Teoría axiomática de conjuntos

E. Casanovas

1998

Índice general

Capítulo 1

Axiomas

Los axiomas de la teoría Z de Zermelo son los siguientes enunciados.

1. Extensionalidad. $\forall xy(\forall u(u \in x \leftrightarrow u \in y) \rightarrow x = y)$.
2. Axioma del par. $\forall xy \exists z \forall u(u \in z \leftrightarrow u = x \vee u = y)$.
3. Axioma del conjunto potencia. $\forall x \exists y \forall u(u \in y \leftrightarrow u \subseteq x)$.
4. Axioma de la unión. $\forall x \exists y \forall u(u \in y \leftrightarrow \exists v(u \in v \wedge v \in x))$.
5. Esquema de separación. Para cada fórmula $\varphi(u, x_1, \ldots, x_n)$:
$$\forall x_1 \ldots x_n \forall x \exists y \forall u(u \in y \leftrightarrow u \in x \wedge \varphi(u, x_1, \ldots, x_n)).$$
6. Axioma del infinito.
$$\exists y(\exists x(x \in y \wedge \forall u\, u \notin x) \wedge \forall x(x \in y \rightarrow \exists z(z \in y \wedge \forall u(u \in z \leftrightarrow u \in x \vee u = x)))).$$

La teoría ZF de Zermelo-Fraenkel tiene además de estos axiomas el esquema de reemplazo: para cada fórmula $\varphi(u, v, x_1, \ldots, x_n)$:

$$\forall x_1 \ldots x_n(\forall uvw(\varphi(u, v, x_1, \ldots x_n) \wedge \varphi(u, w, x_1, \ldots x_n) \rightarrow v = w) \rightarrow \forall x \exists y \forall v(v \in y \leftrightarrow \exists u(u \in x \wedge$$
$$\varphi(u, v, x_1, \ldots, x_n))).$$

Observación 1.1 *El esquema de separación y el axioma del par se obtienen a partir del axioma de reemplazo y los restantes axiomas de Z.*

Si $\varphi(u, x_1, \ldots, x_n)$ es una fórmula, $a_1, \ldots, a_n$ son conjuntos y existe un conjunto b tal que

$$\forall u(u \in b \leftrightarrow \varphi(u, a_1, \ldots, a_n))$$

entonces nos referimos a este (único) conjunto b con la notación $\{u : \varphi(u, a_1, \ldots, a_n)\}$. El axioma del par dice que $\{u : u = x \vee u = y\}$ existe, el axioma del conjunto potencia dice que $\{u : u \subseteq x\}$ existe, el axioma de la unión dice que $\{u : \exists y(u \in y \wedge y \in x)\}$ existe y el esquema de separación dice que $\{u : u \in x \wedge \varphi(u, x_1, \ldots, u_n)\}$ existe. La paradoja de Russell establece que $\{u : u \notin u\}$ no existe, es decir, no es un conjunto. De ello se sigue que tampoco $\{u : u = u\}$ es un conjunto. Es posible dar entidad a todas las colecciones del tipo $\{u : \varphi(u, x_1, \ldots, x_n)\}$ pero no con todos los atributos de los conjuntos. Ello puede hacerse en una teoría de clases que presentamos a continuación. Esto no significa que se inicie un proceso que pueda ser iterado pues ni se consideran a todas las clases como una totalidad ni se contempla la posibilidad de formar clases de clases. Las clases son simplemente los conjuntos y las colecciones definibles de conjuntos y aquí definibles significa definibles mediante fórmulas que hablan únicamente de conjuntos.

La teoría BG de Bernays-Gödel trata de clases y de conjuntos. Los conjuntos son las clases que son elementos de otras clases. Ello se concreta en la siguiente definición

$$\forall x(Cx \leftrightarrow \exists y x \in y).$$

Una fórmula todos cuyos cuantificadores estén restringidos por el predicado C (es decir, sean de la forma $\exists x(Cx \wedge \varphi)$ y $\forall x(Cx \rightarrow \varphi)$) es una fórmula que cuantifica sobre conjuntos y no sobre clases arbitrarias. Equivale a una fórmula arbitraria en el contexto en que sólo hay conjuntos. Los axiomas de BG son los siguientes enunciados:

1. Extensionalidad. $\forall xy(\forall u(u \in x \leftrightarrow u \in y) \rightarrow x = y)$.

2. Existencia de conjuntos. $\exists x Cx$.

3. Formación de clases. Para cada fórmula $\varphi(u, x_1, \ldots, x_n)$ todos cuyos cuantificadores están restringidos a C:
$$\forall x_1 \ldots x_n \exists y \forall u(u \in y \leftrightarrow Cu \wedge \varphi(u, x_1, \ldots, x_n)).$$
Este esquema de axiomas permite hablar de la clase $\{u : \varphi(u, x_1, \ldots, x_n)\}$, que puede ser o no un conjunto.

4. Axioma del par. $\forall xy(Cx \wedge Cy \rightarrow \exists z(Cz \wedge \forall u(u \in z \leftrightarrow u = x \vee u = y)))$.

5. Axioma del conjunto potencia.$\forall x(Cx \rightarrow C\mathcal{P}(x))$, donde $\mathcal{P}(x) = \{u : u \subseteq x\}$.

6. Axioma de la unión. $\forall x(Cx \rightarrow C \bigcup x)$, donde $\bigcup X = \{u : \exists v(u \in v \wedge v \in x)\}$.

7. Axioma de separación. $\forall xy(Cx \rightarrow Cx \cap y)$, donde $x \cap y = \{u : u \in x \wedge u \in y\}$.

8. Axioma del infinito.
$$\exists y(Cy \wedge \exists x(x \in y \wedge \forall u\, u \notin x) \wedge \forall x(x \in y \rightarrow \exists z(z \in y \wedge \forall u(u \in z \leftrightarrow u \in x \vee u = x)))).$$

9. Axioma del reemplazo. $\forall xy(Cx \wedge \forall uvw((u, v) \in y \wedge (u, w) \in y \rightarrow v = w) \rightarrow Cy[x])$, donde $x[y] = \{v : \exists u(u \in x \wedge (u, v) \in y)\}$.

Observaciones 1.2 1. *En la enunciación de los anteriores axiomas el par ordenado (u, v) tiene el significado habitual si u, v son conjuntos. Puede suponerse definido de modo arbitrario por razones formales cuando u o v no son conjuntos. Es conveniente hacerlo de modo que si (u, v) es un conjunto también u y v lo sean. Ello permite simplificaciones en la escritura de las fórmulas con cuantificadores restringidos a C.*

2. *El esquema de separación y el esquema de reemplazo han quedado ahora convertidos en dos axiomas. Pero ha aparecido un nuevo esquema axiomático, el esquema de formación de clases. De hecho este esquema es reemplazable por un número finito de axiomas. Por tanto BG es finitamente axiomatizable. ZF no lo es.*

3. *BG es una extensión conservativa de ZF en el sentido de que los enunciados acerca de conjuntos que se obtienen en una y otra teoría son exactamente los mismos. Más precisamente, si σ es un enunciado de ZF y σ^C es el enunciado de BG obtenido al restringir todos los cuantificadores de σ al predicado C, entonces*
$$ZF \models \sigma \text{ si y sólo si } BG \models \sigma^C.$$

4. *En el esquema de formación de clases de BG pueden usarse fórmulas con símbolos definidos siempre y cuando estos símbolos hayan sido definidos mediante fórmulas con todos los cuantificadores restringidos a C.*

En la teoría BG se definen operaciones con clases de modo análogo a como se hace en ZF con conjuntos. Las clases que no son conjuntos se llaman *clases propias*. Por ejemplo, la clase universal

$$V = \{u : u = u\}$$

es una clase propia. Obsérvese que $\forall u(Cu \leftrightarrow u \in V)$. Una *clase relacional* es una clase cuyos elementos son pares ordenados de conjuntos. Por tanto las relaciones son las clases relacionales que son conjuntos. Una *clase funcional* es una clase relacional F tal que

$$\forall uvw((u,v) \in F \wedge (u,w) \in F \rightarrow v = w).$$

Así una clase funcional que es un conjunto es una función.

Capítulo 2

Conjuntos bien ordenados

Definición 2.1 (Conjunto ordenado) Decimos que $(A, <_A)$ es un *conjunto parcialmente ordenado* si $<_A$ es un orden parcial estricto de A. Si el orden es total decimos que $(A, <_A)$ es un *conjunto totalmente ordenado* o simplemente un *conjunto ordenado*.

Definición 2.2 (Función creciente, inmersión, isomorfismo, automorfismo) Si $(A, <_A)$ y $(B, <_B)$ son conjuntos ordenados y $f : A \to B$ definimos:

1. f es *estrictamente creciente* si $\forall ab \in A(a <_A b \to f(a) <_B f(b))$.
2. f es una *inmersión* de $(A, <_A)$ en $(B, <_B)$ si f es inyectiva y $\forall ab \in A(a <_A b \leftrightarrow f(a) <_B f(b))$.
3. f es un *isomorfismo* entre $(A, <_A)$ y $(B, <_B)$ si f es una inmersión exhaustiva de $(A, <_A)$ en $(B, <_B)$.

Si existe un isomorfismo entre $(A, <_A)$ y $(B, <_B)$ decimos que $(A, <_A)$ y $(B, <_B)$ son *isomorfos* y escribimos $(A, <_A) \cong (B, <_B)$. Un *automorfismo* de $(A, <_A)$ es un isomorfismo entre $(A, <_A)$ y $(A, <_A)$.

Observación 2.1 *Toda función estrictamente creciente entre conjuntos ordenados es una inmersión.*

Observaciones 2.2 *Sean $(A, <_A)$, $(B, <_B)$ y $(C, <_C)$ conjuntos ordenados.*

1. $(A, <_A) \cong (A, <_A)$.
2. *Si $(A, <_A) \cong (B, <_B)$, entonces $(B, <_B) \cong (A, <_A)$.*
3. *Si $(A, <_A) \cong (B, <_B)$ y $(B, <_B) \cong (C, <_C)$, entonces $(A, <_A) \cong (C, <_C)$.*

Definición 2.3 (Suma y producto de conjuntos ordenados) Sean $(A, <_A)$ y $(B, <_B)$ conjuntos ordenados.

1. Si $A \cap B = \emptyset$, se define la *suma* de $(A, <_A)$ con $(B, <_B)$ como el orden $(A, <_A) \oplus (B, <_B) = (C, <_C)$ donde $C = A \cup B$ y $a <_C b \leftrightarrow (a <_A b \vee a <_B b \vee (a \in A \wedge b \in B))$.

2. El *producto* de $(A, <_A)$ y $(B, <_B)$ se define como el orden $(A, <_A) \otimes (B, <_B) = (C, <_C)$ donde $A = B \times C$ y $(a, b) <_C (c, d)$ si y sólo si $b <_B d \vee (b = d \in B \wedge a <_A c)$.

Observaciones 2.3 *Sean $(A, <_A)$, $(B, <_B)$ $(A', <_{A'})$ y $(B', <_{B'})$ conjuntos ordenados.*

1. *Sea $A \cap B = A' \cap B' = \emptyset$. Si $(A, <_A) \cong (A', <_{A'})$ y $(B, <_B) \cong (B', <_{B'})$, entonces*
$$(A, <_A) \oplus (B, <_B) \cong (A', <_{A'}) \oplus (B', <_{B'}).$$

2. *Si $(A, <_A) \cong (A', <_{A'})$ y $(B, <_B) \cong (B', <_{B'})$, entonces*
$$(A, <_A) \otimes (B, <_B) \cong (A', <_{A'}) \otimes (B', <_{B'}).$$

Definición 2.4 ($(A, <_A) \prec (B, <_B)$) Sean $(A, <_A)$ y $(B, <_B)$ conjuntos ordenados. La notación $(A, <_A) \prec (B, <_B)$ indica que $(A, <_A)$ es isomorfo a un segmento inicial propio de $(B, <_B)$. Recordemos que $X \subseteq B$ es un *segmento inicial* de $(B, <_B)$ si $(\forall ab \in B)(a <_B b \wedge b \in X \to a \in X)$. El segmento inicial X es *propio* si $X \neq B$. En general consideramos a los subconjuntos X de B ordenados con el orden heredado $a <_X b \leftrightarrow (a, b \in X \wedge a <_B b)$. En la práctica usamos la notación $(X, <_B)$ en vez de $(X, <_X)$ y se entiende que el orden debe restringirse a X.

Observación 2.4 *1. Para cualesquiera conjuntos ordenados $(A, <_A)$, $(B, <_B)$ y $(C, <_C)$: si $(A, <_A) \prec (B, <_B)$ y $(B, <_B) \prec (C, <_C)$, entonces $(A, <_A) \prec (C, <_C)$.*

2. *Existen conjuntos ordenados $(A, <_A)$ tales que $(A, <_A) \prec (A, <_A)$.*

3. *Para cualesquiera conjuntos ordenados $(A, <_A)$ y $(B, <_B)$: $(A, <_A) \prec (B, <_B)$ si y sólo si existe un conjunto ordenado $(C, <_C)$ tal que $C \neq \emptyset$, $A \cap C = \emptyset$ y $(A, < A) \oplus (C, <_C) \cong (A, <_A)$.*

Definición 2.5 (Buen orden, conjunto bien ordenado) $<$ es un *buen orden* de A si $<$ es un orden estricto de A en el que todo subconjunto no vacío tiene un menor elemento. Tal orden debe ser necesariamente total. $(A, <)$ es un *conjunto bien ordenado* si $<$ es un buen orden de A.

Observaciones 2.5 *1. Todo orden finito es un buen orden.*

2. *El orden de los números naturales es un buen orden.*

3. *Ni el orden de los números enteros ni el orden de los números racionales son buenos órdenes.*

4. *Todo suborden de un buen orden es un buen orden.*

5. *La suma y el producto de buenos órdenes es un buen orden.*

Proposición 2.6 (Principio de Inducción) *Sea $(A, <_A)$ un conjunto bien ordenado y $X \subseteq A$. Si*
$$(\forall a \in A)(\forall b(b <_A a \to b \in X) \to a \in X)$$
entonces $X = A$.

Prueba. Supongamos que $A \neq X$ y sea a el menor elemento de $A \setminus X$. Obviamente $a \notin X$ pero $\forall b(b <_A a \to b \in X)$.

Lema 2.7 *Sean* $(A, <_A)$ *un conjunto bien ordenados. Si* $f : A \to A$ *es estrictamente creciente, entonces* $(\forall a \in A) f(a) \geq_A a$.

Prueba. Efectuando una inducción supongamos que $a \in A$ y que para cada $b <_A a$, $f(b) \geq_A b$. Así, si $b <_A a$ tenemos que $f(a) >_A f(b) \geq_A b$. Por tanto $f(a) \geq_A a$.

Proposición 2.8 *1. Todo conjunto bien ordenado es rígido, es decir, su único automorfismo es la identidad.*

2. Entre dos conjuntos bien ordenados hay a lo sumo un isomorfismo.

Prueba. *1.* Sea f un automorfismo del conjunto bien ordenado $(A, <_A)$. Por el lema 2.7, $f(a) \geq_A a$. Como también f^{-1} es un automorfismo de $(A, <_A)$, de nuevo por el lema 2.7, $a = f^{-1}(f(a)) \geq_A f(a)$. Por tanto $a = f(a)$. El punto *2* se sigue de *1* dado que si f y g son isomorfismos entre $(A, <_A)$ y $(B, <_B)$, entonces $g^{-1} \circ f$ es un automorfismo de $(A, <_A)$ y por ello debe ser la identidad, en cuyo caso $f = g$.

Proposición 2.9 *1. Si* $(A, <_A)$ *es un conjunto bien ordenado, no existe ninguna inmersión de* $(A, <_A)$ *en un segmento inicial propio de* $(A, <_A)$.

2. No existe ningún conjunto bien ordenado $(A, <_A)$ *tal que* $(A, <_A) \prec (A, <_A)$.

3. No existen conjuntos bien ordenados $(A, <_A)$ *y* $(B, <_B)$ *tales que* $(A, <_A) \prec (B, <_B)$ *y* $(B, <_B) \prec (A, <_A)$.

Prueba. *2* se sigue inmediatamente de *1* y *3* se sigue de *2*. Respecto a *1*, supongase que f es una inmersión de $(A, <_A)$ en un segmento inicial propio X de $(A, <_A)$. Sea a el menor elemento de $A \setminus X$. Por el lema 2.7 $f(a) \geq_A a$, en cuyo caso $a \in X$ pues X es un segmento inicial. Esto es una contradicción ya que $a \notin X$.

Teorema 2.10 (Comparabilidad de conjuntos bien ordenados) *Si* $(A, <_A)$ *y* $(B, <_B)$ *son conjuntos bien ordenados, se da exactamente uno de los tres siguientes casos:*

1. $(A, <_A) \prec (B, <_B)$.
2. $(A, <_A) \cong (B, <_B)$.
3. $(B, <_B) \prec (A, <_A)$.

Prueba. El hecho de que no puedan darse dos de estos casos es una consecuencia de la proposición 2.9. Para establecer que al menos uno de ellos se da consideremos la relación

$$f = \{(a, b) \in A \times B : (A_a, <_A) \cong (B_b, <_B)\}$$

donde $A_a = \{x \in A : x \leq_A a\}$ y $B_b = \{x \in B : x \leq_B b\}$. Obsérvese que A_a y B_b son segmentos iniciales propios. De la proposición 2.9 se sigue que si $b \neq b'$ entonces B_b y $B_{b'}$ no son isomorfos y por tanto que f es una función. Es fácil ver que el dominio de f es un segmento inicial de $(A, <_A)$ y que el recorrido de f es un segmento inicial de $(B, <_B)$. Veamos que f es estrictamente creciente. En caso contrario hay $a, a' \in A$ tales que $a <_A a'$ pero $f(a) \geq_B f(a')$. Sea g un isomorfismo entre $(A_a, <_A)$ y $(B_{f(a)}, <_B)$ y sea h un isomorfismo entre $(A_{a'}, <_A)$ y $(B_{f(a')}, <_B)$. Entonces $g^{-1} \circ h$ es una inmersión de $(A_{a'}, <_A)$ en $(A_a, <_A)$ y $(A_a, <_A)$ es un segmento inicial propio de

$A_{a'}$. Esto contradice a la proposición 2.9. Así pues, f es estrictamente creciente. Si $\mathrm{dom}\, f = A$ y $\mathrm{rec}\, f = B$ se da el caso *2*. Si $\mathrm{dom}\, f = A$ y $\mathrm{rec}\, f \neq B$ se da el caso *1*. Y si $\mathrm{dom}\, f \neq A$ pero $\mathrm{rec}\, f = B$, se da el caso *3*. Sólo falta asegurar que el caso $\mathrm{dom}\, f \neq A$ y $\mathrm{rec}\, f \neq B$ es imposible. Supongamos lo contrario y sea a el menor elemento de $A \setminus \mathrm{dom}\, f$ y b el menor elemento de $B \setminus \mathrm{rec}\, f$. Entonces $f \cup \{(a, b)\}$ es un isomorfismo entre $(A_a, <_A)$ y $(B_b, <_B)$ con lo cual $a \in \mathrm{dom}\, f$.

