com o formato de paralelepípedos com dimensões 2x2x5cm. Qual a quantidade de potes ele usou para distribuir toda a massa de modelar?

Dica: Comparar o volume do cubo com o volume de um prisma quadrangular qualquer.

2.8.4 Atividade de pesquisa: produção de texto

Faça uma pesquisa sobre as regras para a produção das embalagens dos Medicamentos Genéricos. Dando ênfase. Qual a importância do Medicamento Genérico para a sociedade? Quais dados são obrigatórios na embalagem secundária? Como é produzido o Medicamento Genérico? A confiabilidade do Medicamento Genérico.

Após a pesquisa produza um texto com 20 a 30 linhas e o professor poderá fazer uma exposição de tais textos e uma discussão em grupo sobre o assunto pesquisado.

Dica: Com essa atividade pretende-se a familiarização com os medicamentos, de marca, genéricos e similares, despertando assim uma preocupação na qualidade e eficiência do medicamento consumido, portanto, essa atividade tem cunho social.

Referências Bibliográficas:

BOYER, Carl Benjamin. **História da Matemática**. São Paulo: Edgard Blücher, 1974.

Embalagens Secundárias. In. Agência Nacional de Vigilância Sanitária. Disponível em: <<http://e-legis.anvisa.gov.br/leisref/public/showAct.php#>>. Acesso em: 23 out. 2008.

EVES, Howard. **Introdução à História da Matemática**. Campinas, SP: Unicamp, 2004.

BONGIOVANNI, Domenico; VISSOTO, Eugenio; LOUREANO, José. **Matemática e Vida**. São Paulo: Ática, 1993. v2.

Prisma (Geometria). In. MATEMÁTICA ESSENCIAL. Disponível em: <<http://pessoal.sercomtel.com.br/matematica/geometria/prisma/prisma.htm>>. Acesso em: 23 out. 2008.

Prisma. In. WIKIPÉDIA. Disponível em: <<http://pt.wikipedia.org/wiki/Prisma>>. Acesso em: 23 out. 2008.

Prism. In. SPRINGER ONLINE REFERENCE WORKS. Disponível em: <<http://eom.springer.de/P/p074830.htm>>. Acesso em: 23 out. 2008.

Prism (Geometry). In. THE FREE DICTIONARY BY FARLEX. Disponível em: <<http://www.thefreedictionary.com/prism>>. Acesso em: 23 out. 2008.

SMOLE, Kátia Cristina Stocco; DINIZ, Maria Ignez de Souza Vieira. **Matemática: Ensino Médio**. 5.ed. São Paulo: Saraiva, 2005. v.2.

RUBIÓ, Angel Panadés; FREITAS, Luciana Maria Tenuta de. **Matemática e suas Tecnologias**. São Paulo: IBEP, 2005. v.3.

3 PIRÂMIDE

Introdução

No capítulo 2, foi estudado o prisma, enfocando seu contexto histórico, a contextualização, sua planificação, sua classificação, cálculo de área, volume e outros e, também, foram proposta algumas atividades.

Discutiremos agora a pirâmide e o tronco da pirâmide e essa discussão será iniciada abordando o contexto histórico dessas figuras geométricas. Foi elaborado um texto sobre um telhado de quatro águas cujo formato é piramidal, foi discutido o conceito de tais figuras referenciado em alguns sites e autores de livros didáticos.

Na seqüência, serão apresentados os elementos principais da pirâmide, como elas são classificadas, exemplos de planificações e as suas relações matemáticas, tais como, cálculo de área e volume. Posteriormente, será discutida a secção de uma pirâmide em um plano paralelo a sua base, ou seja, o tronco da pirâmide e consecutivamente as suas aplicações, como por exemplo: planificação, cálculo de área, cálculo de volume e outros.

Para encerrar o capítulo 3, foram propostas três atividades que o professor poderá trabalhar com seus alunos na íntegra ou adaptá-las para a realidade de sua escola.

3.1 Fatos históricos

Pode-se perceber através das pirâmides do Egito que o estudo da pirâmide tem despertado interesse há milhares de anos. Podemos observar isso através da grande pirâmide de Gizé construída por volta de 2600 a.C. em que “o erro relativo envolvendo os lados da base quadrada é inferior a $1/14000$ e o erro

relativo envolvendo os ângulos retos dos vértices da base não excedem a $1/27000$ ” (EVES, 2004), mostrando, assim, o conhecimento e a capacidade de engenharia empreendida na obra.

Para uma análise mais aprofundada sobre a engenharia da época é preciso considerar que os estudiosos babilônicos tinham um conhecimento matemático superior aos dos egípcios no mesmo período, ao mesmo tempo em que a matemática romana era bastante inferior a da Grécia nestes mesmos anos.

Um dado que torna clara a inferioridade da matemática egípcia é o fato de que esta não distinguia claramente medidas exatas de medidas aproximadas. Um exemplo disso é que “o volume de um tronco de pirâmide era achado às vezes tomando a media aritmética das bases e multiplicando pela altura.” (BOYER, 1974).

Em contrapartida tem-se o papiro de Moscou que traz uma fórmula para o cálculo do volume de um tronco de pirâmide de base quadrada que pode ser usada até os dias atuais.

Baseado nestes e outros dados, diversos matemáticos dedicaram-se ao estudo da pirâmide com objetivos diversos, neste trabalho será abordado o conceito de pirâmide e do tronco de pirâmide segundo alguns autores contemporâneos.

3.2 Texto de motivação: Telhado com quatro águas

Na sociedade em que vivemos podemos observar uma grande preocupação com a cobertura das casas, dos barracões, das cabanas, enfim dos locais onde de certa forma são usados como moradia ou armazenamento.

Em outras épocas essa preocupação também existiu. Os animais, sobretudo os homens, sempre se preocuparam em se protegerem dos fenômenos naturais, tais como: o frio, a chuva, o sol em excesso e assim por diante. No entanto, muitas vezes eram usadas cavernas naturais que se formavam sob as pedras.

Nos dias atuais, essa preocupação vai além da proteção contra estes fenômenos, mas geralmente, tem como objetivo o fator estético e, também, o fator econômico. Baseado nestas preocupações, ao escolher o tipo de cobertura mais adequado para uma determinada construção deve ser levado em consideração as funções dessa edificação, isto é, a sua utilidade e, ainda, na maioria das vezes a opção deve ser por materiais impermeáveis, isolante térmico e acústico.

Pensando no fator estético, a escolha do material usado na cobertura deve ser feita observando a forma e principalmente, o aspecto harmônico em relação à linha arquitetônica e, ainda, as dimensões, as texturas e a coloração desse material.

Pensando no fator econômico, deve ser feita uma análise de custo-benefício, isto é, pensar no custo em relação à durabilidade e a conservação do aspecto natural do material escolhido.

Basicamente, para fazer a escolha da cobertura mais adequada a ser utilizada são estes detalhes. Mas, por outro lado, é necessário fazer uma análise técnica da região a qual ela será usada, assim levando em consideração o clima da região, isto é, a incidência de calor, frio, chuva, granizo e assim por diante.

Baseado em todas essas preocupações existem muitas opções de materiais para fazer a cobertura de tal forma que não se arrependa no futuro. Entretanto, as coberturas que mais são usadas nos dias atuais, consistem em uma armação, comumente, de madeira e revestido de telhas (material de revestimento). Esse tipo de cobertura é chamado de telhado. Embora, todos os tipos de coberturas são importantes, mas vamos dar ênfase aos telhados.

Alguns telhados necessitam de estruturas maiores, geralmente, os grandes armazéns ou os galpões e para tais coberturas optam por telhas mais leves e ao mesmo tempo estruturas que conseguem um vão livre maior e, na maioria das vezes não estão tão preocupados com o fator estético, mas sim com o econômico e prático. Porém, quando se trata de edificações residenciais a estética é fundamental, com isso é comum usar estruturas de madeira com acabamentos sofisticados e ao

mesmo tempo telhas cada vez mais bem acabadas, aliás, nos dias atuais são diversos os modelos e materiais que elas são produzidas.

Porém, as telhas de argilas vêm sendo usadas há muitos anos e continuam sendo a campeã de uso, também são conhecidas como telhas de barro. Até pouco tempo atrás a telha francesa era o modelo de telha de barro mais conhecida e consecutivamente mais usada. Entretanto, hoje pode se dizer que este modelo, apesar de bonito, está fora de moda, dando lugar para a telha portuguesa e a telha romana.

A partir do momento que foi feita a opção por telha de barro com estrutura de madeira, terá que decidir qual o tipo de telhado, pois existem diversos tipos que poderá ser escolhido, evidentemente, lembrando do projeto arquitetônico e o fator econômico. Para fazer essa escolha, é importante entender como são definidos os telhados, ou seja, por definição, eles têm seus nomes dados pela quantidade de planos inclinados que servem para escorrer a água da chuva, ou seja, têm-se telhados de: uma água, duas águas, três águas, quatro águas e múltiplas águas.

Neste texto a ênfase será dada aos telhados de quatro águas, conforme foto da casa da figura 3.1.



Figura 3.1 – Casa com telhado de quatro águas – Foto: Kleber Sebastião Juliani

Esse modelo de telhado foi bastante usado até o meado do século passado, ele se caracterizava pela cobertura de edificações quadriláteras, de formatos regulares e irregulares, consiste em quatro planos inclinados cujo encontro desses quatro planos forma um vértice, ou seja, não tem oitão e tem o formato de uma pirâmide de base quadrangular. Podemos observar, principalmente, esse tipo de telhado em bairros e construções mais antigas, assim como na Vila Casoni em Londrina no Estado do Paraná.

3.3 Conceito geométrico de pirâmide

Na Geometria Espacial, o formato do telhado de quatro águas representa uma figura espacial importante, chamada de pirâmide. Portanto, vamos estudar detalhadamente o telhado de quatro águas, evidentemente, dando ênfase a matemática.

Na preocupação de definir a pirâmide, foi feita uma pesquisa na Internet através de enciclopédias e dicionários relacionados à matemática e dessa pesquisa estão sendo destacados alguns dos conceitos encontrados, listados na seqüência:

1. “Consideremos um polígono contido em um plano (por exemplo, o plano horizontal) e um ponto V localizado fora desse plano. Uma Pirâmide é a reunião de todos os segmentos que têm uma extremidade em P e a outra num ponto qualquer do polígono. O ponto V recebe o nome de vértice da pirâmide.” (PIRÂMIDE, Matemática essencial, 2008).
2. “Uma pirâmide é todo poliedro formado por uma face inferior e um vértice que une todas as faces laterais. As faces laterais de uma pirâmide são regiões triangulares, e o vértice que une todas as faces laterais é chamado de *vértice da pirâmide*. O número de faces laterais de uma pirâmide corresponde ao número de lados do polígono da base.” (PIRÂMIDE, Wikipédia, 2008).
3. “Pirâmide é o poliedro com uma de suas faces um polígono (a base), enquanto as outras faces (faces laterais) são triângulos com um vértice comum (o vértice da pirâmide).” (PYRAMID, Springer Link, 2008).
4. “Uma pirâmide de n -lados é um poliedro formado por uma base poligonal e um ponto, chamado ápice, por n faces triangulares ($n \geq 3$). Em outras palavras, é um sólido cônico com base poligonal.” (PYRAMID, The Free Dictionary By Farlex, 2008)
5. “Pirâmide é a união de todos os segmentos de reta que liga um determinado ponto e os pontos que se situam sobre um determinado polígono.” (PYRAMID, Math Dictionary, 2008).

Também foi feita uma pesquisa em livros didáticos para uso no Ensino Médio de matemática e dessa pesquisa estão sendo destacados alguns dos conceitos encontrados, listados na seqüência:

1. “Considere uma região poligonal, por exemplo, ABCDE, contida em um plano α e um ponto V exterior ao plano da região poligonal. Traçamos os segmentos VA, VB, VC, VD e VE. Cada dois vértices consecutivos de ABCDE determinam com V uma região triangular. Essas regiões triangulares, juntamente com a região poligonal ABCDE, determinam um poliedro chamado pirâmide de base ABCDE e vértice V”. (DANTE, 2005).
2. Dado “[...] um polígono $A_1A_2A_3...A_n$, contido num plano α , e um ponto V, não pertencente a α . O conjunto de todos os segmentos com extremos no ponto V e em um dos pontos do polígono $A_1A_2A_3...A_n$ é um poliedro chamado pirâmide”. (RUBIÓ; FREITAS, 2005).
3. “Sejam uma superfície poligonal R contida num plano α e um ponto V fora de α : A reunião de todos os segmentos de reta com uma extremidade em V e a outra em R é denominada pirâmide”. (SMOLE; DINIZ, 2005).

Baseado nas definições pesquisadas, concluímos que: pirâmide é formada por todos os segmentos de reta que ligam cada ponto do contorno do polígono (de n-lados com $n \geq 3$) de sua base em um ponto, chamado de vértice e representado por V, que não está no plano desta base.

Com base nesta definição podemos destacar alguns tipos de pirâmides, conforme figura 3.2:

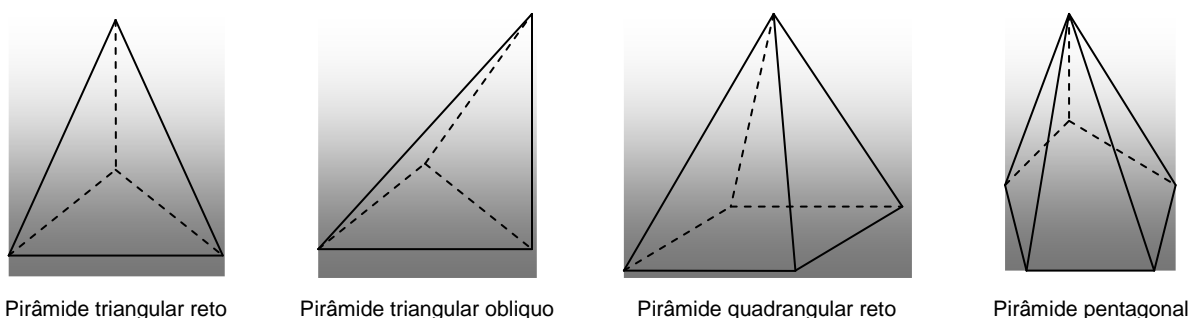


Figura 3.2 – modelos de pirâmides

3.4 Elementos da pirâmide

Com base na definição adotada por este trabalho podemos destacar os elementos da pirâmide, conforme figura 3.3.

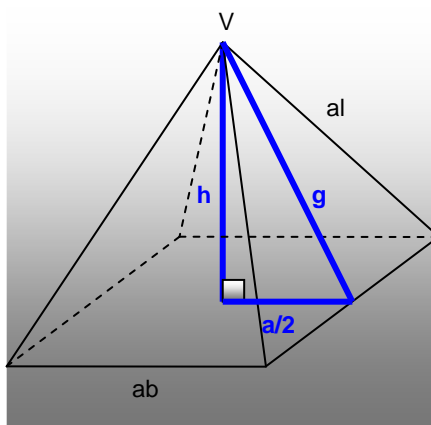


Figura 3.3 - Pirâmide com destaque do apótema

- *Aresta lateral* (a_l) são todos os segmentos de reta que ligam o vértice da base com o vértice da pirâmide;
- *Aresta da base* (ab) são os lados do polígono que forma a base da pirâmide;
- *Vértice da pirâmide* (V) é o ponto, geralmente, denotado de V , em que todas as faces laterais se encontram;
- *Base* (b) é a região poligonal em que apóia a pirâmide;
- *Altura* (h) é a distância entre o vértice e o plano que contém a base;
- *Superfície lateral* é a superfície obtida pela reunião de todos os segmentos que ligam o vértice e o contorno da região poligonal da base, cuja medida chama-se área lateral;
- *Superfície da base* é a superfície da região poligonal que forma a base da pirâmide, cuja medida chama-se área da base;
- *Superfície total da pirâmide* é a reunião da superfície lateral com a superfície da base, portanto a área total da pirâmide é a soma entre a área lateral e a área da base;
- *Apótema* (g) é a altura do triângulo que forma cada face lateral.

3.5. Classificação das pirâmides

Uma pirâmide pode ser classificada de acordo com o polígono que contém a sua base e a sua inclinação.

3.5.1 Classificação pela base

De acordo com a base da pirâmide, temos:

Pirâmide triangular – pirâmides cuja base é um triângulo, conforme figura 3.4.

Pirâmide quadrangular – pirâmides cuja base é um quadrilátero, conforme figura 3.5.

Pirâmide pentagonal – pirâmides cuja base é um pentágono, conforme figura 3.6.

Pirâmide hexagonal – pirâmides cuja base é um hexágono, conforme figura 3.7.

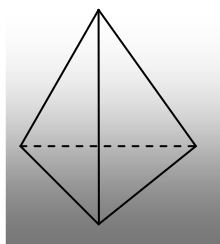


Figura 3.4 – Pirâmide triangular

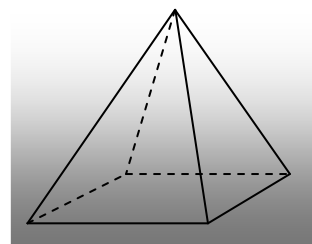


Figura 3.5 – Pirâmide quadrangular

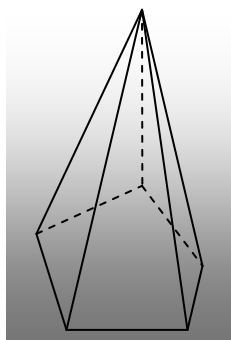


Figura 3.6 – Pirâmide pentagonal

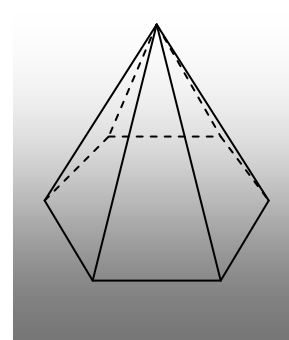


Figura 3.7 – Pirâmide hexagonal

Observe que a caracterização da pirâmide é dada pela sua base, ou seja, o nome da pirâmide é dado conforme o número de lados do polígono que contém a base.

