



E N S G
École Nationale
des Sciences
Géographiques

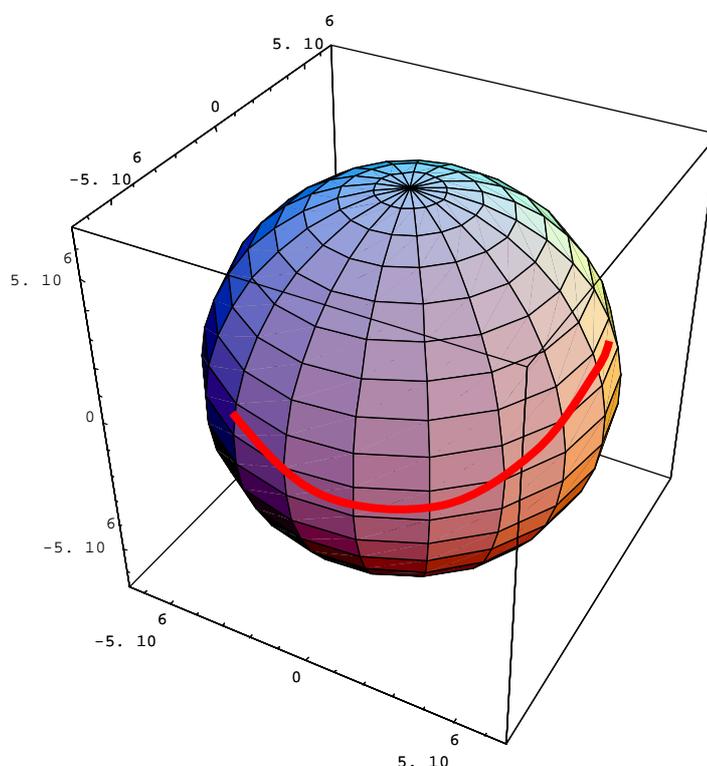
Cours de Géodésie

Chapitre 1

ÉLÉMENTS DE GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE

Version 2.0

01/03/2003



Didier BOUTELOUP
Cellule pédagogique et de recherche en astro-géodésie
Didier.bouteloup@ensg.ign.fr
(33) 01 64 15 31 37

CHAPITRE I

ÉLÉMENTS DE GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE

1	<i>Introduction</i>	4
1.1	Mathématique	4
1.2	Géodésique	4
2	<i>Courbe gauche, Arc paramétré</i>	5
2.1	Définitions	5
2.2	Abscisse curviligne	5
2.3	Trièdre de Frenet	7
2.3.a	Vecteur tangent	7
2.3.b	Vecteur unitaire de normale principale, courbure	7
2.3.c	Vecteur binormal, torsion	9
2.4	Cinématique d'un point	11
3	<i>Nappe paramétrée</i>	12
3.1	Définitions	12
3.1.a	Surface et nappe paramétrée	12
3.1.b	Courbe tracée sur une surface, courbe-coordonnée	12
3.2	Éléments différentiels de 1er ordre	14
3.2.a	Métrique d'une surface	14
3.2.b	Surface régulière	15
3.2.c	Plan tangent, vecteur normal unitaire	16
3.2.d	Coordonnées orthogonales, coordonnées symétriques	16
3.3	Éléments différentiels de 2ème ordre	18
3.3.a	Trièdre de Darboux-Ribaucour	18
3.3.b	Deuxième forme quadratique fondamentale	19
3.3.c	Courbure normale	20
3.3.d	Théorèmes de Meusnier	20
3.3.e	Indicatrice de Dupin	23
3.3.f	Directions principales; rayons de courbure principale	25
4	<i>Ligne géodésique</i>	26
4.1	Définition	26
4.2	Donnée d'une courbe sur une surface	27
4.3	Propriété géométrique fondamentale des lignes géodésiques	28
5	<i>Application aux surfaces de révolution</i>	28
5.1	Définitions	28
5.1.a	Longitude et latitude; parallèle et méridien	29
5.1.b	Azimut	30
5.2	Formes quadratiques fondamentales, directions principales	30
5.3	Lignes géodésiques	32
5.3.a	Équations différentielles caractéristiques	32
5.3.b	Relation de Laplace	33
5.3.c	Relation de Clairaut	34

CHAPITRE I

ÉLÉMENTS DE GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE

1 Introduction

1.1 Mathématique

La géométrie est la branche des mathématiques qui étudie les formes et les figures dans l'espace, leurs relations entre elles et leurs propriétés. On distingue entre autre :

- **La géométrie analytique**

Partie de la géométrie ayant recours au calcul algébrique et analytique .Elle facilite l'étude des propriétés géométriques des courbes et des surfaces et de leurs représentation graphique ou la recherche de « lieux géométriques ».

- **La géométrie différentielle**

Branche de la géométrie visant à étudier les propriétés locales (au voisinage d'un point) et intrinsèques des courbes et des surfaces. La géométrie différentielle est née de la possibilité d'une interprétation cinématique que le calcul infinitésimal apporte à l'étude des courbes

1.2 Géodésique

La géodésie étudie la forme de la terre et dans ce but elle substitue à sa surface topographique des surfaces plus ou moins régulières servant de support :

Surface de référence (ellipsoïde)

Surface de niveau (géoïde)

Ce sont des surfaces à courbure lentement variable et très peu différentes de la sphère. L'étude des propriétés élémentaires des courbes et des surfaces de révolution constitue un préambule à l'étude de la géométrie de l'ellipsoïde et des représentations planes.

Dans ce chapitre et dans la suite de ce cours, nous assimilerons l'espace physique à \mathbf{R}^3 . On le suppose muni d'un repère $\mathbf{R} = (\mathbf{O}; \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$. Nous appellerons \mathcal{B} la base $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$.

2 Courbe gauche, Arc paramétré

2.1 Définitions

Soient $I \subset \mathbf{R}$,

$$f \left(\begin{array}{l} I \longrightarrow \\ t \longrightarrow \end{array} \begin{array}{l} \mathbf{R}^3 \\ f(t) = M \end{array} \right) \text{ avec } M(x, y, z) \in \mathbf{R}^3$$

Appelons $\Gamma = f(I)$. Si f est continue, alors Γ est une courbe de l'espace *d'un seul tenant*.

Définition :

Choisissons $t_0 \in I$ et posons $M_0 = f(t_0)$. Par abus de langage, on note aussi $M(t_0)$.

Par définition, le couple (f, I) où f est une fonction continue est appelé un **arc paramétré**. Γ est appelée le **support** de (f, I) et t_0 est une **origine** de (f, I) .

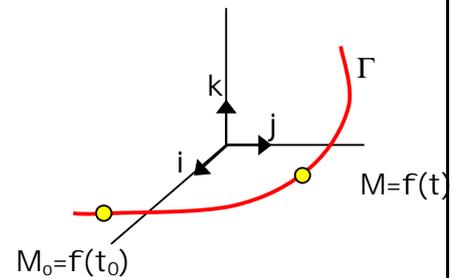


Fig. 1 Représentation schématique d'un arc paramétré et de son support

Abusivement, on dit que (f, I) est un paramétrage de Γ .

Remarquons qu'il est facile de définir d'autres arcs paramétrés admettant Γ comme support. Pour ce faire, il suffit de se donner une fonction φ bijective de I vers $J \subset \mathbf{R}$.

Si on note $g \left(\begin{array}{l} J \longrightarrow \\ x \longrightarrow \end{array} \begin{array}{l} \mathbf{R}^3 \\ f(\varphi^{-1}(x)) \end{array} \right)$, alors (g, J) est un autre arc paramétré de support Γ .

Inversement, soit (f, I) et (g, J) deux arcs paramétrés de même support, alors il existe

$$\varphi \left(\begin{array}{l} I \longrightarrow \\ t \longrightarrow \end{array} \begin{array}{l} J \\ \varphi(t) = t' \end{array} \right) \text{ telle que } t' = g^{-1}(f(t)) .$$

2.2 Abscisse curviligne

Soient $I \subset \mathbf{R}$,

$$f \left(\begin{array}{l} I \longrightarrow \\ t \longrightarrow \end{array} \begin{array}{l} \mathbf{R}^3 \\ f(t) = M \end{array} \right) \text{ avec } M(x, y, z) \in \mathbf{R}^3$$

le nombre $s(t)$ défini par $s(t) = \int_{t_0}^t \|f'(u)\| \cdot du$ est appelé **abscisse curviligne** de $M = f(t)$, comptée à partir de $M_0 = f(t_0)$, pris pour origine et représente la longueur de l'arc orienté M_0M .

la longueur l de la courbe entre M_0 et M est définie par :

$$l = \sum \left(\|\overline{M_0M_1}\| + \|\overline{M_1M_2}\| + \dots + \|\overline{M_nM}\| \right) \text{ et le passage à la forme intégrale}$$

$$l = \int_{M_0M} \|\overline{OM}(t+dt) - \overline{OM}(t)\| = \int_{M_0M} \|d\overline{OM}\| = \int_{t_0}^t \left((dx(t))^2 + (dy(t))^2 + (dz(t))^2 \right)^{1/2} ,$$

or $l = s - s_0 = \int_{s_0}^s ds$ d'où $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$ qui peut aussi s'écrire

$$\left(\frac{ds}{dt} \right)^2 = \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dy}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dz}{dt} \right)^2$$

Cette formule est une propriété caractéristique de l'abscisse curviligne.

→ **Application: une hélice**

Soient $(a, r, h) \in \mathbf{R}^3$, $a > 0$, $r > 0$ et $h > 0$,

$$f \left(\begin{array}{l} [0, a] \longrightarrow \mathbf{R}^3 \\ t \longrightarrow f(t) = M \end{array} \right) \text{ avec } M(x, y, z) \text{ et } \begin{cases} x = r \cos t \\ y = r \sin t \\ z = ht \end{cases} ,$$

$(f, [0, a])$ est un arc paramétré dont le support est appelé une **hélice** \mathcal{H} , r en est le **rayon** et h le **pas**.

Prenons $t_0 = 0$ comme origine. Cherchons l'abscisse curviligne de cet arc:

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2$$

$$= r^2 \sin^2 t + r^2 \cos^2 t + h^2 = r^2 + h^2$$

donc $\frac{ds}{dt} = \sqrt{r^2 + h^2}$ et $s = \sqrt{r^2 + h^2} \times t$

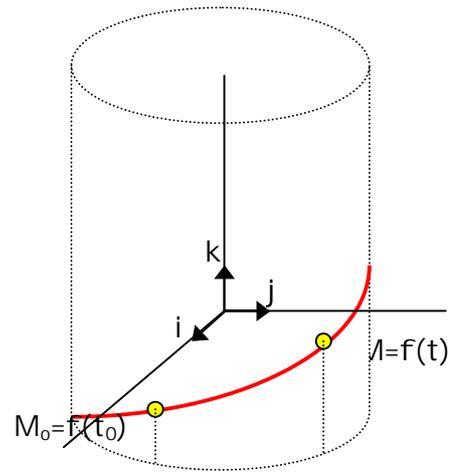
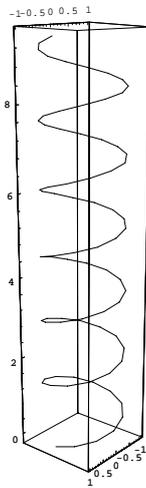


Fig. 2 : Hélice de rayon 1 et de pas 0,25

2.3 Trièdre de Frenet

2.3.a Vecteur tangent

Soient Γ une courbe, $s(t)$ son abscisse curviligne et $M_0 = s(t_0)$ son origine. Appelons $\vec{T} = \frac{df(t)}{ds} = \frac{d\vec{OM}}{ds}$. Par définition de la différentielle, \vec{T} "tangente" Γ au voisinage de

M . De plus, par définition de l'abscisse curviligne, $\|\vec{T}\| = \frac{\|d\vec{OM}\|}{|ds|} = 1$, et \vec{T} est unitaire.

Définition :
 $\vec{T} = \frac{d\vec{OM}}{ds}$ est appelé **vecteur unitaire tangent** de Γ en M_0 .

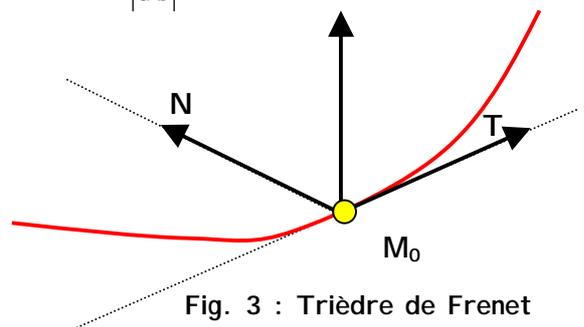


Fig. 3 : Trièdre de Frenet

2.3.b Vecteur unitaire de normale principale, courbure

Intéressons nous à $\frac{d\vec{T}}{ds}$:

- $\frac{d\vec{T}}{ds}$ est orthogonal à \vec{T} ; en effet,

$$\|\vec{T}\|^2 = \vec{T} \cdot \vec{T} = 1 \quad \text{donc} \quad \frac{d(\vec{T} \cdot \vec{T})}{ds} = \frac{d\vec{T}}{ds} \cdot \vec{T} + \vec{T} \cdot \frac{d\vec{T}}{ds} = 2 \frac{d\vec{T}}{ds} \cdot \vec{T} = 0,$$
- $\frac{d\vec{T}}{ds}$ n'est a priori pas unitaire.

Posons:

Définitions :

- $\vec{N} = \frac{\frac{d\vec{T}}{ds}}{\left\| \frac{d\vec{T}}{ds} \right\|}$
- $C = \left\| \frac{d\vec{T}}{ds} \right\|$
-

Par définition, \vec{N} est le **vecteur unitaire de la normale principale** de Γ en M_0 , C en est la **courbure** et R le **rayon de courbure**.

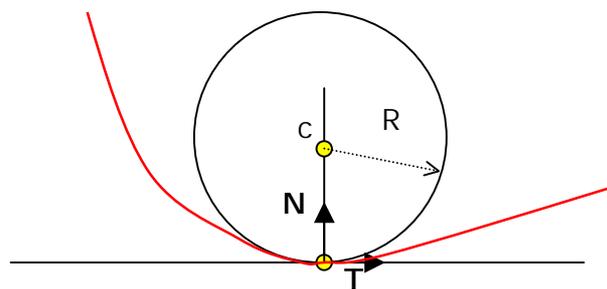
La formule $\frac{\vec{N}}{R} = \frac{d\vec{T}}{ds}$ est appelée **1ère formule de Frenet**.

si $C \neq 0$, alors $R = \frac{1}{C}$

Pour donner une interprétation géométrique de la courbure à Γ en M_0 , étudions la projection γ de Γ dans le plan défini par (M_0, \vec{T}, \vec{N}) , et appelons c le point de ce plan défini par:

$$M_0c = RN$$

Le cercle de centre c et de rayon R est le cercle qui *tangente* le mieux γ et Γ . Il est appelé **cercle osculateur** à Γ en M_0 .