Teorema 2.11 (Recursión para conjuntos bien ordenados) *Sea $(A, <_A)$ un conjunto bien ordenado, sea X un conjunto, sea B el conjunto de todos los segmentos iniciales S de $(A, <_A)$ y consideremos el conjunto $\bigcup_{S\in B} {}^S X$ de todas las aplicaciones de la forma $h : S \to X$ para $S \in B$. Si $g : \bigcup_{S\in B} {}^S X \to X$, entonces existe una única función $f : A \to X$ tal que para cada $a \in A$,*

$$f(a) = g(f \restriction \{b \in A : b <_A a\}).$$

Prueba. Verificamos en primer lugar la unicidad de una tal función. Supongamos que además de f tenemos una $f' : A \to X$ tal que para cada $a \in A$, $f'(a) = g(f' \restriction \{b \in A : b <_A a\})$. Vemos por inducción que $(\forall a \in A) f(a) = f'(a)$. Sea $a \in A$ y supongamos que $(\forall b \in A)(b <_A a \to f(b) = f'(b))$. Entonces $f \restriction \{b \in A : b <_A a\} = f' \restriction \{b \in A : b <_A a\}$ y por tanto

$$f(a) = g(f \restriction \{b \in A : b <_A a\}) = g(f' \restriction \{b \in A : b <_A a\}) = f'(a).$$

Consideramos ahora la existencia de f. Para ello definimos

$$F = \{h : (\exists S \in B)(h : S \to X \wedge (\forall a \in S) h(x) = g(h \restriction \{b \in A : b <_A a\}))\}.$$

Observemos que si $h_1, h_2 \in F$, entonces $h_1 \cup h_2$ es una función. Para justificarlo basta establecer que $(\forall a \in A)(a \in \mathrm{dom}\, h_1 \cap \mathrm{dom}\, h_2 \to h_1(a) = h_2(a))$ y ello puede hacerse por inducción. Sea $a \in A$ y supongamos que $(\forall b <_A a)(b \in \mathrm{dom}\, h_1 \cap \mathrm{dom}\, h_2 \to h_1(b) = h_2(b))$ y que $a \in \mathrm{dom}\, h_1 \cap \mathrm{dom}\, h_2$. Como los dominios de h_1 y h_2 son segmentos iniciales, $\forall b(b <_A a \to b \in \mathrm{dom}\, h_1 \cap \mathrm{dom}\, h_2)$. Por tanto $\forall b(b <_A a \to h_1(a) = h_2(a))$, es decir, $h_1 \restriction \{b \in A : b <_A a\} = h_2 \restriction \{b \in A : b <_A a\}$. Entonces $h_1(a) = g(h_1 \restriction \{b \in A : b <_A a\}) = g(h_2 \restriction \{b \in A : b <_A a\}) = h_2(a)$. Así finaliza la inducción. De esta primera observación se sigue inmediatamente que $\bigcup F$ es una función. Definimos $f = \bigcup F$. Es fácil ver que $\mathrm{dom}\, f = \bigcup_{h\in F} \mathrm{dom}\, h$ es un segmento inicial de $(A, <_A)$. Podemos mostrar incluso que $f \in F$. Para garantizarlo basta justificar que $(\forall a \in A)(a \in \mathrm{dom}\, f \to f(a) = g(f \restriction \{b \in A : b <_A a\}))$. Sea $a \in \mathrm{dom}\, f$. Entonces hay $h \in F$ tal que $a \in \mathrm{dom}\, h$. Obviamente $(\forall b \leq_A a)(b \in \mathrm{dom}\, f \cap \mathrm{dom}\, h \wedge h(b) = f(b))$. Entonces

$$f(a) = h(a) = g(h \restriction \{b \in A : b <_A a\}) = g(f \restriction \{b \in A : b <_A a\}).$$

Establecido así que $f \in F$, sólo queda demostrar que $\mathrm{dom}\, f = A$. Supongamos lo contrario y sea a el menor elemento de $A \setminus \mathrm{dom}\, f$. Es fácil comprobar que si $b = g(f)$ resulta que $f \cup \{(a, b)\} \in F$, lo cual implica que $a \in \mathrm{dom}\, f$, en contradicción con la elección de a.

Definición 2.6 (Clases bien ordenadas) Podemos extender la noción de buen orden a clases relacionales. Una clase relacional $<$ es un buen orden de una clase A si toda subclase no vacía de A tiene un menor elemento en $<$. Si añadimos la hipótesis de que todo segmento inicial propio sea un conjunto, ello es equivalente a que todo subconjunto no vacío tiene un menor elemento en $<$. Existe una dificultad en la noción de *clase bien ordenada*. El problema es que si A y $<$ son clases propias hay que concretar qué es el par ordenado $(A, <)$ de modo que represente a A y $<_A$ en el orden en que son dados. Esta problema puede solventarse definiendo en estos casos $(A, <) = (A \times \{0\}) \cup (< \times \{1\})$. La noción de isomorfía y los restantes conceptos de conjuntos bien ordenados se extienden sin dificultad a las clases bien ordenadas.

Teorema 2.12 (Recursión para clases bien ordenadas) *Sea* $(A, <_A)$ *una clase bien ordenada en la que todo segmento inicial es un conjunto. Si* X *es una clase y* $G : V \to X$ *es una clase funcional, entonces existe una única clase funcional* $F : A \to X$ *tal que para cada* $a \in A$*,*

$$F(a) = G(F \restriction \{b \in A : b <_A a\}).$$

Prueba. Se razona como en la prueba del teorema de recursión para conjuntos bien ordenados pero en ciertos puntos hay que hacer uso del axioma de reemplazo. Obsérvese que precisamente por este axioma se puede garantizar que $F \restriction \{b \in A : b <_A a\}$ es un conjunto y por tanto tiene sentido tomarlo como argumento de G. La demostración de la unicidad de F no ofrece ninguna dificultad. Respecto a la existencia, se define la clase $\mathcal{B}$ formada por los segmentos iniciales propios de A y la clase

$$\mathcal{F} = \{h : (\exists S \in \mathcal{B})(h : S \to X \wedge (\forall a \in S)h(x) = G(h \restriction \{b \in A : b <_A a\}))\}$$

y tras garantizar que $\bigcup \mathcal{F}$ es una clase funcional se pone $F = \bigcup \mathcal{F}$. Ahora no tiene sentido mostrar que $F \in \mathcal{F}$ pues no se sabe si es un conjunto o no, pero sí se puede mostrar que tiene todas las otras propiedades de los elementos de $\mathcal{F}$. Por último razonando indirectamente se muestra que si $\operatorname{dom} F \neq A$ entonces $F \in \mathcal{F}$ y F puede todavía extenderse como en la prueba del teorema de recursión para conjuntos bien ordenados.

Observación 2.13 *Si* $(A, <_A)$ *y* $(B, <_B)$ *son dos clases propias bien ordenadas en las que todo segmento inicial es un conjunto, entonces* $(A, <_A) \cong (B, <_B)$*.*

Capítulo 3

El axioma de elección

Definición 3.1 (Función de elección, axioma de elección) Sea X un conjunto de conjuntos no vacíos. Una *función de elección* para X es una función $f : X \to \bigcup X$ tal que $(\forall a \in X) f(a) \in a$. El *axioma de elección* (abreviado AC) es el enunciado según el cual para todo conjunto de conjuntos no vacíos existe una función de elección.

Observación 3.1 *El axioma de elección es equivalente al enunciado que dice que para cada relación R existe una función $f \subseteq R$ tal que* $\operatorname{dom} f = \operatorname{dom} R$.

Definición 3.2 (Lema de Zorn y Principio del buen orden) El *Lema de Zorn* (abreviado ZL) es el siguiente enunciado:

Si $<$ es un orden parcial del conjunto $A \neq \emptyset$ en el que toda cadena tiene una cota superior, entonces A tiene un elemento maximal en $<$.

El *Principio del buen orden* (abreviado WO) es el siguiente enunciado:

Todo conjunto puede ser bien ordenado, es decir, para cada conjunto A existe una relación $<$ que es un buen orden de A.

Proposición 3.2 *Sea X un conjunto tal que $\emptyset \notin X$. Si existe un buen orden de $\bigcup X$, entonces existe una función de elección para X. Por tanto $WO \to AC$.*

Prueba. Sea $<$ un buen orden de $\bigcup X$. Definimos entonces

$$f = \{(a, b) : a \in X \wedge b \in a \wedge (\forall x \in a) b \leq x\}.$$

Es rutina verificar que f es una función de elección para X.

Corolario 3.3 *Si $\emptyset \notin X$ y $\bigcup X$ es numerable entonces existe una función de elección para X.*

Prueba. Si X es numerable, entonces X es biyectable con un conjunto de números naturales y por tanto X posee un buen orden.

Proposición 3.4 *$ZL \to AC$*

Prueba. Sea X un conjunto tal que $\emptyset \notin X$ y sea A el conjunto formado por todas las funciones de elección para los subconjuntos de X. Como $\emptyset$ es una función de elección para $\emptyset$, $\emptyset \in A$. Consideramos el orden de la inclusión (estricta) entre elementos de A. Si C es una cadena en A entonces $\bigcup C$ es una función de elección para $\operatorname{dom} \bigcup C = \bigcup_{f \in C} \operatorname{dom} f$ y por tanto $\bigcup C$ es una cota superior de C. Por el lema de Zorn A tiene un elemento maximal f. Debe ser $\operatorname{dom} f = X$, pues si $a \in X \setminus \operatorname{dom} f$ y escogemos $b \in a$ resulta que $f \cup \{(a, b)\} \in A$ lo que contradice la maximalidad de f. Entonces f es una función de elección para X.

Proposición 3.5 $WO \rightarrow ZL$

Prueba. Sea A un conjunto no vacío y $<$ un orden parcial en A en el que toda cadena tiene una cota superior. Supongamos que A no tiene elemento maximal en $<$, de manera que toda cadena en A tiene una cota superior estricta. Sea C el conjunto formado por todas las cadenas de A. Usando WO podemos obtener una función $c : C \rightarrow A$ tal que para cada $X \in C$, $c(X)$ es una cota superior estricta de la cadena X. Ahora sea B un conjunto de cardinalidad mayor que A, por ejemplo $B = \mathcal{P}(A)$ y sea $<_B$ un buen orden de B (que existe por la hipótesis WO). Por el teorema de recursión para conjuntos bien ordenados existe una función $f : B \rightarrow A$ tal que para cada $b \in B$,

$$f(b) = c(\{f(x) : x <_B b\}).$$

Para obtener explícitamente esta función aplicando el teorema de recursión es necesario definir primero el conjunto D formado por todos los segmentos iniciales de $(B, <_B)$ y la función $g : \bigcup_{S \in D} {}^S A \rightarrow A$ por $g(h) = c(\operatorname{rec} h)$ si $\operatorname{rec} h$ es una cadena en $(A, <_A)$ y $g(h) = a$ donde $a \in A$ es un elemento fijo elegido de antemano si $\operatorname{rec} h$ no es una cadena. Entonces se obtiene $f : B \rightarrow A$ tal que para cada $b \in B$,

$$f(b) = g(f \restriction \{x \in B : x <_B b\}).$$

Por inducción se muestra entonces fácilmente que para cada $b \in B$, $f[\{x \in B : x <_B b\}]$ es una cadena en $(A, <_A)$ y por tanto $f(b) = c(\{x : x <_B b\})$. Es claro que f es estrictamente creciente. Como el orden de B es total, ello implica que f es inyectiva. Pero esto contradice la elección de B como un conjunto de mayor tamaño que A.

Proposición 3.6 $AC \rightarrow WO$.

Prueba. Sea A un conjunto arbitario. Mostraremos que existe un buen orden de A. Con el axioma de elección es fácil obtener una función $f : \mathcal{P}(A) \setminus A \rightarrow A$ tal que

$$(\forall X \subsetneqq A) f(X) \in A \setminus X.$$

Sea $\mathcal{A}$ el conjunto de todos los conjuntos bien ordenados de la forma $(X, <_X)$ donde $X \subseteq A$ y para cada segmento inicial propio Y de X, $f(Y)$ es el menor elemento de $X \setminus Y$. Si $(X, <_X) \in \mathcal{A}$ y $a \in A$, ponemos $X_a = \{x \in X : x <_X a\}$. Obsérvese que también $(X_a, <_X) \in \mathcal{A}$. Digamos que $(X, <_X)$ es una continuación de $(Y, <_Y)$ si Y es un segmento inicial de $(X, <_X)$ y $<_Y = <_X \cap (Y \times Y)$. Vamos a mostrar que si $(X, <_X)$ y $(Y, <_Y)$ son dos elementos de $\mathcal{A}$, entonces o bien $(X, <_X)$ es una continuación de $(Y, <_Y)$ o bien $(Y, <_Y)$ es una continuación de $(X, <_X)$. Para ello mostramos por inducción que para cada $a \in X$ o bien existe un $b \leq_X a$ tal que $(X_b, <_X) = (Y, <_Y)$ o bien, segunda posibilidad, $a \in Y$ y $(X_a, <_X) = (Y_a, <_Y)$. Sea $a \in X$, supongamos que ésta es la situación para todo $b <_A a$ y veamos que también se da la disyuntiva para a. Si no hay ningún $b <_X a$ tal que $(X_b, <_X) = (Y, <_Y)$, entonces, por la hipótesis inductiva, para cada $b <_X a$ tenemos que $b \in Y$ y $(X_b, <_X) = (Y_b, <_Y)$. Esto implica que $(Y, <_Y)$ es una continuación de $(X_a, <_X)$. Si $Y = X_a$ se da la primera de las dos opciones en la disyunción. Y si X_a es un subconjunto propio de Y entonces $a = f(X_a) \in Y$ y $Y_a = X_a$. Entonces también $(X_a, <_X) = (Y_a, <_Y)$. Con esto finaliza la inducción. Ahora, si hay algún $a \in X$ tal que $(X_a, <_X) = (Y, <_Y)$, claramente $(X, <_X)$ es una continuación de $(Y, <_Y)$. Y si no hay tal $a \in X$ por lo que hemos demostrado vemos que para cada $a \in X$, $a \in Y$ y $(X_a, <_X) = (Y_a, <_Y)$. De ello se sigue que $(Y, <_Y)$ es una continuación de $(X, <_X)$.

Establecido así que si $(X, <_X)$ y $(Y, <_Y)$ son dos elementos de $\mathcal{A}$, entonces o bien $(X, <_X)$ es una continuación de $(Y, <_Y)$ o bien $(Y, <_Y)$ es una continuación de $(X, <_X)$. Consideremos la unión de todos ellos

$$B = \bigcup_{(X,<_X)\in\mathcal{A}} X \quad \text{y} \quad <_B = \bigcup_{(X,<_X)\in\mathcal{A}} <_X \ .$$

Obviamente $(B, <_B)$ es un conjunto ordenado, pero además $<_B$ es un buen orden pues si X es un subconjunto no vacío de B existe $(Y, <_Y) \in \mathcal{A}$ tal que $X \cap Y$ es un subconjunto no vacío de Y y como Y es un segmento inicial de $(B, <_B)$ y $<_Y = <_B \cap (Y \times Y)$, el menor elemento de $X \cap Y$ en $(Y, <_Y)$ es el menor elemento de X en $(B, <_B)$. Finalizamos la prueba mostrando que debe ser $A = B$. En caso contrario, como $(B, <_B) \in \mathcal{A}$, podemos prolongar el orden añadiendo $f(B)$ como un nuevo elemento mayor que todos los elementos de B. Este nuevo conjunto ordenado también está en $\mathcal{A}$ lo cual implica que $f(B) \in B$ y esto es una contradicción.

Capítulo 4

Ordinales

Definición 4.1 (Ordinal) Si $(A, <_A)$ es un conjunto bien ordenado sabemos que por el teorema de recursión para clases bien ordenadas existe una única función $f : A \to V$ tal que

$$f(a) = \{f(b) : b <_A a\}.$$

Se define *el ordinal de* $(A, <_A)$ como el conjunto $\mathrm{Ord}(A, <_A) = \mathrm{rec}\, f$. Los *números ordinales* (abreviadamente los *ordinales*) son los ordinales de los conjunto bien ordenados. La clase de todos los números ordinales es

$$\mathrm{On} = \{\alpha : \alpha \text{ es un número ordinal }\}.$$

Lema 4.1 *Si α es un ordinal $(\forall a \in \alpha)\, a \subseteq \alpha$.*

Prueba. Sea $\alpha = \mathrm{Ord}(A, <_A)$ y sea $f : A \to \alpha$ la función exhaustiva que cumple $(\forall a \in A) f(a) = \{f(x) : x <_A a\}$. Obviamente $(\forall a \in A)\, f(a) \subseteq \alpha$.

Proposición 4.2 *Si α es un ordinal, α está bien ordenado por la relación de pertenencia*

$$\in_\alpha = \{(a, b) : a, b \in \alpha \wedge a \in b\}.$$

Y si $(A, <_A)$ es un conjunto bien ordenado, $\mathrm{Ord}(A, <_A) = \alpha$ y f es la función $f : A \to \alpha$ tal que $(\forall a \in A) f(a) = \{f(x) : x <_A a\}$, entonces f es un isomorfismo entre $(A, <_A)$ y $(\alpha, \in_\alpha)$.

Prueba. Es claro que f es exhaustiva y que $(\forall ab \in A)(a <_A b \to f(a) \in f(b))$. Por inducción se ve inmediatamente que $(\forall a \in A) f(a) \notin f(a)$. Por el lema 4.1, $\neg(\exists ab \in A)(f(a) \in f(b) \wedge f(b) \in f(a))$. De todo ello se sigue que f es una biyección y que $(\forall ab \in A)(a <_A b \leftrightarrow f(a) \in f(b))$. Esto implica que $\in_\alpha$ es un buen orden de α y que f es un isomorfismo.

Proposición 4.3 *Si α, β son ordinales isomorfos (con el orden de la pertenencia) entonces $\alpha = \beta$.*

Prueba. Sea f un isomorfismo entre $(\alpha, \in_\alpha)$ y $(\beta, \in_\beta)$. Se cumple que $(\forall ab \in \alpha)(a \in b \leftrightarrow f(a) \in f(b))$. Por el lema 4.1 sabemos que si $a \in \alpha$, entonces $a = \{x \in \alpha : x \in a\}$ y $f(a) = \{x \in \beta : x \in f(a)\}$, de manera que $f(a) = \{f(x) : x \in a\}$. Por inducción se puede ver entonces fácilmente que $(\forall a \in \alpha) f(a) = a$. Por tanto $\alpha = \beta$.

Proposición 4.4 *Sean $(A, <_A)$ y $(B, <_B)$ conjuntos bien ordenados.*

1. $\operatorname{Ord}(A, <_A)$ *es el único ordinal* α *tal que* $(A, <_A) \cong (\alpha, \in_\alpha)$.

2. $(A, <_A) \cong (B, <_B)$ *si y sólo si* $\operatorname{Ord}(A, <_A) = \operatorname{Ord}(B, <_B)$.

Prueba. Los dos puntos se siguen de la proposición 4.2 y la proposición 4.3.

Definición 4.2 (Conjunto transitivo) Un conjunto A es transitivo si los elementos de los elementos de A son elementos de A, es decir, si $(\forall a \in A)(\forall x \in a)\, x \in A$. Una condición equivalente es que $(\forall a \in A) a \subseteq A$ y también es equivalente la condición de que $\bigcup A \subseteq A$.

Proposición 4.5 *Los ordinales son los conjuntos transitivos que están bien ordenados por la pertenencia. Además para cada ordinal* α*,* $\operatorname{Ord}(\alpha, \in_\alpha) = \alpha$.

Prueba. Si α es un ordinal sabemos por el lema 4.1 que α es transitivo y sabemos por la proposición 4.2 que α está bien ordenado por $\in_\alpha$. Sea ahora A un conjunto transitivo y bien ordenado por $\in_A = \{(a, b) \in A \times A : a \in b\}$. Sea $\alpha = \operatorname{Ord}(A, \in_A)$ y sea $f : A \to \alpha$ la función exhaustiva que verifica $(\forall a \in A) f(a) = \{f(x) : x \in_A a\}$. Por inducción se ve sin problemas que $(\forall a \in A) f(a) = a$. Por tanto $A = \alpha$ es un ordinal. La segunda afirmación se sigue de este último razonamiento.