3.5.2 Classificação pela inclinação

Quanto à inclinação, uma pirâmide é classificada de duas maneiras:

Pirâmide reta – a projeção do vértice coincide com o ponto central do polígono que forma a base, conforme figura 3.8.

Pirâmide oblíqua – a projeção do vértice não coincide com o ponto central do polígono que forma a base, conforme figura 3.9.

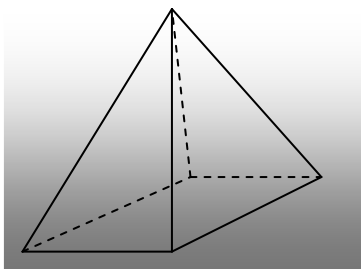


Figura 3.8 – Pirâmide quadrangular reta

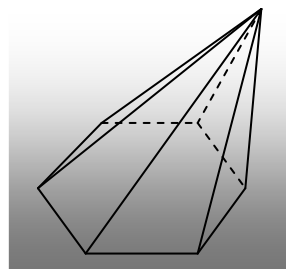


Figura 3.9 - Pirâmide hexagonal oblíqua

Outra maneira de definir se uma pirâmide é reta ou oblíqua é observar as arestas laterais, se elas são todas congruentes entre si então é uma pirâmide reta, caso contrário é uma pirâmide oblíqua.

3.6 Planificação da pirâmide

Cada tipo de pirâmide terá uma planificação, portanto, não poderemos generalizar a sua planificação, pois ela dependerá de sua base.

3.6.1 Modelo de planificação do tetraedro

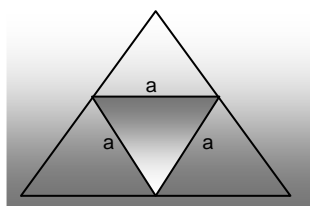


Figura 3.10 – Exemplo de planificação do tetraedro

Observe na figura 3.10 a planificação de um tetraedro. Esta planificação é formada por quatro triângulos, neste caso específico, congruentes entre si, ou seja, eqüiláteros e deve ser lembrado, ainda, que as planificações das pirâmides triangulares sempre serão formadas por 4 triângulos.

3.6.2 Modelo de planificação da pirâmide quadrangular

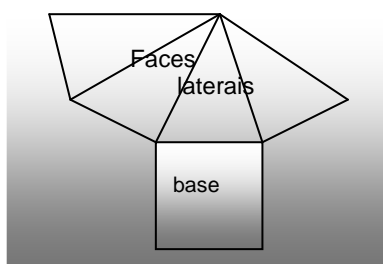


Figura 3.11 – Planificação da pirâmide quadrangular

Observe na figura 3.11 a planificação de uma pirâmide quadrangular reta. Esta planificação é formada por um quadrilátero e quatro triângulos, se o quadrilátero for um quadrado os quatro triângulos serão congruentes entre si.

3.7 Relações matemáticas na pirâmide

3.7.1 Relações matemáticas no tetraedro

Por ser o tetraedro uma pirâmide regular reta, com todas as suas faces regulares e congruentes, tem-se como área a soma de 4 polígonos triangulares regulares.

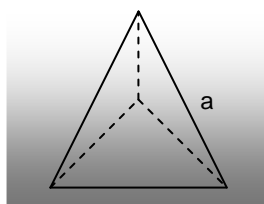


Figura 3.12 – Tetraedro

Podemos observar na figura 3.12 um tetraedro. Para saber a área total da superfície desta figura geométrica, que chamaremos de A_{TE} , basta calcular a área do triângulo equilátero ($A_{\Delta E}$), cujo lado é a aresta (a) e multiplicar por 4.

Portanto, sabendo da geometria plana que a área de um triângulo é calculada multiplicando a base pela altura, temos:

$$A_{\Delta E} = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4}$$

Multiplicando por 4, teremos:

$$A_{TE} = a^2 \sqrt{3}$$

Também, podemos calcular a altura da pirâmide (distância do vértice da pirâmide ao plano que contém a base) para isso é necessário, mais uma vez, lançar mão do teorema de Pitágoras.

Podemos ver no tetraedro da figura 3.13 em destaque o apótema da pirâmide (g) que tem a mesma medida da altura do triângulo da base.

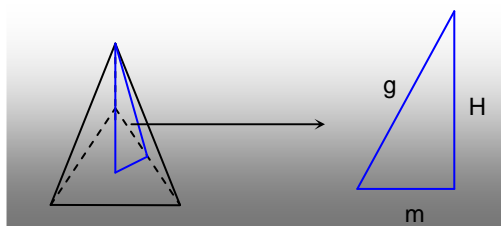


Figura 3.13 – Ampliação do triângulo formado no interior do tetraedro

Na figura 3.14, temos um poliedro cuja base é um triângulo equilátero de lados iguais à aresta (a).

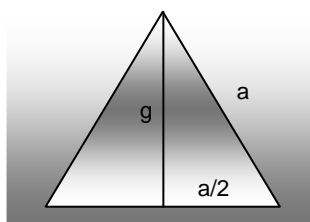


Figura 3.14 – Ampliação de uma das faces do tetraedro

Portanto, aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo da figura e simplificando, temos:

$$g = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

Também, da geometria plana sabemos que o apótema (m) do triângulo equilátero (base da pirâmide) é igual a um terço da altura do mesmo, isto é:

$$m = \frac{1}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{6}$$

Mais uma vez usando o teorema de Pitágoras e substituindo g e m , temos:

$$H = \frac{a\sqrt{6}}{3}$$

Deve ser lembrado que esta relação é válida para a altura do tetraedro, no entanto, faz-se necessário calcular uma relação para cada tipo de pirâmide, mesmo que seja também triangular, para isso, segue o mesmo raciocínio, isto é, usa-se a altura da pirâmide e o apótema da base.

Pode ser calculado, também, o volume que o tetraedro ocupa no espaço. Para isso deve ser lembrado que o tetraedro é uma pirâmide e o volume de “[...] toda pirâmide é um terço [...] do volume [...] do prisma de mesma base que a pirâmide de mesma altura [...]” (BOYER, 1974). A figura 3.15 mostra essa relação, veja:

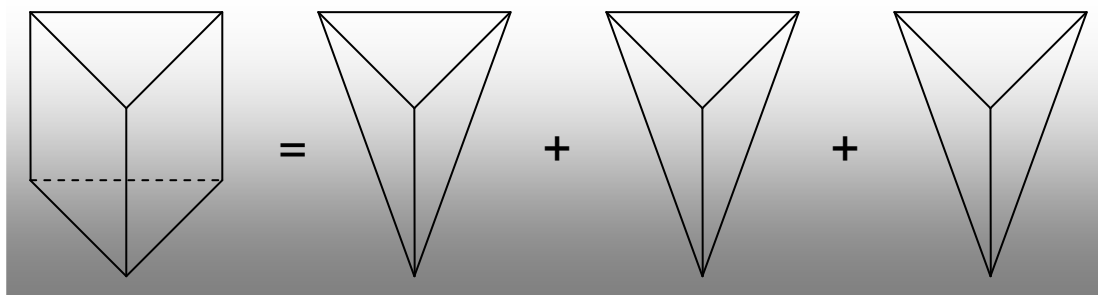


Figura 3.15 – Relação entre o volume do prisma e da pirâmide

Portanto, sabendo que o volume que o prisma ocupa no espaço é dado pelo produto da área da base pela altura, então o volume da pirâmide (V_{PI}), fica:

$$V_{PI} = \frac{1}{3} A_B \cdot H$$

Observe que essa relação vale para qualquer tipo de Pirâmide, independentemente, de sua base.

Mas, o volume do tetraedro (V_{TE}), fica:

$$V_{TE} = \frac{a^3 \sqrt{2}}{12}$$

3.7.2 Relações matemáticas na pirâmide quadrangular

Para demonstrar as relações matemáticas vamos voltar a nossa atenção ao telhado de quatro águas, cujo formato, é a pirâmide quadrangular. Para realizar esses cálculos iremos propor que a base do telhado (laje) seja um quadrado, logo, teremos uma pirâmide regular quadrangular, isto é, uma pirâmide de base quadrada, conforme figura 3.16.

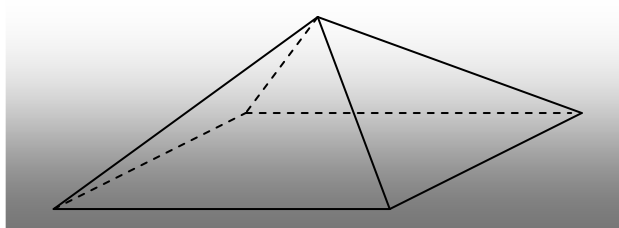


Figura 3.16 – Pirâmide quadrangular regular

Observe que a base é um quadrado e as faces laterais são quatro triângulos (águas do telhado). Devemos lembrar que em qualquer pirâmide as faces laterais são triângulos na quantidade igual à quantidade de lados do polígono que contém a base da pirâmide.

Podemos verificar na figura 3.11 que a área da superfície da pirâmide quadrangular (A_{PIQ}) é igual a área da base “quadrilátero” (A_Q) mais a soma da área lateral (quatro triângulos):

$$A_{PIQ} = A_Q + 4A_{\Delta}$$

No entanto, para fazer os cálculos basta saber o valor da aresta da base e da aresta lateral e aplicar a relação.

Observe na figura 3.17 que tanto as arestas da base quanto para as arestas laterais são iguais a a , logo temos:

$$A_Q = a \cdot a = a^2$$

Mas, não conhecemos a altura dos triângulos das faces laterais, mas sabemos que é igual ao apótema da pirâmide que chamamos de “ g ” e podemos calcular usando o teorema de Pitágoras no triângulo equilátero de lado “ a ” conforme a pirâmide da figura 3.13, temos:

$$A_{\Delta} = \frac{a^2 \sqrt{3}}{2}$$

Portanto, fazendo a soma entre (A_Q) e 4 vezes a A_{Δ} , teremos:

$$A_{PIQ} = a^2 + \frac{a^2 \sqrt{3}}{2} = \left(\frac{2 + \sqrt{3}}{2} \right) \cdot a^2$$

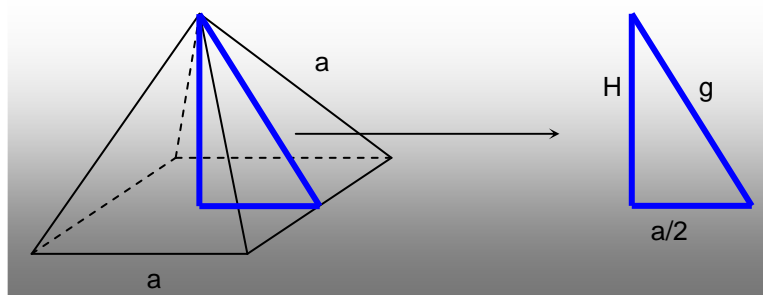


Figura 3.17 – destaque do triângulo no interior da pirâmide

Sendo assim, concluímos que para calcular a área lateral da superfície de uma pirâmide regular qualquer, basta calcular a área da superfície de uma face lateral e multiplicar pelo número de lados do polígono que contém a base e para obter a área da superfície total soma-se nesse resultado a área do polígono da base. No caso em que a pirâmide não for regular terá que ser calculado, separadamente, a área de cada triângulo que forma a superfície da pirâmide.

Semelhante ao tetraedro, pode ser calculado o volume que a pirâmide ocupa no espaço (V_{PI}) como um terço do volume que o prisma de mesma altura e mesma base, no entanto, para fazer esse cálculo é necessário saber a altura da pirâmide e para calcular a altura da pirâmide quadrada, devemos voltar à figura 3.13 que mostra a relação entre o apótema da pirâmide (g), o apótema da base ($a/2$) e a sua altura (H), usando o teorema de Pitágoras, teremos:

$$g^2 = H^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2$$

Simplificando, chegaremos a:

$$H = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$

Veja que essa altura é válida para a pirâmide quadrangular regular, porém usando raciocínio análogo poderá ser calculada a altura de qualquer pirâmide, mesmo que não seja regular. Portanto, sendo:

$$V_{PI} = \frac{1}{3} A_B \cdot h$$

Podemos também calcular o volume de uma pirâmide de base quadrada (V_{PIQ}) com arestas da base iguais a “a”, para isso, basta, substituir a área da base da pirâmide e a altura. Assim teremos:

$$V_{PIQ} = \frac{a^3 \sqrt{2}}{2}$$

Em síntese, o cálculo do volume que uma pirâmide qualquer ocupa no espaço é sempre realizado com a mesma relação, ou seja, um terço do produto da área do polígono da base com a altura da pirâmide, no entanto, deverá ser calculada a altura e a área do polígono da base em cada caso.

3.8 Tronco de pirâmide

Para obter um tronco de pirâmide, basta seccionar transversalmente em um plano paralelo ao plano da base da pirâmide, com isso, obtêm-se dois objetos geométricos espaciais, sendo um deles, uma pirâmide de altura menor e um tronco de pirâmide, conforme a figura 3.18.

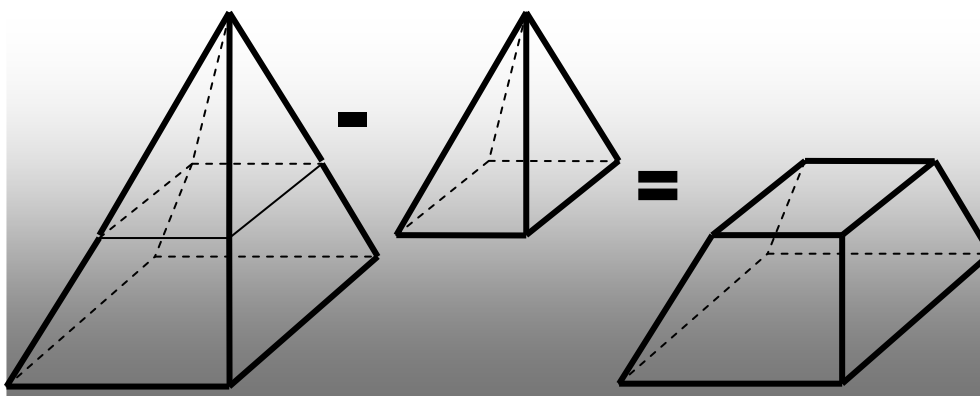


Figura 3.18 – Formação do tronco de pirâmide

Observe que o tronco de pirâmide tem duas bases, ou seja, a base inferior (B) que é a mesma da pirâmide original e a base superior (b) que é formada por um polígono semelhante ao polígono da base da pirâmide, porém proporcionalmente menor, conforme figura 3.19:

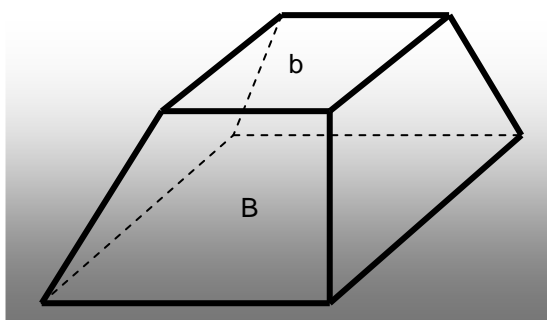


Figura 3.19 – Tronco de pirâmide

3.8.1 Planificação do tronco da pirâmide

Voltamos a figura 3.19 que nos mostra um tronco de pirâmide de base quadrada e baseado nesta figura vamos fazer a sua planificação, para isso podemos observar que a sua planificação será formada de dois quadrados e quatro trapézios.

Temos na figura 3.20 um exemplo desta planificação em que nos mostra a “base maior” (B) e a “base menor” (b) e, ainda, os quatro trapézios que por ser o tronco de base regular são todos trapézios congruentes entre si.

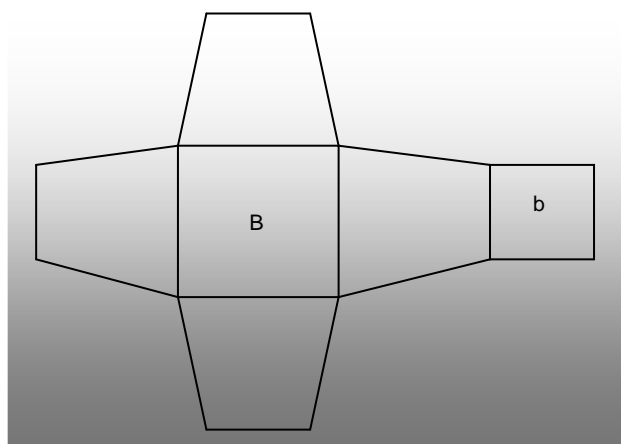


Figura 3.20 - Planificação do tronco de pirâmide de base quadrada

3.8.2 Relações matemáticas no tronco de pirâmide

Com base na planificação da figura 3.20, podemos calcular a área total da superfície do tronco da pirâmide de base quadrada (A_{TPIQ}), para isso, basta somar as áreas dos dois quadrados com quatro vezes a área do trapézio (A_T), veja:

$$A_{TPIQ} = A_B + A_b + 4.A_T$$

Substituindo a área da base maior, a área da base menor e área do trapézio que podemos verificar na geometria plana como sendo:

$$A_T = \frac{(B + b).h}{2}$$

Portanto, chamando a altura da pirâmide original de H e a altura da pirâmide formada na parte superior da secção de h_p e, ainda, a altura do tronco da pirâmide formado na parte inferior da secção de h_T , conforme figura 3.21, então teremos:

$$A_{TPIQ} = B^2 + b^2 + 4 \cdot \left[\frac{(B + b) \cdot h_T}{2} \right]$$

Podemos calcular, também, o volume que o tronco da pirâmide ocupa no espaço, para isso é conveniente partir da pirâmide que originou este tronco.