. Fig. 4 : cercle osculateur

Dans le cas particulier où \vec{T} est un vecteur constant, $\frac{d\vec{T}}{ds} = \vec{0}$, $C = 0$ et R n'est pas défini. On dit quelquefois dans ce cas que le rayon de courbure à Γ est infini. Une droite présente une courbure nulle en tout point.

2.3.c Vecteur binormal, torsion

Étudions $\vec{B} = \vec{T} \wedge \vec{N}$:

- \vec{B} est unitaire car \vec{T} et \vec{N} le sont, et donc $\frac{d\vec{B}}{ds}$ est orthogonal à \vec{B}
- $\frac{d\vec{B}}{ds}$ est aussi orthogonal à \vec{T} car $\frac{d\vec{B}}{ds} = \frac{d\vec{T}}{ds} \wedge \vec{N} + \vec{T} \wedge \frac{d\vec{N}}{ds} = \vec{T} \wedge \frac{d\vec{N}}{ds}$.

$\frac{d\vec{B}}{ds}$ est donc forcément colinéaire à \vec{N}

Définition :

Posons $\frac{d\vec{B}}{ds} = \frac{\vec{N}}{\mathfrak{S}}$. Cette formule est la **2ème formule de Frenet**.

Par définition, \vec{B} est le **vecteur binormal** de Γ en M_0 , $\frac{1}{\mathfrak{S}}$ en est la **torsion** et \mathfrak{S} le **rayon de torsion**.

Établissons la **3ème formule de Frenet**:

$$\vec{B} = \vec{T} \wedge \vec{N} \Leftrightarrow \vec{N} = \vec{B} \wedge \vec{T},$$

$$\text{d'où on tire } \frac{d\vec{N}}{ds} = \frac{d\vec{B}}{ds} \wedge \vec{T} + \vec{B} \wedge \frac{d\vec{T}}{ds} = \frac{\vec{N}}{\mathfrak{S}} \wedge \vec{T} + \vec{B} \wedge \frac{\vec{N}}{R}$$

$$\text{or } \vec{N} \wedge \vec{T} = -\vec{B}$$

$$\vec{B} \wedge \vec{N} = -\vec{T}$$

3ème formule de Frenet:

$$\frac{d\vec{N}}{ds} = -\frac{\vec{B}}{\mathfrak{S}} - \frac{\vec{T}}{R}$$

On appelle **trièdre de Frenet** associé à Γ en M_0 le repère de l'espace $(M_0, \vec{T}, \vec{N}, \vec{B})$.

- (M_0, \vec{T}, \vec{N}) définit le **plan osculateur** à Γ en M_0 . C'est le plan qui *contient le mieux* Γ .
- (M_0, \vec{N}, \vec{B}) définit le **plan normal** à Γ en M_0 .
- (M_0, \vec{B}, \vec{T}) définit le **plan rectifiant** à Γ en M_0 .

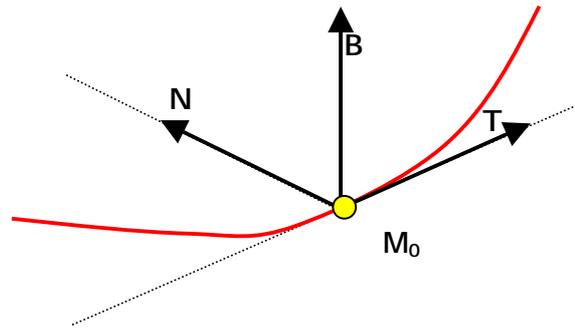


Fig. 5 : Trièdre de Frenet

En résumé :

$\frac{\vec{N}}{R} = \frac{d\vec{T}}{ds}$	1ère formule de Frenet.
$\frac{d\vec{B}}{ds} = \frac{\vec{N}}{\mathfrak{S}}$	2ème formule de Frenet.
$\frac{d\vec{N}}{ds} = -\frac{\vec{B}}{\mathfrak{S}} - \frac{\vec{T}}{R}$	3ème formule de Frenet

→ **Application: l'hélice \mathcal{H}**

Cherchons le rayon et le centre de courbure en tout point M à l'hélice \mathcal{H} définie au

paragraphe précédent, rappelons que $OM \begin{pmatrix} r \cos t \\ r \sin t \\ ht \end{pmatrix}$ et que $\frac{ds}{dt} = \sqrt{r^2 + h^2}$.

On a: $\vec{T} = \frac{d\overline{OM}}{ds} = \frac{d\overline{OM}}{dt} \cdot \frac{dt}{ds}$ et $\vec{T} \begin{pmatrix} -\frac{r}{\sqrt{r^2 + h^2}} \sin t \\ \frac{r}{\sqrt{r^2 + h^2}} \cos t \\ h \\ \sqrt{r^2 + h^2} \end{pmatrix}$

$$\text{Ainsi } \frac{d\vec{T}}{ds} \begin{pmatrix} -\frac{r}{r^2+h^2} \cos t \\ -\frac{r}{r^2+h^2} \sin t \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \left\| \frac{d\vec{T}}{ds} \right\| = \frac{r}{r^2+h^2},$$

$$\vec{N} \begin{pmatrix} -\cos t \\ -\sin t \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } R = \frac{r^2+h^2}{r}.$$

On remarque que \vec{N} est parallèle au plan $(O; \mathbf{i}, \mathbf{j})$ et que la droite $(M; \mathbf{M})$ coupe l'axe $(O; \mathbf{k})$.

Si on prend par exemple $r = 1$ et $h = 0,5$, alors on a $M_c = 1,25N$.

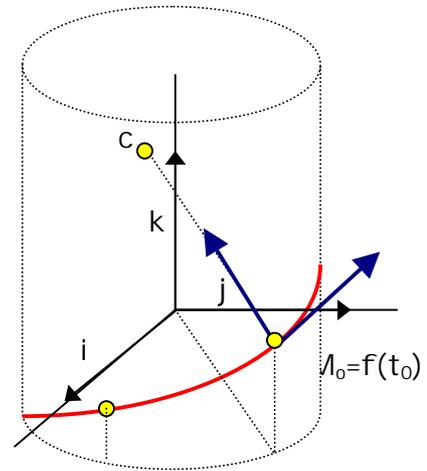


Fig. 6 : Cercle osculateur de l'hélice de rayon 1 et de pas 0,5

2.4 Cinématique d'un point

Si $I \subset \mathbf{R}$ représente un intervalle de temps, alors Γ est appelée **trajectoire** de M lorsque t décrit I , $\frac{d\vec{OM}}{dt}$ est le **vecteur-vitesse** et $\frac{d^2\vec{OM}}{dt^2}$ le **vecteur-accélération** de M .

3 Nappe paramétrée

3.1 Définitions

3.1.a Surface et nappe paramétrée

Soient $D \subset \mathbf{R}^2$,

$$g \left(\begin{array}{ccc} D & \longrightarrow & \mathbf{R}^3 \\ (u, v) & \longrightarrow & g(u, v) = M \end{array} \right) \text{ avec } \overline{OM} = \begin{pmatrix} x(u, v) \\ y(u, v) \\ z(u, v) \end{pmatrix}$$

Appelons $\Sigma = g(D)$. Si g est continue, alors Σ est une surface de l'espace *d'un seul tenant*. Par définition, dans ce cours, le couple (g, D) où g est une fonction continue sera appelé **nappe paramétrée**, et Σ le **support** de la nappe paramétrée. On dit encore que (g, D) et (u, v) sont des **paramétrages** de Σ .

Remarquons que pour une surface Σ donnée, il existe plusieurs nappes paramétrées associées.

3.1.b Courbe tracée sur une surface, courbe-coordonnée

$$\text{Soit } g \left(\begin{array}{ccc} D & \longrightarrow & \mathbf{R}^3 \\ (u, v) & \longrightarrow & g(u, v) = M \end{array} \right) \text{ avec } \overline{OM} = \begin{pmatrix} x(u, v) \\ y(u, v) \\ z(u, v) \end{pmatrix}$$

Soient $I \subset \mathbf{R}$ et $h \left(\begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbf{R}^2 \\ t & \longrightarrow & h(t) = (u, v) \end{array} \right)$ tels que $h(I) \subset D$,

on peut définir $g \circ h$: $g \circ h \left(\begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbf{R}^3 \\ t & \longrightarrow & (g \circ h)(t) = g(u(t), v(t)) \end{array} \right)$

Si h est continue, alors il est clair que $g \circ h$ est un arc paramétré. Appelons Γ son support; on a $\Gamma \subset \Sigma$ et on dit que Γ est **une courbe tracée** ou **inscrite** sur Σ .

On supposera toujours désormais que $D = I \times J$.

Soit $M_0 \in \Sigma$, $M_0 = g(u_0, v_0)$. Intéressons nous aux deux courbes tracées sur Σ définies par les arcs paramétrés suivants:

- 1 - (g_{v_0}, I) avec $g_{v_0} \left(\begin{array}{l} I \longrightarrow \mathbf{R}^3 \\ u \longrightarrow g_{v_0}(u) = g(u, v_0) \end{array} \right)$,
 - 2 - (g_{u_0}, J) avec $g_{u_0} \left(\begin{array}{l} J \longrightarrow \mathbf{R}^3 \\ v \longrightarrow g_{u_0}(v) = g(u_0, v) \end{array} \right)$,
- g_{u_0} et g_{v_0} sont les deux fonctions partielles de g en (u_0, v_0) .

Les supports de (g_{u_0}, J) et (g_{v_0}, I) sont appelés **courbes-coordonnées** de Σ en M_0 relativement au paramétrage (g, D) . On les note respectivement Γ_{u_0} et Γ_{v_0} . On appelle aussi Γ_{u_0} 1^{ère} courbe-coordonnée et Γ_{v_0} 2^{ème} courbe-coordonnée.

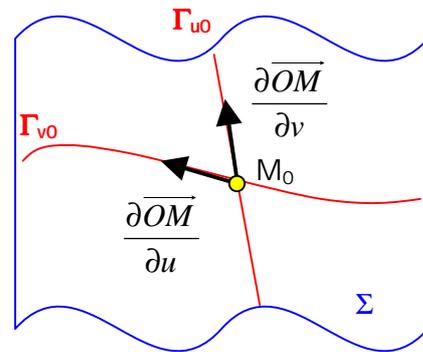


Fig. 7 : courbes coordonnées

On remarque que $\frac{d g_{u_0}}{d v} = \frac{\partial g}{\partial v} = \frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial v}$ est tangent à Γ_{u_0} en M_0 et que $\frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial u}$ est tangent à Γ_{v_0} en M_0 .

→ **Exemples: paramétrages du plan et de la sphère**

Voici deux paramétrages du plan $(O; i, j)$:

① **paramétrage cartésien:** (g, \mathbf{R}^2) avec

$$g \left(\begin{array}{l} \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}^3 \\ (x, y) \longrightarrow g(x, y) = (x, y, 0) \end{array} \right)$$

② **paramétrage polaire:**

(g, D) avec $D = [0, 2\pi] \times [0, +\infty[$ avec

$$g \left(\begin{array}{l} D \longrightarrow \mathbf{R}^3 \\ (\theta, \rho) \longrightarrow g(\theta, \rho) = (\rho \cos \theta, \rho \sin \theta, 0) \end{array} \right)$$

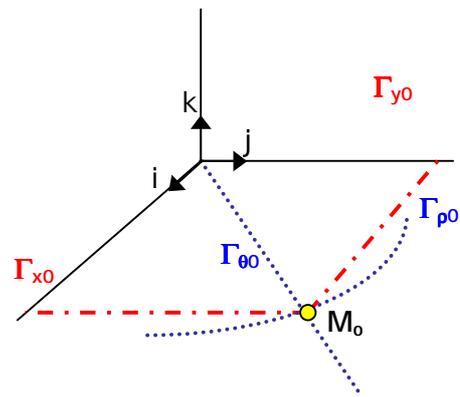


Fig. 8 : Paramétrages cartésien et polaire du plan

③ Paramétrage de la sphère de centre O et de rayon R:

(g, D) avec $D = [0, 2\pi] \times \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ et

$g \left(\begin{array}{l} D \longrightarrow \mathbf{R}^3 \\ (\theta, \psi) \longrightarrow g(\theta, \psi) \end{array} \right)$ telle que

$$\begin{cases} x = R \cos \psi \cos \theta \\ y = R \cos \psi \sin \theta \\ z = R \sin \psi \end{cases}$$

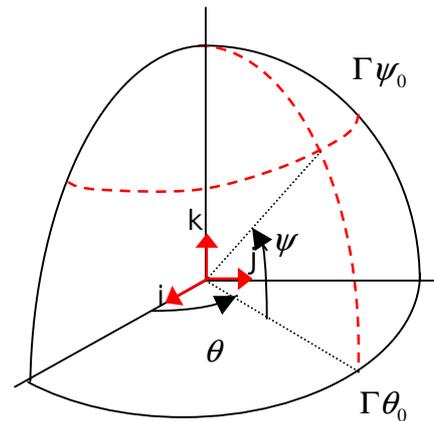
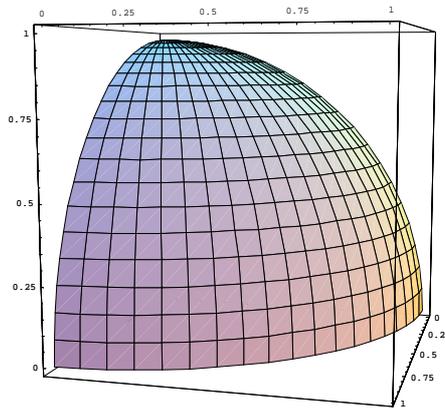


Fig. 9 : Paramétrage de la sphère

3.2 Éléments différentiels de 1er ordre

3.2.a Métrique d'une surface

$g \left(\begin{array}{l} D \longrightarrow \mathbf{R}^3 \\ (u, v) \longrightarrow g(u, v) = M \end{array} \right)$ avec $\overline{OM} = \begin{pmatrix} x(u, v) \\ y(u, v) \\ z(u, v) \end{pmatrix}$

Notons $dg = (dx, dy, dz)$, autrement dit $d\overline{OM} = \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix}$. On a $\begin{cases} dx = \frac{\partial x}{\partial u} du + \frac{\partial x}{\partial v} dv \\ dy = \frac{\partial y}{\partial u} du + \frac{\partial y}{\partial v} dv \\ dz = \frac{\partial z}{\partial u} du + \frac{\partial z}{\partial v} dv \end{cases}$

et si on pose $ds = \|d\overline{OM}\|$ alors l'expression $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$ devient:

$$\begin{aligned} ds^2 &= \left[\left(\frac{\partial x}{\partial u} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u} \right)^2 \right] du^2 + 2 \left[\frac{\partial x}{\partial u} \cdot \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u} \cdot \frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial z}{\partial v} \right] du \cdot dv \\ &+ \left[\left(\frac{\partial x}{\partial v} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v} \right)^2 \right] dv^2 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow ds^2 = \left(\frac{\partial \overline{\text{OM}}}{\partial u} \right)^2 du^2 + 2 \frac{\partial \overline{\text{OM}}}{\partial u} \cdot \frac{\partial \overline{\text{OM}}}{\partial v} du \cdot dv + \left(\frac{\partial \overline{\text{OM}}}{\partial v} \right)^2 dv^2$$

Définition : première forme quadratique fondamentale

Soit, en utilisant la notation

$$\begin{cases} E = \left(\frac{\partial \overline{\text{OM}}}{\partial u} \right)^2 \\ F = \frac{\partial \overline{\text{OM}}}{\partial u} \cdot \frac{\partial \overline{\text{OM}}}{\partial v} \\ G = \left(\frac{\partial \overline{\text{OM}}}{\partial v} \right)^2 \end{cases} : \text{ alors } ds^2 = E du^2 + 2F du dv + G dv^2$$

Cette expression est la **première forme quadratique fondamentale** d'une surface. Elle est indépendante de la nappe paramétrée (g, D) car l'élément de longueur infiniment petit ds est indépendant du paramétrage de Σ . Cette forme quadratique est donc un invariant qui représente la métrique sur Σ .