Proposición 4.6 *1. Todo elemento de un ordinal es un ordinal.*

2. Ningún ordinal se pertenece a sí mismo.

Prueba. El punto *2* es claro dado que todo ordinal está bien ordenado por la pertenencia. Respecto al punto *1*, es claro que todo elemento de un ordinal es un subconjunto del ordinal en cuestión y por tanto está bien ordenado por la pertenencia. Por la proposición 4.5 basta ver que todo elemento de un ordinal es transitivo. Sea $\alpha = \operatorname{Ord}(A, <_A)$ y sea $f : A \to \alpha$ la función exhaustiva tal que $(\forall a \in A) f(a) = \{f(x) : x <_A a\}$. Supongamos que que $a \in A$ y que $x \in y \in f(a)$ y veamos que $x \in f(a)$. Por definición de f hay $b <_A a$ tal que $y = f(b)$ y hay $c <_A b$ tal que $x = f(c)$. Como $c <_A a$, $x \in f(a)$.

Lema 4.7 *Sea* α *un ordinal y* $X \subseteq \alpha$*. Entonces* $X \in \alpha$ *si y sólo si* X *es un segmento inicial propio de* $(\alpha, \in_\alpha)$.

Prueba. Sea $X \in \alpha$. Entonces X es un ordinal y por tanto es transitivo. Para mostrar que X es un segmento inicial supongamos que $\beta \in X$, $\gamma \in \alpha$ y $\gamma \in \beta$. Como X es transitivo, $\beta \subseteq X$ y así $\gamma \in X$. Como X es un ordinal $X \notin X$ y por ello $X \neq \alpha$. Por tanto X es un segmento inicial propio de α. A la inversa, supongamos que $X \subseteq \alpha$ es un segmento inicial propio. Si β es el menor elemento de $\alpha \smallsetminus X$, resulta que $X = \{\gamma \in \alpha : \gamma \in \beta\}$ y como $\beta \subseteq \alpha$ se concluye que $X = \beta$.

Proposición 4.8 *Sean* $(A, <_A)$ *y* $(B, <_B)$ *conjuntos bien ordenados.*

$$\operatorname{Ord}(A, <_A) \in \operatorname{Ord}(B, <_B) \quad \textit{si y sólo si} \quad (A, <_A) \prec (B, <_B)$$

Prueba. Sea $\alpha = \operatorname{Ord}(A, <_A)$ y sea $\beta = \operatorname{Ord}(B, <_B)$. Si $\alpha \in \beta$, por el lema 4.7 α es un segmento inicial propio de β. Como α es isomorfo a $(A, <_A)$ y β lo es a $(B, <_B)$, se concluye que $(A, <_A) \prec (B, <_B)$. A la inversa, supongamos ahora que $(A, <_A) \prec (B, <_B)$. Entonces α es isomorfo a un segmento inicial propio de β. Por el lema 4.7 este segmento inicial es un ordinal $\gamma \in \beta$. Pero ordinales isomorfos son iguales, de manera que $\alpha = \gamma$ y así $\alpha \in \beta$.

Definición 4.3 ($<$) Definimos $<$ como la relación de pertenencia entre ordinales. La transitividad de los ordinales implica que $<$ es una relación transitiva. Por la proposición 4.6 sabemos que es irreflexiva. Por tanto $<$ es un orden parcial de la clase On de todos los ordinales. De la proposición 4.8 y el teorema 2.10 se sigue que de hecho es un orden total de On. Veremos que es un buen orden. El orden reflexivo asociado es, claro está, $\leq$.

Proposición 4.9 *Para cualesquiera ordinales α, β son equivalentes:*

1. $\alpha \leq \beta$.
2. *α es un segmento inicial de $(\beta, \in_\beta)$.*
3. $\alpha \subseteq \beta$.

Prueba. *1* $\Rightarrow$ *2* se sigue del lema 4.7 y *2* $\Rightarrow$ *3* es obvio. Probamos *3* $\Rightarrow$ *1*. Sea $\alpha \subseteq \beta$ y supongamos que $\alpha \not\leq \beta$. Como el orden es total, $\beta < \alpha$, es decir, $\beta \in \alpha$. Pero entonces $\beta \in \beta$, lo cual es una contradicción.

Proposición 4.10 *Todo clase no vacía de ordinales tiene un menor elemento en el orden $<$.*

Prueba. Sea X una clase no vacía de ordinales y escojamos $\alpha \in X$. Si $\alpha \cap X = \emptyset$, α es el menor elemento de X. Y si $\alpha \cap X \neq \emptyset$ el menor elemento de $\alpha \cap X$ es el menor elemento de X.

Lema 4.11 *1. $\emptyset$ es un ordinal.*

2. *Si α es un ordinal, $\alpha \cup \{\alpha\}$ también lo es.*
3. *Si X es un conjunto de ordinales $\bigcup X$ es un ordinal.*
4. *Si X es un conjunto no vacío de ordinales, $\bigcap X$ es un ordinal.*

Prueba. En cada caso hay que verificar que el conjunto en cuestión es transitivo y está bien ordenado por la pertenencia. Obsérvese en el punto *3* que $\bigcup X$ es un conjunto de ordinales (pues los elementos de los ordinales son ordinales) y por la proposición 4.10 todo subconjunto no vacío suyo tiene un menor elemento en $<$.

Proposición 4.12 *$<$ es un buen orden de* On. *Si X es un conjunto no vacío de ordinales entonces $\bigcap X$ es el menor elemento de X. En este orden todo conjunto de ordinales tiene un supremo y todo ordinal tiene un sucesor inmediato. Si X es un conjunto de ordinales, $\bigcup X$ es el supremo de X y si α es un ordinal, $\alpha \cup \{\alpha\}$ es el sucesor inmediato de α.*

Prueba. Es consecuencia de las proposiciones 4.9, 4.10 y del lema 4.11.

Definición 4.4 ($0, 1, 2$ **y el sucesor de un ordinal**) El número *cero* se define como el conjunto vacío: $0 = \emptyset$. Es el menor ordinal. La clase funcional $\mathrm{S} : \mathrm{On} \rightarrow \mathrm{On}$ se define por

$$(\forall \alpha \in \mathrm{On})\, \mathrm{S}(\alpha) = \alpha \cup \{\alpha\}.$$

$\mathrm{S}(\alpha)$ es el ordinal que sigue inmediatamente a α en el orden de On. Se llama el ordinal *sucesor de α* o *siguiente a α*. Obsérvese que S es inyectiva. El número *uno* es el siguiente al cero y el número *dos* es el siguiente al uno: $\mathrm{S}(0) = 1$ y $\mathrm{S}(1) = 2$.

Proposición 4.13 (Burali-Forti) On *es una clase propia.*

Prueba. Si On es un conjunto entonces On $\in$ On, pero ningún ordinal se pertenece a sí mismo.

Observación 4.14 *Salvo isomorfía* $(\mathrm{On}, <)$ *es la única clase propia bien ordenada en la que todo segmento inicial propio es un conjunto.*

Definición 4.5 (Conjunto inductivo, ω, número natural) Un conjunto X es *inductivo* si $0 \in X$ y $(\forall a \in X)\, a \cup \{a\} \in X$. El axioma del infinito establece que existe un conjunto inductivo. De ello se sigue que existe un menor conjunto inductivo, es decir, un conjunto inductivo que está contenido en todos los demás conjuntos inductivos. Por definición ω es el menor conjunto inductivo. Los *números naturales* son los elementos de ω. Por tanto

$$\omega = \bigcap\{X : X \text{ es un conjunto inductivo }\} = \{n : n \text{ es un número natural }\}.$$

Proposición 4.15 *Los números naturales son ordinales y* ω *es un ordinal.*

Prueba. Sea $X = \omega \cap \mathrm{On}$. Por el lema 4.11 sabemos que $\emptyset \in X$ y que $(\forall a \in X)\, a \cup \{a\} \in X$. Por tanto X es inductivo y con ello $\omega = X \subseteq \mathrm{On}$. Para mostrar que $\omega \in \mathrm{On}$ falta ver que ω es transitivo. Para ello formamos el conjunto $X = \{n \in \omega : n \subseteq \omega\}$. Es claro que X es inductivo de manera que $X = \omega$. Ello implica que ω es transitivo.

Definición 4.6 (Ordinales límite) Un ordinal es *límite* si no es el cero ni es sucesor de otro ordinal.

Proposición 4.16 ω *es el menor ordinal límite.*

Prueba. Es fácil ver (considerando el conjunto inductivo oportuno) que todo número natural distinto de cero es sucesor de otro número natural. Por tanto ningún número natural es límite. Pero ω es límite pues en otro caso sería $\omega = n \cup \{n\}$ para algún número natural n y sin embargo $n \cup \{n\} \in \omega$ mientras que $\omega \notin \omega$.

Definición 4.7 (Sistema de Peano) Un *sistema de Peano* es una tríada (A, f, a) donde A es un conjunto, $f : A \to A$ es inyectiva, $a \in A \setminus \mathrm{rec}\, f$ y

$$(\forall X \subseteq A)(a \in A \wedge (\forall x \in X)\, f(x) \in X \to X = A).$$

Si (A, f, a) y (B, g, b) son sistemas de Peano y $h : A \to B$ es una biyección que verifica $h(a) = b$ y

$$(\forall x \in A)\, h(f(x)) = g(h(x))$$

se dice que h es un *isomorfismo* entre (A, f, a) y (B, g, b). Se dice que los sistemas de Peano (A, f, a) y (B, g, b) son *isomorfos* si existe un isomorfismo entre ellos.

Proposición 4.17 *Si* s *es la restricción de* S *a* ω*, entonces* $(\omega, \mathrm{s}, 0)$ *es un sistema de Peano.*

Prueba. Es inmediato a partir de las definiciones.

Proposición 4.18 (Inducción ordinal) *Sea X una subclase de* On*.*

1. *Si* $(\forall\alpha \in \mathrm{On})\,(\alpha \subseteq X \to \alpha \in X)$*, entonces* $X = \mathrm{On}$*.*
2. *Supóngase que* $0 \in X$*, que* $(\forall\alpha \in X)\,\mathrm{S}(\alpha) \in X$ *y que para cada* $\delta \in \mathrm{On}$ *límite,* $(\forall\eta < \delta)\,\eta \in X \to \delta \in X$*. Entonces* $X = \mathrm{On}$*.*

Prueba. Se sigue del hecho de que On está bien ordenado y de las definiciones de las nociones que aparecen.

Teorema 4.19 (Recursión ordinal) *Si X es una clase y $G : V \to X$ es una clase funcional, existe una única clase funcional $F : \mathrm{On} \to X$ tal que*

$$(\forall\alpha \in \mathrm{On})\ F(\alpha) = G(F \restriction \alpha).$$

Prueba. Se sigue del teorema de recursión para clases bien ordenadas teniendo en cuenta que para cada ordinal α, $\alpha = \{\beta \in \mathrm{On} : \beta < \alpha\}$.

Observación 4.20 *Hay una serie de variantes del teorema de recursión ordinal que se obtienen fácilmente a partir del teorema básico 4.19.*

1. *Si X es una clase y $G : \mathrm{On}\times V \to X$ es una clase funcional, existe una única clase funcional $F : \mathrm{On} \to X$ tal que*
$$(\forall\alpha \in \mathrm{On})\ F(\alpha) = G(\alpha, F \restriction \alpha).$$
2. *Si X es una clase, $a \in X$ y $G : X \to X$ y $H : \mathcal{P}(X) \to X$ son clases funcionales, entonces existe una única clase funcional $F : \mathrm{On} \to X$ tal que*
   a*)* $F(0) = a$*.*
   b*)* $F(\mathrm{S}(\alpha)) = G(F(\alpha))$ *para cada* $\alpha \in \mathrm{On}$*.*
   c*)* $F(\delta) = H(\{F(\alpha) : \alpha < \delta\}$ *para cada* $\delta \in \mathrm{On}$ *límite.*
3. *Si X es una clase, $a \in X$ y $G : \mathrm{On} \times X \to X$ y $H : \mathrm{On} \times \mathcal{P}(X) \to X$ son clases funcionales, entonces existe una única clase funcional $F : \mathrm{On} \to X$ tal que*
   a*)* $F(0) = a$*.*
   b*)* $F(\mathrm{S}(\alpha)) = G(\alpha, F(\alpha))$ *para cada* $\alpha \in \mathrm{On}$*.*
   c*)* $F(\delta) = H(\delta, \{F(\alpha) : \alpha < \delta\}$ *para cada* $\delta \in \mathrm{On}$ *límite.*
4. *Las versiones anteriores pueden enunciarse para un ordinal dado γ en vez de para* On*. Por ejemplo la versión básica para γ es la siguiente: Si X es una clase y $G : V \to X$ es una clase funcional, existe una única función $f : \gamma \to X$ tal que*
$$(\forall\alpha < \gamma)\ f(\alpha) = G(f \restriction \alpha).$$

Proposición 4.21 (Recursión natural)

1. *Si X es una clase y $G : \omega\times V \to X$ es una clase funcional, existe una única función $f : \omega \to X$ tal que*
$$(\forall n \in \omega)\ f(n) = G(n, f \restriction n).$$
2. *Si X es una clase, $a \in X$ y $G : \omega \times X \to X$ es una clase funcional, entonces existe una única función $f : \omega \to X$ tal que*

a) $f(0) = a$.

b) $f(\mathrm{S}(n)) = G(n, f(n))$ *para cada* $n \in \omega$.

Prueba. Se trata de las versiones para un ordinal dado, ω en este caso, comentadas en la observación 4.20. En el segundo punto sobra la cláusula para ordinales límite dado que no hay ordinales límite que pertenezcan a ω.

Proposición 4.22 *Todo sistema de Peano es isomorfo a* $(\omega, \mathrm{s}, 0)$.

Prueba. Sea (A, f, a) un sistema de Peano. Por el teorema de recursión natural hay una función $h : \omega \to A$ tal que $h(0) = a$ y $h(\mathrm{s}(n)) = f(h(n))$ para cada $n \in \omega$. Sólo falta ver que h es una biyección. Para mostrar que es exhaustiva basta justificar que $a \in \operatorname{rec} h$ y que $(\forall x \in \operatorname{rec} h)\, f(x) \in \operatorname{rec} h$. Lo primero es claro pues $a = h(0)$. Respecto a lo segundo, supongamos que $x \in \operatorname{rec} h$. Entonces hay $n \in \omega$ tal que $h(n) = x$ y por tanto $f(x) = f(h(n)) = h(\mathrm{s}(n))$ de modo que también $f(x) \in \operatorname{rec} h$. Para demostrar que h es inyectiva formamos el conjunto

$$X = \{n \in \omega : (\forall m \in \omega)(h(m) = h(n) \to m = n\}$$

y mostramos que $0 \in X$ y que $(\forall n \in X)\, \mathrm{s}(n) \in X$. Veamos primero que $0 \in X$. Para ello supongamos que $h(m) = h(0)$. Si $m \neq 0$, entonces existe un $n \in \omega$ tal que $\mathrm{s}(n) = m$. Pero entonces $a = h(0) = h(m) = h(\mathrm{s}(n)) = f(h(n))$ y $a \in \operatorname{rec} f$, lo cual no es posible. Por tanto $m = 0$. Supongamos por último que $n \in X$ y veamos que $\mathrm{s}(n) \in X$. Sea $h(m) = h(\mathrm{s}(n))$. Si fuera $m = 0$ tendríamos que $a = h(m) = h(\mathrm{s}(n)) = f(h(n))$, pero $a \notin \operatorname{rec} f$. Por tanto debe ser $m \neq 0$ y por ello debe haber un $k \in \omega$ tal que $\mathrm{s}(k) = m$. Entonces $h(m) = h(\mathrm{s}(k)) = f(h(k)) = f(h(n))$ y como f es inyectiva, $k = n$. En ese caso $m = \mathrm{s}(k) = \mathrm{s}(n)$.

Capítulo 5

Aritmética ordinal

Definición 5.1 (Continuidad y normalidad) Una clase funcional $F : \mathrm{On} \to \mathrm{On}$ es *continua* si para cada ordinal límite δ,

$$F(\delta) = \sup\{F(\alpha) : \alpha < \delta\}$$

y es *normal* si es continua y es estrictamente creciente. Recuérdese que si F es estrictamente creciente entonces

$$(\forall \alpha\beta \in \mathrm{On})(\alpha < \beta \leftrightarrow F(\alpha) < F(\beta))$$

y además

$$(\forall \alpha \in \mathrm{On}) F(\alpha) \geq \alpha.$$

Lema 5.1 *Sea* $F : \mathrm{On} \to \mathrm{On}$

1. *Si F es continua y $(\forall \alpha \in \mathrm{On})\, F(\alpha) < F(\mathrm{S}(\alpha))$ entonces F es normal.*
2. *Si F es normal y δ es límite, entonces $F(\delta)$ también es límite.*
3. *Si F es normal y $X \subseteq \mathrm{On}$ es un conjunto no vacío, entonces $F(\sup X) = \sup\{F(\alpha) : \alpha \in X\}$.*

Prueba. En *1* sólo falta probar que F es estrictamente creciente, es decir, que $(\forall \alpha\beta \in \mathrm{On})(\alpha < \beta \to F(\alpha) < F(\beta))$. Ello puede hacerse por inducción ordinal. Se forma la clase $X = \{\beta \in \mathrm{On} : (\forall \alpha \in \mathrm{On})(\alpha < \beta \to F(\alpha) < F(\beta))\}$ y se muestra que $0 \in X$, que $(\forall \beta \in X)\, \mathrm{S}(\beta) \in X$ y que para cada límite $\delta \in \mathrm{On}$, si $(\forall \eta < \delta)\, \eta \in X$ entonces también $\delta \in X$. Se dice que la inducción es en β pues se ha elegido β como variable para formar la clase X. En este caso es claro que $0 \in X$. Supongamos que $\beta \in X$ y que $\alpha < \mathrm{S}(\beta)$. Entonces $\alpha \leq \beta$. Si $\alpha = \beta$ tenemos por la hipótesis que $F(\alpha) = F(\beta) < F(\mathrm{S}(\beta))$. Y si $\alpha < \beta$ la hipótesis inductiva nos da $F(\alpha) < F(\beta) < F(\mathrm{S}(\beta))$. En el caso δ límite tenemos que si $\alpha < \delta$ entonces existe $\beta < \delta$ tal que $\alpha < \beta$, de modo que por hipótesis inductiva y por la hipótesis, $F(\alpha) < F(\beta) \leq \sup\{F(\eta) : \eta < \delta\} = F(\delta)$.

Respecto a *2*, sabemos que $F(\delta) = \sup\{F(\eta) : \eta < \delta\}$. Como F es estrictamente creciente, $F(\delta) \geq \delta > 0$. Por tanto sólo falta ver que $\{F(\eta) : \eta < \delta\}$ no tiene un mayor elemento. Y esto es así, pues si $\eta < \delta$ entonces también $\mathrm{S}(\eta) < \delta$ y $F(\eta) < F(\mathrm{S}(\eta))$. Probamos finalmente *3*. Si X tiene mayor elemento α entonces (como F es una inmersión) también $\{F(\eta) : \eta \in X\}$ tiene mayor elemento y éste es $F(\alpha)$. En ese caso $\alpha = \sup X$ y $F(\alpha) = \sup\{F(\eta) : \eta \in X\}$. Supongamos ahora que X no tiene mayor elemento y sea $\delta = \sup X$. Como $X \neq \emptyset$, $\delta \neq 0$ y por tanto δ es límite. Entonces $F(\delta) = \sup\{F(\eta) : \eta < \delta\}$. Es fácil comprobar que $\sup\{F(\eta : \eta < \delta\} = \sup\{F(\eta) : \eta \in X\}$.

Definición 5.2 (Suma ordinal) La *suma ordinal* es la clase funcional $+ : \mathrm{On} \times \mathrm{On} \to \mathrm{On}$ definida por recursión mediante las siguientes cláusulas:

- $\alpha + 0 = \alpha$.
- $\alpha + \mathrm{S}(\beta) = \mathrm{S}(\alpha + \beta)$.
- $\alpha + \delta = \sup\{\alpha + \gamma : \gamma < \delta\}$ si δ es límite.