Portanto, dado uma pirâmide de altura H e fazendo um corte num plano paralelo a sua base a uma distância h_T , então, teremos um tronco de pirâmide em que sua altura será $h_T = H - h_p$, sendo h_p a altura da nova pirâmide, veja figura 3.21.

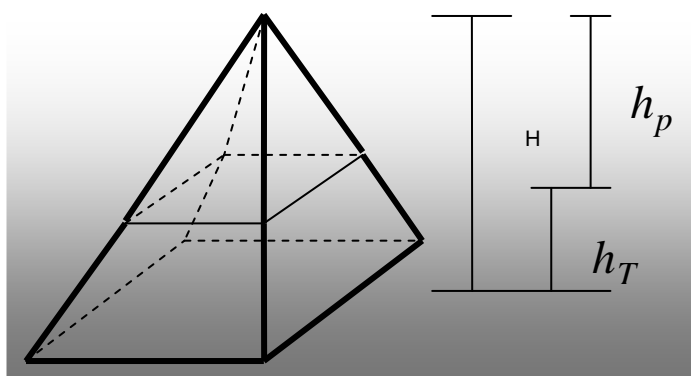


Figura 3.21 – Altura do tronco da pirâmide

Com base nestas convenções, podemos dizer que os volumes da nova pirâmide e do tronco, também, seguem as mesmas proporções, Logo podemos afirmar que $V_{TP} = V - V_p$, sendo V_{TP} o volume do tronco da pirâmide, V o volume da pirâmide original e V_p o volume da nova pirâmide. Então, sendo a pirâmide de altura H semelhante à pirâmide de altura h_p , temos as relações:

$$\frac{B}{b} = \left(\frac{H}{h_p} \right)^2 \quad e \quad V = V_p \left(\frac{H}{h_p} \right)^3$$

Baseado nestas informações e partindo de $V_{TP} = V - V_p$, temos:

$$V_{TP} = V_p \left(\frac{H}{h_p} \right)^3 - V_p$$

Substituindo V_p , temos:

$$V_T = V_p \left[\left(\frac{H}{h_p} \right)^3 - 1 \right]$$

Simplificando, teremos:

$$V_T = \frac{V_p (H - h_p) (H^2 + H.h_p + (h_p)^2)}{(h_p)^3}$$

Substituindo $h_T = H - h_p$ e $V_p = 1/3.b.h_p$, então:

$$V_T = \frac{1}{3} b.h_p.h_T \cdot \left(\frac{H^2 + H.h_p + (h_p)^2}{(h_p)^3} \right)$$

Simplificando h_p , temos:

$$V_T = \frac{1}{3} b.h_T \cdot \left(\frac{H^2 + H.h_p + (h_p)^2}{(h_p)^2} \right)$$

Simplificando pelo quadrado de h_p , temos:

$$V_T = \frac{1}{3} b.h_T \cdot \left(\frac{H^2}{(h_p)^2} + \frac{H}{h_p} + 1 \right)$$

Substituindo $\frac{H^2}{(h_p)^2} = \frac{B}{b}$, ficamos:

$$V_T = \frac{1}{3} b \cdot h_T \cdot \left(\frac{B}{b} + \sqrt{\frac{B}{b}} + 1 \right)$$

Simplificando, temos:

$$V_T = \frac{1}{3} \cdot h_T \cdot (B + \sqrt{Bb} + b)$$

Devemos lembrar que esta relação é válida para o volume do tronco da pirâmide de base quadrada, logo para outro tipo de tronco terá que ser demonstrado uma nova relação, porém, poderá seguir o mesmo raciocínio.

3.9 Sugestões de atividades

São sugeridas três atividades, sendo as duas primeiras experimentais e a terceira são 10 situações problemas. Estas atividades poderão ser usadas na integra ou adaptadas pelo professor, conforme realidade da escola.

3.9.1 Atividade experimental: Demonstração do volume da pirâmide

Demonstração da fórmula do volume de uma pirâmide de base qualquer.

Fórmula do volume da pirâmide

$$V = \frac{1}{3} A_b \cdot h$$

A figura 3.15, sugere que a soma do volume de três pirâmides é igual ao volume do prisma de mesma base e mesma altura.

Objetivo

Demonstrar a relação $V = \frac{1}{3} A_b \cdot h$.

Material

- Papel gramatura 180g/m²;
- Cola;
- Tesoura;
- Régua;
- Esquadro;
- Areia lavada.

Procedimento

1. Dividir a turma em pequenos grupos, cada grupo deverá fazer um trabalho;
2. Construir uma pirâmide (qualquer base) e um prisma de mesma base e mesma altura;
3. Encher a pirâmide de areia e despejar esse conteúdo no prisma, repetir esse procedimento mais duas vezes;
4. Observar que o prisma ficou cheio de areia;
5. Fazer um relatório concluindo a sua observação.

Observação: O professor poderá propor que um aluno de cada grupo vá fotografando ou filmando o procedimento passo a passo para montagem de uma apresentação no computador e explicação para os colegas.

3.9.2 Atividade experimental: construção do tronco de pirâmide

Montagem de um tronco de pirâmide.

Tronco de pirâmide

A figura 3.18 sugere que fazendo uma secção em uma pirâmide num plano paralelo ao plano da sua base obtêm-se um tronco de pirâmide e uma nova pirâmide, porém menor.

Objetivo

Mostrar que para obter um tronco de pirâmide, basta seccionar uma pirâmide num plano paralelo a sua base.

Material

- Papel gramatura 180g/m²;
- Cola;
- Tesoura;
- Régua;
- Esquadro;
- Placa de imã.

Procedimento

1. Distribuir a turma em pequenos grupos, cada grupo deverá fazer uma construção do tamanho que escolher;
2. Recortar no papel um molde da planificação de um tronco de pirâmide, conforme a figura 3.20;
3. Colar uma placa de imã na parte de traz da base menor do tronco;
4. Colar o tronco de pirâmide;
5. Recortar um molde de pirâmide com base igual à base menor do tronco de pirâmide, como se fosse a continuação do tronco para obter uma pirâmide maior.
6. Colar uma placa de imã na parte de traz da base da pirâmide;
7. Montar a pirâmide;
8. Colocar a pirâmide menor sobre a base menor do tronco de pirâmide.

9. Anotar as observações e escreva um relatório.

Observação: O professor poderá propor que um aluno de cada grupo vá fotografando ou filmando o procedimento passo a passo para montagem de uma posterior apresentação no computador e explicação para os colegas.

3.9.3 Atividade de aplicação: situações-problema

Nesta atividade são propostas 10 situações-problema contextualizadas, porém, o professor, se necessário, poderá elaborar outros ou extrair novas situações em livros didáticos de Ensino Médio.

1. Calcule a quantidade de vidro necessária para construir um aquário com o formato de um tronco de pirâmide com altura 40 cm, aresta da base inferior é 30 cm e a aresta da base superior é igual 20 cm.

Dica: Calcular a área da superfície total do tronco de pirâmide.

2. Sabendo que para cobrir a superfície de área de um m^2 com telhas Portuguesas são usadas em média 16 telhas e, ainda, no orçamento, geralmente, o carpinteiro sugere que o proprietário compre 10% a mais para recortes. Quantas telhas o proprietário deverá comprar para cobrir a sua casa usando um telhado de quatro águas (formato de pirâmide), sabendo que a casa tem o formato quadrado de lado 9 metros (já contando com os beirais) e o pontalete central (num telhado de quatro águas, é a distância entre a laje e o espigão, ponto que coincide com o vértice da pirâmide) de 2 metros?

Dica: Cálculo da área da superfície lateral e revisão de porcentagem.

3. Vamos supor que foi feito um corte bem no meio do telhado da situação anterior com o objetivo de introduzir uma caixa de água com o formato de um prisma de base quadrada cujo lado mede 2 metros. Calcule a altura da caixa que ficou escondida no telhado e a nova quantidade de telhas usadas, considerando as mesmas condições da atividade anterior.

Dica: Fazer uma relação entre o tronco de pirâmide e o prisma, também, é importante fazer um esboço da situação com o objetivo de visualização.

4. Numa construção em Londrina foram feitos 4 pilares maciços com o formato de pirâmide reta de base quadrada de lado 2 metros e altura 3 metros em estrutura de concreto. Qual a quantidade (volume da pirâmide), em m^3 , de concreto foram necessários para construir estes pilares?

Dica: Cálculo do volume de uma pirâmide.

5. Para a feira de ciências a turma resolveu construir um tetraedro com arestas medindo 1 metro, usando placas de EVA (Etil, Vinil e Acetato). Qual a quantidade deste material (área total da superfície da pirâmide), em m^2 , a turma deverá comprar supondo que 10% do material são usados para recortes e emendas?

Dica: Calcular a área da superfície de uma pirâmide e seus recortes.

6. Em uma festa exótica os organizadores tiveram a idéia de construir um bolo com o formato do tronco de pirâmide de base retangular de comprimento 1 metro e largura 50 cm. Sabendo que a altura do bolo deveria ser 20 cm. Qual a quantidade de massa (volume do tronco de pirâmide), em cm^2 , foi usada para produzir esse bolo, sendo 20% de recheio?

Dica: Cálculo do volume do tronco de pirâmide e revisão de porcentagem.

7. Um frasco de perfume fechado tem o formato de uma pirâmide reta de base quadrada de lado 5 cm e altura 10cm, porém a tampa, também tem esse formato e uma altura de 3 cm, conforme figura 3.22. Qual a quantidade de perfume cabe nesse frasco?

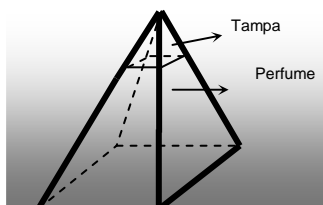


Figura 3.22 – Esboço de frasco de perfume

Dica: Cálculo da capacidade de um tronco de pirâmide, para isso, basta descontar a tampa conforme poderá ser observado no esquema da figura.

8. Um aluno resolveu construir uma peça de enfeite para presentear a sua mãe e para isso escolheu uma pirâmide de base hexagonal feita de vidro. Decidiu que a base iria ser regular de lado 15 cm e altura da peça deveria ser 20 cm. Qual a quantidade de vidro (área da superfície da pirâmide), em cm^2 , ele gastou para construir esse presente?

Dica: Cálculo da área da superfície da pirâmide.

9. Em um depósito de areia tem uma caixa com o formato de um cubo de aresta 3 metros completamente cheio de areia. Porém, o dono do depósito gostaria de passar toda essa quantidade de areia em recipientes com o formato de pirâmides invertidas de base quadrada, com aresta da base 3 metros e altura 1 metro. Qual a quantidade de recipiente ele irá usar?

Dica: Comparar o volume do cubo com o volume da pirâmide de base quadrada.

10. Qual o volume de um tronco de tetraedro com aresta da base maior 10 metros e aresta da base menor 5 metros?

Dica: Cálculo do volume do tronco de pirâmide de base triangular regular.

Referências Bibliográficas:

BOYER, Carl Benjamin. **História da Matemática**. São Paulo: Edgard Blücher, 1974.

Coberturas. In. COBERTURAS. Disponível em:
<<http://www.uepg.br/denge/aulas/Coberturas/Coberturas.doc>>. Acesso em: 05 nov. 2008.

DANTE, Luiz Roberto. **Matemática**. São Paulo: Ática, 2005.

EVES, Howard. **Introdução à História da Matemática**. Campinas, SP: Unicamp, 2004.

Pirâmide. In. WIKIPÉDIA. Disponível em: <<http://pt.wikipedia.org/wiki/Piramide>>. Acesso em: 30 out. 2008.

Pirâmide (Geometria). In. MATEMÁTICA ESSENCIAL. Disponível em: <<http://pessoal.sercomtel.com.br/matematica/geometria/piramide/piramide.htm>>. Acesso em: 30 out. 2008.

Pyramid. In. SPRINGER ONLINE REFERENCE WORKS. Disponível em: <<http://eom.springer.de/P/p075930.htm>>. Acesso em: 30 out. 2008.

Pyramid (Geometry). In. THE FREE DICTIONARY BY FARLEX. Disponível em: <[http://encyclopedia.farlex.com/Pyramid+\(geometry\)](http://encyclopedia.farlex.com/Pyramid+(geometry))>. Acesso em: 30 out. 2008.

Pyramid. In. MATH DICTIONARY. Disponível em: <<http://users.erols.com/bram/Pdictionary.html>>. Acesso em: 30 out. 2008.

RUBIÓ, Angel Panadés; FREITAS, Luciana Maria Tenuta de. **Matemática e suas Tecnologias**. São Paulo: IBEP, 2005. v.3.

SMOLE, Kátia Cristina Stocco; Diniz, Maria Ignez de Souza Vieira. **Matemática: Ensino Médio**. 5.ed. São Paulo: Saraiva, 2005. v.2.

Telhado III. In. FAZ FÁCIL. Disponível em: <http://www.fazfacil.com.br/reforma_construcao/telhado_3.html>. Acesso em: 04 nov 2008.

4 CILINDRO

Introdução

No capítulo 3, foi estudado a pirâmide e o tronco da pirâmide, tendo como foco o contexto histórico, a contextualização, as planificações, a suas classificações, cálculos de áreas, volumes e outros e, também, foram propostas atividades e situações problemas.

Estudaremos agora o cilindro e nosso estudo terá início no contexto histórico do cilindro e para contextualizar usaremos a planificação por ter o formato da figura geométrica, logo após será discutido o conceito matemático para essa figura geométrica referenciado em alguns sites e autores de livros didáticos.

Na sequência, serão apresentados os elementos principais do cilindro e será feito exemplo de planificação e posteriormente um estudo sobre as relações matemáticas pertinentes a essa figura geométrica.

Para encerrar o capítulo 4, serão propostas três atividades que o professor poderá trabalhar na íntegra ou adaptá-las para a realidade de sua escola.

4.1 Fatos históricos

A maior quantidade de registros que conhecemos da matemática antiga foram escritos em papiros, dentre eles destaca-se o papiro de Moscou, que consiste em uma tira de 5,5 metros de comprimento por 8 cm de largura, com 25 problemas e um desses problemas faz o cálculo do volume do cilindro reto determinando como sendo o produto da área da base pelo comprimento da altura. Esta relação é a que utilizamos até nossos dias.

No trabalho remanescente de Arquimedes *sobre esfera e cilindro* encontramos uma relação entre a área da superfície esférica com a superfície lateral de um cilindro, assim como, uma relação do volume da esfera com o volume do cilindro. Arquimedes também defendeu a idéia de Eudoxo que relacionava o volume do cilindro com o volume do cone de mesma base e mesma altura

Arquimedes, por ter descoberto e provado a razão dos volumes do cilindro e da esfera, pediu para que sobre seu túmulo fosse esculpida uma esfera inscrita num cilindro circular reto cuja altura é igual ao seu diâmetro.

Portanto, devemos a Arquimedes boa parte dos conhecimentos da Geometria Espacial que estudamos hoje. Sendo assim, torna-se justificável a importância do texto que se segue.

4.2 Texto de motivação: A panela de pressão.

Quem nunca viu uma panela de pressão? A panela de pressão é um objeto bastante conhecido, tanto pelo aluno como por toda a sociedade. Certamente, esse objeto faz parte dos utensílios domésticos de praticamente todas as residências, tanto de pessoas mais favorecidas quanto às menos favorecidas, veja a foto da panela de pressão na figura 4.1.



Figura 4.1 – panela de pressão – Foto: Kleber Sebastião Juliani

No entanto, escolhemos a panela de pressão para estudar o seu formato não apenas por ser bastante conhecida, mas, pela sua função e importância, principalmente, na sociedade contemporânea.

Afinal o que é uma panela de pressão? De uma maneira bem simples, podemos dizer que a panela de pressão é um recipiente hermeticamente fechado (completamente fechado) que ao ser levada ao fogo contendo certa quantidade de líquido (água) e alguns alimentos (sólidos) em seu interior, produz vapor de água e com isso facilita o cozimento desses alimentos, ou seja, cozinha-os mais rápidos.

Embora, a panela de pressão nos dias atuais é um utensílio fundamental nas residências e restaurantes, ela só foi inventada ao final do século XVII pelo físico francês Denis Papir. Pois, Denis conseguiu perceber que a água em um recipiente completamente fechado poderia atingir temperatura superior a 100°C (temperatura da água no ponto de vaporização ao nível do mar) e permanecer no estado líquido e com isso cozer alimentos em menos tempo e sem diminuir os valores vitamínicos e minerais dos mesmos.

Portanto, a panela de pressão foi ganhando espaço, especialmente em lugares de altitudes altas, visto que a temperatura de ebulição da água vai diminuindo à medida que a altitude vai aumentando e consecutivamente a pressão atmosférica vai diminuindo, dificultando cada vez mais o cozimento dos alimentos e o recipiente hermeticamente fechado consegue manter a pressão interna alta, independentemente da altitude.

As fábricas de panelas de pressão, atuais, têm se preocupado com a segurança do consumidor e com isso, elas vêm com uma borracha de isolamento e uma tampa bastante reforçada levemente circular provida de uma válvula de segurança que rompe se a pressão interna for muito grande, evitando assim a explosão da panela e ainda uma válvula reguladora de pressão para eliminar o excesso de vapor interno.