3.2.b Surface régulière

Définition :

Un point $M \in \Sigma$ est dit point **régulier** de Σ si et seulement si $\frac{\partial \overline{\text{OM}}}{\partial u} \wedge \frac{\partial \overline{\text{OM}}}{\partial v} \neq 0$. Une surface Σ est dite **régulière** si et seulement si tous ses points sont réguliers.

Nous admettrons que la régularité de $M \in \Sigma$ ne dépend pas du paramétrage choisi. La régularité d'une surface Σ est donc une propriété intrinsèque.

Remarquons que $\left\| \frac{\partial \overline{\text{OM}}}{\partial u} \wedge \frac{\partial \overline{\text{OM}}}{\partial v} \right\|^2 = EG - F^2$. Ainsi, dire que Σ est régulière implique

que ds^2 est une forme quadratique définie.

Désormais, nous ne considérerons que des surfaces régulières, et nous pourrons donc noter:

$$H^2 = EG - F^2 \quad \text{avec } H > 0$$

3.2.c Plan tangent, vecteur normal unitaire

Définition :

$\vec{n} = \frac{\frac{\partial \overline{OM}}{\partial u} \wedge \frac{\partial \overline{OM}}{\partial v}}{H}$ est appelé **vecteur unitaire normal** à Σ en M_0 . On appelle **plan tangent** à Σ en M_0 le plan orthogonal à $(M_0; \vec{n})$. Par la suite, nous le noterons conventionnellement Π .

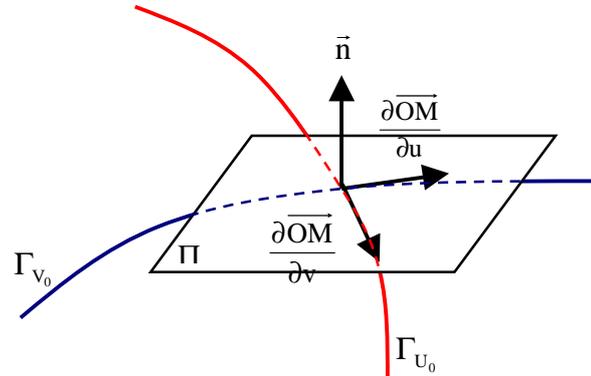


Fig. 10 : Plan tangent à une surface

La notion de droite normale à une surface est un concept essentiel en géométrie.

Le repère $\left(M_0; \frac{\partial \overline{OM}}{\partial u}, \frac{\partial \overline{OM}}{\partial v} \right)$ forme un repère non orthogonal et non normé de Π .

Dans le cas particulier d'une surface Σ définie par une équation cartésienne $F(x, y, z) = 0$, F étant une fonction de \mathbf{R}^3 vers \mathbf{R} , on peut montrer que la normale à Σ admet en tout point $\text{grad } F$ comme vecteur directeur.

3.2.d Coordonnées orthogonales, coordonnées symétriques

L'angle α entre les deux courbes-coordonnées Γ_{u_0} et Γ_{v_0} à Σ en M_0 est donné par la

définition du produit scalaire : $\frac{\partial \overline{OM}}{\partial v} \cdot \frac{\partial \overline{OM}}{\partial u} = \left\| \frac{\partial \overline{OM}}{\partial v} \right\| \cdot \left\| \frac{\partial \overline{OM}}{\partial u} \right\| \cdot \cos \alpha$

D'où l'expression $\cos \alpha = \frac{\frac{\partial \overline{OM}}{\partial v} \cdot \frac{\partial \overline{OM}}{\partial u}}{\left\| \frac{\partial \overline{OM}}{\partial v} \right\| \cdot \left\| \frac{\partial \overline{OM}}{\partial u} \right\|} = \frac{F}{\sqrt{EG}}$ et on a aussi $|\sin \alpha| = \frac{H}{\sqrt{EG}}$.

Les coordonnées (u, v) associées au paramétrage (g, D) de Σ sont dites **orthogonales** si et seulement si, pour tout point de Σ , on a $\frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial u} \cdot \frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial v} = 0$, c'est à dire $F = 0$.

Elles sont dites **symétriques** si, de plus, en tout point $\left\| \frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial u} \right\| = \left\| \frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial v} \right\|$. La

condition de symétrie de (u, v) équivaut donc à : $\begin{cases} E = G \\ F = 0 \end{cases}$.

→ **Applications: coordonnées cartésiennes ou polaires du plan, coordonnées sphériques**

Étudions l'orthogonalité et la symétrie des exemples de paramétrages donnés en II.1.a:

① **Paramétrage cartésien du plan (O; i, j):**

$$\text{OM} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{donc:} \quad \frac{\partial \text{OM}}{\partial x} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \frac{\partial \text{OM}}{\partial y} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

On a $E = G = 1$ et $F = 0$, ce qui montre que les coordonnées (x, y) sont symétriques.

② **Paramétrage polaire du plan (O; i, j):**

$$\text{OM} \begin{pmatrix} \rho \cos \theta \\ \rho \sin \theta \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{donc:} \quad \frac{\partial \text{OM}}{\partial \theta} \begin{pmatrix} -\rho \sin \theta \\ \rho \cos \theta \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \frac{\partial \text{OM}}{\partial \rho} \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \\ 0 \end{pmatrix}$$

Dans ce cas $E = \rho^2$, $F = 0$ et $G = 1$, ce qui montre que les coordonnées (θ, ρ) sont orthogonales non symétriques.

③ **Paramétrage (θ, ψ) de la sphère de centre O et de rayon R avec**

$$\begin{cases} x = R \cos \psi \cos \theta \\ y = R \cos \psi \sin \theta \\ z = R \sin \psi \end{cases}$$

$$\frac{\partial \text{OM}}{\partial \theta} \begin{pmatrix} -R \cos \psi \sin \theta \\ R \cos \psi \cos \theta \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \frac{\partial \text{OM}}{\partial \psi} \begin{pmatrix} -R \sin \psi \cos \theta \\ -R \sin \psi \sin \theta \\ R \cos \psi \end{pmatrix}$$

Dans ce cas $E = R^2 \cos^2 \psi$, $F = 0$ et $G = R^2$, ce qui montre que les coordonnées (θ, ψ) sont orthogonales non symétriques.

3.3 Éléments différentiels de 2ème ordre

3.3.a Trièdre de Darboux-Ribaucour

Définition :

On appelle **vecteur unitaire normal géodésique** \vec{g} défini par $\vec{g} = \vec{n} \wedge \vec{T}$. On appelle **trièdre de Darboux-Ribaucour** le repère orthonormal direct $(M, \vec{T}, \vec{g}, \vec{n})$.

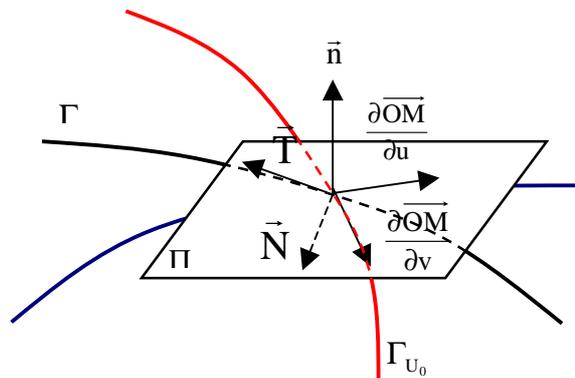


Fig. 11: Trièdre de Darboux-Ribaucour

Remarquons que, par construction, $\vec{N}, \vec{g}, \vec{n}$ et \vec{B} sont orthogonaux à \vec{T} . Désormais, nous appellerons σ l'intersection de Σ avec le plan (M, \vec{g}, \vec{n}) .

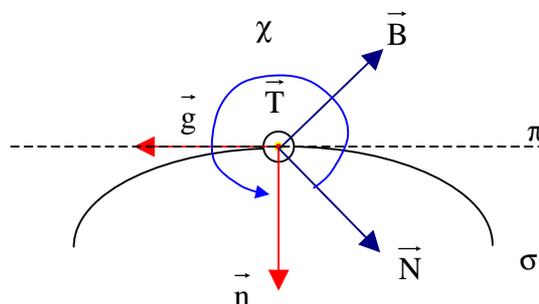


Fig. 12 : Relations entre les trièdres de Darboux-Ribaucour et de Frenet

On appelle χ l'angle orienté entre \vec{N} et \vec{n} .

Il est clair que le trièdre de Frenet $(M, \vec{T}, \vec{N}, \vec{B})$ est obtenu à partir du trièdre de Darboux-Ribaucour $(M, \vec{T}, \vec{g}, \vec{n})$ par rotation positive d'angle $\frac{\pi}{2} - \chi$ autour de (M, \vec{T}) .

On peut donc écrire:

$$\begin{pmatrix} \vec{T} \\ \vec{N} \\ \vec{B} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\left(\frac{\pi}{2}-\chi\right) & \sin\left(\frac{\pi}{2}-\chi\right) \\ 0 & -\sin\left(\frac{\pi}{2}-\chi\right) & \cos\left(\frac{\pi}{2}-\chi\right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{T} \\ \vec{g} \\ \vec{n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sin\chi & \cos\chi \\ 0 & -\cos\chi & \sin\chi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{T} \\ \vec{g} \\ \vec{n} \end{pmatrix}$$

3.3.b Deuxième forme quadratique fondamentale

La deuxième forme quadratique fondamentale est une relation liant χ et le rayon de courbure R à Γ en M .

Cette relation est obtenue en différentiant : $\vec{T} = \frac{d\vec{OM}}{ds} = \frac{\partial\vec{OM}}{\partial u} \cdot \frac{du}{ds} + \frac{\partial\vec{OM}}{\partial v} \cdot \frac{dv}{ds}$

deuxième forme quadratique fondamentale :

$$\text{notation} \begin{cases} L_1 = \frac{\partial^2 \vec{OM}}{\partial u^2} \cdot \vec{n} \\ L_2 = \frac{\partial^2 \vec{OM}}{\partial v \partial u} \cdot \vec{n} \\ L_3 = \frac{\partial^2 \vec{OM}}{\partial v^2} \cdot \vec{n} \end{cases}, \quad \text{formulation : } \frac{\cos \chi}{R} ds^2 = L_1 du^2 + 2L_2 du dv + L_3 dv^2$$

Dans cette dernière formule, le premier membre de l'identité $\left(\frac{\cos \chi}{R} ds^2 \right)$ ne dépend que de Σ et de Γ . Cette formule ne dépend donc pas du paramétrage (u, v) choisi.

On l'appelle **deuxième forme quadratique fondamentale**. Elle est quelquefois écrite sous la forme:

$$\frac{\cos \chi}{R} ds^2 = \Phi(du, dv), \quad \text{avec } \Phi(du, dv) = L_1 du^2 + 2L_2 du dv + L_3 dv^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{\cos \chi}{R} = \frac{L_1 du^2 + 2L_2 du dv + L_3 dv^2}{E du^2 + 2F du dv + G dv^2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\cos \chi}{R} = L_1 \left(\frac{du}{ds} \right)^2 + 2L_2 \frac{du}{ds} \times \frac{dv}{ds} + L_3 \left(\frac{dv}{ds} \right)^2$$

3.3.c Courbure normale

Soit la courbe tracée sur Σ définie comme intersection de Σ avec le plan (M, \vec{T}, \vec{n}) elle est appelée la **section normale** de Σ en M dans la direction de \vec{T} , notée S_M^T .

Le vecteur unitaire de normale principale (\vec{N}) à S_M^T en M est \vec{n} . Donc, pour S_M^T , $\chi \in \{0, \pi\}$ et si R_n est le rayon de courbure de S_M^T en M :

$$\frac{1}{R_n} = \pm \frac{\Phi(du, dv)}{ds^2}$$

R_n est appelé **rayon de courbure normale** de Σ en M dans la direction de \vec{T} .

3.3.d Théorèmes de Meusnier

Premier théorème de Meusnier.

Deux courbes tracées sur Σ passant par M admettant le même plan osculateur (M, \vec{T}, \vec{N}) ont même centre de courbure.

Deuxième théorème de Meusnier.

De plus, soit Γ une courbe quelconque dans la direction de \vec{T} , alors :

$$\frac{\cos \chi}{R} = \frac{\Phi(du, dv)}{ds^2} = \pm \frac{1}{R_n} \quad \Leftrightarrow \quad R = R_n |\cos \chi|$$

Géométriquement, on peut ainsi dire que le rayon de courbure normale est le plus grand rayon de courbure de toutes les courbes tracées sur Σ dans la direction de \vec{T} .