El teorema de recursión ordinal proporciona para cada ordinal α una única clase funcional $\mathrm{S}_\alpha : \mathrm{On} \to \mathrm{On}$ definida por las cláusulas

- $\mathrm{S}_\alpha(0) = \alpha$.
- $\mathrm{S}_\alpha(\mathrm{S}(\beta)) = \mathrm{S}(\mathrm{S}_\alpha(\beta))$.
- $\mathrm{S}_\alpha(\delta) = \sup\{\mathrm{S}_\alpha(\gamma) : \gamma < \delta\}$ si δ es límite.

La suma entonces se obtiene por $\alpha + \beta = \mathrm{S}_\alpha(\beta)$.

Proposición 5.2 *La suma ordinal es normal en su segunda coordenada y es creciente en su primera coordenada. Por tanto,*

1. $\alpha < \beta \leftrightarrow \gamma + \alpha < \gamma + \beta$.
2. $\alpha + \beta = \alpha + \gamma \to \beta = \gamma$.
3. $\alpha \leq \beta + \alpha$.
4. $\alpha \leq \beta \to \alpha + \gamma \leq \beta + \gamma$.

Prueba. La continuidad en la segunda coordenada es por definición. La normalidad se sigue entonces del lema 5.1 pues $\alpha + \beta < \alpha + \mathrm{S}(\beta)$. Los puntos *1*, *2* y *3* se siguen del hecho de que la suma es estrictamente creciente en la segunda coordenada. En el punto *4* se enuncia que la suma es creciente en la primera coordenada. La prueba es por inducción en β.

Lema 5.3 *1.* $(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma)$.

2. $0 + \alpha = \alpha$.
3. $\alpha + 1 = \mathrm{S}(\alpha)$.
4. $\beta \leq \beta + \alpha$
5. $(\forall nm < \omega)(n + m < \omega \wedge n + m = m + n)$.
6. $(\forall n < \omega)\, n + \omega = \omega$.

Prueba. *1* se prueba fácilmente por inducción en γ, es decir se muestra por inducción que $\{\gamma \in \mathrm{On} : (\forall \alpha\beta \in \mathrm{On})\, (\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma)\} = \mathrm{On}$. Análogamente *2* y *4* se prueban por inducción en α. El punto *3* es inmediato: $\alpha + 1 = \alpha + \mathrm{S}(0) = \mathrm{S}(\alpha + 0) = \mathrm{S}(\alpha)$. Respecto a *5*, conviene primero mostrar por inducción en m que $(\forall mn < \omega)\, \mathrm{S}(n) + m = \mathrm{S}(n + m)$. Con esto y con ayuda de *2* se prueba el resultado por inducción en n. El punto *6* puede obtenerse ahora directamente: $n + \omega = \sup\{n + m : m < \omega\} = \sup \omega = \omega$.

Proposición 5.4 *Para cada* $\alpha, \beta \in \mathrm{On}$ *tales que* $\beta \geq \alpha$*, existe un único* $\gamma \in \mathrm{On}$ *tal que* $\alpha = \beta + \gamma$*.*

Prueba. La unicidad de γ se sigue de la proposición 5.2. Probamos su existencia. Sea $X = \{\eta \in \mathrm{On} : \alpha + \eta \leq \beta\}$. Si $\eta \geq \beta + 1$, entonces $\alpha + \eta \geq \eta > \beta$. Por tanto $X \subseteq \beta + 1$ y X es un conjunto. Sea $\gamma = \sup X$. Como $X \neq \emptyset$, por continuidad, $\alpha + \gamma = \sup\{\alpha + \eta : \alpha + \eta \leq \beta\} \leq \beta$. Si fuera $\alpha + \gamma < \beta$, tendríamos $\gamma + 1 \in X$, en contra de $\sup X = \gamma$. Por tanto $\alpha + \gamma = \beta$.

Proposición 5.5 $\alpha + \beta = \mathrm{Ord}((A, <_A) \oplus (B, <_B))$ *donde*

- $A = \alpha \times \{0\}$.
- $(\gamma, 0) <_A (\gamma', 0) \leftrightarrow \gamma < \gamma' < \alpha$.
- $B = \beta \times \{1\}$.
- $(\gamma, 1) <_B (\gamma', 1) \leftrightarrow \gamma < \gamma' < \beta$.

Prueba. Sea $(C, <_C) = (A, <_A) \oplus (B, <_B)$. Se define $f : C \to \alpha + \beta$ por $f(\gamma, 0) = \gamma$ y $f(\gamma, 1) = \alpha + \gamma$. Claramente es una función estrictamente creciente y, por tanto, una inmersión. De la proposición 5.4 se sigue que f es exhaustiva y, por consiguiente, que es un isomorfismo.

Lema 5.6 *1.* $\alpha + \beta = 0 \to \alpha = \beta = 0$.

2. $1 + \alpha = \alpha \leftrightarrow \alpha \geq \omega$.

3. $\alpha < \beta \leftrightarrow (\exists \gamma \in \mathrm{On})(\gamma \neq 0 \wedge \alpha + \gamma = \beta)$.

4. $\alpha \leq \beta \leftrightarrow (\exists \gamma \in \mathrm{On})\ \alpha + \gamma = \beta$.

Prueba. *1* es claro. *2*. Si $\alpha < \omega$, tenemos por el lema 5.3 que $1 + \alpha = \alpha + 1$ y, por tanto, $1 + \alpha > \alpha$. Y si $\alpha \geq \omega$, existe por la proposición 5.4 un β tal que $\alpha = \omega + \beta$. Entonces $1 + \alpha = 1 + (\omega + \beta) = (1 + \omega) + \beta = \omega + \beta = \alpha$. Los puntos *3* y *4* se siguen de la proposición 5.4 y del punto *4* de la proposición 5.3.

Definición 5.3 (Producto ordinal) El *producto ordinal* es la clase funcional $\cdot : \mathrm{On} \times \mathrm{On} \to \mathrm{On}$ definida por recursión mediante las siguientes cláusulas:

- $\alpha \cdot 0 = 0$.
- $\alpha \cdot (\beta + 1) = (\alpha + \beta) + \alpha$.
- $\alpha \cdot \delta = \sup\{\alpha \cdot \eta : \eta < \delta\}$ si δ es límite.

Lema 5.7 *1.* $\alpha \cdot 1 = 1 \cdot \alpha = \alpha$.

2. $0 \cdot \alpha = 0$.

3. $\alpha \cdot 2 = \alpha + \alpha$.

Prueba. *1* y *2* se prueban por inducción en α. Respecto a *3*: $\alpha \cdot 2 = \alpha \cdot (1 + 1) = \alpha \cdot 1 + \alpha = \alpha + \alpha$.

Proposición 5.8 *El producto es normal en su segunda coordenada si la primera es distinta de cero. Además es creciente en ambas coordenadas. Por tanto*

1. $\alpha \neq 0 \rightarrow (\beta < \gamma \leftrightarrow \alpha \cdot \beta < \alpha \cdot \gamma)$.

2. $\alpha \neq 0 \rightarrow \alpha \cdot \beta \geq \beta$.

3. $\alpha \neq 0 \wedge \alpha \cdot \beta = \alpha \cdot \gamma \rightarrow \beta = \gamma$.

4. $\alpha \leq \beta \rightarrow \alpha \cdot \gamma \leq \beta \cdot \gamma \wedge \gamma \cdot \alpha \leq \gamma \cdot \beta$.

Prueba. Sea $\alpha \neq 0$. Entonces $\alpha \cdot (\beta + 1) = \alpha \cdot \beta + \alpha > \alpha \cdot \beta$. Como el producto es continuo en la segunda coordenada, del lema 5.1 se sigue la normalidad en la segunda coordenada cuando la primera es distinta de cero. Los puntos *1*, *2* y *3* se siguen de ello. Por el lema 5.7, cuando la primera coordenada es cero, el producto en la segunda es constante cero y por tanto el producto es creciente en la segunda coordenada. Falta sólo ver que el producto es creciente en la primera coordenada, es decir, que $\alpha \leq \beta \rightarrow \alpha \cdot \gamma \leq \beta \cdot \gamma$. Ello se prueba por inducción en γ usando la proposición 5.2.

Lema 5.9 *1.* $\alpha \cdot (\beta + \gamma) = (\alpha \cdot \beta) + (\alpha \cdot \gamma)$.

2. $(\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma = \alpha \cdot (\beta \cdot \gamma)$.

3. $\alpha \cdot \beta = 0 \rightarrow \alpha = 0 \vee \beta = 0$.

4. $\alpha \cdot \beta = 1 \rightarrow \alpha = \beta = 1$.

5. $(\forall nm < \omega)(n \cdot m < \omega \wedge n \cdot m = m \cdot n)$.

6. $(\forall n < \omega)(n \neq 0 \rightarrow n \cdot \omega = \omega)$.

Prueba. *1* se prueba por inducción en γ usando la normalidad del producto en el caso γ límite. *2* se prueba por inducción en γ usando *1* y también la normalidad. *3* se demuestra probando por inducción en β que $\alpha \neq 0 \wedge \alpha \cdot \beta = 0 \rightarrow \beta = 0$. Respecto a *4*, supongamos que $\alpha \cdot \beta = 1$. Obviamente $\alpha, \beta \geq 1$. Sea $\beta = (\gamma + 1)$. Entonces $\alpha \cdot (\gamma + 1) = \alpha \cdot \gamma + \alpha = 1$ de manera que $\alpha \leq 1$ y por tanto $\alpha = 1$. Pero entonces $1 = \alpha \cdot \beta = 1 \cdot \beta = \beta$. El punto *5* se establece por inducción en m habiendo demostrado previamente por inducción en m que $(\forall nm < \omega)$ $(n+1) \cdot m = n \cdot m + m$. Por último, si $n \neq 0$ entonces $n \cdot \omega = \sup\{n \cdot m : m < \omega\} = \sup \omega = \omega$.

Proposición 5.10 (División con resto) *Para cualesquiera $\alpha, \beta \in \mathrm{On}$ con $\beta \neq 0$ existe un único par de ordinales γ, η tales que*

$$\alpha = \beta \cdot \gamma + \eta \ \text{ y } \ \eta < \beta.$$

Prueba. Sean $\alpha, \beta \in \mathrm{On}$ con $\beta \neq 0$ y sea $X = \{\xi \in \mathrm{On} : \beta \cdot \xi \leq \alpha\}$. Como $\beta \neq 0$, tenemos que $\beta \cdot (\alpha + 1) = \beta \cdot \alpha + \beta > \alpha$. Por tanto $X \subseteq \alpha + 1$ y X es un conjunto. Sea $\gamma = \sup X$. Entonces $\beta \cdot \gamma = \sup\{\beta \cdot \xi : \xi \in X\} \leq \alpha$. Por tanto hay un único η tal que $\alpha = \beta \cdot \gamma + \eta$. Si fuera $\eta \geq \beta$ existiría un ξ tal que $\eta = \beta + \xi$ con lo cual $\alpha = \beta \cdot \gamma + (\beta + \xi) = (\beta \cdot \gamma + \beta) + \xi = \beta \cdot (\gamma + 1) + \xi$ y $\gamma + 1 \in X$, lo cual no es posible. Por tanto, $\eta < \beta$. La unicidad de γ se garantiza porque si $\alpha = \beta \cdot \gamma' + \eta'$ con $\eta' < \beta$ debe ser $\gamma' = \sup X$.

Corolario 5.11 *$\alpha \in \mathrm{On}$ es límite si y sólo si existe un $\beta \in \mathrm{On}$ tal que $\beta \neq 0$ y $\alpha = \omega \cdot \beta$.*

Prueba. Sea α límite. Por la proposición 5.10 existe $\gamma < \omega$ tal que $\alpha = \omega \cdot \beta + \gamma$. Como α es límite debe ser $\gamma = 0$. Por otro lado, si $\alpha = \omega \cdot \beta$ y $\beta \neq 0$ existe un η tal que $\beta = \eta + 1$, de modo que $\alpha = \omega \cdot \eta + \omega$ es límite.

Proposición 5.12 $\alpha \cdot \beta = \mathrm{Ord}((\alpha, \in_\alpha) \otimes (\beta, \in_\beta))$.

Prueba. Se define $f : \alpha \times \beta \to \alpha \cdot \beta$ por $f(\eta, \gamma) = \alpha \cdot \gamma + \eta$. La proposición 5.10 implica que f es exhaustiva. Se puede verificar fácilmente que f es estrictamente creciente y por ello que es un isomorfismo.

Definición 5.4 (Exponenciación ordinal) La *exponenciación ordinal* es la clase funcional $\exp : \mathrm{On} \times \mathrm{On} \to \mathrm{On}$ definida por recursión mediante las siguientes cláusulas:

- $\alpha^0 = 0$.
- $\alpha^{\beta+1} = (\alpha^\beta) \cdot \alpha$.
- $\alpha^\delta = \sup\{\alpha^\eta : \eta < \delta\}$ si δ es límite.

donde $\alpha^\beta = \exp(\alpha, \beta)$.

Lema 5.13 *1.* $\alpha > 0 \to 0^\alpha = 0$.

2. $1^\alpha = 1$.

3. $\alpha^1 = \alpha$.

4. $\alpha^2 = \alpha \cdot \alpha$.

5. $\alpha^\beta = 0 \to \alpha = 0 \wedge \beta > 0$.

6. $\alpha^\beta = 1 \to \beta = 0 \vee \alpha = 1$.

7. $(\forall nm < \omega)\ n^m < \omega$.

Prueba. Si $\alpha \neq 0$ entonces existe un $\beta \in \mathrm{On}$ tal que $\alpha = \beta + 1$, con lo cual $0^\alpha = 0^{\beta+1} = 0^\beta \cdot \beta = 0$. Esto justifica el punto *1*. El punto *2* se prueba por inducción en α. Los puntos *3*, *4* y *6* se verifican fácilmente aplicando la definición de exponenciación. El condicional $\alpha^\beta = 0 \to \alpha = 0$ del punto *5* se prueba por inducción en β. Finalmente, el punto *7* se prueba por inducción en m.

Proposición 5.14 *La exponenciación es normal en la segunda coordenada cuando la primera es* > 1. *Además es creciente en la primera coordenada. Por tanto*

1. $\alpha > 1 \to (\beta < \gamma \leftrightarrow \alpha^\beta < \alpha^\gamma)$.

2. $\alpha > 1 \to \alpha^\beta \geq \beta$.

3. $\alpha > 1 \wedge \alpha^\beta = \alpha^\gamma \to \beta = \gamma$.

4. $\beta \leq \gamma \to \beta^\alpha \leq \gamma^\alpha$.

Prueba. Para la primera afirmación hay que justificar que $\alpha > 1 \to \alpha^{\beta+1} > \alpha^\beta$. Sea $\alpha > 1$. Tenemos que ver que $\alpha^\beta \cdot \alpha > \alpha^\beta$. En general, si $\gamma > 1$ y $\eta \geq 1$ entonces $\eta \cdot \gamma > \eta$ (la verificación de esto es sencilla). Por tanto basta con que veamos que $\alpha^\beta \geq 1$. Pero ya hemos mostrado que si $\alpha^\beta = 0$, entonces $\alpha = 0$. Los puntos *1*, *2* y *3* se siguen de la normalidad. El punto *4* se prueba por inducción en γ.

Lema 5.15 *1.* $\beta \neq 0 \rightarrow \alpha^\beta \geq \alpha$.

2. $\alpha \neq 0 \wedge \beta \leq \gamma \rightarrow \alpha^\beta \leq \alpha^\gamma$.

3. $\alpha^{(\beta+\gamma)} = \alpha^\beta + \alpha^\gamma$.

4. $(\alpha^\beta)^\gamma = \alpha^{\beta \cdot \gamma}$.

Prueba. El punto *1* es claro si $\alpha = 0$. Y si $\alpha \neq 0$ entonces $\alpha^\gamma \cdot \alpha \geq \alpha$, pues el producto es estrictamente creciente en la segunda coordenada cuando la primera es no nula y aquí $\alpha^\gamma \neq 0$ ya que $\alpha \neq 0$. Esto establece *1* también en el caso $\alpha \neq 0$. El punto *2* ya está establecido si $\alpha > 1$. Pero el caso $\alpha = 1$ es trivial pues $\alpha^\beta = 1 = \alpha^\gamma$. Los puntos *3* y *4* se prueban por inducción en γ.

Capítulo 6

Forma normal de Cantor

Proposición 6.1 *Sea $\alpha > 1$. Para cada ordinal $\gamma \geq 1$ existe una única tríada de ordinales β, η, ξ tales que $\gamma = \alpha^\beta \cdot \eta + \xi$, $0 < \eta < \alpha$ y $\xi < \alpha^\beta$.*

Prueba. Como $\alpha > 1$, $\alpha^{\gamma+2} = \alpha^{\gamma+1} \cdot \alpha \geq (\gamma+1) \cdot \alpha \geq \gamma+1 > \gamma$. Por tanto $X = \{\rho \in \mathrm{On} : \alpha^\rho \geq \gamma\}$ es un conjunto. Sea β su supremo. Si $\gamma = \alpha^{\beta'} \cdot \eta + \xi$ con $0 < \eta < \alpha$ y $\xi < \alpha^{\beta'}$ entonces debe ser $\beta' = \sup X = \beta$. La razón es que tenemos por un lado que $\alpha^{\beta'} \leq \gamma$ y por otro lado que $\alpha^{\beta'+1} = \alpha^{\beta'} \cdot \alpha \geq \alpha^{\beta'} \cdot (\eta + 1) = \alpha^{\beta'} \cdot \eta + \alpha^{\beta'} > \alpha^{\beta'} \cdot \eta + \xi = \gamma$ y por tanto que $\beta' + 1 \notin X$. Esto prueba la unicidad de β. La existencia y unicidad de η y ξ con $\gamma = \alpha^\beta \cdot \eta + \xi$ y $\xi < \alpha^\beta$ se sigue de la existencia y unicidad de la división con resto. El hecho adicional de que $0 < \eta < \alpha$ se sigue de que $\alpha^\beta \leq \gamma < \alpha^{\beta+1}$.

Proposición 6.2 *Sea $\alpha > 1$. Para cada ordinal $\gamma \geq 1$ existe un número $k < \omega$ y secuencias finitas de ordinales $\beta_0, \ldots, \beta_k$ y $\eta_0, \ldots, \eta_k$ tales que*

$$\gamma = \alpha^{\beta_0} \cdot \eta_0 + \cdots + \alpha^{\beta_k} \cdot \eta_k$$

y $\beta_0 > \cdots > \beta_k$ y $0 < \eta_i < \alpha$ para cada $i = 0, \ldots, k$. El número k y estas secuencias de ordinales están unívocamente determinadas por α y γ.

Prueba. Supongamos que tenemos una tal expresión para cada ordinal menor que γ y veamos que también podemos obtener una para γ. Por la proposición 6.1 existen β, η y ξ tales que $\gamma = \alpha^\beta \cdot \eta + \xi$ con $0 < \eta < \alpha$ y $\xi < \alpha^\beta$. Si $\xi = 0$ ya tenemos la expresión para γ. Sea pues $\xi \geq 1$. Como $\xi < \gamma$, por hipótesis hay $k < \omega$ y secuencias finitas de ordinales $\beta_0, \ldots, \beta_k$ y $\eta_0, \ldots, \eta_k$ tales que $\xi = \alpha^{\beta_0} \cdot \eta_0 + \cdots + \alpha^{\beta_k} \cdot \eta_k$ y $\beta_0 > \cdots > \beta_k$ y $0 < \eta_i < \alpha$ para cada $i = 0, \ldots, k$. Como $\xi < \alpha^\beta$ debe ser $\beta > \beta_0$. Entonces $\gamma = \alpha^\beta \cdot \eta + \alpha^{\beta_0} \cdot \eta_0 + \cdots + \alpha^{\beta_k} \cdot \eta_k$ es la expresión buscada para γ. La unicidad de estas expresiones se sigue de la condición de unicidad de la proposición 6.1

Definición 6.1 (Punto crítico) Se dice que $\alpha \in \mathrm{On}$ es un *punto crítico* de $F : \mathrm{On} \times \mathrm{On} \to \mathrm{On}$ si $(\forall \beta\gamma < \alpha)\ F(\beta, \gamma) < \alpha$.