Afinal, o que é pressão? Pressão é a força aplicada em uma determinada área, portanto, quando o gás é comprimido em um determinado recipiente as moléculas dessa quantidade de gás tende a se expandir aplicando diversas forças,

chocando uma molécula contra as outras e consecutivamente contra as paredes do recipiente “como se fosse muitas pessoas dentro de uma sala pequena tentando sair” forçando assim o seu rompimento, portanto se as paredes não forem fortes o suficiente elas poderão romper causando uma explosão, uma vez que neste recipiente pode estar concentrado muita energia em pouco espaço.

Também, há preocupação com o material que a panela é fabricada e o seu formato, pois é importante para que ela tenha resistência suficiente para resistir a pressão que é submetida. Pois, as forças internas são aplicadas em uma normal em relação às paredes do recipiente e como as resistências dos materiais vão diminuindo quando se afastam dos pontos de apoio (isso devido ao momento da força) e ainda, sendo a pressão interna constante tende a ir arredondando a parede inicialmente plana, portanto, moldando um recipiente esférico.

Para entender esse fenômeno basta observar as panelas de pressão que já foram bastante usadas, ou seja, com o tempo de uso elas vão ficando com o seu fundo arredondado, com isso podemos dizer que a tendência dos recipientes que são submetidos a elevadas pressões internas é o formato esférico. Entretanto, não é prático e nem seguro uma panela com esse formato, logo se opta pelo formato cilíndrico, uma vez que as paredes laterais têm a mesma resistência em qualquer ponto.

4.3 Conceito geométrico de cilindro

Na Geometria Espacial, o formato da panela de pressão representa uma figura espacial importante, ou seja, o cilindro e na preocupação de defini-lo foi feita uma pesquisa na Internet através de enciclopédias e dicionários relacionados à matemática e dessa pesquisa estão sendo destacados alguns dos conceitos encontrados, listados na seqüência:

1. “Observamos que um cilindro é uma superfície no espaço R^3 , mas muitas vezes vale a pena considerar o cilindro como a região sólida contida dentro do cilindro.” (CILINDRO, Matemática Essencial, 2008).

2. “Cilindro é o objeto tridimensional gerado pela superfície de revolução de um retângulo em torno de um de seus lados. De maneira mais prática, o cilindro é um corpo alongado e de aspecto roliço, com o mesmo diâmetro ao longo de todo o comprimento. O cilindro é também definido através de uma superfície quadrática, cuja função geradora é: $(x/a)^2 + (y/a)^2 = 1$. Para o cilindro circular, os valores de a e b , na equação acima, são iguais. Há também a possibilidade do cilindro circular ser chamado de cilindro eqüilátero. Tal denominação ocorre quando a sua altura, também chamada de geratriz, equivale ao diâmetro da base.”(CILINDRO, Wikipédia, 2008).
3. “Cilindro é um corpo limitado por uma superfície cilíndrica (cilindro) e dois planos paralelos interseção dele. As partes do plano deitado dentro da chamada superfície cilíndrica são as bases do cilindro, a parte da superfície cilíndrica entre as bases é chamada de superfície lateral do cilindro.” (CYLINDER, Springer Link, 2008).
4. “Cilindro é uma superfície, com a seguinte equação em coordenadas cartesianas: $(x/a)^2 + (y/a)^2 = 1$. Esta equação é de um cilindro elíptico, uma generalização do comum, cilindro circular ($a = b$). Ainda mais geral é o cilindro generalizada: a secção transversal pode ser qualquer curva.” (CYLINDER, The Free Dictionary By Farlex, 2008).
5. “Cilindro é a união de todos os segmentos de reta que conectam aos correspondentes pontos sobre círculos contidos em planos paralelos”.(CYLINDER, Math Dictionary, 2008).

Também foi feita uma pesquisa em livros didáticos para uso no Ensino Médio de matemática e dessa pesquisa estão sendo destacados alguns dos conceitos encontrados, listados na seqüência:

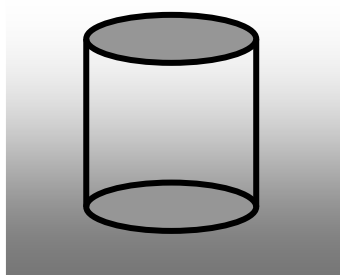
1. “Podemos intuitivamente imaginar um cilindro como o conjunto de pontos gerado por uma translação de um círculo.” (DANTE, 2005).
2. “O conjunto de todos os segmentos paralelos a r , com extremos em um ponto do círculo e um ponto de β , é uma figura sólida. Ela é chamada cilindro circular ou simplesmente, cilindro. As extremidades desses

segmentos, situadas no plano β , formam outro círculo como o mesmo raio do círculo original.” (RUBIÓ; FREITAS, 2005).

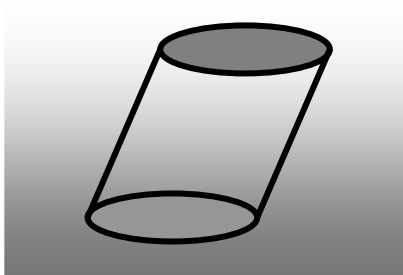
3. “Sejam α e β dois planos paralelos, C um círculo de centro O e de raio r, contido em α , e s uma reta concorrente com α . A reunião de todos os segmentos de reta paralelos a s, com extremidade em C e a outra em β , é denominada cilindro circular”. (SMOLE; DINIZ, 2005).

Baseado nas definições pesquisadas, concluímos que o cilindro é considerado o lugar geométrico formado pela reunião de todos os segmentos de reta que tem uma das extremidades na superfície de uma curva suave (base inferior) e a outra extremidade em uma superfície de uma segunda curva (base superior) congruente e contida num plano paralelo ao plano da primeira curva. Portanto, iremos adotar o cilindro como sendo uma superfície, entretanto quando for necessário trabalhar com um sólido com o formato do cilindro, iremos chamá-lo de sólido cilíndrico.

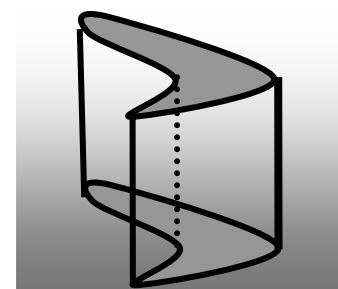
Com base na definição podemos destacar alguns tipos de cilindro, conforme desenhos na figura 4.2:



Cilindro circular reto



Cilindro circular oblíquo



Cilindro com base qualquer

Figura 4.2 – Modelos de cilindros

Apesar de poder ser definidos diversos tipos de cilindros, neste trabalho será dado destaque ao cilindro circular reto.

O cilindro circular reto pode ser construído através da rotação da superfície de um quadrilátero tendo como eixo um de seus lados.

Na figura 4.3 podemos observar um exemplo de cilindro circular reto proveniente da rotação de um quadrilátero, observe que o quadrilátero (retângulo)

gira em volta de um de seus lados que coincide com o eixo de rotação que gera o cilindro.

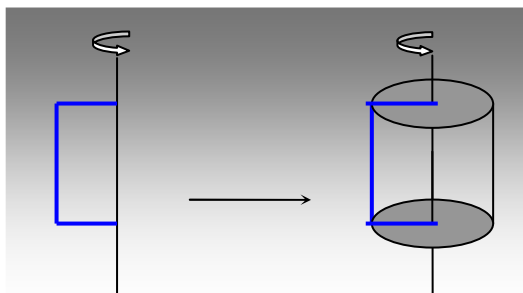


Figura 4.3 – Cilindro formado por rotação

No caso da panela de pressão, temos um cilindro reto, uma vez que podemos imaginar um eixo perpendicular no centro da sua base e todos os pontos da parede lateral é eqüidistante a esse eixo imaginário. Portanto, a panela de pressão tem formato cilíndrico uma vez que sua superfície é um cilindro.

4.4 Elementos do cilindro

Com base na definição adotada por este trabalho podemos destacar os elementos do cilindro, conforme figura 4.4.

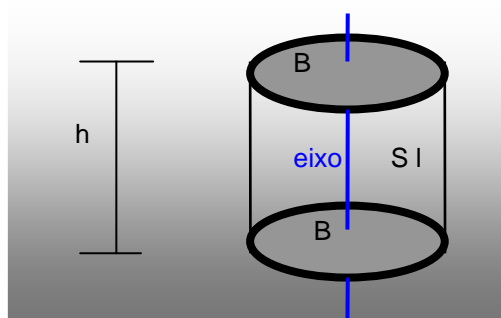


Figura 4.4 Elementos do cilindro

- *Base inferior e base superior (B)* – superfícies de contorno suave;
- *Altura (h)* – distância entre os planos que contém as bases;
- *Superfície lateral (S l)* – soma de todos os pontos que estão eqüidistantes ao eixo de rotação e a medida dessa superfície é chamada de área lateral;

- *Superfície das bases* – é a superfície interna das curvas que geraram o cilindro e a medida dessas superfícies são chamadas de área das bases;
- *Superfície total* – é a união entre a superfície lateral e a das bases, portanto, a área total é a soma da área da superfície lateral com as áreas das bases;

4.4.1 Detalhes relativos ao cilindro circular reto

Particularidades no cilindro circular reto:

- Tanto a base inferior quanto a base superior são circulares;
- O eixo de rotação é perpendicular ao plano que contém a sua base;
- A altura coincide com o comprimento da geratriz, isto é, o lado do retângulo que gerou o cilindro;
- A área lateral é a área do retângulo, cujo comprimento é o raio da circunferência da base “ r ” e a altura coincide com a altura do cilindro “ h ”;
- A área das bases é a soma da área de dois círculos congruentes;

4.5 Planificação do cilindro

Na geometria espacial é comum fazer a planificação de figuras espaciais para facilitar a visualização de suas partes, assim facilitar os cálculos, principalmente, para descobrir a quantidade de material para fabricar um determinado objeto.

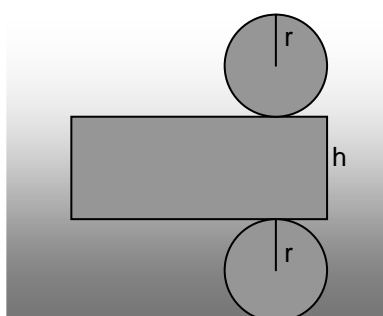


Figura 4.5 – Planificação do cilindro

Assim podemos verificar através da figura 4.5 a planificação de um cilindro circular reto de raio r e altura h . Observe, também, que a planificação é formada de uma região retangular e dois círculos, sendo a região retangular a superfície lateral do cilindro e os círculos as superfícies das bases.

4.6 Relações matemáticas no cilindro circular reto

Primeiro, podemos calcular a área da superfície lateral (A_L), para isso basta descobrir o comprimento da região retangular, pois a largura é igual à altura do cilindro. No entanto, se essa região retangular envolve todo o círculo da base o seu comprimento é igual ao comprimento de uma circunferência de mesmo raio que o cilindro, logo, temos:

$$A_L = 2 \pi r h.$$

Depois podemos calcular as áreas das bases (A_B), para isso, basta calcular a área de um círculo de raio igual ao raio do cilindro e multiplicar por dois, uma vez que as bases são congruentes (iguais), portanto, a fórmula fica:

$$A_B = 2 \pi r^2$$

Em seguida, podemos calcular a área da superfície total do cilindro (A_C) somando a área lateral com a área das bases e fazer as devidas simplificações.

$$A_C = 2 \pi r (h + r).$$

Seguindo o mesmo raciocínio e supondo o diâmetro da base ($2r$) igual à altura do cilindro, tem-se um caso particular, chamado cilindro equilátero e podemos calcular a área da superfície total do cilindro equilátero (A_{CE}) e para isso basta substituir a altura do cilindro por “ $2r$ ” e obtemos:

$$A_{CE} = 6 \pi r^2.$$

Além do cálculo da área da superfície do cilindro, nós podemos, também, calcular o volume que um sólido cujo formato é de um cilindro (sólido cilíndrico) ocupa no espaço ou a capacidade de um recipiente cilíndrico como a panela de pressão. Para isso basta fazer o produto entre a área da base e a altura desse cilindro:

No caso do cilindro equilátero em que $h = 2r$, temos:

$$V = 2\pi r^3.$$

4.7 Sugestões de atividades

São sugeridas três atividades, sendo que a primeira refere-se a uma experimentação com o objetivo de comparar a capacidade de uma panela de pressão com cálculos e medidas feitas pelos grupos de alunos, a segunda é uma atividade de produção de texto e a última são 10 situações-problema. Essas atividades poderão ser usadas na íntegra ou adaptadas pelo professor, conforme realidade da escola.

4.7.1 Atividade experimental: comprovação de dados da panela de pressão

Vamos voltar na panela de pressão da figura 4.1 e calcular a quantidade de alumínio necessário para fabricá-la. Afinal, como calcular a área de sua superfície uma vez que não podemos planificá-la? Para isto existem várias técnicas sem precisar planificar, uma delas é envolver toda a sua lateral com papel, pois a quantidade do papel será a área da superfície lateral do cilindro que contém o corpo da panela e a mesma coisa é feito nas suas bases, formando assim a superfície total do cilindro.

Entretanto, vamos usar apenas medidas e cálculos para descobrir a área do cilindro que contém o corpo da panela de pressão tampada. Para isso, devemos pegar uma panela e com uma fita métrica medir a sua altura e o raio de sua base.

A altura é fácil, basta medir direto na panela, mas para calcular o raio com uma precisão maior iremos fazer um cálculo auxiliar, ou seja, contornar toda a lateral com a fita métrica com isso descobre o comprimento da circunferência do círculo da base e da e da geometria plana, temos:

$$C = 2\pi r .$$

Para exemplificar usaremos uma panela de pressão com capacidade de 7 litros, fazendo a medida da circunferência da base temos 72 cm e a altura da mesma é 18 cm, também, para facilitar o cálculo vamos considerar que as bases são círculos, ou seja, figuras planas, pois, geralmente, o encontro entre a face lateral e as bases são um pouco arredondadas e, ainda, a tampa também é arredondada, portanto, estamos descartando esses detalhes.

Uma vez definido os valores, podemos proceder aos cálculos, lembrando que o nosso objetivo é descobrir a quantidade de chapa de alumínio usada para construir a referida panela. Logo, com o comprimento da circunferência que é 80 cm ou 0,8 metros, podemos calcular o raio.

Substituindo os dados obtidos através das medidas na fórmula do comprimento da circunferência e usando $\pi = 3,14$, obtemos:

$$r = \frac{0,72}{6,28} \cong 0,1146m$$

Agora sabemos que o raio do círculo da base da panela de pressão é 0,1146 m, podemos, então, calcular a área da base (A_B), usando a seguinte relação:

$$A_B = \pi r^2$$

Logo, substituindo o valor do raio, obtemos:

$$A_B \cong 0,0412 \text{ m}^2$$

Então, como a área lateral do cilindro é um retângulo, no caso particular, de comprimento 72 cm que é igual a 0,72 metros e largura (altura da panela) igual a 18 cm ou igual 0,18 metros e podemos calcular a área da superfície lateral (A_L), usando a seguinte relação:

$$A_L = b.h$$

Substituindo os valores da base e da altura da panela, teremos:

$$A_L \cong 0,1296 \text{ m}^2$$

Com a área da superfície lateral (A_L) e a área da base (A_B) podemos calcular a área total, lembrando que temos duas bases, ou seja, a base inferior e a base superior, então:

$$A_T = A_L + 2 \cdot A_B$$

Substituindo os valores da área da superfície lateral e a área da base, obtemos:

$$A_T = 0,212 \text{ m}^2$$

Poderíamos ter calculado usando a fórmula:

$$A_T = 2 \pi r (h + r)$$

Lembrando que $2\pi r$ é o comprimento da circunferência da base igual a 0,8m, então:

$$A_{Tl} = 0,212 \text{ m}^2$$

Portanto, a quantidade de chapa de alumínio gasto para construir a referida panela é de $0,212 \text{ m}^2$, para descobrir o gasto em alumínio para fabricá-la, bastaria saber o preço de um m^2 desse material e multiplicar esse valor por 0,212.

Podemos, também, verificar se a capacidade (volume da panela de pressão), especificada pelo fabricante, no caso particular, 7 litros, está correta, e para isso sabemos que:

$$V = A_B h$$

Substituindo a (A_B), já calculada anteriormente e a altura que medimos na própria panela, termos:

$$V = 0,0074 \text{ m}^3$$

Ou, usando a fórmula geral:

$$V = \pi r^2 h$$

Para que possamos comparar a capacidade da panela fornecida pelo fabricante com o valor calculado por nós é necessário que eles estejam na mesma unidade física, isto é, ou devemos transformar a unidade do fabricante para m^3 ou a nossa para litros. Para realizar essa transformação devemos lançar mão, da matemática básica, ou seja, devemos fazer uma regra de três simples.

Entretanto, para fazer a regra de três, neste caso, é necessário saber que 1m^3 equivale a 1000 litros:

$$\begin{array}{ccc} 1 \text{ m}^3 & & 1000 \text{ l} \\ & \uparrow & \uparrow \\ 0,0074 \text{ m}^3 & & V(l) \end{array}$$

$$V = 7,4 \text{ l}$$

Observe que houve uma diferença de 0,4 litros entre o nosso cálculo e o valor informado pelo fabricante, mas isso é comum uma vez que o nosso cálculo foi

feito com aproximações e ao mesmo tempo usamos medidas feitas com aparelhos que podem produzir erros. Entretanto, conseguimos chegar em um valor bastante aproximado.