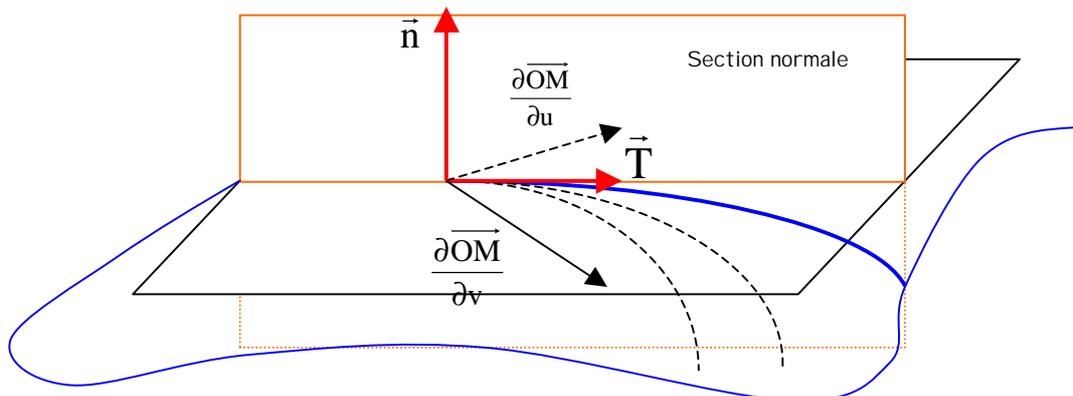


Fig. 13 : Interprétation géométrique du 2ème théorème de Meusnier

➔ Application: cylindre de révolution \mathcal{C}

Le cylindre \mathcal{C} de révolution autour de $(O; i)$ de rayon r est défini comme étant le support de la nappe paramétrée (g, D)

où:

$$D = \mathbf{R} \times [0, 2\pi] \text{ et}$$

$$g \left(\begin{array}{l} D \longrightarrow \mathbf{R}^3 \\ (x, \theta) \longrightarrow g(x, \theta) = M \end{array} \right)$$

$$\text{avec } \mathbf{OM} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \text{ et } \begin{cases} x = x \\ y = r \cos \theta \\ z = r \sin \theta \end{cases}$$

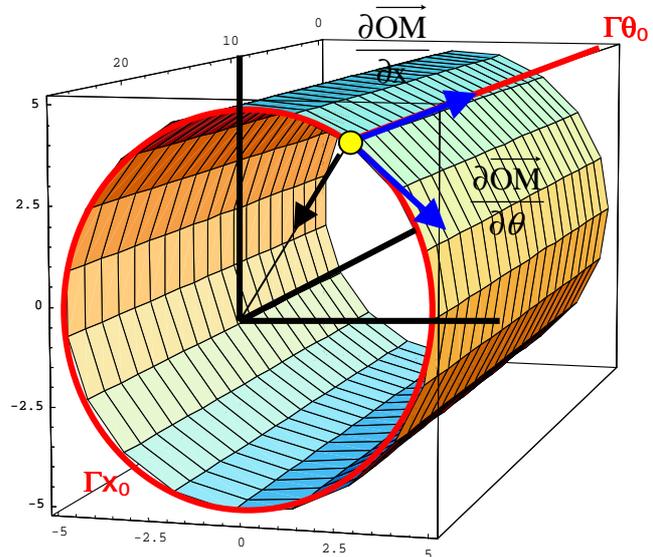


Fig. 14 : Cylindre de révolution \mathcal{C} ($r=5$, $x \in [0, 25]$)

$$\text{On a } \frac{\partial \mathbf{OM}}{\partial x} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } \frac{\partial \mathbf{OM}}{\partial \theta} \begin{pmatrix} 0 \\ -r \sin \theta \\ r \cos \theta \end{pmatrix} \text{ ce qui se résume par:}$$

$$E = 1, \quad F = 0 \quad \text{et} \quad G = r^2 \quad \text{et} \quad ds^2 = dx^2 + r^2 d\theta^2$$

(g, D) forme donc un système de coordonnées orthogonales non symétriques de \mathcal{C} .

$$\text{D'autre part, } \mathbf{n} \begin{pmatrix} 0 \\ -\cos \theta \\ -\sin \theta \end{pmatrix} \text{ et } \frac{\partial^2 \mathbf{OM}}{\partial x^2} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial^2 \mathbf{OM}}{\partial \theta \partial x} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 \mathbf{OM}}{\partial \theta^2} \begin{pmatrix} 0 \\ -r \cos \theta \\ -r \sin \theta \end{pmatrix}$$

On en déduit que $L_1 = L_2 = 0$ et que $L_3 = r$. La deuxième forme quadratique fondamentale s'écrit donc:

$$\frac{r d\theta^2}{dx^2 + r^2 d\theta^2} = \frac{\cos \chi}{R} = \frac{L_3 d\theta^2}{ds^2}$$

Cherchons le rayon de courbure normale à \mathcal{C} dans une direction quelconque. Trois cas doivent être envisagés :

(a) Dans la direction de $\frac{\partial \overline{OM}}{\partial \theta}$:

On a $dx=0$ et $\frac{1}{R_n} = \frac{1}{r}$ soit $R_n = r$.

(b) Dans une direction autre que $\frac{\partial \overline{OM}}{\partial \theta}$ et que $\frac{\partial \overline{OM}}{\partial x}$:

Soit $k \in \mathbf{R}^{+*}$. Se donner la direction $\mathbf{t} = k \frac{\partial \overline{OM}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{OM}}{\partial \theta}$ équivaut à se donner

$\frac{d\theta}{dx} = \frac{1}{k}$, et la 2ème forme quadratique s'écrit alors:

$$\frac{r d\theta^2}{dx^2 + r^2 d\theta^2} = \frac{r \left(\frac{d\theta}{dx}\right)^2}{1 + r^2 \left(\frac{d\theta}{dx}\right)^2} = \frac{\cos \chi}{R} \Leftrightarrow \frac{r}{k^2 + r^2} = \frac{\cos \chi}{R}$$

Pour $\chi = 0$, alors $R_n = \frac{k^2 + r^2}{r}$,

Si k tend vers $+\infty$, autrement dit si la direction \mathbf{t} tend vers $\frac{\partial \overline{OM}}{\partial x}$, alors R_n tend vers $+\infty$.

(c) Dans la direction de $\frac{\partial \overline{OM}}{\partial x}$:

La section normale dans cette direction est une droite, et le rayon de courbure normale n'est pas défini.

3.3.e Indicatrice de Dupin

On rapporte le plan tangent Π au repère normal non orthogonal

$$\mathfrak{R}_\Pi = \left(M_0; \frac{1}{\sqrt{E}} \times \frac{\partial \overline{OM}}{\partial u}, \frac{1}{\sqrt{G}} \times \frac{\partial \overline{OM}}{\partial v} \right).$$

L'**indicatrice de Dupin** « D » est l'ensemble des points P de Π définis par:
 $\overline{M_0P} = \sqrt{R_n} \cdot \vec{T}$ lorsque \vec{T} varie autour de M_0 .

Appelons (α, β) les coordonnées d'un point P quelconque de « D » dans le repère \mathfrak{R}_Π .

On a donc:
$$\overline{M_0P} = \alpha \frac{1}{\sqrt{E}} \times \frac{\partial \overline{OM}}{\partial u} + \beta \frac{1}{\sqrt{G}} \times \frac{\partial \overline{OM}}{\partial v}$$

Mais d'autre par $\overline{M_0P} = \sqrt{R_n} \vec{T} = \sqrt{R_n} \frac{du}{ds} \times \frac{\partial \overline{OM}}{\partial u} + \sqrt{R_n} \frac{dv}{ds} \times \frac{\partial \overline{OM}}{\partial v}$.

Par identification, on en déduit que
$$\begin{cases} \frac{du}{ds} = \frac{\alpha}{\sqrt{E} \sqrt{R_n}} \\ \frac{dv}{ds} = \frac{\beta}{\sqrt{G} \sqrt{R_n}} \end{cases}$$

Le deuxième forme quadratique fondamentale peut alors s'écrire:

$$\varepsilon \frac{\cos \chi}{R} = \frac{\varepsilon}{R_n} = \frac{L_1 \alpha^2}{E R_n} + 2 \frac{L_2 \alpha \beta}{\sqrt{E} \sqrt{G} R_n} + \frac{L_3 \beta^2}{G R_n}, \quad \varepsilon \in \{-1, 1\}$$

Et, pour $\chi \in \{0, \pi\}$:

$$\frac{L_1}{E} \alpha^2 + 2 \frac{L_2}{\sqrt{E} \sqrt{G}} \alpha \beta + \frac{L_3}{G} \beta^2 = \pm 1$$

De la forme de :
 $ax^2 + by^2 + cxy = 1$

Ceci est l'équation cartésienne d'une conique. Le type de cette conique (ellipse, hyperbole, parabole ou conique dégénérée) est donné par le signe de $L_2^2 - L_1 L_3$.

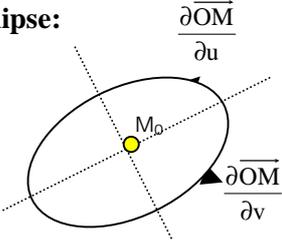
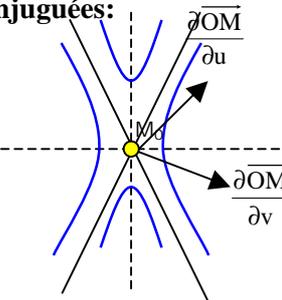
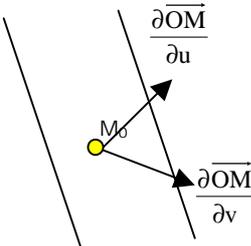
<i>Signe de $L_2^2 - L_1L_3$</i>	<i>Indicatrice de Dupin</i>	<i>Type de surface (propriété locale)</i>
$L_2^2 - L_1L_3 < 0$	Ellipse: 	R_n est défini dans toutes les directions. \mathbf{N} ne change pas de sens au voisinage de M_0 et Σ est localement d'un seul côté de Π . Σ est dite localement convexe et le point M_0 est dit point elliptique .
$L_2^2 - L_1L_3 > 0$	Deux hyperboles conjuguées: 	Il existe deux directions dans lesquelles R_n n'est pas défini. \mathbf{N} change de sens au voisinage de M_0 . Σ est dite localement à cour-bures opposées ; elle a localement la forme d'un "col" (cf. fig. 26). M_0 est dit point hyperbollique .
$L_2^2 - L_1L_3 = 0$	Deux droites parallèles: 	Le comportement local de Σ ne peut pas être caractérisé. M_0 est dit point parabollique . Par exemple, tout point d'un cylindre de révolution est parabollique.

Fig. 15 : Typologie locale des surfaces en fonction de l'indicatrice de Dupin

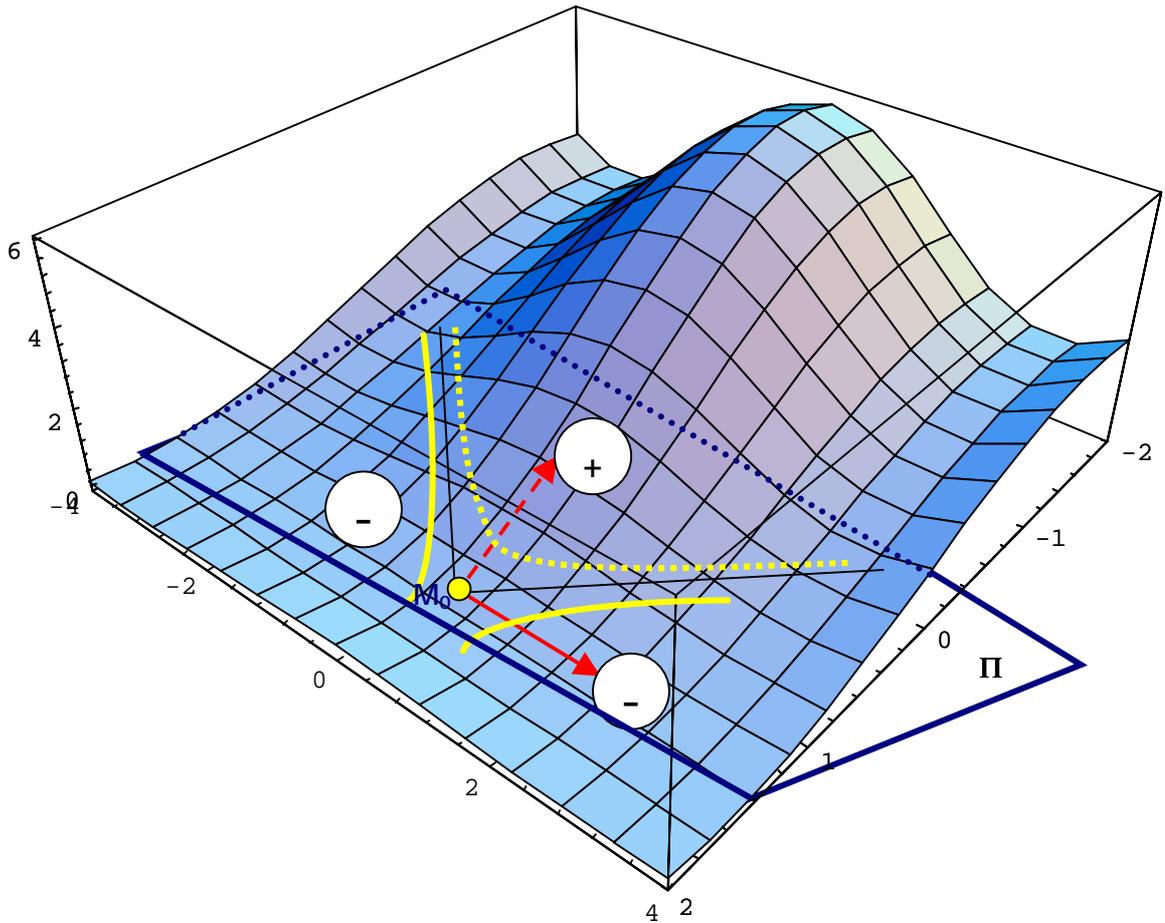


Fig. 16 : Surface à courbures opposées localement

3.3.f Directions principales; rayons de courbure principale

Définitions :

On supposera désormais que $L_2^2 \neq L_1L_3$.

On appelle **directions principales** de Σ en M_0 les deux axes de symétrie de l'indicatrice de Dupin en M_0 .

On appelle **rayons de courbure principale** R_1 et R_2 les rayons de courbure normale dans les deux directions principales.

L'étude précédente nous a graphiquement montré que R_1 et R_2 sont deux extrema de R_n lorsque \vec{T} varie autour de M_0 :

- si $L_2^2 - L_1L_3 < 0$ (point elliptique): les rayons de courbure principale sont un minimum et un maximum,
- si $L_2^2 - L_1L_3 > 0$ (point hyperbollique): ce sont deux minima.