Proposición 6.3 *1. Las siguientes condiciones son equivalentes.*

a*)* *α es un punto crítico de la suma ordinal.*

b*)* *$(\forall \gamma < \alpha)\ \gamma + \alpha = \alpha$.*

c) $\alpha = 0$ *o bien* $\alpha = \omega^\beta$ *para algún ordinal* β.

2. Las siguientes condiciones son equivalentes.

a) α *es un punto crítico del producto ordinal.*

b) $(\forall\gamma < \alpha)(\gamma \neq 0 \to \gamma \cdot \alpha = \alpha)$.

c) $\alpha \leq 2$ *o bien* $\alpha = \omega^{\omega^\beta}$ *para algún ordinal* β.

Prueba. Comenzamos con *1. (a)* $\Rightarrow$ *(c)*. Sea $\alpha > 0$. Por la proposición 6.1 existen $\gamma < \omega^\beta$ y $n < \omega$ tales que $0 \neq n$ y $\alpha = \omega^\beta \cdot n + \gamma$. Si fuera $\gamma \neq 0$ tendríamos que $\omega^\beta \cdot n < \alpha$ y por *(a)* $\omega^\beta \cdot n + \gamma < \alpha$. Así pues, $\gamma = 0$ y $\alpha = \omega^\beta \cdot n$. Como $n \neq 0$, para algún $m < \omega$, $n = m+1$. Entonces $\alpha = \omega^\beta \cdot m + \omega^\beta$. Obviamente $\alpha > \omega^\beta \cdot m$, pues $\omega^\beta \neq 0$. Si fuera $m = 0$ tendríamos el resultado buscado: $\alpha = \omega^\beta$. Y si $m \neq 0$ resulta que $\alpha > \omega^\beta \cdot m \geq \omega^\beta$ con lo cual, por *(a)*, $\omega^\beta \cdot m + \omega^\beta < \alpha$. Mostramos ahora *(c)* $\Rightarrow$ *(b)*. El caso $\alpha = 0$ es claro. Sea $\alpha = \omega^\beta$. Veremos que $(\forall\gamma < \alpha)\ \gamma + \alpha \leq \alpha$, de lo cual ya se sigue que $(\forall\gamma < \alpha)\ \gamma + \alpha = \alpha$. Efectuamos una inducción en β. En el caso $\beta = 0$ se tiene $\alpha = 1$ y el resultado es inmediato. En el caso $\beta + 1$ tenemos $\alpha = \omega^{\beta+1} = \omega^\beta \cdot \omega = \sup\{\omega^\beta \cdot n : n < \omega\}$ de manera que hay $n < \omega$ tal que $\gamma < \omega^\beta \cdot n$. Entonces $\gamma + \omega^\beta \cdot \omega \leq \omega^\beta \cdot n + \omega^\beta \cdot \omega = \omega^\beta \cdot (n+\omega) = \omega^\beta \cdot \omega$. Por último, si β es límite resulta que $\gamma < \omega^\eta$ para algún $\eta < \beta$ y entonces, usando la hipótesis inductiva, $\gamma + \omega^\beta \leq \sup\{\gamma + \omega^\xi : \xi < \beta\} = \sup\{\omega^\xi : \xi < \beta\} = \omega^\beta$. Mostramos finalmente que *(b)* $\Rightarrow$ *(a)*. Sean $\gamma, \beta < \alpha$ y veamos que $\gamma + \beta < \alpha$. Esto es claro dado que $\gamma + \beta < \gamma + (\beta + 1) \leq \gamma + \alpha$ y por la hipótesis *(b)* $\gamma + \alpha = \alpha$.

Mostramos a continuación *2. (a)* $\Rightarrow$ *(c)*. Sea $\alpha > 2$. Entonces α es también un punto crítico de la suma y, por *1*, hay β tal que $\alpha = \omega^\beta$. Pero β debe ser entonces un punto crítico de la suma y por *1* se obtiene el resultado. *(c)* $\Rightarrow$ *(b)*. El caso $\alpha \leq 2$ es claro. Por otro lado una inducción en β muestra que $(\forall\gamma < \omega^{\omega^\beta})\ \gamma \cdot \omega^{\omega^\beta} \leq \omega^{\omega^\beta}$. En el caso $\beta = 0$ tenemos $\omega^{\omega^\beta} = \omega$ y el resultado ya es conocido. Consideremos el caso $\beta + 1$. Sea $\gamma < \omega^{\omega^{\beta+1}}$. Como $\omega^{\omega^{\beta+1}} = \omega^{\omega^\beta \cdot \omega} = (\omega^{\omega^\beta})^\omega = \sup\{(\omega^{\omega^\beta})^n : n < \omega\}$, existe un $n < \omega$ tal que $\gamma < (\omega^{\omega^\beta})^n$. Entonces $\gamma \cdot \omega^{\omega^{\beta+1}} \leq (\omega^{\omega^\beta})^n \cdot \omega^{\omega^{\beta+1}} = (\omega^{\omega^\beta})^{n+\omega} = (\omega^{\omega^\beta})^\omega = \omega^{\omega^{\beta+1}}$. En el caso β límite se usa la hipótesis inductiva para obtener el mismo resultado. *(b)* $\to$ *(a)*. Sean $\gamma, \beta < \alpha$ y supongamos que α verifica *(b)*. Si $\beta = 0$ entonces $\beta \cdot \gamma = \beta < \alpha$. Y si $\beta \neq 0$, entonces $\beta \cdot \gamma < \beta \cdot (\gamma + 1) \leq \beta \cdot \alpha$ y por *(b)* $\beta \cdot \alpha = \alpha$.

Definición 6.2 (Forma normal de Cantor) Aplicando la proposición 6.1 al caso $\alpha = \omega$ vemos que para cada ordinal γ existe un único $k < \omega$, una única secuencia de ordinales $\beta_0 > \cdots > \beta_k$, y una única secuencia de números naturales no nulos $n_0, \ldots, n_k$ tales que

$$\gamma = \omega^{\beta_0} \cdot n_0 + \cdots + \omega^{\beta_k} \cdot n_k.$$

Esta expresión se llama la *forma normal de Cantor* de γ. Para manejar mejor las formas normales de Cantor es conveniente introducir la notación $\sum_{\alpha \in \mathrm{On}} F(\alpha)$. Sea $F : \mathrm{On} \to \mathrm{On}$ una clase funcional que sólo tiene un número finito de argumentos con valores no nulos. Si $\alpha_1 > \cdots > \alpha_n$ son estos argumentos definimos

$$\sum_{\alpha \in \mathrm{On}} F(\alpha) = F(\alpha_1) + \cdots + F(\alpha_n).$$

Se entiende que la suma es 0 si F es siempre nula. Si $F = (\gamma_\alpha : \alpha \in \mathrm{On})$ escribimos $\sum_{\alpha \in \mathrm{On}} \gamma_\alpha$. La forma normal de Cantor puede obtenerse ahora siempre en la forma

$$\gamma = \sum_{\alpha \in \mathrm{On}} \omega^\alpha \cdot n_\alpha$$

donde $(n_\alpha : \alpha \in \mathrm{On})$ es una secuencia (en realidad una clase propia) de números naturales que son siempre nulos excepto en un número finito de casos. La secuencia $(n_\alpha : \alpha \in \mathrm{On})$ está unívocamente determinada por γ y existe también para el caso $\gamma = 0$. A menudo omitimos el índice $\alpha \in \mathrm{On}$ y escribimos simplemente $\sum_\alpha \omega^\alpha \cdot n_\alpha$.

Proposición 6.4 Sean $\sum_\alpha \omega^\alpha \cdot n_\alpha$ y $\sum_\alpha \omega^\alpha \cdot m_\alpha$ dos ordinales en forma normal de Cantor. Entonces $\sum_\alpha \omega^\alpha \cdot n_\alpha < \sum_\alpha \omega^\alpha \cdot m_\alpha$ si y sólo si existe un α tal que $n_\eta = m_\eta$ para cada $\eta > \alpha$ y $n_\alpha < m_\alpha$.

Prueba. Supongamos que $\sum_\alpha \omega^\alpha \cdot n_\alpha$ y $\sum_\alpha \omega^\alpha \cdot m_\alpha$ son ordinales distintos. Existe un máximo α con $n_\alpha \neq m_\alpha$. Así

$$\sum_\beta \omega^\beta \cdot n_\beta < \sum_\beta \omega^\beta \cdot m_\beta \leftrightarrow \sum_{\beta \le \alpha} n_\beta < \sum_{\beta \le \alpha} m_\beta.$$

Y si $n_\alpha < m_\alpha$ entonces $\sum_{\beta \le \alpha} \omega^\beta \cdot n_\beta = \omega^\alpha \cdot n_\alpha + \sum_{\beta < \alpha} \omega^\beta \cdot n_\beta < \omega^\alpha \cdot n_\alpha + \omega^\alpha = \omega^\alpha \cdot (n_\alpha + 1) \le \omega^\alpha \cdot m_\alpha \le \sum_{\beta \le \alpha} \omega^\beta \cdot m_\beta$.

Definición 6.3 (Suma natural de ordinales) Sean $\sum_\alpha \omega^\alpha \cdot n_\alpha$ y $\sum_\alpha \omega^\alpha \cdot m_\alpha$ dos ordinales en forma normal de Cantor. Su *suma natural* es por definición el ordinal

$$\sum_\alpha \omega^\alpha \cdot n_\alpha \;\#\; \sum_\alpha \omega^\alpha \cdot m_\alpha = \sum_\alpha \omega^\alpha \cdot (n_\alpha + m_\alpha).$$

Es claro que se trata de una operación asociativa y conmutativa.

Proposición 6.5 $(\forall \alpha\beta \in \mathrm{On})\ \alpha + \beta \le \alpha \# \beta$.

Prueba. Sea $\alpha = \sum_\eta \omega^\eta \cdot n_\eta$ y sea $\beta = \sum_\eta \omega^\eta \cdot m_\eta$ y sea γ el mayor ordinal tal que $m_\gamma \neq 0$. Si no hay tal γ entonces $\beta = 0$ y $\alpha + \beta = \alpha \# \beta$. Y si lo hay,

$$\sum_\eta \omega^\eta \cdot n_\eta + \sum_\eta \omega^\eta \cdot m_\eta = \sum_{\eta \ge \gamma} \omega^\eta \cdot n_\eta + \sum_{\eta < \gamma} \omega^\eta \cdot n_\eta + \sum_{\eta \le \gamma} \omega^\eta \cdot m_\eta = \sum_{\eta \ge \gamma} \omega^\eta \cdot n_\eta + \sum_{\eta \le \gamma} \omega^\eta \cdot m_\eta$$

$$\le \sum_{\eta > \gamma} \omega^\eta \cdot n_\eta + \omega^\gamma \cdot (n_\gamma + m_\gamma) + \sum_{\eta < \gamma} \omega^\eta \cdot m_\eta \le \sum_\eta \omega^\eta \cdot (n_\eta + m_\eta) = \alpha \# \beta.$$

Proposición 6.6 *La suma natural de números ordinales es la menor operación* $\# : \mathrm{On} \times \mathrm{On} \to \mathrm{On}$ *que es estrictamente creciente en las dos coordenadas. Menor significa aquí que para cualquier otra tal operación* F, $(\forall \alpha\beta \in \mathrm{On})\ \alpha \# \beta \le F(\alpha, \beta)$.

Prueba. El uso de la forma normal de Cantor y una aplicación de la proposición 6.4 muestra que la suma natural es estrictamente creciente en ambas coordenadas. Sea ahora $F : \mathrm{On} \times \mathrm{On} \to \mathrm{On}$ estrictamente creciente en ambas coordenadas. Por inducción en γ es fácil ver que $F(\alpha, \beta + \gamma) \ge \gamma$ y que $F(\alpha + \gamma, \beta) \ge \gamma$. Sean ahora $\alpha = \sum_\eta \omega^\eta \cdot n_\eta$ y $\beta = \sum_\eta \omega^\eta \cdot m_\eta$. Aplicando estos criterios de cotas inferiores de F vemos que para cada γ, $F(\sum_\eta \omega^\eta \cdot n_\eta, \sum_\eta \omega^\eta \cdot m_\eta) \ge \sum_{\eta \le \gamma} \omega^\eta \cdot (n_\eta + m_\eta)$. De ahí el resultado.

Definición 6.4 (Punto fijo) $\alpha \in \mathrm{On}$ es un punto fijo de $F : \mathrm{On} \to \mathrm{On}$ si $F(\alpha) = \alpha$.

Proposición 6.7 *Si* $F : \mathrm{On} \to \mathrm{On}$ *es normal, entonces para cada* $\alpha \in \mathrm{On}$ *existen puntos fijos de* F *que son mayores que* α.

Prueba. Definimos $f : \omega \to \mathrm{On}$ mediante $f(0) = \alpha$ y $f(n+1) = F(f(n))$. Sea $\beta = \sup\{f(n) : n < \omega\}$. Entonces $F(\beta) = \sup\{F(f(n)) : n < \omega\} = \sup\{f(n+1) : n < \omega\} = \beta$.

Definición 6.5 (Número epsilon) Un *número epsilon* es un punto fijo de $\alpha \mapsto \omega^\alpha$. Como esta operación es normal, existen números epsilon arbitrariamente grandes. El menor número epsilon se designa con ε_0.

Proposición 6.8 *ε_0 es el menor ordinal que no es expresable mediante sumas, productos y exponenciación de ω y números naturales.*

Prueba. Considérese la función $f : \omega \to \mathrm{On}$ definida por $f(0) = \omega$ y $f(n+1) = \omega^{f(n)}$. Sea $\beta = \sup\{f(n) : n < \omega\}$. Si $\alpha < f(0)$ obviamente $\omega^\alpha > \alpha$. Y si $f(n) < \alpha < f(n+1)$ entonces $\omega^\alpha > \omega^{f(n)} = f(n+1) > \alpha$. Por tanto no hay números epsilon menores que β. Sin embargo β mismo es un número epsilon pues $\omega^\beta = \sup\{\omega^{f(n)} : n < \omega\} = \sup\{f(n+1) : n < \omega\} = \beta$. Por tanto $\beta = \varepsilon_0$. De la proposición 6.3 se sigue que ε_0 es un punto crítico de la suma y el producto. Pero también es un punto crítico de la exponenciación, pues si $\alpha, \beta < \varepsilon_0$ existen $n, m < \omega$ tales que $\alpha < f(n)$ y $\beta < f(m)$ y entonces $\alpha^\beta < f(n)^{f(m)} \leq f(n+1)^{f(m)} = (\omega^{f(n)})^{f(m)} = \omega^{f(n) \cdot f(m)}$ y como hay $k < \omega$ tal que $f(n) \cdot f(m) < f(k)$ se concluye que $\alpha^\beta < \omega^{f(k)} = f(k+1) < \varepsilon_0$. Por tanto cualquier número expresable mediante sumas, productos y exponenciaciones de ordinales menores que ε_0 es menor que ε_0. Finalmente mostramos que todo ordinal menor que ε_0 es expresable mediante sumas, productos y exponenciaciones de ω y números naturales. Sea $\alpha < \varepsilon_0$ y supongamos inductivamente que todo ordinal menor que α tiene una tal expresión. Podemos suponer que $\alpha \geq 1$. Por la proposición 6.1 hay $\beta, \gamma \in \mathrm{On}$ y $n < \omega$ tales que $\alpha = \omega^\beta \cdot n + \gamma$, $n > 0$ y $\gamma < \omega^\beta$. Entonces, como $\beta < \varepsilon_0$, $\beta < \omega^\beta$. Así $\beta, \gamma < \alpha$ y tanto β como γ tienen una tal expresión. Obviamente también n la tiene. Sustituyendo se obtiene entonces una expresión de α del tipo indicado.

Capítulo 7

Cardinales

En este y en los posteriores capítulos se trabajará en ZFC, es decir, con el axioma de elección. Bajo esa hipótesis todo conjunto es bien ordenable y por ello biyectable con un ordinal. Usamos la notación $X \sim Y$ para indicar que los conjuntos X, Y son biyectables.

Definición 7.1 (Cardinalidad, número cardinal) La *cardinalidad* de un conjunto X es el menor ordinal α tal que $X \sim \alpha$. La cardinalidad de X se denota con $|X|$. Es obvio entonces que $X \sim Y$ si y sólo si $|X| = |Y|$. Los *números cardinales* son los ordinales de la forma $|X|$. Por tanto un ordinal es un cardinal si y sólo si no es biyectable con ningún ordinal menor. Usamos $\kappa, \lambda, \mu, \nu$ como variables de números cardinales.

Observación 7.1 *Para cada* $\alpha \in \mathrm{On}$, $|\alpha| \leq \alpha$.

Lema 7.2 *Si* $\alpha \in \mathrm{On}$ *y* $A \subseteq \alpha$, *entonces* $\mathrm{Ord}(A, \in_A) \leq \alpha$.

Prueba. Sea $\beta = \mathrm{Ord}(A, \in_A)$ y sea $f : \beta \to A$ un isomorfismo entre $(\beta, \in_\beta)$ y $(A, \in_A)$. Como f es estrictamente creciente. $(\forall \gamma < \beta)\ \gamma \leq f(\gamma) < \alpha$. De aquí que $\beta \subseteq \alpha$ y por tanto $\beta \leq \alpha$.

Proposición 7.3 *Las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. $|X| \leq |Y|$.
2. *Existe una función* $f : X \to Y$ *inyectiva.*
3. $X = \emptyset$ *o existe una función* $f : Y \to X$ *exhaustiva.*

Prueba. *1* $\Rightarrow$ *2* es claro pues $X \sim |X| \subseteq |Y| \sim Y$. Mostramos ahora *2* $\Rightarrow$ *1*. Supongamos que existe una función $f : X \to Y$ inyectiva. Como $Y \sim |Y|$, también existe $g : X \to |Y|$ inyectiva. Sea $A = \mathrm{rec}\, g$ y sea $\alpha = \mathrm{Ord}(A, \in_A)$. Entonces $X \sim A \sim \alpha$ y por el lema 7.2 $\alpha \leq |Y|$. Esto implica $|X| \leq |Y|$. Mostramos a continuación *2* $\Rightarrow$ *3*. Sea $f : X \to Y$ inyectiva. Supuesto que $X \neq \emptyset$, escojamos $a \in X$. Se define entonces $g : Y \to X$ por $g(x) = f^{-1}(x)$ si $x \in \mathrm{rec}\, f$ y $g(x) = a$ si $x \in Y \setminus \mathrm{rec}\, f$. Obviamente g es exhaustiva. Mostramos por último *3* $\Rightarrow$ *2*. Si $X = \emptyset$ es obvio que existe una función inyectiva de X en Y. Supongamos ahora que hay $f : Y \to X$ exhaustiva. Sea h una función de elección para $\mathcal{P}(Y) \setminus \{\emptyset\}$. Se define entonces $g : X \to Y$ por $g(x) = h(\{y \in Y : f(y) = x\})$. Es fácil verificar que g es inyectiva.

Lema 7.4 *Ningún número natural es biyectable con un subconjunto propio suyo.*

Prueba. Se demuestra por inducción natural. Para 0 es claro pues 0 no tiene subconjuntos propios. Consideremos el caso $n+1$. Supongamos que f es una biyección entre $n+1$ y un subconjunto propio X de $n+1$. En caso $n \notin \operatorname{rec} f$ resulta que $f \restriction n$ es una biyección entre n y un subconjunto propio de n, en contra de la hipótesis inductiva. Supongamos pues que $n \in \operatorname{rec} f$. Si fuera $f(n) = n$, entonces de nuevo $f \restriction n$ sería una biyección entre n y un subconjunto propio de n. Y si $f(n) \neq n$, entonces $f' = (f \setminus \{(n, f(n)), (f^{-1}(n), n))\}) \cup \{(n, n), (f^{-1}(n), f(n))\}$ es una biyección entre $n+1$ y un subconjunto propio suyo con $f'(n) = n$, de modo que se aplica lo anterior.