Agora é sua vez, provavelmente, você tem uma panela de pressão em sua casa de capacidade diferente, lance mão dela e faça as medidas e os cálculos para verificar a quantidade de chapa de alumínio usada para construí-la e comprove se a capacidade dada pelo fabricante está correta, se caso ela não tiver mais essa informação na base inferior, use uma jarra graduada e meça esse volume usando água e o método da exaustão.

Observação: Para a realização desta atividade o professor poderá dividir a turma em grupos e cada grupo irá usar uma panela ou um outro recipiente cilíndrico de tamanho diferente. Cada grupo poderá fotografar ou filmar passo a passo o experimento, para posteriormente apresentar as conclusões para os colegas dos outros grupos através de apresentação no computador ou na Tvpndrive.

4.7.2 Atividade de produção de texto: objeto cilíndrico

É importante o incentivo à leitura e à produção de texto

Objetivo

Incentivar os alunos a produzirem textos usando o contexto matemático.

Procedimento

- Separar a turma em grupos de 3 ou 4 alunos;
- Cada grupo deverá escolher um objeto com o formato cilíndrico;
- Fazer um estudo sobre o objeto que o grupo escolheu. Neste estudo deverão constar as seguintes questões: Qual o objeto? Porque escolheram esse objeto (a importância desse objeto)? Para quem foi feito esse objeto? Onde é feito? Como é feito? Com que material é feito? Quanto e quando é feito?

Desde quando é feito (um pouco da sua história)? Quem faz? E assim por diante.

- Montar um texto e quando necessário apresentar os cálculos de áreas e volumes no corpo do texto;
- Montar um livreto com os textos de todos os grupos;
- Para finalizar a atividade, cada grupo, deverá fazer um resumo do seu material e montar uma apresentação no computador ou na Tvpendrive para explicar aos colegas na sala de aula. O professor deverá acompanhar essa demonstração e se necessário intervir na explicação do grupo.

4.7.3 Atividade de aplicação: situações-problema

Nesta atividade são propostas 10 situações-problema contextualizadas, porém, o professor, se necessário, poderá elaborar outros ou extrair novas situações em livros didáticos de Ensino Médio.

1. Tem-se uma tora de madeira, cujo formato é, aproximadamente, um cilindro de base circular reto. Para medir a quantidade de m^3 de madeira dessa tora foi medido o seu contorno com uma corda e essa medida resultou em 4 metros. Sabendo que a altura da tora é de 10 metros. Qual a metragem (volume) de madeira?

Dica: Através de medidas experimentais podemos calcular o volume dos objetos cilíndricos.

2. Na tora do exercício anterior, foi retirada uma casca que contornava toda ela. Qual a superfície dessa casca em m^2 ?

Dica: Calcular a área da superfície lateral da tora.

3. Foi comprado óleo numa lata com o formato de um cilindro circular reto de 20 cm de diâmetro por 30 cm de altura, para ser distribuídas em tubos menores com o mesmo formato, entretanto, com 4 cm de diâmetro e 10 cm de altura. Quantos tubos irão precisar para que fiquem completamente cheios?]

Dica: Comparar volume entre cilindros de bases maiores e bases menores.

4. No exercício anterior, ficará um tanto de óleo na lata que não será suficiente para completar um tubo cheio. Colocando esse resto, também, num tubo. Qual a altura que o óleo irá atingir?

Dica: Fazer cálculo de volume diminuindo a altura do cilindro.

5. Um tubo de PVC (Poli Cloreto de Vinila) de 100 mm, geralmente, é vendido com a medida de 6 metros linear com o formato de um cilindro circular reto. Qual a quantidade (área lateral), em m^2 , de PVC que o fabricante usa para produzir desses tubos.

Dica: Cálculo da área lateral do cilindro.

6. Para fazer os quatro pilares de uma varanda, foram usados canos de PVC de 150 mm cheios de concreto. Sabendo que cada pilar tem 3 m de altura, qual a quantidade de concreto (volume) usado para fazer esses pilares?

Dica: Calcular a capacidade (volume) do cilindro.

7. Um determinado doce era vendido em latas cilíndricas de raio 10 cm e altura 2,5cm, porém o fabricante resolveu mudar para latas, também, cilíndricas de raio 5 cm e altura 10 cm. Supondo que o doce enche totalmente a lata nos dois casos, qual lata vem mais doce? Faça os cálculos.

Dica: Comparar o volume conforme variar a altura e o raio da base do cilindro.

8. Qual das latas do exercício anterior gasta mais material (chapas) para produzi-las, inclusive a tampa? O comerciante teve lucro ou prejuízo, com a mudança, se ele compra a embalagem pela quantidade de material gasto para produzi-la?

Dica: Comparar gasto de material para construir cilindros variando a sua altura e o raio da base.

9. Um cilindro circular reto foi contornado com uma folha de papel A4. Qual o volume desse cilindro?

Dica: Medidas da folha de papel A4 é largura 21 cm e altura 29,7 cm.

10. Um tanque de combustível com o formato de cilindro circular reto de raio 1 m e 5 metros de profundidade, estava completamente cheio no período da manhã e ao medir a tarde tinha apenas 25% da sua capacidade. Qual a quantidade de combustível vendida, desse tanque, neste período, em m^3 ?

Dica: Calcular o volume do cilindro e revisar probabilidade.

Referências Bibliográficas.

BOYER, Carl Benjamin. **História da Matemática**. São Paulo: Edgard Blücher, 1974.

Cilindro (Geometria). In. MATEMÁTICA ESSENCIAL. Disponível em: <<http://pessoal.sercomtel.com.br/matematica/geometria/cilindro/cilindro.htm>>. Acesso em: 22 out. 2008.

Cilindro. In. WIKIPEDIA. Disponível em: <<http://pt.wikipedia.org/wiki/Cilindro>>. Acesso em: 22 out. 2008.

Cylinder Surface. In. SPRINGER ONLINE REFERENCE WORKS. Disponível em: <<http://eom.springer.de/C/c027590.htm>>. Acesso em: 22 out. 2008.

Cylinder. In. THE FREE DICTIONARY BY FARLEX. Disponível em: <[http://encyclopedia.thefreedictionary.com/Cylinder+\(geometry\)](http://encyclopedia.thefreedictionary.com/Cylinder+(geometry))>. Acesso em: 22 out. 2008.

Cylinder. In. MATH DICTIONARY. Disponível em: <<http://users.erols.com/bram/Cdictionary.html>>. Acesso em: 22 out. 2008.

DANTE, Luiz Roberto. **Matemática**. São Paulo: Ática, 2005.

EVES, Howard. **Introdução à História da Matemática**. Campinas, SP: Unicamp, 2004.

Panela de Pressão. In. INVENSÕES. Disponível em: <<http://www.fernandodannemann.recantodasletras.com.br/visualizar.php?id=122956>>. Acesso em: 22 out. 2008.

Panela de Pressão. In. SALA DA FÍSICA. Disponível em:
<<http://br.geocities.com/saladefisica7/funciona/panela.htm>>. Acesso em: 22 out.
2008.

RUBIÓ, Angel Panadés; FREITAS, Luciana Maria Tenuta de. **Matemática e suas Tecnologias**. São Paulo: IBEP, 2005. v.3.

SMOLE, Kátia Cristina Stocco; Diniz, Maria Ignez de Souza Vieira. **Matemática: Ensino Médio**. 5.ed. São Paulo: Saraiva, 2005. v.2.

5 CONE

Introdução

No capítulo 4, foi estudado o cilindro, enfocando o seu contexto histórico, a sua contextualização, planificações, cálculos de áreas, volumes e outros e ao final foram propostas atividades e situações problemas.

Abordaremos agora o cone e o tronco do cone e essa abordagem terá início com contexto histórico dessas figuras geométricas, falaremos sobre o cone de sinalização como exemplo de contextualização, em seguida será discutido o conceito matemático do cone tendo como referência alguns sites e alguns autores de livros didáticos.

Em seguida, serão apresentados os principais elementos do cone e exemplo de planificação, posteriormente será feito um estudo sobre as relações matemáticas pertinentes a essa figura geométrica.

Mais adiante, será estudado o tronco de cone dando ênfase a planificação e o cálculo de áreas e volumes.

Para encerrar o capítulo 5, serão propostas três atividades que o professor poderá trabalhá-las na íntegra ou adaptá-las para a realidade de sua escola.

5.1 Relatos históricos

Os relatos históricos nos mostram que os babilônicos calculavam o volume do tronco de cone, erradamente, como sendo o produto da altura pela semi-

soma das bases, porém, esses mesmos relatos indicam que esse mesmo povo já se preocupava com o cone há mais de 2000 anos a.C.

Também encontramos relatos tais como: *A métrica* de Herão que viveu provavelmente, no primeiro século de nossa era. Esse material se resume em três livros que trazem os estudos geométricos de Herão e dentre esses estudos um é sobre a superfície do cone que, infelizmente, ficou escondido quase dois mil anos, pois, esse só foi encontrado no ano de 1896.

No caminho trilhado pelos geômetras de todas as épocas também apresentavam momentos de confusão, por exemplo, o relato de Plutarco dizendo que Demócrito numa certa ocasião “[...] considerou a possibilidade de um cone ser formado de uma infinidade de seções planas paralelas à base [...]” (BOYER, 1974) isso não era verdade, mas “[...] se duas seções “adjacentes” fossem do mesmo tamanho o sólido seria um cilindro e não um cone”. (BOYER, 1974).

Ainda, nestas trilhas, apresentaram defeitos, tal como, medidas com aproximações bruscas feitas pelos egípcios, por exemplo, para fazer o cálculo do volume do tronco de cone somavam a área das bases e dividiam por dois e o resultado multiplicava pela altura do tronco.

Porém, foram muitos os acertos, como a descoberta da relação entre o cone e o cilindro de mesma base e mesma altura, que o próprio Arquimedes atribuiu a Eudoxo essa descoberta, juntamente com o método da exaustão.

Algumas generalizações importantes foram feitas, como a prova de Apolônio em que mostra que para ser cone não necessariamente tem que ser reto, mas o cone poderia ter inclinações, ou seja, Apolônio provou que o cone pode ser oblíquo ou até mesmo escaleno e ainda, foi ele quem definiu o cone com o conceito que usamos até os dias de hoje, ou seja: “Se fizermos uma reta de comprimento indefinido e passando sempre por um ponto fixo, move-se ao longo da circunferência de um círculo que não está num mesmo plano com o ponto de modo a passar sucessivamente por cada um dos pontos dessa circunferência, a reta móvel descreverá a superfície de um cone duplo”. (BOYER, 1974)

5.2 Texto de motivação: O cone para sinalização

A preocupação com a segurança e a integridade física das pessoas vem se intensificando devido ao aumento significativo da quantidade de veículos que trafegam nas estradas e rodovias de nosso país. Prova disso, o Código de Trânsito Brasileiro vem sendo regularmente atualizado. Também, recentemente foi decretada a lei seca, ou seja, ficou bem mais rígida a regra e a pena para quem for pego dirigindo alcoolizado.

Naturalmente, a segurança e a integridade física de motoristas e pedestre não se consolida apenas através de leis, regras e penalidades, mas, também, através de prevenções e cuidados, tanto do próprio motorista ou pedestre, quanto das autoridades oficiais, sobretudo, dos policiais de trânsito. No tocante as prevenções e cuidados, existem alguns objetos necessários para que isso ocorra, dentre eles, podemos destacar o triângulo de sinalização, pneus em bom estado, limpador de pára-brisa em ordem e etc.

Entretanto, vamos dar ênfase a um objeto bastante usado, principalmente, em rodovias, sobretudo pelos Departamentos de Estrada e Rodagem (DERs), ou seja, o cone para sinalização viária, veja foto na figura 5.1.



Figura 5.1 – Cone de sinalização viária – Foto: Kleber Sebastião Juliani

Este objeto consiste em uma peça com o formato cônico e uma sapata (pés de apoio), feita de material flexível e serve para auxiliar a sinalização emergencial, com isso ele ajuda a controlar o tráfego rodoviário, canalizando e

direcionando o fluxo de veículos e, muitas vezes, serve, também, para delimitar uma determinada área na rodovia.

Devido à importância do Cone para Sinalização Viária a ABNT (Associação Brasileira de Normas Técnicas) determina algumas especificações em sua fabricação, tais como: o material a ser usado, o tamanho, a cor e assim por diante.

Sendo assim, o Cone para Sinalização deve ser feito de material flexível e resistente. O seu formato deve ser cônico com altura de 75 cm ou 95 cm, enquanto que a cor predominante tem que ser alaranjado com faixas reflexivas brancas com 10 cm de largura. Sua massa total deve ser 3 kg do mínimo e 4 kg no máximo e quando forem empilhados dois cones a nova altura não pode exceder 1,1 vezes a altura de um cone.

Para outros fins que não a sinalização viária (eventos esportivos, treinamentos, marcações áreas, colunas para marcações de filas, etc), a cor e o tamanho podem sofrer alterações, veja a foto na figura 5.2.



Figura 5.2 – Cone amarelo e preto – Foto: Kleber Sebastião Juliani

Além das determinações para fabricação dos cones são necessárias algumas recomendações quanto ao seu uso. Portanto, para proceder à sinalização de emergência usando o cone para Sinalização é recomendado que se monte um projeto emergencial de sinalização dando ênfase ao posicionamento adequado e às suas respectivas normas de segurança.

Nesse projeto, também, é necessária uma análise da topografia e da geometria do local com o intuito de garantir a visibilidade adequada do cone e com isso evitar possíveis acidentes e/ou abalroamento de veículos nos referidos cones.

Para garantir que essas normas sejam cumpridas é necessário um controle de qualidade que é de responsabilidade da empresa que o fabrica. De modo geral, as empresas fazem esse controle através de amostra aleatória, geralmente, chamados de ensaio, da seguinte maneira: de um lote de até 100 peças se pega uma peça e em lotes maiores são usados 1% do total de peças do lote.

Enfim, o grande uso de cones, independente dos fins, é devido a seu formato privilegiando que lhe dá uma grande estabilidade vertical, pois, tem sua base maior e, conforme vai aumentando a sua altura, vai afunilando até terminar com um diâmetro bem menor fazendo com que o seu ponto gravitacional fique próximo à base.

5.3 Conceito geométrico de cone

Na geometria espacial, o formato do cone para sinalização de vias representa uma figura espacial importante que coincidentemente, também, é chamado de cone. Portanto, vamos estudar detalhadamente o cone de sinalização, evidentemente, dando ênfase a matemática.

Na preocupação de definir o cone, foi feita uma pesquisa na Internet através de enciclopédias e dicionários relacionados à matemática e dessa pesquisa estão sendo destacados alguns dos conceitos encontrados, listados na seqüência:

1. “Considere uma região plana limitada por uma curva suave (sem quinas), fechada e um ponto P fora desse plano. Denominamos cone ao sólido formado pela reunião de todos os segmentos de reta que têm uma extremidade em um ponto P (vértice) e a outra num ponto qualquer da região”. (CONE, Matemática essencial, 2008).

2. “Um **cone** é um sólido geométrico formado por todos os segmentos de reta que têm uma extremidade em um ponto V (vértice) em comum e a outra extremidade em um ponto qualquer de uma mesma região plana R (delimitada por uma curva suave, a base)”. (CONE, Wikipédia, 2008).
3. “Um cone em um espaço euclidiano é um conjunto constituído por linhas semi-vindas de algum ponto, o vértice do cone. A fronteira de (constituída por linhas chamado meia-geradores do cone) é parte de uma superfície cônica, e é, por vezes, também chamado de um cone. Finalmente, o cruzamento das meias com um espaço que contém e delimitada por um plano não está passando por vezes chamado de um cone. Neste caso, a parte do plano deitado dentro da superfície cônica é chamado de base do cone e da parte da superfície cônica entre a base e o vértice é chamado a superfície lateral do cone”. (CONE, Springer Link, 2008).
4. “Um cone é uma forma geométrica tridimensional constituído por todos os segmentos de reta que une um único ponto (o ápice ou vértice) para cada ponto de uma figura bidimensional (a base).” (CONE, The Free Dictionary By Farlex, 2008)
5. “Um cone é a união de todos os segmentos de reta que liga um ponto e uma curva fechada em um plano diferente do ponto.” (CONE, Math Dictionary, 2008).
6. “Um cone é formada por uma família de linhas retas através do mesmo ponto um rastro (vulgarmente planar) curva. O ponto é chamado o ápice ou vértice do cone.” (CONE, Interactive Mathematics Miscellany. 2008).

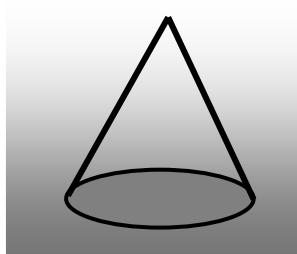
Também foi feita uma pesquisa em livros didáticos para uso no Ensino Médio de matemática e dessa pesquisa estão sendo destacados alguns dos conceitos encontrados, listados na seqüência:

1. “[...] considerar um plano α , uma região circular R nesse plano e um ponto P não pertencente a α . A reunião de todos os segmentos que ligam cada ponto de R ao ponto P é um sólido chamado de cone circular”. (DANTE, 2005).

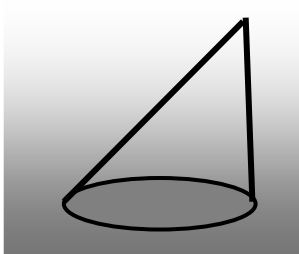
2. “O conjunto de todos os segmentos com um extremo em V e o outro em um ponto do círculo é uma figura sólida chamada cone circular ou, simplesmente, cone”. (RUBIÓ; FREITAS, 2005).
3. “Sejam um círculo C , de centro O e raio r , contido num plano α , e um ponto V não-pertencente a α . A reunião de todos os segmentos de reta com uma extremidade em V e a outra em C é denominado de cone circular”. (SMOLE; DINIZ, 2005).