Les deux directions principales correspondent aux axes des coniques et sont donc orthogonales.

$$\begin{cases} \frac{\alpha^{*2}}{a^2} + \frac{\beta^{*2}}{b^2} = 1 & \text{(point elliptique)} \\ \text{ou} \\ \frac{\alpha^{*2}}{a^2} - \frac{\beta^{*2}}{b^2} = 1 & \text{(point hyperbollique)} \end{cases}$$

Dans le cas d'un point elliptique, l'équation cartésienne de l'indicatrice de Dupin dans un repère orthonormé $(M_0; \vec{u}^*, \vec{v}^*)$ est :

$$\frac{\alpha^{*2}}{R_1} + \frac{\beta^{*2}}{R_2} = 1$$

Soit \vec{T} vecteur unitaire quelconque de Π ;
 $\vec{T} = \cos \psi \vec{u}^* + \sin \psi \vec{v}^*$.

Soit $P \in D$ dans la direction de \vec{T} , on a :

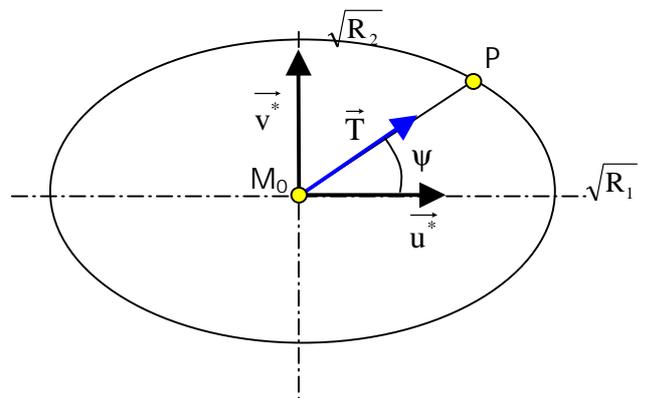


Fig. 17 : Directions principales du plan tangent

$$\overrightarrow{M_0P} = \sqrt{R_n} \vec{T} = \sqrt{R_n} (\cos \psi \vec{u}^* + \sin \psi \vec{v}^*) = \cos \psi \sqrt{R_n} \vec{u}^* + \sin \psi \sqrt{R_n} \vec{v}^*$$

Or $\overrightarrow{M_0P} = \alpha^* \vec{u}^* + \beta^* \vec{v}^*$ d'où :

$$\begin{cases} \alpha^* = \sqrt{R_n} \cos \psi \\ \beta^* = \sqrt{R_n} \sin \psi \end{cases}$$

On a donc

$$\boxed{\frac{1}{R_n} = \frac{\cos^2 \psi}{R_1} + \frac{\sin^2 \psi}{R_2}} \quad \text{(formule d'Euler)}$$

4 Ligne géodésique

4.1 Définition

On appelle **ligne géodésique** sur Σ toute courbe Γ_G inscrite sur Σ telle que, en tout point de Γ_G , $\vec{n} = \vec{N}$.

Remarquons que les trois propositions suivantes sont équivalentes :

- en tout point de Γ_G , $\vec{n} = \pm \vec{N}$,
- en tout point de Γ_G , $\chi = 0$ ou $\chi = \pi$,
- en tout point de Γ_G , $R = R_n$.

4.2 Donnée d'une courbe sur une surface

Soit γ une courbe tracée sur Σ . Rappelons que la donnée de γ revient à la donnée de $I \subset \mathbf{R}$ et de f tels que :

$$f \left(\begin{array}{l} I \longrightarrow \mathbf{R}^2 \\ s \longrightarrow f(s) = (u(s), v(s)) \end{array} \right) \quad \text{avec } f(I) \subset D$$

$(g \circ f, I)$ est bien un arc paramétré de support γ . Déterminer γ revient donc pratiquement à déterminer $u(s)$ et $v(s)$. Il se démontre rapidement que la condition $\vec{n} = \vec{N}$ en tout point équivaut au système d'équation différentiel suivant:

$$\begin{cases} \frac{1}{2} \times \frac{\partial E}{\partial u} \left(\frac{du}{ds} \right)^2 + E \frac{d^2 u}{ds^2} + F \frac{d^2 v}{ds^2} + \left(\frac{\partial F}{\partial v} - \frac{1}{2} \times \frac{\partial G}{\partial u} \right) \left(\frac{dv}{ds} \right)^2 + \frac{\partial E}{\partial v} \times \frac{du}{ds} \times \frac{dv}{ds} = 0 \\ \left(\frac{\partial F}{\partial u} - \frac{1}{2} \times \frac{\partial E}{\partial v} \right) \left(\frac{du}{ds} \right)^2 + F \frac{d^2 u}{ds^2} + G \frac{d^2 v}{ds^2} + \frac{1}{2} \times \frac{\partial G}{\partial v} \left(\frac{dv}{ds} \right)^2 + \frac{\partial G}{\partial u} \times \frac{du}{ds} \times \frac{dv}{ds} = 0 \end{cases}$$

→ Applications:

⊙ **Plan** $(O; i, j)$ défini par ses coordonnées cartésiennes (x, y)

$$\text{OM} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial \text{OM}}{\partial x} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial \text{OM}}{\partial y} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{cases} E = G = 1 \\ F = 0 \end{cases}$$

Le système différentiel des lignes géodésiques se simplifie beaucoup car E, F et G sont constants d'où :

$$\begin{cases} \frac{d^2 x}{ds^2} = 0 \\ \frac{d^2 y}{ds^2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{dx}{ds} = \alpha \\ \frac{dy}{ds} = \beta \end{cases} \Leftrightarrow \text{(A)} \begin{cases} x - x_0 = \alpha s \\ y - y_0 = \beta s \end{cases}, \quad \alpha \text{ et } \beta \text{ étant deux constantes}$$

Le système (A) est l'équation de la droite $(M_0; u)$ passant par $M_0(x_0, y_0, 0)$ et de

$$\text{vecteur directeur } u \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ 0 \end{pmatrix}.$$

⊗ Sphère δ de centre C et de rayon R

On peut montrer que les lignes géodésiques d'une sphère sont les grands cercles de la sphère; c'est-à-dire les intersections de δ avec les plans passant par C .

4.3 Propriété géométrique fondamentale des lignes géodésiques

Soient M_0 et M_1 deux points de Σ , et γ une courbe inscrite sur Σ passant par M_0 et M_1 , appelons $I_{M_0M_1}^{(\gamma)}$ la longueur de γ entre M_0 et M_1 :

$$I_{M_0M_1}^{(\gamma)} = \int_{M_0M_1} ds^{(\gamma)} = \int_{M_0M_1} \sqrt{E du^2 + 2F du dv + G dv^2}$$

On admet que, lorsque γ varie, $I_{M_0M_1}^{(\gamma)}$ prend une valeur minimale pour Γ_G .

La ligne géodésique est la courbe inscrite sur Σ la **plus courte** entre deux points.

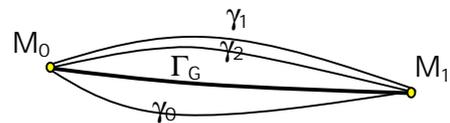


Fig. 18 : Ligne géodésique entre deux points

5 Application aux surfaces de révolution

5.1 Définitions

Soient Δ une droite et Γ_m une courbe plane, Δ et Γ_m étant coplanaires. La surface engendrée par rotation de Γ_m autour de Δ est appelée **surface de révolution**. Δ est son **axe de révolution** et Γ_m en est une **courbe méridienne**.

Munissons Δ d'un repère normé $(C; \vec{K})$,

Choisissons I tel que $(C; \vec{I}, \vec{K})$ soit un repère orthonormal du plan contenant Γ_m .

Soit $\vec{J} = \vec{K} \wedge \vec{I}$. et $R_r = (C; \vec{I}, \vec{J}, \vec{K})$ est un repère orthonormal direct de l'espace.

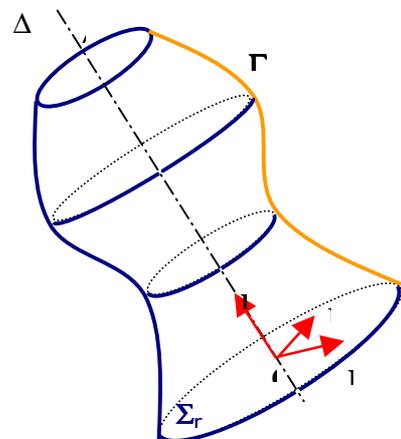


Fig. 19 : Surface de révolution

Alors l'abscisse curviligne (S, I) de Γ_m s'exprime sous la forme:

$$S \left(\begin{array}{l} I \longrightarrow \mathbf{R}^3 \\ t \longrightarrow S(t) = M \end{array} \right) \text{ avec } M(X, Y, Z)_{\mathbf{R}_r} \text{ et } \begin{cases} X = r(t) \\ Y = 0 \\ Z = Z(t) \end{cases}$$

De même, la surface de révolution caractérisée par Δ et Γ_m admet le paramétrage (g, D) défini comme il suit:

$$D = [0, 2\pi] \times I$$

$$g \left(\begin{array}{l} D \longrightarrow \mathbf{R}^3 \\ (\lambda, t) \longrightarrow g(\lambda, t) = M \end{array} \right) \text{ avec } M(X, Y, Z)_{\mathbf{R}_r} \text{ et } \begin{cases} X = r(t) \cos \lambda \\ Y = r(t) \sin \lambda \\ Z = Z(t) \end{cases}$$

5.1.a Longitude et latitude; parallèle et méridien

Désormais, on prendra toujours les hypothèses suivantes:

- $\Delta = (0; \vec{k})$,
- \mathbf{R} et \mathbf{R}_r sont confondus.

On peut toujours se ramener à ce cas particulier par un changement de repère. Cette hypothèse n'enlève donc rien à la généralité de l'étude.

Le paramètre λ est appelé **longitude** et tout paramétrage t de la courbe méridienne Γ_m est appelé **latitude**. Pour certains paramétrages particuliers de Γ_m , le terme générique de "latitude" est précisé par un adjectif.

Étudions les courbes-coordonnées à Σ selon le paramétrage $(g, [0, 2\pi] \times I)$:

- Γ_{t_0} est un cercle de centre $C(0,0,Z(t_0))$ et de rayon $r(t_0)$. Γ_{t_0} est appelé **cercle parallèle**, ou **parallèle**, de Σ . Les parallèles sont des courbes planes.
- Γ_{λ_0} est l'image de Γ_m par rotation positive d'angle λ_0 autour de $(O; \vec{k})$. C'est donc aussi une courbe plane. Γ_{λ_0} est appelée **courbe méridienne**, ou **méridien**, de Σ . Tout plan passant par Δ contient une courbe-coordonnées Γ_{λ_0} , et est à ce titre appelé **plan méridien**.

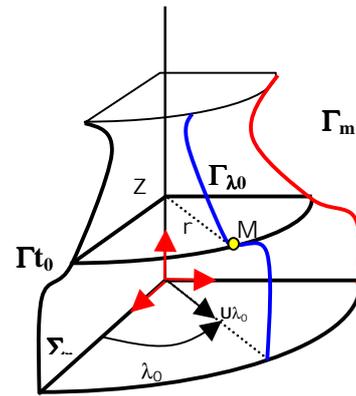


Fig. 20 : Paramétrage d'une surface de révolution

5.1.b Azimut

Soit Σ une surface de révolution, on notera

$$\vec{T}_m = \frac{1}{\sqrt{G}} \times \frac{\partial \overline{OM}}{\partial t} \text{ et}$$

$$\vec{T}_p = \frac{1}{\sqrt{E}} \times \frac{\partial \overline{OM}}{\partial \lambda} .$$

On rapportera toujours le plan tangent à Σ en M au repère orthonormal

$$\mathbf{R}_\Pi = (M; \vec{T}_p, \vec{T}_m).$$

Définition :

L'**azimut** Az d'une courbe Γ tracée sur Σ passant par M est l'angle mesuré dans le plan tangent entre \vec{T}_m et \vec{T} , vecteur unitaire tangent à Γ en M .

$$Az \text{ vérifie donc: } \cos Az = \vec{T} \cdot \vec{T}_m .$$

Un point M de Γ où $Az = \pm \frac{\pi}{2}$ est appelé **vertex** de Γ .

Une courbe de Σ le long de laquelle l'azimut est constant est appelée une **loxodromie**.

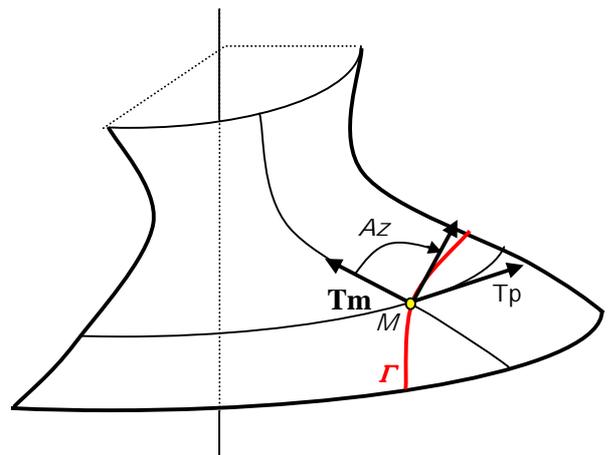


Fig. 21 : Azimut d'une ligne géodésique

5.2 Formes quadratiques fondamentales, directions principales

On a immédiatement: $\frac{\partial \overline{\text{OM}}}{\partial \lambda} \begin{pmatrix} -\sin \lambda r \\ \cos \lambda r \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\frac{\partial \overline{\text{OM}}}{\partial t} \begin{pmatrix} \cos \lambda r' \\ \sin \lambda r' \\ Z' \end{pmatrix}$

Autrement dit; $E = r^2$, $F = 0$ et $G = r'^2 + Z'^2$

(λ, t) sont donc des coordonnées orthogonales a priori non symétriques, et la première forme quadratique fondamentale s'écrit:

$$ds^2 = \underbrace{r^2 d\lambda^2}_{ds_p^2} + \underbrace{(r'^2 + Z'^2) dt^2}_{ds_m^2}$$

On remarque que ds_p est un élément de longueur infiniment petit le long du parallèle (c'est à dire lorsque t est constant) et ds_m un élément de longueur infiniment petit le long du méridien lorsque $d\lambda$ est nul).