Proposición 7.5 *Los números naturales son números cardinales. También ω es un cardinal.*

Prueba. Del lema anterior se sigue que ningún número natural es biyectable con otro natural menor. Por tanto los números naturales son cardinales. Si ω no fuera un cardinal entonces para un $n \in \omega$ tendríamos $|\omega| = n$. Pero entonces, como $n+1 \subseteq \omega$ y $\omega \sim n$, existe una función inyectiva de $n+1$ en n, con lo cual $n+1 = |n+1| \leq |n| = n$.

Definición 7.2 (Conjuntos finitos, conjuntos infinitos y conjuntos numerables) Un conjunto es *finito* si su cardinalidad es un número natural y es *infinito* en otro caso. Por tanto, los cardinales finitos son los números naturales. Un conjunto es *numerable* si su cardinalidad es menor o igual que ω. Los cardinales numerables son ω y los números naturales.

Proposición 7.6 *Un conjunto es infinito si y sólo si es biyectable con un subconjunto propio.*

Prueba. Por el lema 7.4 ya sabemos que los conjuntos finitos no son biyectables con subconjuntos propios. Por otro lado es claro que ω sí tiene esa propiedad, pues, por ejemplo, $\omega \sim \omega \setminus \{0\}$. Si κ es un cardinal infinito resulta que $\omega \subseteq \kappa$ y por tanto también podemos obtener una biyección entre κ y un subconjunto propio de κ: basta combinar una biyección entre ω y $\omega \setminus \{0\}$ con la identidad en $\kappa \setminus \omega$. Por tanto todo conjunto infinito es biyectable con un subconjunto propio.

Teorema 7.7 (Cantor) *Para cada conjunto X, $|X| < |\mathcal{P}(X)|$.*

Prueba. Es claro que $|X| \leq |\mathcal{P}(X)|$. Supongamos que $|X| = |\mathcal{P}(X)|$. Sea f una función biyectiva de X en $\mathcal{P}(X)$. Sea $A = \{x \in X : x \notin f(x)\}$ y sea $a \in X$ tal que $f(a) = A$. Entonces $a \in f(a) \leftrightarrow a \notin f(a)$.

Proposición 7.8 *1. No hay un mayor número cardinal.*

2. El supremo de un conjunto de números cardinales es un número cardinal.

Prueba. El punto *1* se sigue del teorema 7.7. Sea X un conjunto de cardinales y sea $\alpha = \sup X$. Si X tiene mayor elemento, este mayor elemento es α y por tanto α es un cardinal. Supongamos que X no tiene mayor elemento y que α es biyectable con un ordinal $\beta < \alpha$. Sea f una tal biyección. Existe un $\kappa \in X$ tal que $\beta < \kappa$. Entonces, como $\kappa \subseteq \alpha$, $|\kappa| = |f[\kappa]| \leq |\beta| \leq \beta < \kappa$, de manera que κ no puede ser un cardinal.

Corolario 7.9 *La clase de los números cardinales es una clase propia.*

Prueba. Si fuera un conjunto tendría un supremo, que sería un cardinal. Este supremo tendría un cardinal sucesor, que ya no podría formar parte del conjunto al ser mayor que el supremo.

Definición 7.3 (Cardinales sucesores y cardinales límites) Si κ es un número cardinal, existe un menor número cardinal que es mayor que κ. Se llama el *cardinal sucesor de* κ y se designa con κ^+. No debe confundirse con $\kappa + 1$, el ordinal sucesor de κ. Sólo se da el caso $\kappa + 1 = \kappa^+$ cuando κ es un número natural. Los cardinales de la forma κ^+ se llaman *cardinales sucesores*. Un cardinal distinto de cero que no es un cardinal sucesor se llama *cardinal límite*. Por tanto un cardinal λ es límite si

$$\lambda \neq 0 \wedge (\forall \kappa < \lambda)\, \kappa^+ < \lambda.$$

Todo cardinal infinito es un ordinal límite pero no necesariamente un cardinal límite.

Definición 7.4 (La función aleph) La función *aleph* asigna a cada ordinal α un cardinal $\aleph_\alpha$ y se define por inducción con las siguientes cláusulas:

- $\aleph_0 = \omega$.
- $\aleph_{\alpha+1} = \aleph_\alpha^+$.
- $\aleph_\delta = \sup\{\aleph_\alpha : \alpha < \delta\}$ si δ es límite.

Una notación alternativa es $\omega_\alpha = \aleph_\alpha$. De hecho ω_α se definió originalmente de modo distinto, como el ordinal del conjunto bien ordenado formado por todos los ordinales de cardinalidad menor que $\aleph_\alpha$. Pero este conjunto es simplemente $\aleph_\alpha$ y por tanto su ordinal vuelve a ser $\aleph_\alpha$.

Proposición 7.10 $\aleph$ *es un isomorfismo entre la clase de los ordinales y la clase de los cardinales infinitos.*

Prueba. Es claro que $\aleph$ es normal. Sólo falta ver que todo cardinal infinito es de la forma $\aleph_\alpha$ para algún ordinal α. Supongamos que esto no es así y que κ es el menor cardinal infinito que no es un valor de $\aleph$. Obviamente $\kappa \neq \omega$ y κ no puede ser un cardinal sucesor. Entonces κ es un cardinal límite. Sea X la clase de los ordinales α tales que $\aleph_\alpha \leq \kappa$. Como $\kappa + 1 \notin X$, X es un conjunto. Sea δ su supremo. Entonces $\aleph_\delta = \sup\{\aleph_\alpha : \alpha < \delta\} = \kappa$.

Definición 7.5 (Suma, producto y exponenciación cardinal) No vamos a introducir una notación para las operaciones aritméticas cardinales que sea distinta de la usada para las operaciones aritméticas ordinales, aunque las nociones son bien distintas. El contexto debe clarificar de qué operación estamos hablando. La suma cardinal se define por

$$\kappa + \lambda = \mu \leftrightarrow \exists AB(\kappa = |A| \wedge \lambda = |B| \wedge A \cap B = \emptyset \wedge \mu = |A \cup B|).$$

El producto cardinal se define por

$$\kappa \cdot \lambda = \mu \leftrightarrow \exists AB(\kappa = |A| \wedge \lambda = |B| \wedge \mu = |A \times B|).$$

La exponenciación cardinal se define por

$$\kappa^\lambda = \mu \leftrightarrow \exists AB(\kappa = |B| \wedge \lambda = |A| \wedge \mu = |{}^AB|)$$

donde ${}^AB$ es el conjunto formado por todas las funciones $f : A \to B$.

Observaciones 7.11 *1.* $\kappa + \lambda = \lambda + \kappa$

2. $\kappa + (\lambda + \mu) = (\kappa + \lambda) + \mu$

3. $\kappa \cdot \lambda = \lambda \cdot \kappa$

4. $\kappa \cdot (\lambda \cdot \mu) = (\kappa \cdot \lambda) \cdot \mu$

5. $\kappa \cdot (\lambda + \mu) = (\kappa \cdot \lambda) + (\kappa \cdot \mu)$

6. $\kappa^\lambda \cdot \kappa^\mu = \kappa^{\lambda+\mu}$

7. $(\kappa \cdot \lambda)^\mu = \kappa^\mu \cdot \lambda^\mu$

8. $(\kappa^\lambda)^\mu = \kappa^{\lambda \cdot \mu}$

Observaciones 7.12 *1.* $\kappa \leq \kappa' \wedge \lambda \leq \lambda' \to \kappa + \lambda \leq \kappa' + \lambda'$.

2. $\kappa \leq \kappa' \wedge \lambda \leq \lambda' \to \kappa \cdot \lambda \leq \kappa' \cdot \lambda'$.

3. $\kappa \leq \kappa' \wedge \lambda \leq \lambda' \to \kappa^\lambda \leq \kappa'^{\lambda'}$.

Proposición 7.13 *Para cada cardinal infinito κ, $\kappa \cdot \kappa = \kappa$.*

Prueba. Utilizamos el lema de Zorn. Sea A un conjunto infinito. Mostraremos que $A \times A \sim A$. Para ello consideramos todos los pares de la forma (B, f) donde B es un subconjunto infinito de A y f es una biyección entre $B \times B$ y B. Los ordenamos estipulando que $(B, f) \leq (C, g)$ si $B \subseteq C$ y $f \subseteq g$. Al menos tenemos un par (B, f) en esta colección pues A tiene un subconjunto B de cardinal ω y es obvio que $\omega \cdot \omega = \omega$. Es fácil ver que toda cadena tiene una cota superior: basta tomar la unión de los conjuntos y la unión de las biyecciones. Por el lema de Zorn existe un elemento maximal (B, f). Sea $\lambda = |B|$. Como $B \sim B \times B$, $\lambda + \lambda = 2 \cdot \lambda \leq \lambda \cdot \lambda = \lambda$. Si fuera $|A \setminus B| < |B|$ tendríamos $|A| = |B| + |A \setminus B| \leq \lambda + \lambda = \lambda$ y por tanto $A \times A \sim A$. Por tanto podemos suponer que $A \setminus B$ tiene un subconjunto C de cardinalidad λ. Sea $D = (B \times C) \cup (C \times B) \cup (C \times C)$. Resulta que $|D| = (\lambda \cdot \lambda) + (\lambda \cdot \lambda) + (\lambda \cdot \lambda) = \lambda$ y por tanto existe una biyección g entre D y C. Como $(B \cup C) \times (B \cup C) = (B \times B) \cup D$, vemos que $f \cup g$ es una biyección entre $(B \cup C) \times (B \cup C)$ y $B \cup C$. Esto contradice la maximalidad de A.

Corolario 7.14 *1. Si κ, λ son cardinales infinitos, $\kappa + \lambda = \kappa \cdot \lambda = \max\{\kappa, \lambda\}$.*

2. Si κ es un cardinal infinito y $n < \omega$, entonces $n + \kappa = \kappa$. Si además $n \neq 0$, $n \cdot \kappa = \kappa$ y $\kappa^n = \kappa$.

Prueba. Supongamos, sin perder generalidad, que $\kappa \leq \lambda$. Entonces $\lambda \leq \kappa + \lambda \leq \kappa \cdot \lambda \leq \lambda \cdot \lambda = \lambda$. La segunda parte es clara.

Proposición 7.15 *La suma, el producto y la exponenciación cardinal de números naturales coincide con su suma, producto y exponenciación ordinal.*

Prueba. Se muestra por inducción natural a partir de una serie de hechos simples sobre biyectabilidad.

Proposición 7.16 *1. Si κ es infinito, $2^\kappa = \kappa^\kappa$.*

2. $|\mathcal{P}(A)| = 2^{|A|}$.

3. $\kappa < 2^\kappa$.

Prueba. Obviamente $2^\kappa \leq \kappa^\kappa$. Por otro lado, $\kappa \leq 2^\kappa$ y por tanto $\kappa^\kappa \leq (2^\kappa)^\kappa = 2^{\kappa\cdot\kappa} = 2^\kappa$. Esto muestra *1*. Para *2* necesitamos una biyección entre ${}^X 2$ y $\mathcal{P}(X)$. Una tal biyección se puede definir asignando a cada $f : X \to 2$ el conjunto $\{a \in X : f(a) = 0\}$. Finalmente *3* se sigue de *2* y de la proposición 7.7.

Proposición 7.17 *Si κ es infinito,* $|\{\alpha \in \mathrm{On} : |\alpha| = \kappa\}| = \kappa^+$.

Prueba. Obsérvese que $\{\alpha \in \mathrm{On} : |\alpha| \leq \kappa\} = \{\alpha \in \mathrm{On} : \kappa \leq \alpha < \kappa^+\}$. Como κ^+ es la unión disjunta de κ y $\{\alpha \in \mathrm{On} : \kappa \leq \alpha < \kappa^+\}$, resulta que $\kappa^+ = \kappa + |\{\alpha \in \mathrm{On} : \kappa \leq \alpha < \kappa^+\}|$ y por la proposición 7.14 se tiene el resultado.

Definición 7.6 (Sumas y Productos infinitos) Si $(\kappa_i : i \in I)$ es una secuencia de números cardinales (una función f que asigna a cada $i \in I$ un cardinal $f(i) = \kappa_i$) entonces se define la suma de la secuencia como sigue:

$$\sum_{i\in I} \kappa_i = \kappa \leftrightarrow \exists (A_i : i \in I)\ ((\forall i, j \in I)(i \neq j \to A_i \cap A_j = \emptyset) \wedge (\forall i \in I)\, |A_i| = \kappa_i \wedge |\bigcup_{i\in I} A_i| = \kappa).$$

Y se define el producto de la secuencia como sigue:

$$\prod_{i\in I} \kappa_i = \kappa \leftrightarrow \exists (A_i : i \in I)\ ((\forall i \in I)\, |A_i| = \kappa_i \wedge |\bigotimes_{i\in I} A_i| = \kappa)$$

donde $\bigotimes_{i\in I} A_i = \{f \in^I (\bigcup_{i\in I} A_i) : (\forall i \in I)\ f(i) \in A_i\}$.

Observaciones 7.18 1. *Sean $(\kappa_i : i \in I)$ y $(\lambda_j : j \in J)$ secuencias de cardinales. Si existe una biyección f entre I y J de modo que para cada $i \in I$, $\kappa_i = \lambda_{f(i)}$, entonces $\sum_{i\in I} \kappa_i = \sum_{j\in J} \lambda_j$ y $\prod_{i\in I} \kappa_i = \prod_{j\in J} \lambda_j$.*

2. *Si para cada $i \in I$, $\kappa_i \leq \lambda_i$, entonces $\sum_{i\in I} \kappa_i \leq \sum_{i\in I} \lambda_i$ y $\prod_{i\in I} \kappa_i \leq \prod_{i\in I} \lambda_i$.*

3. $\kappa^{\sum_{i\in I} \lambda_i} = \prod_{i\in I} \kappa^{\lambda_i}$.

4. $(\prod_{i\in I} \kappa_i)^\lambda = \prod_{i\in I} \kappa_i^\lambda$

5. *Si $|I| = \lambda$ y para cada $i \in I$, $\kappa_i = \kappa$, entonces $\sum_{i\in I} \kappa_i = \lambda \cdot \kappa$ y $\prod_{i\in I} \kappa_i = \kappa^\lambda$.*

Proposición 7.19 *Si I es infinito y para cada $i \in I$, $\kappa_i > 0$, entonces*

$$\sum_{i\in I} \kappa_i = |I| + \sup_{i\in I} \kappa_i.$$

Prueba. Sea $\kappa = \sum_{i\in I} \kappa_i$ y sea $\lambda = \sup_{i\in I} \kappa_i$. Es claro que $\lambda \leq \kappa$. Como ningún κ_i es cero, $|I| \leq \kappa$. Por tanto $\kappa \geq \max\{|I|, \lambda\} = |I| + \lambda$. Por otro lado $\kappa = \sum_{i\in I} \kappa_i \leq \sum_{i\in I} \lambda = |I| \cdot \lambda = |I| + \lambda$ dado que podemos suponer que $\lambda \neq 0$.

Teorema 7.20 (König) *Si para cada $i \in I$, $\kappa_i < \lambda_i$, entonces $\sum_{i\in I} \kappa_i < \prod_{i\in I} \lambda_i$.*

Prueba. Sean $(A_i : i \in I)$ y $(B_i : i \in I)$ secuencias de conjuntos tales que para cada $i \in I$, $|A_i| = \kappa_i$ y $|B_i| = \lambda_i$ y para cualesquiera $i, j \in I$ distintos, $A_i \cap A_j = \emptyset$. Entonces $\sum_{i\in I} \kappa_i = |\bigcup_{i\in I} A_i|$ y $\prod_{i\in I} \lambda_i = |\bigotimes_{i\in I} Bi|$. Supongamos que $\sum_{i\in I} \kappa_i \geq \prod_{i\in I} \lambda_i$. Como $\prod_{i\in I} \lambda_i \neq 0$, debe haber una función exhaustiva $f : \bigcup_{i\in I} A_i \to \bigotimes_{i\in I} B_i$. Para cada $i \in I$ sea $g_i : A_i \to B_i$ la función definida por $g_i(a) = f(a)(i)$ para cada $a \in A_i$. Como $\kappa_i < \lambda_i$, g_i no es exhaustiva. Así existe $h : I \to \bigcup_{i\in I} B_i$ tal que para cada $i \in I$, $h(i) \in B_i \setminus \operatorname{rec} g_i$. Entonces $h \in \bigotimes_{i\in I} B_i$ y hay por tanto un $i \in I$ y un $a \in A_i$ tales que $f(a) = h$. En ese caso $g_i(a) = f(a)(i) = h(i)$, en contradicción con la elección de h de modo que $h(i) \notin \operatorname{rec} g_i$.

Observación 7.21 *El teorema de König proporciona una nueva prueba del teorema de Cantor $\kappa < 2^\kappa$ dado que $1 < 2$ y por tanto*

$$\kappa = \sum_{i<\kappa} 1 < \prod_{i<\kappa} 2 = 2^\kappa.$$

Definición 7.7 ($[A]^\lambda$ y $[A]^{<\lambda}$) Sea A un conjunto. El conjunto formado por todos los subconjuntos de A de cardinal λ es $[A]^\lambda$ y el conjunto formado por todos los subconjuntos de cardinal $< \lambda$ es $[A]^{<\lambda}$. Por tanto $[A]^{<\lambda} = \bigcup_{\mu<\lambda} [A]^\mu$.

Proposición 7.22 *Si κ es infinito y $\lambda \leq \kappa$, entonces $|[\kappa]^\lambda| = \kappa^\lambda$ y $|[\kappa]^{<\lambda}| = \sum_{\mu<\lambda} \kappa^\mu$. Si además λ es infinito, $|[\kappa]^{<\lambda}| = \sup_{\mu<\lambda} \kappa^\mu$.*

Prueba. La ecuación $|[\kappa]^{<\lambda}| = \sup_{\mu<\lambda} \kappa^\mu$ se sigue en el caso λ infinito de la ecuación $|[\kappa]^{<\lambda}| = \sum_{\mu<\lambda} \kappa^\mu$ y de la proposición 7.19 dado que $\lambda \leq \kappa \leq \sup_{\mu<\lambda} \kappa^\mu$. La ecuación $|[\kappa]^{<\lambda}| = \sum_{\mu<\lambda} \kappa^\mu$ se sigue de la primera afirmación del enunciado de modo inmediato pues $[\kappa]^{<\lambda}$ es la unión disjunta de los conjuntos $[\kappa]^\mu$ para $\mu < \lambda$. Mostramos ahora que $[\kappa]^\lambda = \kappa^\lambda$. Podemos suponer que $\lambda \neq 0$. El caso $\kappa = \lambda$ se puede verificar directamente: $|[\kappa]^\kappa| = 2^\kappa$ pues κ puede partirse en dos conjuntos A y B de cardinalidad κ y entonces para cada $X \subseteq A$, $X \cup B$ es un subconjunto de κ de cardinalidad κ, de modo que $2^\kappa = |\mathcal{P}(A)| \leq |[\kappa]^\kappa| \leq |\mathcal{P}(\kappa)| = 2^\kappa$. Consideremos ahora el caso general. Es fácil asignar a cada $X \in [\kappa]^\lambda$ una función $f_X : \lambda \to \kappa$ con $\operatorname{rec} f_X = X$. La asignación $X \mapsto f_X$ es inyectiva y por tanto esto muestra que $|[\kappa]^\lambda| \leq \kappa^\lambda$. Mostraremos a continuación que $\kappa^\lambda \leq |[\kappa]^\lambda|$. Para cada $\mu \leq \lambda$, sea $F_\mu = \{f \in {}^\lambda\kappa : |\operatorname{rec} f| = \mu\}$. Como $F_\mu \subseteq {}^\lambda\kappa$, $|F_\mu| \leq \kappa^\lambda$. Pero por otro lado ${}^\lambda\kappa$ es la unión disjunta de los conjuntos F_μ y $|F_\mu| \leq |F_\lambda|$, de manera que

$$\kappa^\lambda = \sum_{\mu\leq\lambda} |F_\mu| \leq \sum_{\mu\leq\lambda} |F_\lambda| \leq |F_\lambda| \cdot \lambda = |F_\lambda|$$

pues es claro que $|F_\lambda|$ es infinito y $\geq \lambda$. En definitiva, $|F_\lambda| = \kappa^\lambda$. Ahora mostraremos que $|F_\lambda| \leq |[\kappa]^\lambda|$. Para cada $X \in [\kappa]^\lambda$ sea $g_X : X \to \lambda$ una biyección . Sea G el conjunto de las permutaciones de λ, es decir, las funciones biyectivas de λ en λ. Es claro que $|G| \leq \lambda^\lambda$. Definimos $f : F_\lambda \to [\kappa]^\lambda \times G$ por $f(h) = (\operatorname{rec} h, g_{\operatorname{rec} h} \circ h)$. Es fácil ver que f es inyectiva. Por tanto

$$|F_\lambda| \leq |[\kappa]^\lambda \times G| = |[\kappa]^\lambda| \cdot |G| \leq |[\kappa]^\lambda| \cdot \lambda^\lambda.$$

En el caso λ finito, $\lambda^\lambda < \omega \leq |[\kappa]^\lambda|$ y en el caso λ infinito ya sabemos que $\lambda^\lambda = 2^\lambda = |[\lambda]^\lambda| \leq |[\kappa]^\lambda|$. En cualquier caso, pues, $|F_\lambda| \leq |[\kappa]^\lambda|$.