Baseado nas definições pesquisadas, concluímos que o cone é considerado o lugar geométrico formado pela reunião de todos os segmentos de reta que tem uma extremidade num ponto (denominado vértice, representado por V) e a outra extremidade em um ponto qualquer (pode ser chamado de P) de uma curva suave. Portanto, neste trabalho, o cone é definido como uma superfície e quando for necessário falar do cone como sólido, será referido como o sólido cônico.

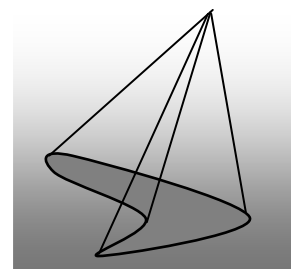
Com base nesta definição podemos destacar alguns tipos de cone, conforme desenhos na figura 5.3:



Cone circular reto



Cone circular oblíquo



Cone com uma base qualquer

Figura 5.3 – Modelos de cone

Apesar de poder definir diversos tipos de cone, neste trabalho iremos dar destaque ao cone circular reto.

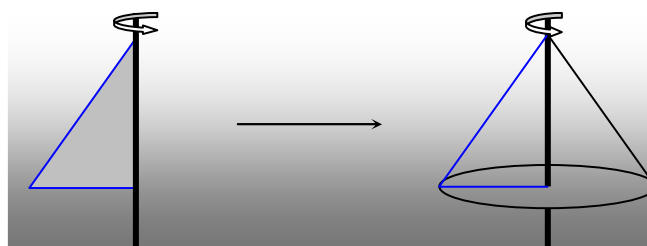


Figura 5.4 – construção do cone por rotação

Na figura 5.4, podemos verificar o cone obtido pela rotação da hipotenusa de um triângulo retângulo em torno do cateto que está contido no eixo de rotação.

5.4 Elementos do cone

Com base na definição adotada por este trabalho podemos destacar os elementos do cone, conforme figura 5.5:

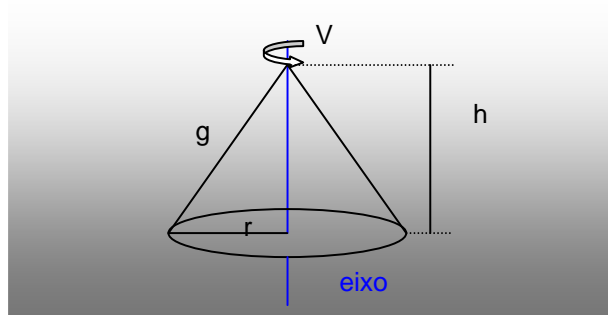


Figura 5.5 – Elementos do cone

- *Vértice* (V) é o ponto, geralmente, denotado de V, em que todos os segmentos de reta concorrem;
- *Base* (B) é a superfície de contorno suave;
- *Altura* (h) é a distância entre o Vértice e o plano que contém a Base;
- *Superfície lateral* é a superfície obtida pela reunião de todos os segmentos que ligam o vértice à curva que envolve a base;
- *Superfície do cone* é a reunião da superfície lateral com a superfície da base. A da superfície do cone é a soma da área da superfície lateral com a área da superfície da base;
- *Secção Meridiana* é uma região triangular obtida através da intersecção da superfície cônica com um plano que contém o eixo, quando este eixo existe.

5.4.1 Detalhes relativos ao cone circular reto

No cone circular reto, existem algumas particularidades, a saber:

- *Eixo* é a reta que contém o vértice e o centro da base;
- *A seção meridiana* é um triângulo isósceles;
- *Geratriz* é um segmento de reta que liga o vértice a um ponto arbitrário na circunferência que envolve a base do cone;
- *Altura* é a distância entre o vértice e o centro da base;

5.5 Relações matemáticas no cone circular reto

Na figura, estão destacados alguns elementos do cone circular reto, são eles: altura (h), geratriz (g), vértice (V) e diâmetro ($2r$) e, ainda, a base circular e a Seção Meridiana.

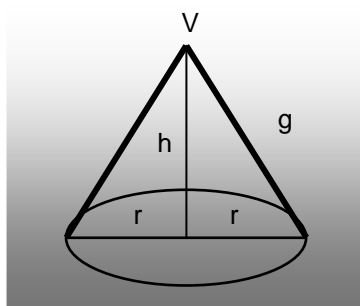


Figura 5.6 – Elementos do cone circular reto

Com as informações contidas na figura 5.6 e lançando mão do teorema de Pitágoras, podemos demonstrar a relação:

$$g^2 = h^2 + r^2$$

No caso particular, em que o diâmetro da base e a geratriz possuem a mesma medida, isto é, $g = 2r$, o cone circular é denominado equilátero, logo podemos obter uma relação entre o raio da base do cone com a altura do mesmo, veja:

$$h = r\sqrt{3}$$

5.6 Planificação do cone

Na figura 5.7, temos um exemplo de planificação do cone.

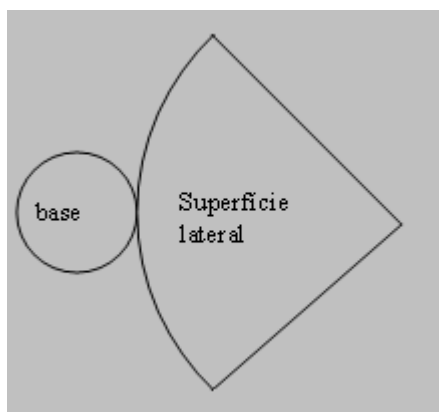


Figura 5.7 – Planificação do cone

Observa-se na figura um setor circular de raio g e arco AB , cujo comprimento é igual ao comprimento da circunferência da base do cone ($2\pi r$) e da geometria plana, sabe-se que a área do setor (A_S) é dada por:

$$A_S = \frac{\text{arco } AB \times \text{raio do setor}}{2}$$

Substituindo o arco AB e o raio do setor, temos:

$$A_S = \frac{2\pi r g}{2} = \pi r g$$

Sabendo que a área do círculo é πr^2 e que a área da superfície do cone (A_{CO}) é igual à soma da área do setor com a área do círculo da base, portanto, temos:

$$A_{CO} = \pi r g + \pi r^2 = \pi r(g + r)$$

Se o cone for equilátero, sabemos que $g = 2r$, então, substituindo g por $2r$ a área da superfície do cone equilátero (A_{COE}), fica:

$$A_{COE} = \pi r^2 + 2\pi r^2 = 3\pi r^2$$

Esta relação pode ser desenvolvida para calcular a área da superfície do cone em função da geratriz, para isso, basta usar $r = g/2$ e teremos:

$$A_{COE} = 3\pi \left(\frac{g}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}\pi g^2$$

Podemos, também, obter uma relação entre a área da superfície do cone e a sua altura que é $h = r\sqrt{3}$, veja:

$$A_{COE} = 3\pi \left(\frac{h}{\sqrt{3}}\right)^2 = 3\pi \frac{h^2}{3} = \pi h^2$$

Portanto, para obter a área da superfície de um cone equilátero é suficiente conhecer o raio da base, a geratriz ou a altura deste cone.

Podemos calcular o volume de um sólido, cuja superfície é um cone (sólido cônico). Para isto, partiremos de que o volume do sólido cilíndrico equilátero é dado por

$$V = 2\pi r^3.$$

Na figura 5.8 podemos observar que o volume do sólido cônico equilátero é igual a um terço do volume do sólido cilíndrico equilátero, de mesma base e mesma altura. Portanto, sendo a área da base do cilindro ou do cone igual a πr^2 , então o volume do cone V_{CO} é igual a:

$$V_{CO} = \frac{1}{3}A_b \cdot h = \frac{1}{3}\pi r^2 h$$

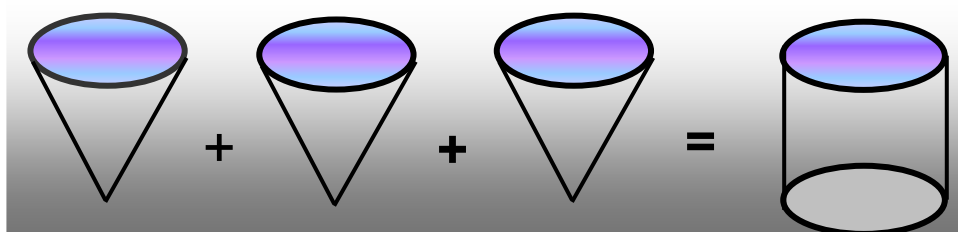


Figura 5.8 – Relação do volume do cone com o volume do cilindro

Essa relação é válida para um sólido cônico qualquer, no entanto, se a superfície deste sólido for um cone equilátero, sabe-se que $h = r\sqrt{3}$, o volume do cone equilátero (V_{COE}), vale:

$$V_{COE} = \frac{\pi r^2 r\sqrt{3}}{3} = \frac{\sqrt{3}}{3} \pi r^3$$

5.7 Tronco do cone

Baseado na definição de cone estudada até aqui se pode perceber que o cone para sinalização viária, apesar do nome, não é de fato um cone, pois esse “cone” é seccionado num plano paralelo a base tornando-o um tronco de cone, que podemos observar na figura 5.9.

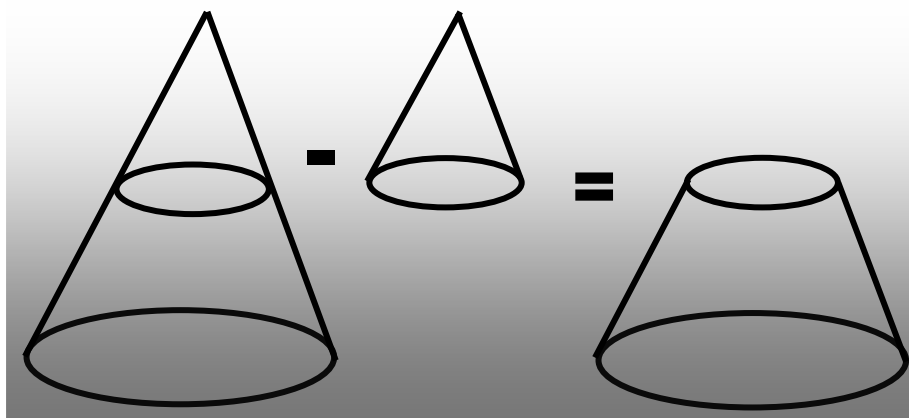


Figura 5.9 – Formação do tronco de cone

Logo, para obter um tronco de cone, basta seccionar transversalmente em um plano paralelo ao plano da base do cone, com isso, obtêm-se dois objetos

geométricos espaciais, sendo um deles, um cone de altura menor e um tronco de cone, conforme a figura 5.9.

Portanto, pode-se definir um tronco de cone como a superfície limitada por duas bases envolvidas pelas diretrizes e pelos segmentos de reta cujas extremidades estão apoiadas nessas diretrizes. Se o tronco do cone for circular, tanto a base superior quanto à base inferior serão círculos.

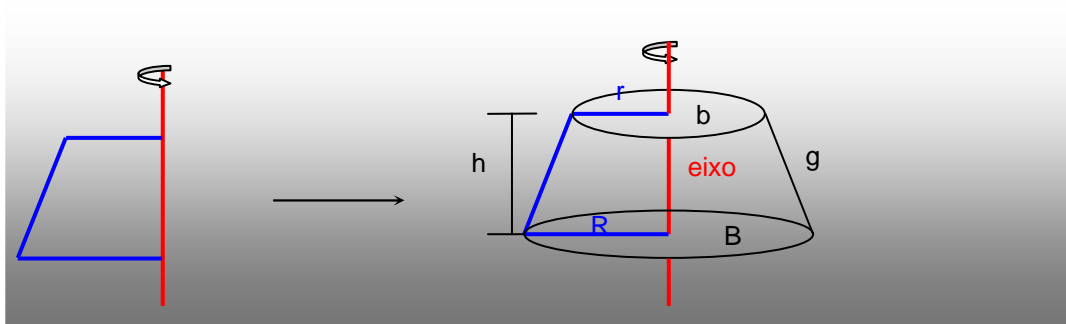


Figura 5.10 – Construção do tronco de cone por rotação

Conforme figura 5.10, podemos observar que para formar um tronco de cone circular reto basta rotacionar um trapézio retângulo em torno de um eixo.

5.8 Relações matemáticas no tronco de cone

Para calcular a área da superfície do tronco do cone, podemos usar a mesma idéia do cone, isto é, planificando este tronco, na figura 5.11, temos um exemplo de sua planificação.

Observando a figura, podemos verificar que a área da superfície total do do tronco do cone (A_{TTC}) é a soma da área da superfície lateral desse tronco, dada por $A_{LT} = \pi(R + r)g$, com a área das superfícies das bases formadas por dois círculos, um é a base maior (B) e a base menor (b), cujos raios são, respectivamente, R e r, portanto, somando as três áreas, temos:

$$A_{TTC} = \pi(R + r)g + \pi R^2 + \pi r^2 = \pi[(R + r)g + R^2 + r^2]$$

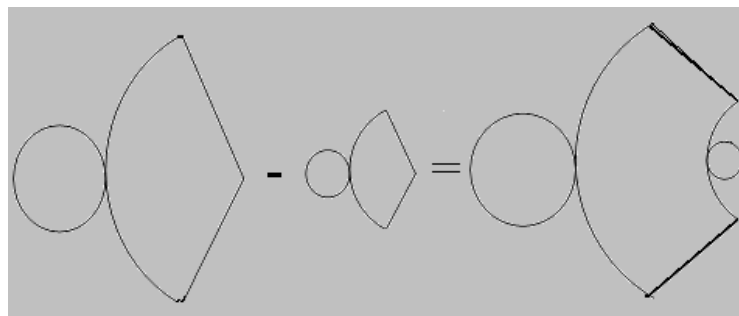


Figura 5.11 – Planificação do tronco de cone

Assim como no cone, podemos calcular o volume que um sólido, cujo formato é um tronco de cone, ocupa no espaço. Já vimos que um sólido cônico ocupa o volume de um terço de um sólido cilíndrico e vimos que para calcular o volume do sólido cilíndrico multiplica-se a área da base pela altura deste cilindro.

Baseado nestas informações, adotaremos um cone de altura H e a partir dele será feita uma secção em um plano paralelo à sua base na altura h_T , com isso, obteremos um novo cone com menor altura (h_c) e raio r , no entanto, semelhante ao original e um tronco de cone cuja altura será $h_T = H - h_c$ e raio da base maior R e da base menor r , conforme podemos ver na figura 5.12:

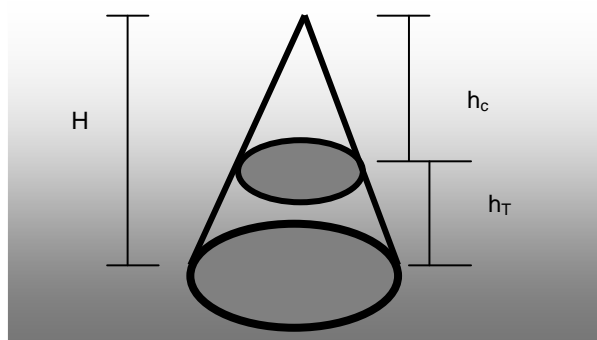


Figura 5.12 – Relações entre cone e tronco de cone

Assim como na pirâmide em que o volume é igual a $1/3$ do prisma de mesma base, o volume do sólido cônico, também, tem o seu volume igual a $1/3$ do sólido cilíndrico de mesma base. Podemos afirmar que o volume de um sólido cujo formato é um tronco de cone é igual ao volume do tronco de pirâmide, já demonstrado anteriormente como:

$$V_{TP} = \frac{h_T}{3} (B + \sqrt{Bb} + b)$$

Evidentemente com algumas adaptações, ou seja, nas condições definidas, temos:

- h_T é a altura do tronco do cone;
- B é a base maior, cuja área é dada por $B = \pi R^2$;
- b é a base menor, cuja área é dada por $b = \pi r^2$.

Substituindo essas relações e colocando π em evidência, teremos:

$$V_{TC} = \frac{\pi h_T}{3} (R^2 + Rr + r^2)$$

Portanto, para obter o volume de um sólido com o formato de um tronco de cone (V_{TC}) basta conhecer a sua altura, o raio da base maior e o raio da base menor.

5.9 Sugestões de atividades

São sugeridas três atividades, das quais as duas primeiras são experimentais e a terceira são 10 situações-problema. Essas atividades poderão ser usadas na íntegra ou adaptadas pelo professor, conforme realidade da escola.

5.9.1 Atividade experimental: volume do cone

Demonstração da fórmula do volume do cone através de uma atividade prática.

Fórmula do volume do cone

A figura 5.9 sugere que a soma do volume de três cones é igual ao volume do cilindro de mesma base e mesma altura, podemos através de uma experimentação mostrar essa relação.

Objetivo

Demonstrar a relação $V = \frac{1}{3} A_b \cdot h$.

Material

- Papel gramatura 180 g/m²;
- Cola;
- Tesoura;
- Régua;
- Compasso;
- Areia lavada.

Procedimento

1. Dividir a turma em pequenos grupos, cada grupo deverá fazer um trabalho;
2. Construir um cone e um cilindro de mesma base e mesma altura;
3. Encher o cone de areia e despeje esse conteúdo no cilindro, repita esse procedimento mais duas vezes;
4. Observar que o cilindro ficou cheio de areia;
5. Fazer um relatório concluindo a sua observação.