On obtient géométriquement les relations liant l'azimut, $d\lambda$ et dt :

$$\tan Az = \pm \frac{ds_p}{ds_m} = \frac{r d\lambda}{\sqrt{r'^2 + Z'^2} dt}$$

$$\cos Az = \sqrt{r'^2 + Z'^2} \frac{dt}{ds}$$

$$\sin Az = r \frac{d\lambda}{ds}$$

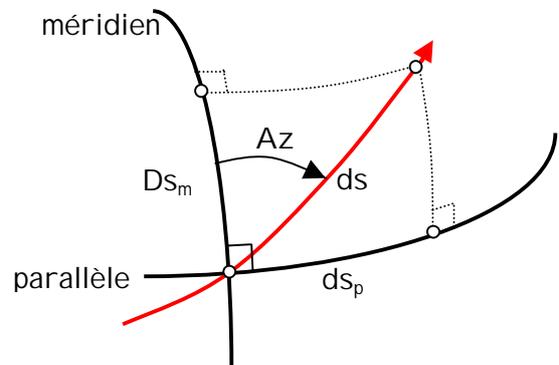


Fig. 22 :Relation entre Az et ds

Écrivons la deuxième forme quadratique fondamentale:

$$\frac{\partial \overline{\text{OM}}}{\partial \lambda} \wedge \frac{\partial \overline{\text{OM}}}{\partial t} \begin{pmatrix} \cos \lambda r Z' \\ \sin \lambda r Z' \\ -r r' \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \left\| \frac{\partial \overline{\text{OM}}}{\partial \lambda} \wedge \frac{\partial \overline{\text{OM}}}{\partial t} \right\| = |r| \sqrt{G}$$

Si on suppose que $G \neq 0$, alors:

$$\bar{n} \begin{pmatrix} \cos \lambda \frac{Z'}{\sqrt{G}} \\ \sin \lambda \frac{Z'}{\sqrt{G}} \\ -\frac{r'}{\sqrt{G}} \end{pmatrix}$$

On remarque que la droite normale $(M; \bar{n})$ coupe l'axe $(O; \bar{k})$ puisque la projection de \bar{n} sur $(O; \bar{i}, \bar{j})$ est colinéaire à $\bar{u}_\lambda = \cos \lambda \bar{i} + \sin \lambda \bar{j}$

$$\frac{\partial^2 \overline{\text{OM}}}{\partial \lambda^2} \begin{pmatrix} -\cos \lambda r \\ -\sin \lambda r \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad L_1 = -\frac{Z' r}{\sqrt{G}}$$

$$\frac{\partial^2 \overline{\text{OM}}}{\partial \lambda \partial t} \begin{pmatrix} -\sin \lambda r' \\ \cos \lambda r' \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad L_2 = 0$$

$$\frac{\partial^2 \overline{\text{OM}}}{\partial t^2} \begin{pmatrix} \cos \lambda r'' \\ \sin \lambda r'' \\ Z'' \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad L_3 = \frac{Z'r'' - r'Z''}{\sqrt{G}}$$

L'indicatrice de Dupin est donc, selon le signe de $L_1 L_3$, soit une ellipse, soit une hyperbole; son équation cartésienne dans le trièdre R_n est:

$$\frac{L_1}{E} \alpha^2 + \frac{L_3}{G} \beta^2 = \pm 1$$

Notons entre autres que les parallèles et méridiens sont les directions principales en tout lieu.

Cherchons R_1 et R_2 .

(a) Dans la direction du méridien

Soit R_1 est le rayon de courbure principal dans la direction du méridien. Le méridien est la section normale dans la direction de T_m et donc R_1 est le rayon de courbure du méridien.

L'écriture de la deuxième forme quadratique fondamentale dans le cas où $d\lambda = 0$ donne:

$$\frac{1}{R_m} = \frac{\left| L_1 d\lambda^2 + 2L_2 d\lambda dt + L_3 dt^2 \right|}{\left| E d\lambda^2 + 2F d\lambda dt + G dt^2 \right|} = \frac{|L_3|}{|G|} = \frac{|Z'r'' - r'Z''|}{(r'^2 + Z'^2)^{3/2}}$$

(b) Dans la direction du parallèle

$$R_p = \frac{|E|}{|L_1|} = \frac{|r|(r'^2 + Z'^2)^{1/2}}{|Z'|}$$

5.3 Lignes géodésiques

5.3.a Équations différentielles caractéristiques

Dans le cas d'une surface de révolution, le système caractéristique d'équations différentielles se simplifie beaucoup:

$$\begin{cases} \text{(A)} & E \frac{d^2 \lambda}{ds^2} + \frac{dE}{dt} \times \frac{d\lambda}{ds} \times \frac{dt}{ds} = 0 \\ \text{(B)} & -\frac{1}{2} \times \frac{dE}{dt} \times \left(\frac{d\lambda}{ds} \right)^2 + G \frac{d^2 t}{ds^2} + \frac{1}{2} \times \frac{dG}{dt} \times \left(\frac{dt}{ds} \right)^2 = 0 \end{cases}$$

5.3.b Relation de Laplace

Les parallèles ne sont pas des sections (schéma dans le plan méridien) normales, \vec{n} et \vec{N}_p ne sont pas colinéaires.

Avec les notations habituelles, notons χ_p l'angle entre la normale au parallèle \vec{N}_p et la normale à la surface \vec{n} .

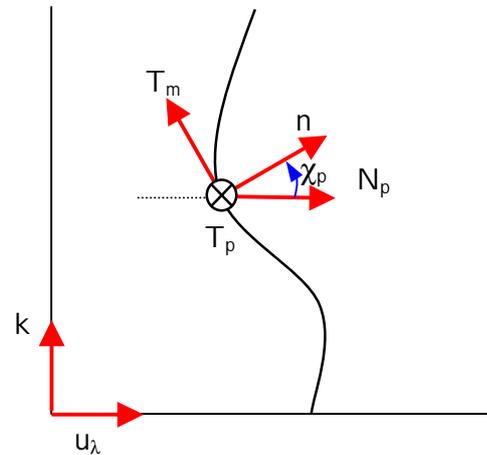


Fig. 23 : Orientation d'un parallèle par rapport à la normale

$$\text{On a: } \vec{N}_p \cdot \vec{T}_m = -\cos\left(\frac{\pi}{2} - \chi_p\right) = \sin \chi_p$$

$$= \frac{\frac{\partial^2 \overline{OM}}{\partial \lambda^2}}{\left\| \frac{\partial^2 \overline{OM}}{\partial \lambda^2} \right\|} \cdot \frac{\frac{\partial \overline{OM}}{\partial t}}{\left\| \frac{\partial \overline{OM}}{\partial t} \right\|} = \frac{1}{r\sqrt{G}} \times \frac{\partial^2 \overline{OM}}{\partial \lambda^2} \cdot \frac{\partial \overline{OM}}{\partial t} = -\frac{r'}{\sqrt{G}}$$

$$\text{Nous retenons que } \sin \chi_p = -\frac{r'}{\sqrt{G}}$$

$$\text{Or } \begin{cases} \frac{d\lambda}{ds} = \frac{\sin Az}{r} \\ E = r^2 \end{cases} \text{ . Donc l'équation (B) s'écrit:}$$

$$r^2 \frac{\cos Az}{r} \times \frac{dAz}{ds} - \frac{r^2 \sin Az}{r^2} \times \frac{dr}{ds} + 2r \frac{dr}{ds} \times \frac{\sin Az}{r} = 0$$

$$\Leftrightarrow r \cos Az dAz + \sin Az dr = 0$$

$$\Leftrightarrow dAz = -\tan Az \frac{dr}{r} = -\frac{r}{\sqrt{G}} \times \frac{d\lambda}{dt} \times \frac{dr}{r} = \sin \chi_p d\lambda$$

Il en résulte la **relation de Laplace**:

$$dAz = \sin \chi_p d\lambda$$

5.3.c Relation de Clairaut

On remarque que la première équation s'intègre facilement:

$$(A) \Leftrightarrow E \frac{d^2 \lambda}{ds^2} + \frac{dE}{ds} \times \frac{d\lambda}{ds} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{d}{ds} \left(E \frac{d\lambda}{ds} \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow E \frac{d\lambda}{ds} = C, \quad C \text{ constante}$$

$$\text{Or} \quad E \frac{d\lambda}{ds} = r^2 \frac{\sin Az}{r} = r \sin Az.$$

Nous retiendrons le théorème ci-après:

relation de Clairaut

Sur une ligne géodésique, $r \sin Az$ est constant

$C = r \sin Az$ est la **constante de Clairaut**.



E N S G
École Nationale
des Sciences
Géographiques

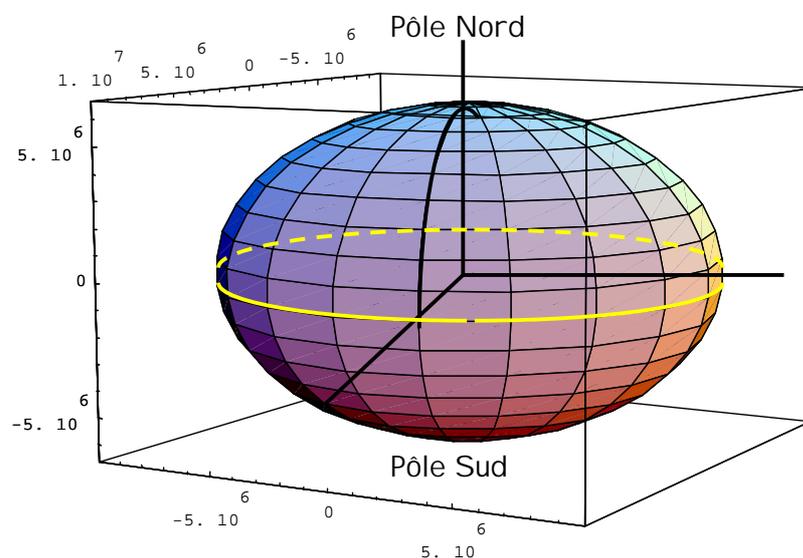
Cours de Géodésie

Chapitre 2

GEOMETRIE DE L'ELLIPSOÏDE

Version 2.0

01/03/2003



Didier BOUTELOUP
Cellule pédagogique et de recherche en astro-géodésie
Didier.bouteloup@ensg.ign.fr
(33) 01 64 15 31 37

CHAPITRE II

GEOMETRIE DE L'ELLIPSOIDE DE REVOLUTION APLATI

1	<i>Ellipse et ellipsoïde</i>	3
1.1	Ellipse	3
1.1.a	Définition	3
1.1.b	Caractérisation	4
1.2	Ellipsoïde de révolution aplati	5
2	<i>Paramétrages de l'ellipsoïde</i>	7
2.1	Latitude paramétrique	7
2.2	Latitude géographique	8
2.3	Latitude géocentrique	10
2.4	Paramétrage symétrique, Latitude isométrique	11
3	<i>Rayons de courbures principaux; sphères d'approximation</i>	12
3.1	Rayons de courbures principaux	12
3.2	Sphères d'approximation	15
3.3	Loxodromie	15
4	<i>Calcul d'un arc d'ellipse méridienne</i>	15
5	<i>Passages entre coordonnées cartésiennes et géographiques</i>	17
5.1	Passage des coordonnées géographiques aux coordonnées cartésiennes	17
5.2	Passage des coordonnées cartésiennes aux coordonnées géographiques	18
6	<i>Calcul des lignes géodésiques</i>	20
6.1	Problématique	20
6.2	Méthode locale par utilisation d'une sphère d'approximation	24
6.2.a	Utilisation du repère local en M_1	24
6.2.b	Problème direct	26
6.2.c	Problème inverse	28
ANNEXES		29

CHAPITRE II

GÉOMÉTRIE DE L' ELLIPSOÏDE DE RÉVOLUTION APLATI

1 Ellipse et ellipsoïde

1.1 Ellipse

1.1.a Définition

Rappelons que la fonction $A \left(\begin{array}{c} \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}^3 \\ M \longrightarrow A(M) = P \end{array} \right)$ avec $\overline{\mathbf{OM}} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $\overline{\mathbf{OP}} \begin{pmatrix} kx \\ y \\ z \end{pmatrix}$ est appelée une **affinité** de rapport k selon \vec{i} .

On appelle **ellipse** l'image d'un cercle par une affinité.

Une ellipse est donc une courbe plane. Désormais, nous n'étudierons que les ellipses inscrites dans le plan $(O; \vec{i}, \vec{k})$ issues d'un cercle \mathcal{C} centré en O par une affinité de rapport $k < 1$ selon \vec{k} . Cette hypothèse n'est pas réductrice; en effet, il est immédiat de s'y ramener par un changement de repère.

Conventionnellement, on note a le rayon du cercle \mathcal{C} . Les axes $(O; \vec{i})$ et $(O; \vec{k})$ sont appelés respectivement **grand axe** et **petit axe** de l'ellipse.

Les longueurs a et b en sont respectivement le demi grand axe et le demi petit axe.

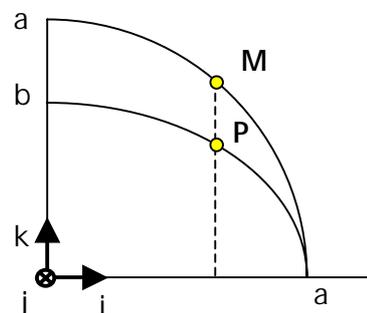


Fig. 1 : Ellipse

Une condition nécessaire et suffisante pour que M appartienne à \mathcal{C} étant:

$$\|\overline{\mathbf{OM}}\| = a \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{a^2} = 1 \quad ,$$

on en déduit l'équation cartésienne de l'ellipse transformée: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1$.

$$\mathcal{C} \text{ est paramétré par } \begin{cases} x = a \cos \theta \\ y = 0 \\ z = a \sin \theta \end{cases} \quad , \quad \theta \in [0, 2\pi] \quad , \text{ et nous retiendrons que}$$

l'ellipse admet le paramétrage suivant:

$$\begin{cases} x = a \cos \theta \\ z = b \sin \theta \end{cases}$$

1.1.b Caractérisation

- L'**aplatissement** (en anglais *flattening*) f est défini par $f = \frac{a-b}{a}$
- La **première excentricité** e est définie par $e^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2}$
- La **deuxième excentricité** e' par $e'^2 = \frac{a^2 - b^2}{b^2}$.

La grandeur $c = \sqrt{a^2 - b^2}$ est la **distance focale** et les points $F(c, 0, 0)$ et $F'(-c, 0, 0)$ sont les **foyers**.

Il est remarquable qu'une propriété caractéristique de l'ellipse est:

$$\|\overline{PF}\| + \|\overline{PF'}\| = 2a$$

Deux ellipses ayant même distance focale sont dites **homofocales**.

L'ellipse peut être caractérisée par la donnée de (a, b) , (a, f) , (a, e^2) ou (a, c) .
Entre ces différents paramètres, on dispose, entre autres, des relations suivantes :

$$\begin{cases} \frac{b}{a} = 1 - f = \sqrt{1 - e^2} \\ e^2 = 2f - f^2 \end{cases}$$

Exemples numériques :

- la Terre : $f \approx \frac{1}{300}$, $e^2 \approx \frac{1}{150}$

Clarke IGN 1880 : $a = 6\,378\,249.2$ $b = 6\,356\,515$

- ballon de football :

Texte officiel FFF : la circonférence d'un ballon de football doit être comprise entre 68cm et 70cm.