Definición 7.8 (${}^{<\alpha}A$ **y** $\kappa^{<\lambda}$) Si α es un ordinal, entonces ${}^{<\alpha}A$ es el conjunto formado por todas las secuencias de la forma $(a_i : i < \beta)$ con $\beta < \alpha$ y $a_i \in A$ para cada $i < \beta$. Por tanto, ${}^{<\alpha}A = \bigcup_{\beta<\alpha} {}^{\beta}A$. Definimos además $\kappa^{<\lambda} = |{}^{<\lambda}\kappa|$.

Proposición 7.23 *1. Si λ es infinito y $\kappa \geq 2$, $\kappa^{<\lambda} = \sum_{\mu<\lambda} \kappa^{\mu} = \sup_{\mu<\lambda} \kappa^{\mu}$.*

2. Si κ es infinito, $|[\kappa]^{<\omega}| = \kappa^{<\omega} = \kappa$.

Prueba. El punto *2* se sigue de *1* y de la proposición 7.22, pues $\sup\{\kappa^n : n < \omega\} = \kappa$. Mostramos ahora el punto *1*. Es claro que $\sup_{\mu<\lambda} \kappa^{\mu} \leq \sum_{\mu<\lambda} \kappa^{\mu} \leq \kappa^{<\lambda}$. Por otro lado utilizando la proposición 7.17 vemos que $\kappa^{<\lambda} = |{}^{<\lambda}\kappa| = \sum_{\alpha<\lambda} |{}^{\alpha}\kappa| = \sum_{\alpha<\lambda} \kappa^{|\alpha|} = \sum_{\mu<\lambda} \sum_{|\alpha|=\mu} \kappa^{|\alpha|} \leq \sum_{\mu<\lambda} \mu^{+} \cdot \kappa^{\mu} \leq \sum_{\mu<\lambda} \lambda \cdot \kappa^{\mu} = \lambda \cdot \sum_{\mu<\lambda} \kappa^{\mu} = \lambda + \sum_{\mu<\lambda} \kappa^{\mu}$. Ahora probaremos que $\lambda \leq \sup_{\mu<\lambda} \kappa^{\mu}$. De ello se seguirá el resultado por la proposición 7.19. Sea $\nu = \sup_{\mu<\lambda} \kappa^{\mu}$. Para justificar que $\lambda \leq \nu$ podemos suponer que $\lambda > \kappa$. Entonces si $\lambda = \rho^{+}$ tenemos $\nu = \kappa^{\rho} = \rho^{\rho} \geq \rho^{+} = \lambda$, y si λ es un cardinal límite, para cada cardinal $\rho < \lambda$, $\rho \leq \kappa^{\rho} \leq \nu$ y por tanto $\lambda = \sup\{\rho : \rho < \lambda\} \leq \nu$.

Definición 7.9 ($\kappa\,!$) $\kappa\,!$ es el cardinal del conjunto de permutaciones de un conjunto de cardinal κ.

Proposición 7.24 *Si κ es infinito, entonces $\kappa\,! = 2^{\kappa}$.*

Prueba. Sea S el conjunto de las permutaciones de κ. Como $S \subseteq {}^{\kappa}\kappa$, es claro que $|S| \leq 2^{\kappa}$. Veamos ahora que $2^{\kappa} \leq |S|$. Sea $A = \{X \subseteq \kappa : |\kappa \setminus X| \geq \omega\}$. Como $\mathcal{P}(\kappa) \setminus A \sim [\kappa]^{<\omega}$ y por la proposición 7.22 sabemos que $|[\kappa]^{<\omega}| = \kappa$, resulta que $|A| = |\mathcal{P}(\kappa)| = 2^{\kappa}$. Podemos asignar a cada $X \in A$ una permutación f_X de κ tal que $\{i \in \kappa : f_X(i) = i\} = X$. Esta asignación es inyectiva y por tanto $|A| \leq |S|$.

Capítulo 8

Cofinalidad

Definición 8.1 (Conjunto cofinal, función cofinal) Sea $(A, <_A)$ un conjunto totalmente ordenado. Se dice que un subconjunto B de A es *cofinal* en $(A, <_A)$ si $(\forall x \in A)(\exists y \in B)\ x \leq_A y$. Si I es un conjunto y $f : I \to A$, se dice que f es cofinal en $(A, <_A)$ si $\operatorname{rec} f$ es un subconjunto cofinal de $(A, <_A)$.

Proposición 8.1 *Si $(A, <_A)$ es un conjunto totalmente ordenado, existe un subconjunto B de A que es cofinal en $(A, <_A)$ y que está bien ordenado por el orden inducido $<_B = <_A \cap (B \times B)$.*

Prueba. Sea $|A| = \kappa$. Podemos suponer que $A \neq \emptyset$. Utilizando una función de elección para $\mathcal{P}(A) \smallsetminus \{\emptyset\}$ podemos definir por recursión $f : \kappa^+ \to A$ de modo que $f(\alpha) \in \{a \in A : (\forall \beta < \alpha)\ a >_A f(\beta)\}$ si $\{a \in A : (\forall \beta < \alpha)\ a >_A f(\beta)\} \neq \emptyset$. Sea γ el menor ordinal $< \kappa^+$ (si lo hay) tal que $\{a \in A : (\forall \beta < \alpha)\ a >_A f(\beta)\} = \emptyset$ y sea $\gamma = \kappa^+$ si no hay tal ordinal. En cualquier caso $g \restriction \gamma$ es estrictamente creciente (lo cual muestra que de hecho el caso segundo caso es imposible) y $f[\gamma]$ es un subconjunto cofinal de A cuyo ordinal es γ.

Definición 8.2 (Cofinalidad) La *cofinalidad* de un conjunto totalmente ordenado $(A, <_A)$ es el menor número ordinal que es el ordinal de un subconjunto cofinal bien ordenado de $(A, <_A)$. Designamos con $\operatorname{cf}(A, <_A)$ la cofinalidad de $(A, <_A)$. Obsérvese que la cofinalidad de $(A, <_A)$ es 0 si y sólo si $A = \emptyset$ y es 1 si y sólo si A tiene mayor elemento. Para un ordinal α ponemos $\operatorname{cf}(\alpha) = \operatorname{cf}(\alpha, \in_\alpha)$. Por tanto, en el caso $\alpha = 0$ se tiene $\operatorname{cf}(\alpha) = 0$ y si α es un ordinal sucesor $\operatorname{cf}(\alpha) = 1$. Si α es un ordinal límite $\operatorname{cf}(\alpha) \geq \omega$. En particular, para cada cardinal infinito κ, $\omega \leq \operatorname{cf}(\kappa)$.

Lema 8.2

1. $\operatorname{cf}(\alpha)$ *es el menor ordinal β para el que existe una función estrictamente creciente y cofinal $f : \beta \to \alpha$.*
2. $\operatorname{cf}(\alpha)$ *es el menor ordinal β para el que existe una función cofinal $f : \beta \to \alpha$.*

Prueba. La equivalencia entre la definición de $\operatorname{cf}(\alpha)$ y la caracterización dada en *1* se basa en que por un lado si $f : \beta \to \alpha$ es estrictamente creciente y cofinal, entonces $\operatorname{rec} f$ es un subconjunto cofinal de α y su tipo de orden es β y, por otro lado, si $S \subseteq \alpha$ es un subconjunto cofinal y β es su tipo de orden y $f : \beta \to S$ es un isomorfismo entre los órdenes, entonces $f : \beta \to \alpha$ es estrictamente creciente y cofinal. Para justificar la equivalencia dada en *2* debemos mostrar que si $f : \beta \to \alpha$ es cofinal, entonces existe $\gamma \leq \beta$ y $g : \gamma \to \alpha$ que es estrictamente creciente y cofinal. Para ello definimos recursivamente $h : \beta \to \alpha$ de modo que $h(\eta) \in \{\rho < \alpha : \rho \geq f(\eta) \wedge (\forall \xi < \eta)\ \rho > h(\xi)\}$ si $\{\rho < \alpha : \rho \geq f(\eta) \wedge (\forall \xi < \eta)\ \rho > h(\xi)\} \neq \emptyset$. Sea γ el menor ordinal $< \beta$ (si lo hay) tal que $\{\rho < \alpha : \rho \geq f(\gamma) \wedge (\forall \xi < \gamma)\ \rho > h(\xi)\} = \emptyset$ y sea $\gamma = \beta$ en otro caso. En cualquiera de los dos casos, si $g = h \restriction \gamma$, entonces $g : \gamma \to \alpha$ es estrictamente creciente y cofinal.

Proposición 8.3 $\mathrm{cf}(\alpha)$ *es un cardinal,* $\mathrm{cf}(\alpha) \leq |\alpha|$ *y* $\mathrm{cf}(\mathrm{cf}(\alpha)) = \mathrm{cf}(\alpha)$.

Prueba. Si f es una biyección entre $|\alpha|$ y α, entonces $f : |\alpha| \to \alpha$ es cofinal y tenemos por el punto *2* del lema 8.2 que $\mathrm{cf}(\alpha) \leq |\alpha|$. Por motivos similares hay una biyección $f : |\mathrm{cf}(\alpha)| \to \mathrm{cf}(\alpha)$ y una función cofinal $g : \mathrm{cf}(\alpha) \to \alpha$. Componiéndolas obtenemos una función cofinal $g \circ f : |\mathrm{cf}(\alpha)| \to \alpha$ y por tanto $\mathrm{cf}(\alpha) \leq |\mathrm{cf}(\alpha)|$ y así $\mathrm{cf}(\alpha)$ es un cardinal. La última afirmación se justifica de modo similar, pues hay una función estrictamente creciente y cofinal $f : \mathrm{cf}(\mathrm{cf}(\alpha)) \to \mathrm{cf}(\alpha)$ y una función estrictamente creciente y cofinal $g : \mathrm{cf}(\alpha) \to \alpha$ cuya composición es una función cofinal $g \circ f : \mathrm{cf}(\mathrm{cf}(\alpha)) \to \alpha$.

Proposición 8.4 *1. Si α es un ordinal límite entonces* $\mathrm{cf}(\alpha)$ *es el menor cardinal κ para el que hay un $S \subseteq \alpha$ tal que $|S| = \kappa$ y $\sup S = \alpha$.*

2. Si κ es un cardinal infinito, $\mathrm{cf}(\kappa)$ *es el menor cardinal μ para el que existe una secuencia $(\kappa_i : i < \mu)$ de cardinales $\kappa_i < \kappa$ tales que $\kappa = \sum_{i<\mu} \kappa_i$.*

Prueba. *1.* Como α es un ordinal límite, $\sup S = \alpha$ si y sólo si S es un subconjunto cofinal de α. Sea κ el menor cardinal de un subconjunto S de α tal que $\sup S = \alpha$. Entonces κ es el menor cardinal de un subconjunto cofinal de α. Por su parte $\mathrm{cf}(\alpha)$ es un cardinal y es el menor ordinal de un subconjunto cofinal de α. Por tanto, $\kappa = \mathrm{cf}(\alpha)$.

2. Sea μ el menor cardinal tal que κ es la suma de μ cardinales menores que κ. Por tanto hay $(\kappa_i : i < \mu)$ tales que $\kappa_i < \kappa$ y $\kappa = \sum_{i<\mu} \kappa_i$. Supongamos que $\mu < \mathrm{cf}(\kappa)$. Por el punto *1*, $\sup\{\kappa_i : i < \mu\} < \kappa$. Hay así un $\nu < \kappa$ tal que $\kappa_i < \nu$ para cada $i < \mu$. Entonces

$$\sum_{i<\mu} \kappa_i \leq \sum_{i<\mu} \nu = \mu \cdot \nu = \text{máx}\{\mu, \nu\} < \kappa,$$

en contradicción con la elección de $(\kappa_i : i < \mu)$. Así pues, $\mu \geq \mathrm{cf}(\kappa)$. Mostraremos ahora que $\mu \leq \mathrm{cf}(\kappa)$. Sea $f : \mathrm{cf}(\kappa) \to \kappa$ una función estrictamente creciente y cofinal. Podemos suponer adicionalmente que para cada límite $\alpha < \mathrm{cf}(\kappa)$, $f(\alpha) = \sup_{i<\alpha} f(i)$. Para cada $i < \kappa$, sea $\lambda_i = |f(i+1) \smallsetminus f(i)|$. Entonces $\lambda_i \leq |f(i+1)| \leq f(i+1) < \kappa$ y como κ es la unión disjunta de los conjuntos $f(i+1) \smallsetminus f(i)$, tenemos que $\kappa = \sum_{i<\mathrm{cf}(\kappa)} \lambda_i$. Por tanto $\mu \leq \mathrm{cf}(\kappa)$.

Definición 8.3 (Cardinales regulares y cardinales singulares) Un cardinal infinito κ es *regular* si $\mathrm{cf}(\kappa) = \kappa$ y es *singular* si $\mathrm{cf}(\kappa) < \kappa$. Por ejemplo, ω es regular y $\aleph_\omega$ es singular. Como $\mathrm{cf}(\mathrm{cf}(\kappa)) = \mathrm{cf}(\kappa)$, $\mathrm{cf}(\kappa)$ es siempre un cardinal regular. De la proposición 8.4 se sigue que un cardinal infinito κ es regular si y sólo si no puede partirse en menos de κ conjuntos de cardinalidad $< \kappa$.

Proposición 8.5 *Para cada κ infinito, κ^+ es regular.*

Prueba. En caso contrario habría un cardinal $\mu < \kappa^+$ y una familia $(\kappa_i : i < \mu)$ de cardinales $\kappa_i < \kappa^+$ tales que $\sum_{i<\mu} \kappa_i = \kappa^+$. Pero $\kappa_i \leq \kappa$ y $\mu \leq \kappa$, de manera que

$$\kappa^+ = \sum_{i<\mu} \kappa_i \leq \sum_{i<\mu} \kappa \leq \mu \cdot \kappa = \kappa$$

lo cual es, obviamente, una contradicción.

Proposición 8.6 *Sea κ un cardinal infinito.*

1. $\kappa^{\mathrm{cf}(\kappa)} > \kappa$.
2. $\mathrm{cf}(2^\kappa) > \kappa$.

Prueba. El punto *2* se sigue de *1* dado que para cada $\lambda \leq \kappa$ infinito, $(2^\kappa)^\lambda = 2^{\kappa\cdot\lambda} = 2^\kappa$. Para la prueba de *1* utilizamos la proposición 7.20. Existe una familia de cardinales $(\kappa_i : i < \mathrm{cf}(\kappa))$ tales que $\kappa_i < \kappa$ y $\kappa = \sum_{i<\mathrm{cf}(\kappa)} \kappa_i$. Como $\kappa_i < \kappa_i^+$, tenemos

$$\kappa = \sum_{i<\mathrm{cf}(\kappa)} \kappa_i < \prod_{i<\mathrm{cf}(\kappa)} \kappa_i^+ \leq \prod_{i<\mathrm{cf}(\kappa)} \kappa = \kappa^{\mathrm{cf}(\kappa)}.$$

Corolario 8.7 $\mathrm{cf}(2^\omega) > \omega$ *y* $2^\omega \neq \aleph_\omega$.

Prueba. La primera afirmación es una aplicación de la proposición 8.6. La segunda se sigue de la primera dado que es claro que $\mathrm{cf}(\aleph_\omega) = \omega$.

Proposición 8.8 *Si κ es un cardinal infinito y $1 \leq \lambda < \mathrm{cf}(\kappa)$, entonces $\kappa^\lambda = \kappa + \sup_{\mu<\kappa} \mu^\lambda$.*

Prueba. Por un lado $\kappa \leq \kappa^\lambda$ y $\sup_{\mu<\kappa} \mu^\lambda \leq \kappa^\lambda$. Mostramos a continuación que $\kappa^\lambda \leq \kappa + \sup_{\mu<\kappa} \mu^\lambda$. Como $\lambda < \mathrm{cf}(\kappa)$, para cada $f : \lambda \to \kappa$ existe un ordinal $\alpha < \kappa$ tal que $f : \lambda \to \alpha$. Por tanto

$$\kappa^\lambda = |{}^\lambda\kappa| \leq \sum_{\alpha<\kappa} |{}^\lambda\alpha| \leq \sum_{\alpha<\kappa} \sup_{\mu<\kappa} \mu^\lambda \leq \kappa \cdot \sup_{\mu<\lambda} \mu^\lambda = \kappa + \sup_{\mu<\lambda} \mu^\lambda.$$

Definición 8.4 (Hipótesis del Continuo) La *hipótesis del continuo* (abreviado CH) es el enunciado

$$2^{\aleph_0} = \aleph_1.$$

No se puede demostrar ni refutar en ZFC (a no ser que ZFC sea una teoría contradictoria). La *hipótesis generalizada del continuo* (abreviado GCH) es el enuciado según el cual para cada cardinal infinito κ, $2^\kappa = \kappa^+$. Tampoco es demostrable ni refutable en ZFC.

Definición 8.5 (La función beth) La función *beth* asigna a cada ordinal α un cardinal $\beth_\alpha$ y se define por inducción con las siguientes cláusulas:

- $\beth_0 = \omega$.
- $\beth_{\alpha+1} = 2^{\beth_\alpha}$.
- $\beth_\delta = \sup\{\beth_\alpha : \alpha < \delta\}$ si δ es límite.

Hay una variante de esta función. Si κ es un cardinal, se define $\beth_\alpha(\kappa)$ como sigue:

- $\beth_0(\kappa) = \kappa$.
- $\beth_{\alpha+1}(\kappa) = 2^{\beth_\alpha(\kappa)}$.

- $\beth_\delta(\kappa) = \sup\{\beth_\alpha(\kappa) : \alpha < \delta\}$ si δ es límite.

Entonces $\beth_\alpha = \beth_\alpha(\omega)$. En ambas versiones se trata de una función normal. Es claro que $\aleph_\alpha \leq \beth_\alpha$. La hipótesis generalizada del continuo es equivalente (en ZFC) al enunciado $(\forall\alpha \in \mathrm{On})\ \aleph_\alpha = \beth_\alpha$.

Proposición 8.9 *Si α es un ordinal límite,* $\mathrm{cf}(\aleph_\alpha) = \mathrm{cf}(\beth_\alpha) = \mathrm{cf}(\alpha)$.

Prueba. La función $\aleph$ restringida a α es una función estrictamente creciente y cofinal de α en $\aleph_\alpha$. Análogamente para $\beth_\alpha$.