Observação: O professor poderá propor que um aluno de cada grupo vá fotografando ou filmando o procedimento passo a passo para montagem de uma apresentação no computador e explicação para os colegas.

5.9.2 Atividade experimental: construção do tronco de cone

É importante que o aluno construa as figuras geométricas para observar cada um dos seus elementos.

Tronco de cone

A figura 5.10 sugere que fazendo uma secção em um cone num plano paralelo ao plano da sua base obtêm-se um tronco de cone e um novo cone, porém menor.

Objetivo

Mostrar que para obter um tronco de cone, basta seccionar um cone num plano paralelo a sua base.

Material

- Papel gramatura 180g/m²;
- Cola;
- Tesoura;
- Régua;
- Compasso;
- Placa de imã.

Procedimento

1. Distribuir a turma em pequenos grupos, cada grupo deverá fazer uma construção do tamanho que escolher;
2. Recortar no papel um molde da planificação de um tronco de cone, conforme a terceira parte da figura 5.12;
3. Colar uma placa de imã na parte de traz da base menor do tronco;
4. Colar o tronco de cone;
5. Recortar um molde de pirâmide com base igual à base menor do tronco de cone, como se fosse a continuação do tronco para obter um cone maior, conforme segunda parte da figura 5.12;
6. Colar uma placa de imã na parte de traz da base do cone;
7. Montar o cone;
8. Colocar o cone menor sobre a base menor do tronco de cone.

9. Anotar as observações e escreva um relatório.

Observação: O professor poderá propor que um aluno de cada grupo vá fotografando ou filmando o procedimento passo a passo para montagem de uma posterior apresentação no computador e explicação para os colegas.

5.9.3 Atividade de aplicação: situações-problema

Nesta atividade são propostas 10 situações-problema contextualizadas, porém, o professor, se necessário, poderá elaborar outros ou extrair novas situações em livros didáticos de Ensino Médio.

1. Supondo que o cone para sinalização viária não tivesse a sua ponta cortada e sua altura até o vértice fosse de 75 cm e o diâmetro de sua base fosse de 40 cm. Calcule a quantidade, em cm^2 , de placa do material para confeccionar a superfície lateral.

Dica: Calcular a área da superfície lateral do cone.

2. Para aumentar a estabilidade do Cone da situação problema 01, foi necessário enchê-lo de concreto. Qual a quantidade de concreto (volume), em cm^3 , foi necessária?

Dica: Calcular a capacidade ou volume de um cone.

3. Um funil cônico equilátero construído de alumínio tem seu diâmetro que mede 20 cm. Qual a quantidade de chapa de alumínio, em cm^2 , para construir a superfície lateral desse funil?

Dica: Cálculo da área da superfície lateral do cone.

4. O funil da situação problema 03 é usado para colocar detergente líquido em uma garrafa, entretanto, na produção deste detergente não foi bem misturado e ficou pelotas dificultando o escoamento do detergente e conseqüentemente

transbordando. Qual a quantidade máxima de detergente no funil para que ele não transborde?

Dica: Cálculo da capacidade ou volume do cone.

5. Uma caixa de água foi construída de PVC com o formato de um cone invertido, sabendo que sua altura é de 4 metros e o raio da base é de 2 metros. Qual a quantidade de PVC, em m^2 , foi usada para produzir essa caixa e sua tampa?

Dica: Calcular o material para construção de um cone, ou seja, área da superfície do cone.

6. Qual a quantidade de água que a caixa do exercício anterior consegue suportar?

Dica: Cálculo do volume do cone.

7. Um lavatório de banheiro tem o formato de um tronco de cone invertido, de tal forma que a base maior mede 40 cm, a base menor 10 cm e a sua altura é 20 cm. Qual a capacidade desse lavatório?

Dica: Cálculo do volume do tronco do cone.

8. Foi comprado um pote com 5 litros de doce de leite para encher canudos com o formato de um cone circular reto, cujo diâmetro da base mede 4 cm e a sua altura mede 8cm. Qual a quantidade de canudos ficará cheia com essa quantidade de doce?

Dica: Calcular o volume de cada canudo e depois dividir com o total de doce, sabendo que 1 litro equivale a 1000 cm^3 .

9. Para confeccionar chapéu de festa infantil com o formato de cone circular reto, tenho 10 folhas de papel, cujas medidas são 40 cm por 50 cm. Sabendo que cada chapéu deverá ter o diâmetro e a altura igual a 15 cm. Quantos chapéus são construídos com essas folhas? Qual a quantidade de papel que perdeu em recortes e nas abas, em cm^2 ?

Dica: Cálculo da área da superfície do cone.

10. Qual a quantidade de material, em cm^2 , são necessários para construir um abajur com o formato de um tronco de cone com base menor de 20 cm, base maior 30 cm e altura de 25 cm?

Dica: Cálculo da área da superfície do tronco de cone.

Referências Bibliográficas:

BOYER, Carl Benjamin. **História da Matemática**. São Paulo: Edgard Blücher, 1974.

Cone (Geometria). In. MATEMÁTICA ESSENCIAL. Disponível em: <http://pessoal.sercomtel.com.br/matematica/geometria/cone/cone.htm>. Acesso em: 14 out. 2008.

Cone. In. WIKIPÉDIA. Disponível em: <http://pt.wikipedia.org/wiki/Cone>. Acesso em: 14 out. 2008.

Conical surface. In. SPRINGER ONLINE REFERENCE WORKS. Disponível em: <http://eom.springer.de/c/c024980.htm>. Acesso em: 14 out. 2008.

Cone (Geometry). In. THE FREE DICTIONARY BY FARLEX. Disponível em: [http://encyclopedia.thefreedictionary.com/Cone+\(geometry\)](http://encyclopedia.thefreedictionary.com/Cone+(geometry)). Acesso em: 14 out. 2008.

Cone. In. MATH DICTIONARY. Disponível em: <http://users.erols.com/bram/Cdictionary.html>. Acesso em: 14 out. 2008.

Cone. In. FROM INTERACTIVE MATHEMATICS MISCELLANY AND PUZZLES. Disponível em: http://www.cut-the-knot.org/do_you_know/few_words.shtml#cone. Acesso em: 14 out. 2008.

Cones para Sinalização Viária. In. DEPARTAMENTO DE ESTRADAS DE RODAGEM DO ESTADO DE SÃO PAULO. Disponível em: ftp://ftp.sp.gov.br/ftpder/normas/ET-DE-L00-012_A.pdf. Acesso em: 14 out. 2008.

DANTE, Luiz Roberto. **Matemática**. São Paulo: Ática, 2005.

EVES, Howard. **Introdução à História da Matemática**. Campinas, SP: Unicamp, 2004.

RUBIÓ, Angel Panadés; FREITAS, Luciana Maria Tenuta de. **Matemática e suas Tecnologias**. São Paulo: IBEP, 2005. v.3.

SMOLE, Kátia Cristina Stocco; Diniz, Maria Ignez de Souza Vieira. **Matemática: Ensino Médio**. 5.ed. São Paulo: Saraiva, 2005. v.2.

6 ESFERA

Introdução

No capítulo 5, foi estudado o cone e o tronco do cone, dando ênfase ao contexto histórico dessas figuras geométricas, a contextualização, suas planificações, cálculos de áreas, volumes e outros e ao final foram propostas atividades e situações problemas.

A partir daqui estudaremos a esfera e durante esse estudo será discutido o seu contexto histórico e para contextualizar será estudada a bola de futebol na seqüência será abordado o conceito matemático da esfera usando como referência sites e livros didáticos.

Mais adiante, serão apresentados os seus principais elementos e as relações matemáticas pertinentes a essa figura geométrica, e, ainda, serão estudadas secções da esfera.

Para encerrar o capítulo 6, serão propostas três atividades em que o professor poderá trabalhá-las na íntegra ou adaptá-las para a realidade de sua escola.

6.1 Fatos históricos

Muitos matemáticos dedicaram parte de suas vidas estudando e trabalhando com geometria espacial, dentre eles podemos destacar Arquimedes que em seu tratado intitulado *Sobre a esfera e o cilindro* que consta de dois livros, no primeiro foram encontrados estudos sobre o cálculo da área de uma esfera e de uma calota esférica, também, uma relação entre o volume da esfera e o volume do cilindro faziam parte deste material.

Enquanto, no segundo livro consta-se de estudos sobre secções de esferas, isto é, se seccionarmos uma esfera em duas partes cada uma dessas partes são proporcionais entre si. Por outro lado, fatos históricos mostram que Arquimedes, também, chegou a conclusão que entre os segmentos esféricos de base cujas zonas esféricas de áreas iguais, o de maior volume é o hemisfério.

Por muito tempo acreditou-se que os egípcios sabiam calcular a área de um hemisfério, entretanto, Arquimedes é colocado como sendo o primeiro a [...] “provar que a área da esfera é igual a quatro vezes a área de seu círculo máximo”. (BOYER, 1974).

Os Hindus, também, aventuraram no estudo da esfera, mas como trabalhavam, geralmente, com a idéia de uma geometria mensurável e quase nunca faziam demonstrações, chegaram a relações imprecisas, como, por exemplo, o volume da esfera $\pi^{3/2} \times r^3$ e ainda, usava para o π os valores de 3 ou $\sqrt{10}$.

Assim como o volume da pirâmide, por volta do século seis de nossa era, o volume da esfera era calculado, erroneamente, como sendo a multiplicação entre a área do círculo maior pela raiz quadrada desse mesmo círculo.

A partir de Karl Friedrich Gauss, por volta do ano 1820, os geômetras começaram a estudar uma geometria pautada nas superfícies curvas, dentre essas superfícies a esfera e, posteriormente, essa geometria foi chamada de geometria não-euclidiana, pois aparentemente, contradizia a geometria de Euclides que até então era a única “verdadeira”, mas apesar de Gauss não fazer publicações, rapidamente, Nikolai Ivanovich Lobachevsky e János Bolyai publicaram seus trabalhos a respeito dessa nova geometria.

A geometria não-euclidiana, atualmente, é estudada dividida em algumas partes, que são: a geometria fractal, a geometria projetiva, a geometria esférica e a hiperbólica. Neste momento, o que nos interessa é geometria esférica que foi estudada por Georg Friedrich Bernhard Riemann, pois, consiste em enxergar o plano como uma superfície esférica e a reta como um círculo máximo sobre a esfera. Foi exatamente esse estudo de Riemann que deu subsidio a Albert Einstein a escrever o artigo sobre a Teoria Geral da Relatividade.

Porém, neste momento a nossa preocupação é apenas com a geometria euclidiana, portanto devemos deixar a não-euclidiana para um próximo momento.

6.2 Texto de motivação: A bola de futebol

O que seria do futebol sem a bola? Quem nunca chutou uma bola de papel ou de meia nos corredores da casa, na rua ou da escola? Será que a bola de futebol sempre foi essa beleza que, geralmente, vemos nos campeonatos? Afinal, o que é a bola? Veja a bola na figura 6.1:



Figura 6.1 – Bola de futebol – Autor: AGB PHOTO

O formato da bola sempre foi esférico. Entretanto, nem sempre conseguiram deixá-la com esse formato, no início as bolas eram trazidas da Europa, elas consistiam em uma amarração de couro, com um buraco, para introduzir uma câmara de ar inflável, que posteriormente, era costurado com um cordão que não era muito confortável, principalmente, quando o jogador tinha de cabeceá-la.

Em pouco tempo os sapateiros brasileiros começaram a produzir bolas, tanto para uso no Brasil como para exportação, principalmente, para a Argentina e o Uruguai. Mesmo as bolas sendo produzidas no Brasil a camada mais pobre da população não tinham condições de comprá-las e continuavam usando pelotas feitas de meias enchidas: com papel, com palhas de café ou outros produtos leves.

As bolas produzidas pelos sapateiros brasileiros eram de boa qualidade, porém, o grande problema aparecia em jogos com chuva, pois o couro encharcava e ficavam demasiadamente pesadas. Entretanto, com o tempo, a bola, foi passando por grandes transformações e com o desenvolvimento da tecnologia ela foi atingindo uma qualidade cada vez melhor.

Atualmente, a bola é produzida com material sintético e isso faz com que ela tenha um melhor desempenho nos chutes, maior durabilidade e resistência. Graças a essa tecnologia temos bolas que conseguem ficar esférica do começo ao final do jogo.

As regras atuais do futebol exigem que a bola seja esférica, com envolto exterior de couro ou material apropriado, deve ter uma circunferência máxima de 70 cm e mínima de 68 cm, seu peso deve ser de 450 gramas no máximo e 410 gramas no mínimo, por fim com uma pressão de 0,6 a 1,1 atm ao nível do mar.

Enfim, o futebol escolheu um objeto perfeito para a sua prática, a bola, cujo formato é esférico. Este objeto além de ser importante para o bom desempenho do futebol, também, tem em seu formato uma grande importância para o estudo da Geometria Espacial.

6.3 Conceito Geométrico de Esfera

Na geometria espacial, o formato da bola de futebol representa uma figura espacial importante, ou seja, a esfera e na preocupação de defini-la foi feita uma pesquisa na Internet através de enciclopédias e dicionários relacionados à matemática e dessa pesquisa estão sendo destacados alguns dos conceitos encontrados, listados na seqüência:

1. “A esfera no espaço R^3 é o conjunto de todos os pontos do espaço que estão localizados a uma mesma distância denominada raio de um ponto fixo chamado centro.” (ESFERA, Matemática essencial, 2008).

2. “A esfera pode ser definida como "um sólido geométrico formado por uma superfície curva contínua cujos pontos estão eqüidistantes de um outro fixo e interior chamado centro"; ou seja, é uma superfície fechada de tal forma que todos os pontos dela estão à mesma distância de seu centro, ou ainda, de qualquer ponto de vista de sua superfície, a distância ao centro é a mesma.” (ESFERA, Wikipédia, 2008).
3. “O conjunto de pontos de um espaço euclidiano que estão situados a uma distância constante (o raio da esfera) a partir de um ponto (o centro da esfera).” (SPHERE, Springer Link, 2008).
4. “O conjunto de todos os pontos no espaço tridimensional que mantém à mesma distância (o raio) de um determinado ponto (ao centro), ou o resultado de um círculo giratório sobre um dos seus diâmetros.”(SPHERE, The Free Dictionary By Farlex, 2008).
5. “[...] o conjunto de todos os pontos no espaço que são uma distância fixa a partir de um determinado ponto.” (SPHERE, MATH DICTIONARY, 2008).

Também foi feita uma pesquisa em livros didáticos para uso no Ensino Médio de matemática e dessa pesquisa estão sendo destacados alguns dos conceitos encontrados, listados na seqüência:

1. “Consideremos um ponto C e um número real positivo R qualquer. A esfera de centro C e raio de medida R é o conjunto de todos os pontos do espaço que estão a uma distância menor do que ou igual a R do ponto C. A ‘casquinha’ ou a fronteira da esfera chama-se superfície esférica.” (DANTE, 2005).
2. “Imagine que um semicírculo de centro O e raio R dê um giro completo em torno de um eixo contendo seu diâmetro. O sólido gerado é chamado esfera ou bola. O ponto O é o centro da esfera e R é o seu raio. A parte exterior da esfera é sua superfície esférica. Imagine uma laranja como uma representação aproximada de uma esfera. A casca, suposta extremamente fina, é a superfície esférica.” (RUBIÓ; FREITAS, 2005).
3. “Sejam um ponto O e um segmento r, não nulo. Superfície esférica de centro O e raio r é o conjunto dos pontos do espaço cujas distâncias a O

são iguais a r . Esfera de centro O e raio r é o conjunto dos pontos do espaço cujas distâncias a O são menores ou iguais a r . Podemos também considerar: uma superfície esférica de centro O e raio r como a superfície gerada pela rotação de uma semicircunferência de raio r em torno de seu diâmetro; uma esfera de centro O e raio r como o sólido gerado pela rotação de um semicírculo de raio r em torno de seu diâmetro.” (SMOLE; DINIZ, 2005).

Através da pesquisa feita na Internet e em livros didáticos podemos perceber que alguns autores definem a esfera como sendo uma superfície e outros definem como sendo um sólido geométrico.

Entretanto, neste trabalho a esfera será definida como o lugar geométrico formado pela reunião de todos os pontos do espaço que estão eqüidistante (mesma distância) a um ponto chamado centro da esfera, que será representado por “ O ” e a distância será chamada de raio da esfera e representada por “ r ”. A relação que define a esfera no espaço tridimensional será definida por: $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$.

Portanto, a esfera é uma superfície no espaço. Logo, quando necessário referir-se a um sólido com o formato da esfera será chamado de sólido esférico.

Também, podemos assumir a esfera como uma superfície rotacional, pois rotacionando uma semi-circunferência em torno de um eixo qualquer, teremos uma esfera, conforme figura 6.2:

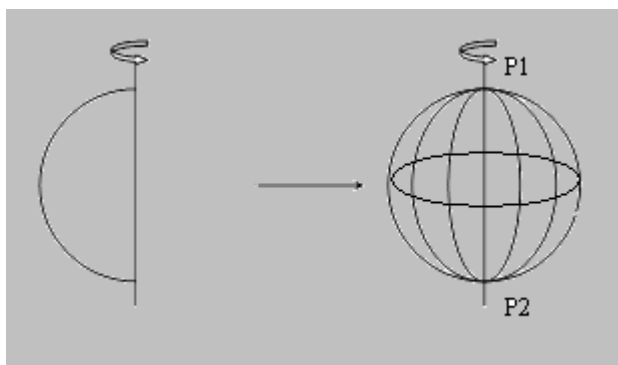


Figura 6.2 – Construção da esfera por rotação

6.4 Elementos da Esfera

Com base na definição adotada nesse trabalho podemos destacar os elementos da esfera, conforme a figura 6.3.