Calculer a et b pour que l'aplatissement de ce ballon soit égal $\frac{1}{300}$

1.2 Ellipsoïde de révolution aplati

Définition :

Un **ellipsoïde de révolution aplati** est la surface engendrée par la rotation d'une ellipse autour de son demi-petit axe.

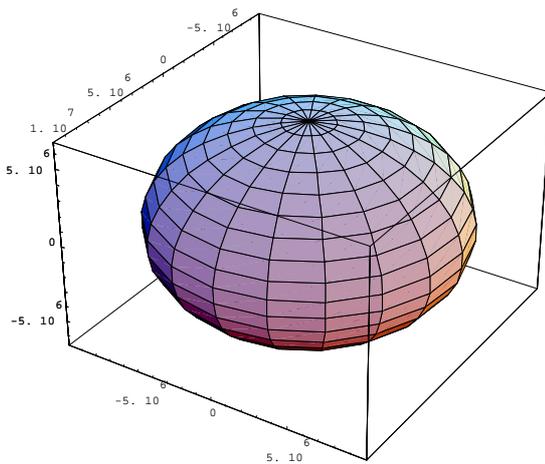


Fig. 2 : rotation/demi-petit axe

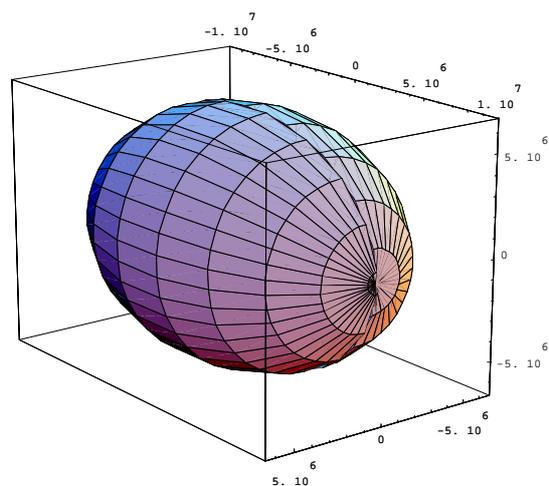


Fig. 3 : rotation/demi-grand axe

L'ellipsoïde de révolution aplati est défini comme le support de la nappe paramétrée (D, g) avec:

$$\left\{ \begin{array}{l} D = [0, 2\pi] \times \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right] \\ g \left(\begin{array}{l} D \longrightarrow \mathbf{R}^3 \\ (\lambda, \psi) \longrightarrow g(\lambda, \psi) = M \end{array} \right) \end{array} \right. \quad \text{où} \quad M \begin{cases} x = a \cos \lambda \cos \psi \\ y = a \sin \lambda \cos \psi \\ z = b \sin \psi \end{cases}$$

Le repère $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ permet de distinguer différentes parties de l'ellipsoïde:

- l'ensemble des points M tels que $\mathbf{OM} \cdot \vec{k} \geq 0$ (respectivement $\mathbf{OM} \cdot \vec{k} \leq 0$) forment l'hémisphère Nord ou boréal (resp. Sud ou austral),
- les points $PN(0,0,b)$ et $PS(0,0,-b)$ sont appelés pôles Nord et Sud, et l'axe $(O; \vec{k})$ est l'axe des pôles,

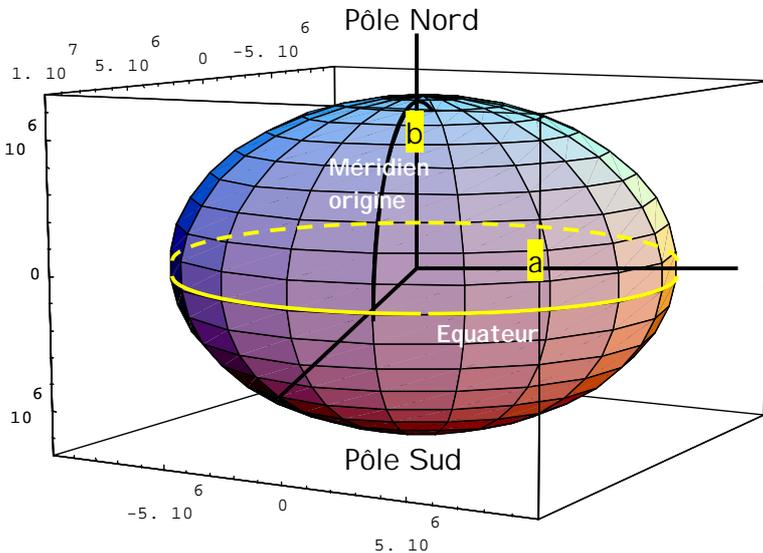


Fig. 4 : Ellipsoïde géodésique

- l'intersection du plan $(O; \vec{i}, \vec{j})$ et de l'ellipsoïde est appelé **équateur**,

- L'ensemble des points M de coordonnées $(x,0,z)$, $x > 0$ est appelé méridien origine

En fait, l'axe i est choisi de telle sorte que le méridien origine passe par l'observatoire astronomique de **Greenwich** (près de Londres).

Toute courbe méridienne est une ellipse d'équation :

$$\frac{r^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1 \quad \text{avec } r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

D'où on tire l'équation cartésienne de l'ellipsoïde de révolution aplati:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1$$

2 Paramétrages de l'ellipsoïde

2.1 Latitude paramétrique

Rappelons que λ est la **longitude** de M . ψ en est la **latitude paramétrique**.

Le paramétrage d'une surface de révolution est défini par la donnée de 2 fonctions :

$$\begin{aligned} r(\psi) &= a \cos \psi \\ Z(\psi) &= b \sin \psi \end{aligned} \text{ avec}$$

$$M \begin{cases} x = r(\psi) \cos \lambda \\ y = r(\psi) \sin \lambda \\ z = Z(\psi) \end{cases}$$

d'où

$$M \begin{cases} x = a \cos \lambda \cos \psi \\ y = a \sin \lambda \cos \psi \\ z = b \sin \psi \end{cases}$$

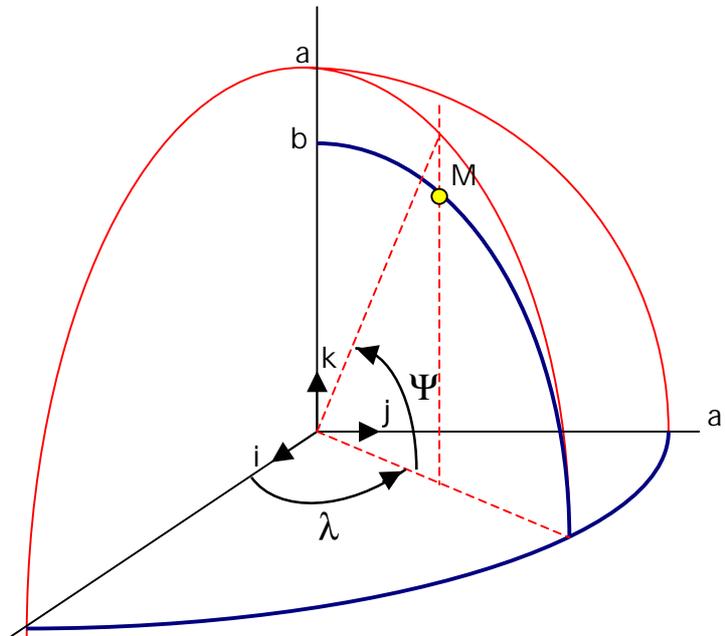


Fig. 5 : Latitude paramétrique

2.2 Latitude géographique

Appelons φ l'angle entre \vec{n} la normale à l'ellipsoïde et le plan équatorial (O, \vec{i}, \vec{j})

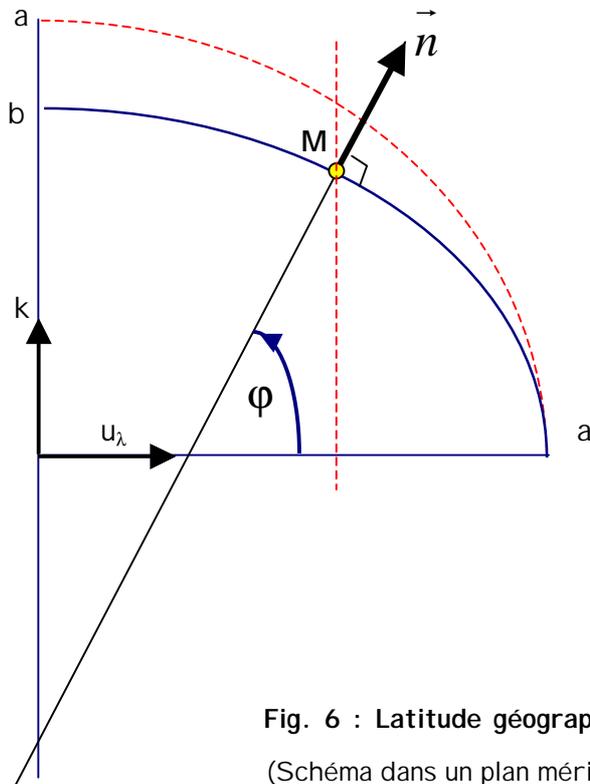


Fig. 6 : Latitude géographique
(Schéma dans un plan méridien)

$$\vec{n} = \cos \varphi \vec{u}_\lambda + \sin \varphi \vec{k} \quad \text{avec} \quad \vec{u}_\lambda = \cos \lambda \vec{i} + \sin \lambda \vec{j}$$

On peut donc écrire:

$$\vec{n} \begin{pmatrix} \cos \lambda \cos \varphi \\ \sin \lambda \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{pmatrix}$$

Exprimons d'autre part \vec{n} en fonction de λ et de ψ :

$$\begin{cases} r(\psi) = a \cos \psi \\ Z(\psi) = b \sin \psi \end{cases} ; \quad \begin{cases} r' = -a \sin \psi \\ Z' = b \cos \psi \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} E = r^2 = a^2 \cos^2 \psi \\ F = 0 \\ G = r'^2 + Z'^2 = a^2 \sin^2 \psi + b^2 \cos^2 \psi \end{cases}$$

$$\sqrt{G} = b\sqrt{\frac{a^2}{b^2}\sin^2\psi + 1 - \sin^2\psi} = b\sqrt{1 + e'^2\sin^2\psi}$$

En posant $w = \frac{1}{\sqrt{1 + e'^2\sin^2\psi}}$, on obtient: $\sqrt{G} = \frac{b}{w}$ et $\vec{n} \begin{pmatrix} w \cos \lambda \cos \psi \\ w \sin \lambda \cos \psi \\ \frac{a}{b} w \sin \psi \end{pmatrix}$

D'où:

$$\begin{aligned} \cos \varphi &= w \cos \psi \\ \sin \varphi &= \frac{a}{b} w \sin \psi \\ \tan \varphi &= \frac{a}{b} \tan \psi \\ w &= \frac{1}{\sqrt{1 + e'^2 \sin^2 \psi}} \end{aligned}$$

φ peut donc être utilisé comme paramétrage de l'ellipse méridienne; φ est appelé **latitude géographique**.

w peut s'exprimer également en fonction de φ , en effet:

$$\cos^2\psi + \sin^2\psi = 1 = \frac{\cos^2\varphi}{w^2} + \frac{b^2}{a^2w^2}\sin^2\varphi \Leftrightarrow w^2 = \cos^2\varphi + \frac{b^2}{a^2}\sin^2\varphi = 1 - e^2\sin^2\varphi$$

$$\Leftrightarrow w = \sqrt{1 - e^2\sin^2\varphi}$$

2.3 Latitude géocentrique

Considérons l'angle entre le plan équatorial et \mathbf{OM} . Cet angle est traditionnellement noté ω .

Les coordonnées (λ, ω) forment un para-métrage de l'ellipsoïde.

ω est appelée **latitude géocentrique**.

(Schémas dans un plan méridien)

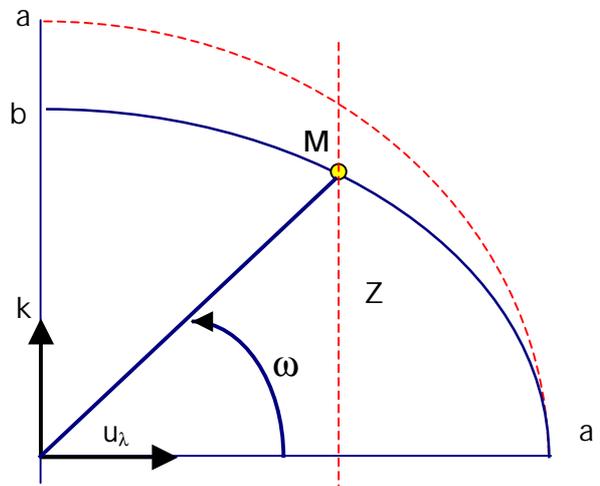


Fig. 7 :Latitude géocentrique

Si $r \neq 0$, alors il est clair que

$$\tan \omega = \frac{|OP|}{|OQ|} = \frac{Z}{r}.$$

On sait aussi que $\tan \psi = \frac{\frac{a}{b} Z}{r}$.

Nous retiendrons donc:

$$\tan \omega = \frac{b}{a} \tan \psi = \frac{b^2}{a^2} \tan \varphi$$

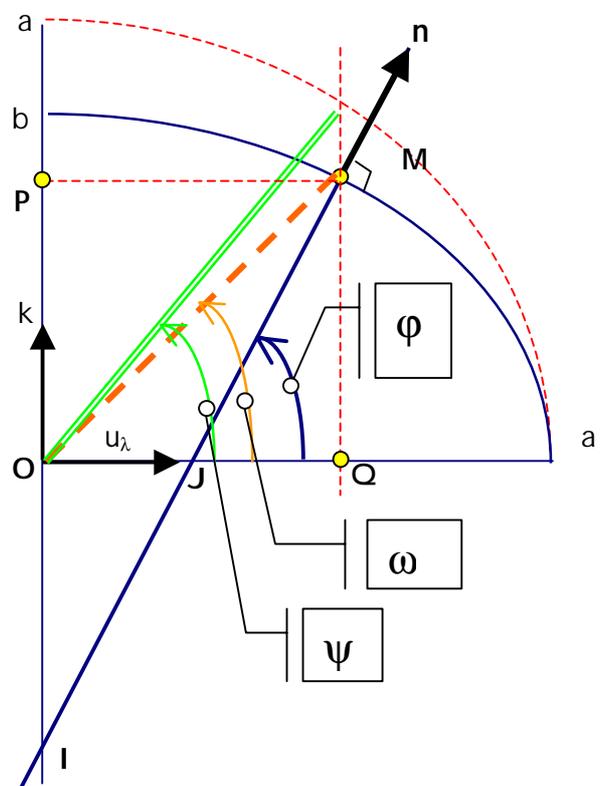


Fig. 8 : Latitudes paramétrique, géographique et géocentrique

On peut ainsi affirmer que, en tout point, $\omega \leq \varphi$; ce qui signifie géométriquement que, si on désigne par I et J les intersections de la normale $(M; \vec{n})$ avec respectivement les axes $(O; \vec{k})$ et $(O; \vec{u}_\lambda)$, alors $\begin{cases} \overline{OI} \cdot \vec{k} \leq 0 \\ \overline{OJ} \cdot \vec{u}_\lambda \geq 0 \end{cases}$. Autrement dit, la normale coupe le plan équatorial *avant* de couper l'axe des pôles.