Proposición 8.10 *La hipótesis generalizada del continuo implica las siguientes reglas para calcular la exponenciación de cardinales infinitos κ, λ:*

$$\kappa^\lambda = \begin{cases} \kappa^+ & \textit{si } \mathrm{cf}(\kappa) \leq \lambda \leq \kappa \\ \kappa & \textit{si } \lambda < \mathrm{cf}(\kappa) \\ \lambda^+ & \textit{si } \lambda \geq \kappa. \end{cases}$$

Prueba. Supongamos primero que $\mathrm{cf}(\kappa) \leq \lambda \leq \kappa$. Entonces, como $\kappa < \kappa^{\mathrm{cf}(\kappa)}$ y $\kappa^+ = 2^\kappa$,

$$\kappa^+ \leq \kappa^{\mathrm{cf}(\kappa)} \leq \kappa^\lambda \leq \kappa^\kappa = 2^\kappa = \kappa^+.$$

En el caso $\lambda < \mathrm{cf}(\kappa)$ usamos la proposición 8.8 y obtenemos que

$$\kappa^\lambda = \kappa + \sup_{\mu<\kappa} \mu^\lambda = \kappa$$

pues si $\mu < \kappa$ es infinito y $\nu = \max \mu, \lambda$ resulta que $\nu < \kappa$ y por tanto $\mu^\lambda \leq \nu^\nu = \nu^+ \leq \kappa$. Finalmente, en el caso $\lambda \geq \kappa$ tenemos

$$\lambda^+ = 2^\lambda \leq \kappa^\lambda \leq \lambda^\lambda = 2^\lambda = \lambda^+.$$

Proposición 8.11 1. *Para cada cardinal λ existe un cardinal $\kappa \geq \lambda$ tal que $2^{<\kappa} = \kappa$.*

2. *Para cada cardinal infinito κ, $\kappa^{<\kappa} = \kappa$ si y sólo si κ es regular y $2^{<\kappa} = \kappa$.*

3. *Si κ es infinito y $\kappa^+ = 2^\kappa$, entonces $2^{<\kappa^+} = \kappa^+$.*

4. *La hipótesis generalizada del continuo implica que para cada cardinal infinito κ, $2^{<\kappa} = \kappa$ y que para cada cardinal regular infinito κ, $\kappa^{<\kappa} = \kappa$.*

Prueba. *1.* Sea $\kappa = \beth_\omega(\lambda)$. Si $\mu < \kappa$, entonces $\mu < \beth_n(\lambda)$ para algún $n < \omega$. Entonces $2^\mu \leq 2^{\beth_n(\lambda)} = \beth_{n+1}(\lambda) < \kappa$. Por la proposición 7.23 tenemos entonces que $2^{<\kappa} = \sup_{\mu<\kappa} 2^\mu \leq k$. Por otro lado es claro que $\kappa \leq 2^{<\kappa}$.

2. Sea $\kappa^{<\kappa} = \kappa$. Entonces $2^{<\kappa} = \sup_{\mu<\kappa} 2^\mu \leq \sup_{\mu<\kappa} \kappa^\mu = \kappa^{<\kappa} = \kappa$, de modo que $\kappa = 2^{<\kappa}$. Y si κ no es regular entonces $\mathrm{cf}(\kappa) < \kappa$ con lo cual $\kappa^{\mathrm{cf}(\kappa)} \leq \kappa^{<\kappa} = \kappa$ en contra de la proposición 8.6. Supongamos ahora que κ es regular y $2^{<\kappa} = \kappa$. Entonces si $\mu < \kappa$, $\mu < \mathrm{cf}(\kappa)$ y por la proposición 8.8 $\kappa^\mu = \kappa + \sup_{\nu<\kappa} \nu^\mu \leq \kappa + \sup_{\nu<\kappa} 2^\nu = 2^{<\kappa} = \kappa$.

3. $2^{<\kappa^+} = \sup_{\mu<\kappa^+} 2^\mu = 2^\kappa = \kappa^+$. El punto *4* se sigue fácilmente a partir de esto.

Definición 8.6 (Cardinales inaccesibles) Un cardinal infinito κ es *débilmente inaccesible* si es un cardinal límite y regular y es *inaccesible* o *fuertemente inaccesible* si es regular y $(\forall \mu < \kappa)\, 2^\mu < \kappa$. Obviamente todo cardinal inaccesible es débilmente inaccesible. La hipótesis generalizada del continuo implica que los cardinales débilmente inaccesibles son inaccesibles. En ZFC no se puede demostrar que existan cardinales débilmente inaccesibles mayores que ω a no ser que ZFC sea inconsistente.

Observación 8.12 *Si κ es inaccesible, entonces $\kappa^{<\kappa} = \kappa$.*

Capítulo 9

Combinatoria infinita

Definición 9.1 **($\kappa \to (\lambda)^\mu_\nu$)** Sea $f : [A]^\mu \to B$. Se dice que $H \subseteq A$ es *homogéneo para* f si f es constante en $[H]^\mu$, es decir si existe un $b \in B$ tal que para cada $x \in [H]^\mu$, $f(x) = b$. La notación

$$\kappa \to (\lambda)^\mu_\nu$$

significa que si A y B son conjuntos de cardinalidad κ y ν respectivamente y $f : [A]^\mu \to B$, entonces existe un subconjunto de A que tiene cardinalidad λ y es homogéneo para f. Obviamente basta con verificarlo para $A = \kappa$ y $B = \nu$. Otra manera equivalente de formular esta propiedad es como sigue: si $\mathcal{X}$ es una partición de $[\kappa]^\mu$ y $|\mathcal{X}| \leq \nu$, entonces existe un conjunto $S \subseteq \kappa$ y un $X \in \mathcal{X}$ tales que $|S| = \lambda$ y $[S]^\mu \subseteq X$.

Teorema 9.1 (Ramsey) *Para cualesquiera $n, m < \omega$, $\omega \to (\omega)^n_m$.*

Prueba. Efectuamos una inducción en n. El caso $n = 0$ es trivial. Consideramos el caso $n+1$. Sea $f : [\omega]^{n+1} \to m$. Definimos inductivamente una familia $(A_i : i < \omega)$ de conjuntos infinitos $A_i \subseteq \omega$ y una familia $(a_i : i < \omega)$ de números naturales $a_i \in A_i$ de modo que

- $A_i \supseteq A_{i+1}$
- $a_i \in A_j \leftrightarrow j \leq i$.

Comenzamos con $A_0 = \omega$. Se escoge $a_i \in A_i$ arbitrario. Sea $f_i : [A_i \setminus \{a_i\}]^n \to m$ la función definida por $f_i(x) = f(x \cup \{a_i\})$. Usando la hipótesis inductiva podemos tomar como A_{i+1} un subconjunto infinito de $A_i \setminus \{a_i\}$ homogéneo para f_i. Efectuada esta construcción, definimos k_i como el valor constante de f_i en $[A_{i+1}]^n$. Claramente existe existe un $k < m$ para el que $\{i < \omega : k_i = k\}$ es infinito. Sea $H = \{a_i : k_i = k\}$. Entonces H es un subconjunto infinito de ω y H es homogéneo para f pues si $x \in [H]^{n+1}$ y i es el máximo índice $j < \omega$ con $a_j \in x$ entonces $x \setminus \{a_i\} \in [A_{i+1}]^n$, $x = (x \setminus \{a_i\}) \cup \{a_i\}$ y $f(x) = f_i(x \setminus \{a_i\}) = k_i = k$.

Teorema 9.2 (Erdös-Rado) *Para cada cardinal κ y cada $n < \omega$, $(\beth_n(\kappa))^+ \to (\kappa^+)^{n+1}_\kappa$.*

Prueba. Efectuamos inducción en n. El caso $n = 0$ se obtiene por la regularidad de κ^+. Mostramos ahora el caso $n + 1$. Sea $\lambda = \beth_{n+1}(\kappa)$ y $\mu = \beth_n(\kappa)$. Entonces $2^\mu = \lambda$ y queremos mostrar que $\lambda^+ \to (\kappa^+)^{n+2}_\kappa$. Sea $f : [\lambda^+]^{n+2} \to \kappa$. Vamos a mostrar en primer lugar que existe una secuencia creciente $(\beta_i : i < \mu^+)$ de ordinales $\beta_i < \lambda^+$ tales que para cada $S \subseteq \beta_i$ con $|S| \leq \mu$ y para cada $\gamma < \lambda^+$ existe un $\gamma' < \beta_{i+1}$ tal que

- $\gamma \in S \leftrightarrow \gamma' \in S$
- si $x \in [S]^{n+1}$ y $\gamma, \gamma' \notin x$, entonces $f(x \cup \{\gamma\}) = f(x \cup \{\gamma'\})$.

La elección de β_0 es arbitraria. Supongamos ya obtenido β_i. Sea $S \in [\beta_i]^{\leq \mu}$. Para cada $\gamma < \lambda^+$ tal que $\gamma \notin S$ sea

$$A_\gamma = \{\gamma' < \lambda^+ : \gamma' \notin S \wedge (\forall x \in [S]^{n+1})\, f(x \cup \{\gamma\}) = f(x \cup \{\gamma'\})\}$$

y sea $f_\gamma : [S]^{n+1} \to \kappa$ la función definida por $f_\gamma(x) = f(x \cup \{\gamma\})$. Entonces $|\{f_\gamma : \gamma \in \lambda^+ \smallsetminus S\}| \leq |S|^\kappa \leq \mu^\kappa \leq \lambda$. Como $f_{\gamma_1} = f_{\gamma_2}$ implica $A_{\gamma_1} = A_{\gamma_2}$, resulta que $|\{A_\gamma : \gamma \in \lambda^+ \smallsetminus S\}| \leq \lambda$ y por tanto podemos encontrar una subconjunto A de λ^+ tal que $|A| \leq \lambda$ y tal que para cada $\gamma \in \lambda^+ \smallsetminus S$ existe un $\alpha \in A$ tal que $\alpha \in A_\gamma$. Sea $\beta_S < \lambda^+$ un ordinal mayor que todos los elementos de A y de S. Entonces para cada $\gamma < \lambda^+$ existe un $\gamma' < \beta_S$ tal que $\gamma \in S \leftrightarrow \gamma' \in S$ y además siempre que $x \in [S]^{n+1}$ y $\gamma, \gamma' \notin x$, entonces $f(x \cup \{\gamma\}) = f(x \cup \{\gamma'\})$. Como el número de subconjuntos S de β_i con cardinalidad $\leq \mu$ es $\leq |\beta_i|^\mu \leq \lambda^\mu = \lambda$, existe $\beta_{i+1} < \lambda^+$ tal que para cada $S \in [\beta_i]^{\leq \mu}$, $\beta_S < \beta_{i+1}$. Este ordinal β_{i+1} cumple las condiciones exigidas.

Una vez obtenida la secuencia $(\beta_i : i < \mu^+)$, ponemos $\beta^* = \sup_{i<\mu^+} \beta_i$. El siguiente paso consiste en obtener recursivamente una secuencia $(\gamma_i : i < \mu^+)$ tal que

- $\gamma_i < \beta_{i+1}$
- $(\forall x \in [\{\gamma_j : j < i\}]^{n+1})\, f(x \cup \{\gamma_i\}) = f(x \cup \{\beta^*\})$
- $i \neq j \to \gamma_i \neq \gamma_j$.

Esto no ofrece ninguna dificultad. Entonces definimos $f' : [\mu^+]^{n+1} \to \kappa$ por

$$f'(x) = f(\{\gamma_i : i \in x\} \cup \{\beta^*\}).$$

Por la hipótesis inductiva existe un subconjunto S' de μ^+ que tiene cardinalidad κ^+ y es homogéneo para f'. Hay así un $\alpha_0 < \kappa$ tal que para cada $x \in [S']^{n+1}$, $f'(x) = \alpha_0$. En ese caso $S = \{\gamma_i : i \in S'\}$ es homogéneo para f y $|S| = \kappa^+$.

Proposición 9.3 $2^\kappa \not\to (\kappa^+)^2_2$ *y* $2^\kappa \not\to (3)^2_\kappa$.

Prueba. Sea $<_1$ un buen orden de ${}^\kappa 2$ y sea $<_2$ el siguiente orden de ${}^\kappa 2$:

$$f <_2 g \leftrightarrow (\exists \alpha < \kappa)\, (f \upharpoonright \alpha = g \upharpoonright \alpha \wedge f(\alpha) < g(\alpha)).$$

Definimos entonces $F : [{}^\kappa 2]^2 \to 2$ por $F(\{f, g\}) = 1$ si $<_1$ y $<_2$ coinciden en $\{f, g\}$ y $F(\{f, g\}) = 0$ en otro caso. Entonces no existe ningún subconjunto de ${}^\kappa 2$ que sea homogéneo para F y tenga cardinalidad κ^+, pues no existe ninguna inmersión del orden de κ^+ ni en el orden $<_2$ ni en su inverso. Esto prueba que $2^\kappa \not\to (\kappa^+)^2_2$. Para mostrar que $2^\kappa \not\to (3)^2_\kappa$, basta considerar la función $F : [{}^\kappa 2]^2 \to \kappa$ definida de modo que $F(\{f, g\})$ sea el menor ordinal α tal que $f \upharpoonright \alpha \neq g \upharpoonright \alpha$. Ahora no existe ningún subconjunto de ${}^\kappa 2$ que sea homogéneo para F y tenga cardinalidad 3.

Definición 9.2 (Cardinal débilmente compacto) Un cardinal κ es débilmente compacto si $\kappa > \omega$ y $\kappa \to (\kappa)^2_2$.

Proposición 9.4 *Los cardinales débilmente compactos son inaccesibles.*

Prueba. Sea κ débilmente compacto. Supongamos que $\lambda < \kappa$. Por la proposición 9.3 sabemos que $2^\lambda \nrightarrow (\lambda^+)^2_2$. Pero como $\lambda^+ \leq \kappa$, tenemos que $\kappa \to (\lambda^+)^2_2$. Por tanto debe ser $2^\lambda < \kappa$. Mostramos ahora que κ es regular. Si no lo fuera tendríamos una partición $\{I_i : i < \mu\}$ de κ con $\mu < \kappa$ y con $|I_i| < \kappa$ para cada $i < \mu$. Si definimos $f : [\kappa]^2 \to 2$ de modo que $f(\{\alpha, \beta\}) = 0$ si α y β están en el mismo elemento de la partición y $f(\{\alpha, \beta\}) = 1$ en otro caso, resulta que no existe ningún subconjunto de κ que tenga cardinalidad κ y sea homogéneo para f.

Definición 9.3 (Anticadenas y condiciones de cadena) Sea $(A, <_A)$ un conjunto parcialmente ordenado. Decimos que dos elementos $a, b \in A$ son *incompatibles* y escribimos $a \perp b$ si no existe ningún $c \in A$ tal que $c \leq_A a$ y $c \leq_A b$. Una *anticadena* en $(A, <_A)$ es un subconjunto de A formado por elementos incompatibles dos a dos. Se dice que $(A, <_A)$ tiene la *condición de κ–cadena*, abreviado, la *κ-cc* si toda anticadena en $(A, <_A)$ tiene cardinalidad $< \kappa$. Se dice que $(A, <_A)$ tiene la *condición de cadena numerable*, abreviado, la *ccc* si tiene la $\omega_1 - cc$, es decir, si toda anticadena es numerable.

Definición 9.4 ($\mathrm{Fn}(\lambda, 2, \kappa)$) Para cualesquiera cardinales infinitos κ, λ, $\mathrm{Fn}(\lambda, 2, \kappa)$ es el conjunto parcialmente ordenado formado por las funciones cuyo dominio es un subconjunto de λ de cardinalidad $< \kappa$ y cuyo recorrido está contenido en $2 = \{0, 1\}$. El orden parcial considerado es el inverso de la inclusión. Por tanto $f \perp g$ significa simplemente que $f \cup g$ es una función.

Proposición 9.5 *1. Para cualesquiera κ, λ infinitos, $\mathrm{Fn}(\lambda, 2, \kappa^+)$ tiene la condición de $(2^\kappa)^+$–cadena.*

2. $\mathrm{Fn}(\omega, 2, \omega)$ tiene la condición de cadena numerable.

Prueba. *1.* Sea $\{f_i : i < (2^\kappa)^+\}$ una familia de funciones de $\mathrm{Fn}(\lambda, 2, \kappa^+)$ que son incompatibles dos a dos. Pongamos

$$f_i = \{(\alpha^i_j, f_i(\alpha^i_j)) : j < \kappa\}.$$

Si $j, l < \kappa$ y $\Delta = \{j, l\}$, definimos $f_i^\Delta = f_i \restriction \{\alpha^i_j, \alpha^i_l\}$. Dados $i, i' < (2^\kappa)^+$ distintos, hay siempre dos ordinales $j_{i,i'}, l_{i,i'} < \kappa$ tales que $f_i^{\Delta_{i,i'}}$ es incompatible con $f_{i'}^{\Delta_{i,i'}}$ para $\Delta_{i,i'} = \{j_{i,i'}, l_{i,i'}\}$. Por el teorema de Erdös-Rado, $(2^\kappa)^+ \to (\kappa^+)^2_\kappa$ y hay por tanto un $I \subseteq (2^\kappa)^+$ infinito (de hecho $|I| \geq \kappa^+$) y un conjunto Δ de dos elementos tal que $\Delta_{i,i'} = \Delta$ para cualesquiera $i, i' \in I$ distintos. Pero esto es imposible si $|I| > 4$ como puede comprobarse fácilmente.

La prueba del punto *2* es análoga, pero usando el teorema de Ramsey en vez del teorema de Erdös-Rado.

Corolario 9.6 *Para cualesquiera κ, λ infinitos, $\mathrm{Fn}(\lambda, 2, \kappa)$ tiene la condición de $(2^{<\kappa})^+$–cadena.*

Prueba. Los casos $\kappa = \omega$ y $\kappa = \nu^+$ se obtienen directamente de la proposición 9.5. Podemos suponer entonces que κ es un cardinal límite $> \omega$. Sea $\mu = (2^{<\kappa})^+$. Entonces μ es un cardinal regular y es $> \kappa$. Supongamos que $(f_i : i < \mu)$ es una secuencia de elementos de $\mathrm{Fn}(\lambda, 2, \kappa)$ tal que $f_i \perp f_j$ siempre que $i \neq j$. Para cada cardinal $\nu < \kappa$ sea $I_\nu = \{i < \mu : |f_i| = \nu\}$ y sea $I_{\leq\nu} = \{i < \mu : |f_i| \leq \nu\}$. Entonces $\{I_\nu : \nu < \kappa\}$ es una partición de μ y el número de elementos de la partición es $\leq \kappa < \mu$. Como μ es regular, para algún $\nu < \kappa$ debe ser $|I_\nu| = \mu$. Como κ es límite y es $> \omega$, para algún $\nu < \kappa$ infinito $\nu^+ < \kappa$ y $|I_{\leq\nu}| = \mu$. Pero esto contradice a la proposición 9.5 pues $\{f_i : i \in I_{\leq\nu}\} \subseteq \mathrm{Fn}(\lambda, 2, \nu^+)$.

Bibliografía

[1] Keith J. Devlin. *The Joy of Sets. Fundamentals of Contemporary Set Theory.* Springer-Verlag, New York, segunda edición, 1993.

[2] Herbert B. Enderton. *Elements of Set Theory.* Academic Press, New York, 1977.

[3] Paul Halmos. *Naive Set Theory.* Springer–Verlag, Berlin, 1974.

[4] Kenneth Kunen. Combinatorics. En Jon Barwise, editor, *Handbook of Mathematical Logic*, páginas 371–401. North Holland P.C., 1977.

[5] Kenneth Kunen. *Set Theory.* North Holland P.C., Amsterdam, 1980.

[6] Azriel Levy. *Basic Set Theory.* Springer–Verlag, Berlin, 1979.

[7] Robert L. Vaught. *Set Theory. An Introduction.* Birkhäuser, Boston, segunda edición, 1995.