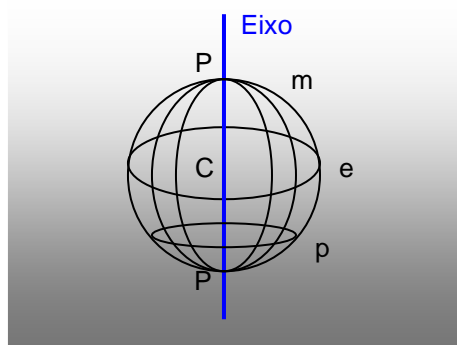


Figura 6.3 – Elementos da esfera

- *Equador (e)* – circunferência maior da esfera de centro “O”;
- *Paralelos (p)* – circunferências concêntricas ao equador que não passa pelo centro “O”, pois está em um plano paralelo ao equador;
- *Meridianos (m)* – circunferências resultantes da interseção de um plano que passa pelo centro “O” da esfera e é perpendicular ao plano que contém o equador.
- *Eixo esférico* – segmento de reta que liga os dois pólos e passa pelo centro da esfera;
- *Pólos (P)* – pontos de interseção entre a esfera e o eixo;
- *Centro esférico (O)* – ponto que marca o centro da esfera;
- *Hemisfério* – semi-esfera, ou seja, uma das duas partes da esfera seccionada na circunferência maior.

Podemos perceber que os nomes dados às partes da esfera, são basicamente os mesmo quando nos referimos ao globo terrestre, pois podemos considerar o globo como uma esfera, ou seja, o planeta terra é considerado um sólido esférico, portanto, têm um eixo, os pólos, que são chamados de pólo norte e pólo sul, os meridianos, o equador e os paralelos, que no caso da terra destacam-se dois e chamam-se trópicos de câncer e de capricórnio.

6.5 Relações matemáticas na esfera

Podemos calcular a área da superfície da esfera (A_E) através da área da superfície do cilindro circular reto (A_{TC}) circunscrito na esfera, pois, “[...] a área de uma superfície esférica é exatamente dois terços da área da superfície total do cilindro circular reto circunscrito a ela [...]”. (EVES, 2004), ou seja:

$$A_E = \frac{2}{3} A_{TC}$$

Veja na figura 6.4 um cilindro circular reto de raio da base R e altura $2R$ circunscrito numa esfera, cujo raio, também é R .



Figura 6.4 – Cilindro circunscrito na esfera

Sabendo que a área da superfície do cilindro é dada por:

$$A_{TC} = 2 \pi r (h + r)$$

Portanto, substituindo a equação (A_{TC}) e $h = 2R$, obtemos a área da superfície esférica, veja:

$$A_E = \frac{2}{3} (6 \pi R^2) = 4 \pi R^2$$

Podemos, também, relacionar a área da superfície de uma esfera a quatro vezes a área do seu círculo máximo, pois, “[...] Arquimedes aparece como o

primeiro, a saber, e provar que a área da esfera é quatro a área de um seu círculo máximo. [...]” (BOYER, 1974), conforme figura 6.5.



Figura 6.5 - Relação entre a área do círculo máximo e a superfície da esfera

Logo, sendo a área do círculo πr^2 , basta multiplicar por quatro e substituir r (raio do círculo qualquer) por R (raio do círculo máximo da esfera), termos:

$$A_E = 4 \pi R^2$$

Observando novamente a figura 6.4 podemos demonstrar o volume do sólido esférico, pois, “[...] o volume da esfera é exatamente dois terços do volume do mesmo cilindro [...]” (EVES, 2004), ou seja, o volume do sólido esférico é igual a dois terços do volume do sólido cilíndrico reto circunscrito nessa esfera, então:

$$V_C = \pi r^2 h$$

Multiplicando V_C por $2/3$, teremos:

$$V_E = \frac{2}{3} (\pi r^2 h)$$

Substituindo h por $2R$ e r por R , teremos:

$$V_E = \frac{2}{3} (\pi R^2 2R) = \frac{4}{3} \pi R^3$$

Podemos relacionar o volume do sólido esférico com o volume do sólido cônico, pois, “Toda esfera é igual a quatro vezes o cone que tem base igual ao círculo máximo da esfera e a altura igual ao raio da esfera” (BOYER, 1974), conforme figura 6.6.

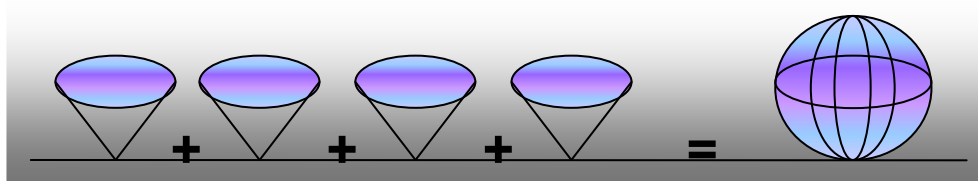


Figura 6.6 – Relação entre o volume do cone e o volume da esfera

Sabendo que o volume da superfície do cone (V_{CO}) é:

$$V_{CO} = \frac{1}{3} \pi r^2 h$$

Multiplicando por quatro e substituindo r (raio da base do cone) e h (altura do cone) por R (raio da esfera), teremos:

$$V_E = \frac{4}{3} \pi R^3$$

6.6 Secções de esfera

6.6.1 Zona esférica

Podemos fazer uma secção entre dois paralelos e obter uma zona esférica ou rotacionar um triângulo, conforme figura 6.7.

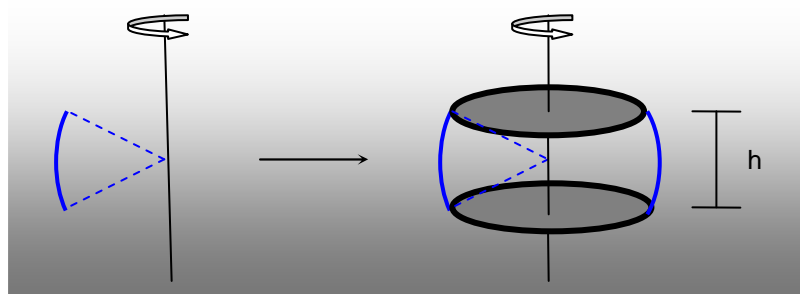


Figura 6.7 – Zona esférica por rotação

Para calcular a superfície total da zona esférica, supõe-se que os raios dos paralelos são r_1 e r_2 , então pode ser calculado a do círculo de raio r_1 (A_{C1}) e a área do círculo de raio r_2 (A_{C2}) dadas por:

$$A_{C1} = \pi r_1^2 \text{ e } A_{C2} = \pi r_2^2$$

Sabemos que:

$$A_{ZE} = 2\pi r h$$

Somando (A_{C1}), (A_{C2}) e A_{ZE} entre si, e, ainda, evidenciando π , obteremos a área da superfície total da zona esférica (A_{TEZ}) teremos:

$$A_{TEZ} = \pi(r_1^2 + r_2^2 + 2 r h)$$

Onde r é o raio do equador ou da esfera e a h é a distância entre os paralelos seccionados.

6.6.2 Calota esférica

Se seccionarmos a esfera em apenas um paralelo ou no equador, têm-se duas superfícies que se chamam de calotas esféricas, veja a figura 6.8:

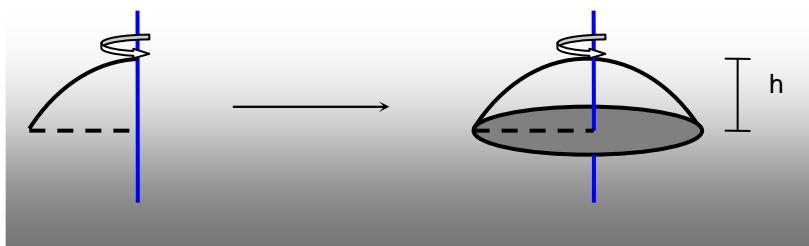


Figura 6.8 – Calota esférica rotacional

Para calcular a área da superfície da calota esférica (A_{CE}) podemos usar a mesma fórmula usada para calcular a área da superfície da zona esférica, ou seja:

$$A_{CE} = 2\pi r h$$

Para calcular a área da superfície total da zona e da calota esférica devemos, no primeiro caso, somar as áreas dos círculos dos paralelos seccionados e, no segundo caso, basta somar a área do círculo do paralelo seccionado, veja a seguir:

No caso da calota esférica, supõe-se que o raio do círculo seccionado seja r_1 , então:

$$A_{CE} = \pi r_1^2 + 2\pi r h = \pi(r_1^2 + 2 r h)$$

Em que r é raio do círculo seccionado e h a distância do círculo seccionado em relação ao pólo.

Podemos considerar a secção no equador, ou seja, o raio da esfera coincidindo com o raio do círculo seccionado e essa secção é chamada de hemisfério e a área da superfície total do hemisfério (A_{TH}) é dada por:

$$A_{TH} = \pi r(1 + 2 h).$$

Podemos calcular, ainda, o volume que o sólido, cujo formato é a zona esférica (V_{ZE}), usando a seguinte relação:

$$V_{ZE} = \frac{1}{6} \pi h (3 r_1^2 + 3 r_2^2 + h^2)$$

O volume do sólido, cujo formato é a calota esférica (V_{CE}) pode ser calculado com a relação:

$$V_{CE} = \frac{1}{6} \pi (3 r_1^2 + h^2)$$

6.7 Sugestões de Atividades:

São sugeridas três atividades, sendo que a primeira e a segunda referem-se a atividades experimentais: comprovação da relação do cálculo do volume da esfera e comprovação da relação da área da superfície da esfera, enquanto na terceira atividade são propostas 10 situações-problema. Essas atividades poderão ser usadas na íntegra ou adaptadas pelo professor, conforme realidade da escola.

6.7.1 Atividade experimental: volume da esfera

Podemos calcular o volume da esfera comparando com o volume do cone, através de uma experiência.

Fórmula do volume da esfera

Para demonstrar a fórmula do cálculo do volume do sólido esférico, identificada por:

$$V_E = \frac{4}{3} \pi R^3$$

A figura 6.6 sugere que a soma do volume de quatro cones, cuja base é igual ao círculo maior e a altura é igual ao raio de uma esfera, é igual ao volume dessa esfera, portanto podemos dizer, também, que o volume de uma semi-esfera é igual ao volume de dois cones com bases congruentes ao círculo maior da semi-esfera e o raio a mesma medida da semi-esfera. Podemos através de uma experimentação mostrar essa relação.

Objetivo

Demonstrar a relação $V_E = \frac{4}{3} \pi R^3$.

Material

- Papel gramatura 180 g/m²;
- cola;
- tesoura;
- régua;
- compasso;
- areia lavada;
- hemisfério de isopor

Procedimento

1. Dividir a turma em pequenos grupos, cada grupo deverá fazer um trabalho;
2. Medir a circunferência maior e o raio da semi-esfera de isopor;
3. Construir um cone de base circular com as medidas obtidas no item anterior;
4. Encher o cone de areia e despeja esse conteúdo na semi-esfera, repita esse procedimento mais uma vez;
5. Observar que a semi-esfera ficou cheia de areia;
6. Fazer um relatório concluindo a sua observação.

Observação: O professor poderá propor que um aluno de cada grupo vá fotografando ou filmando o procedimento passo a passo para montagem de uma apresentação no computador e explicação para os colegas.

6.7.2 Atividade experimental: área da superfície da esfera

Podemos calcular a área da superfície de uma esfera comparando com a área do círculo maior da mesma esfera.

Fórmula da área da superfície da esfera

Para demonstrar a fórmula do cálculo da área da superfície da esfera, identificada por:

$$A_E = 4 \pi R^2$$

A figura 6.5 sugere que a soma da área de quatro círculos maiores de uma esfera é igual a área de toda a superfície dessa esfera. Podemos através de uma experimentação mostrar essa relação.

Objetivo

Demonstrar a relação $A_E = 4 \pi R^2$.

Material

- Papel gramatura 180g;
- Cola;
- Tesoura;
- Régua;
- Compasso;
- Areia lavada;
- Esfera de isopor

Procedimento

1. Dividir a turma em pequenos grupos, cada grupo deverá fazer um trabalho;
2. Medir a circunferência maior esfera de isopor;
3. Construir quatro círculos com o raio igual ao da circunferência maior da esfera;
4. Cortar esses círculos em pequenos pedaços formando diversos setores;
5. Colar cada pedaço na esfera de isopor, tomando o cuidado de não sobrepor os pedaços e não deixar espaços sem cobrir (método da exaustão)
6. Observar que a esfera ficou totalmente coberta e não sobraram pedaços dos círculos;
7. Fazer um relatório concluindo a sua observação.

Observação: O professor poderá propor que um aluno de cada grupo vá fotografando ou filmando o procedimento passo a passo para montagem de uma apresentação no computador e explicação para os colegas.

6.7.3 Atividade de aplicação: situações-problema

Nesta atividade são propostas 10 situações-problema contextualizadas, porém, o professor, se necessário, poderá elaborar outros ou extrair novas situações em livros didáticos de Ensino Médio.

1. Vimos que a bola de futebol deve ter 68 cm a 70 cm de circunferência máxima. Supondo uma bola oficial com 70 cm de circunferência máxima feita com material sintético. Qual a quantidade (área da superfície da esfera), em cm^2 , desse material foi usado para produzir essa bola?

Dica: Usar a relação dada no texto para o cálculo da superfície da esfera.

2. Qual o volume que a bola da situação problema 01 ocupa no espaço?

Dica: Usar a relação dada no texto para o cálculo do volume do sólido esférico.

3. Um balão de festa quando cheio fica com o formato esférico e consegue atingir uma circunferência máxima com raio de 20 cm. Se continuarmos inserindo ar após atingir esse valor ele, geralmente, estoura. Qual a superfície desse balão no momento do estouro?

Dica: Usar a relação dada no texto para o cálculo da área da superfície total da esfera.

4. Na situação problema 03 pode com os dados que temos descobrir o volume que o balão ocupa no espaço no momento do estouro? Se sim, qual é esse volume?

Dica: Usar a relação dada no texto para o cálculo do volume da esfera.

5. Quero construir um aquário com o formato de uma calota esférica de raio 2 metros e altura 1 metro. Qual a quantidade de água deve usar para encher o aquário até 10 cm de sua borda?

Dica: Cálculo do volume da calota esférica, não esquecer de descontar os 10 cm.

6. Numa piscina de bolinhas em um parque de diversões foram colocadas 10.000 bolinhas de plástico com raio igual a 4 cm. Qual o volume, em m^3 , deve ter a piscina para comportar todas as bolinhas?

Dica: Calcular o volume de uma bolinha e depois multiplicar pelo total de bolinhas.

7. Qual a quantidade de plástico utilizado para produzir as 10.000 bolinhas da situação problema 06, em m^2 ?

Dica: Calcular a superfície de uma bolinha e depois multiplicar pelo total de bolinhas.

8. Uma estufa, para produção de mudas, foi construída de plástico no formato de uma semi-esfera (hemisfério) com o raio 10 metros. Qual a quantidade de plástico usada para construí-la?

Dica: Usar a relação dada no texto para calcular a superfície do hemisfério.

9. Um reservatório na forma esférica tem 5 metros de raio. Qual a quantidade de água usada para encher apenas 20% desse reservatório?

Dica: Cálculo do volume da esfera e revisão de porcentagem.

10. Uma bóia para orientação de navios é formada por um hemisfério de 3m de diâmetro e um cone de 1m de altura. Qual o volume dessa bóia?

Dica: Poderá calcular separado o volume do hemisfério e o volume do cone e depois somá-los.

Referências Bibliográficas:

A História do Futebol. In. MUSEU DOS ESPORTES. Disponível em: <http://www.museudosportes.com.br/noticia.php?id=1362>. Acesso em: 22 out. 2008.

BOYER, Carl Benjamin. **História da Matemática**. São Paulo: Edgard Blücher, 1974.

DANTE, Luiz Roberto. **Matemática**. São Paulo: Ática, 2005.

Esfera (Geometria). In. MATEMÁTICA ESSENCIAL. Disponível em:
<<http://pessoal.sercomtel.com.br/matematica/geometria/esfera/esfera.htm>>. Acesso em: 22 out. 2008.

Esfera. In. WIKIPÉDIA. Disponível em:
<[http://pt.wikipedia.org/wiki/Esfera_\(geometria\)](http://pt.wikipedia.org/wiki/Esfera_(geometria))>. Acesso em: 22 out. 2008.

EVES, Howard. **Introdução à História da Matemática**. Campinas, SP: Unicamp, 2004.

Historia do Futebol. In. SUA PESQUISA. Disponível em:
<<http://www.suapesquisa.com/futebol/>>. Acesso em: 22 out. 2008.

RUBIÓ, Angel Panadés; FREITAS, Luciana Maria Tenuta de. **Matemática e suas Tecnologias**. São Paulo: IBEP, 2005. v.3.

SMOLE, Kátia Cristina Stocco; Diniz, Maria Ignez de Souza Vieira. **Matemática: Ensino Médio**. 5.ed. São Paulo: Saraiva, 2005. v.2.

Sphere. In. SPRINGER ONLINE REFERENCE WORKS. Disponível em:
<<http://eom.springer.de/S/s086640.htm>>. Acesso em: 22 out. 2008.

Sphere. In. THE FREE DICTIONARY BY FARLEX. . Disponível em:
<<http://encyclopedia.thefreedictionary.com/sphere>>. Acesso em: 22 out. 2008.

Sphere. In. MATH DICTIONARY. Disponível em:
<<http://users.erols.com/bram/Sdictionary.html>>. Acesso em: 22 out. 2008.