2.4 Paramétrage symétrique, Latitude isométrique

Écrivons la 1ère forme quadratique fondamentale à l'aide du paramétrage (λ, ψ) :

$$ds^2 = E d\lambda^2 + 2F d\lambda d\psi + G d\psi^2 \quad \text{avec} \quad \begin{cases} E = a^2 \cos^2 \psi = \frac{a^2}{w^2} \cos^2 \varphi \\ F = 0 \\ G = a^2 \sin^2 \psi + b^2 \cos^2 \psi = \frac{b^2}{w^2} \end{cases}$$

Or $\tan \psi = \frac{b}{a} \tan \varphi$ d'où :

$$\frac{d\psi}{\cos^2 \psi} = \frac{b}{a} \times \frac{d\varphi}{\cos^2 \varphi} \Leftrightarrow d\psi = \frac{b}{a} \times \frac{d\varphi}{w^2}$$

Et pour le paramétrage (λ, φ)

$$\text{Et } ds^2 = \frac{a^2 \cos^2 \varphi}{w^2} d\lambda^2 + \frac{b^4}{a^2 w^6} d\varphi^2 = \frac{a^2 \cos^2 \varphi}{w^2} d\lambda^2 + \frac{a^2 (1-e^2)^2}{w^6} d\varphi^2$$

Les coordonnées (λ, φ) sont donc des coordonnées orthogonales non symétriques de l'ellipsoïde.

Définissons une fonction $L(\varphi)$ croissante de φ telle que (λ, L) soit un paramétrage symétrique. Une équation caractéristique de $L(\varphi)$ est donc :

$$\frac{a^2 (1-e^2)^2}{w^6} d\varphi^2 = \frac{a^2 \cos^2 \varphi}{w^2} dL^2$$

$$\Leftrightarrow dL = \frac{1-e^2}{w^2 \cos \varphi} d\varphi$$

Cette équation s'intègre en:

$$L = \ln \left[\tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right) \right] - \frac{e}{2} \ln \frac{1+e \sin \varphi}{1-e \sin \varphi}$$

L est appelée **latitude isométrique**.

$$\text{Autre écriture : } L = \ln \left[\tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right) \cdot \left(\frac{1-e \sin \varphi}{1+e \sin \varphi} \right)^{\frac{e}{2}} \right]$$

3 Rayons de courbures principaux; sphères d'approximation

3.1 Rayons de courbures principaux

La forme locale de la surface est donnée par le type de la conique d'équation cartésienne $\frac{L_1}{E} \cdot \alpha^2 + \frac{L_3}{G} \cdot \beta^2 = 1$ (indicatrice de Dupin) où (α, β) sont les coordonnées d'un point P de cette conique exprimées dans le repère R_{Π} au voisinage de M_0 . Les directions principales sont donc celles de R_{Π} et correspondent au parallèle et au méridien défini en M_0

Le type de la conique dépend donc du signe de $L_1 L_3$:

$$\begin{cases} L_1 = -\frac{Z'r}{\sqrt{G}} \\ (L_2 = 0) \\ L_3 = \frac{Z'r'' - r'Z''}{\sqrt{G}} \end{cases} \quad \text{avec} \quad \sqrt{G} = \frac{b}{w}$$

$$\begin{cases} r(\psi) = a \cos \psi \\ Z(\psi) = b \sin \psi \end{cases} ; \quad \begin{cases} r' = -a \sin \psi \\ Z' = b \cos \psi \end{cases} ; \quad \begin{cases} r'' = -a \cos \psi \\ Z'' = -b \sin \psi \end{cases}$$

On en déduit que :

$$L_1 L_3 = \frac{Z'r(r'Z'' - Z'r'')}{G} = \frac{ab \cos^2 \psi (ab \sin^2 \psi + ab \cos^2 \psi) w^2}{b^2} = a^2 w^2 \cos^2 \psi$$

Donc, pourvu que $\psi \neq \pm \frac{\pi}{2}$, c'est à dire en tout point autre que les pôles, $L_1 L_3 > 0$.

Tous les points, pôles exceptés, sont elliptiques, et les rayons de courbures principaux sont alors :

(a) Dans la direction du méridien

$$R_m = \frac{G^{3/2}}{|r'Z'' - r''Z'|} = \frac{b^3}{w^3} \times \frac{1}{ab \cos^2 \psi + ab \sin^2 \psi} = \frac{a(1-e^2)}{w^3}$$

(b) Dans la direction du parallèle

$$R_p = \frac{r(r'^2 + Z'^2)^{1/2}}{|Z'|} = \frac{ab \cos \psi}{wb \cos \psi} = \frac{a}{w}$$

Or $w^2 = \frac{1}{1+e'^2 \sin^2 \psi} = 1 - e^2 \sin^2 \psi$, donc $R_m \leq R_p$. Nous retiendrons:

Le rayon de courbure principale dans la direction du parallèle est la **grande normale** à l'ellipsoïde N ; $N = \frac{a}{w}$

Le rayon de courbure principale dans la direction du méridien est $\rho = \frac{a(1-e^2)}{w^3}$

On a toujours: $N \geq \rho$

Tous les points, à l'exception des pôles, étant elliptiques, le rayon de courbure normale selon une direction quelconque est compris entre ρ et N et peut être calculé par la formule d'Euler qui s'écrit désormais:

$$\frac{\sin^2 Az}{N} + \frac{\cos^2 Az}{\rho} = \frac{1}{R_n}$$

Interprétations graphiques :

$$r = |OQ| = a \cos \psi = \frac{a}{w} \cos \varphi = N \cos \varphi$$

or

$$\cos \varphi = \frac{|OQ|}{|IM|} \Rightarrow N = |IM|$$

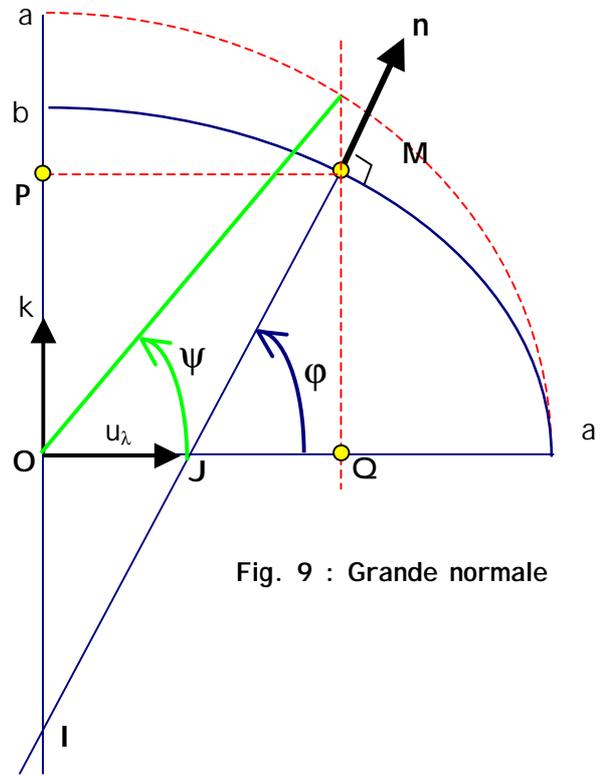
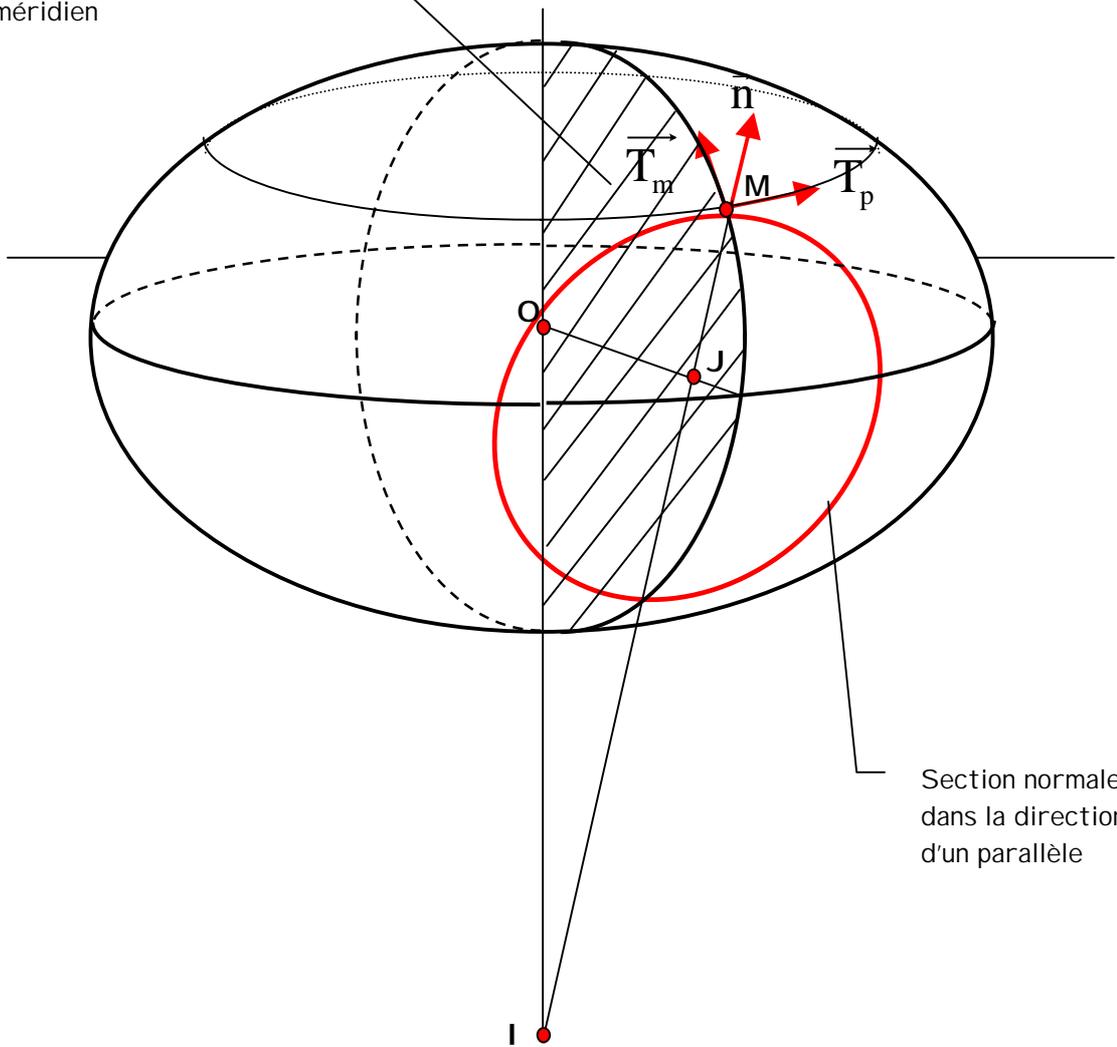


Fig. 9 : Grande normale

Section normale dans la direction d'un méridien



Section normale dans la direction d'un parallèle

Fig. 10 : Sections normales de l'ellipsoïde de révolution

3.2 Sphères d'approximation

Pour certains usages, on assimile localement l'ellipsoïde à une sphère tangente à l'ellipsoïde. On définit ainsi:

- la sphère de **courbure totale**; son rayon de courbure R_T est donné par

$$R_T = \sqrt{N\rho}$$

- la sphère de **courbure moyenne** dont le rayon de courbure R_M est défini par:

$$\frac{1}{R_M} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\rho} + \frac{1}{N} \right)$$

Bien sur, on a toujours $\rho \leq R_T \leq N$ et $\rho \leq R_M \leq N$.

3.3 Loxodromie

Une **loxodromie** est une courbe tracée sur l'ellipsoïde le long de laquelle l'azimut Az est constant.

$$\begin{aligned} \text{Or } \tan Az &= \frac{r d\lambda}{\sqrt{r'^2 + Z'^2} d\psi} = \frac{N \cos \varphi d\lambda}{\frac{b}{w} d\psi} = \frac{N \cos \varphi d\lambda}{\frac{a(1-e^2)}{w^3} d\varphi} \\ \Leftrightarrow \tan Az \frac{1-e^2}{w^2 \cos \varphi} d\varphi &= d\lambda \end{aligned}$$

Az étant constant, cette équation différentielle s'intègre en:

$$\tan Az (L - L_c) = \lambda - \lambda_c \Leftrightarrow$$

$$\tan Az = \frac{\lambda - \lambda_c}{L - L_c}$$

4 Calcul d'un arc d'ellipse méridienne

En un point quelconque, l'élément de longueur infiniment petit le long d'un méridien ds_m vaut:

$$ds_m = \rho d\varphi = \frac{a(1-e^2)}{w^3} d\varphi$$

Conventionnellement, ds_m est noté $d\beta$. La longueur β d'un arc de méridien entre l'équateur et le point de latitude φ s'obtient en intégrant $d\beta$:

$$\beta = \int_0^{\varphi} \frac{a(1-e^2)}{w^3} d\varphi = a(1-e^2) \int_0^{\varphi} (1-e^2 \sin^2 \varphi)^{\frac{3}{2}} d\varphi$$

Mais $\frac{d\varphi}{w^3}$ n'admet pas de primitive connue, et on est donc contraint d'utiliser une méthode approchée.

Le développement de $(1-e^2 \sin^2 \varphi)^{-\frac{3}{2}}$ en somme infinie des puissances de $\sin^2 \varphi$ permet d'écrire β sous la forme suivante:

$$\beta = \sum_{p=0}^{+\infty} b_p \quad \text{avec:}$$

- $b_p = a(1-e^2) \frac{(2p+1)!}{(p!)^2} \left(\frac{e^2}{4}\right)^p W_{2p}(\varphi)$
- W_{2p} est l'intégrale de Wallis d'ordre $2p$:

$$W_{2p} = \int_0^{\varphi} \sin^{2p} \varphi d\varphi$$

Les intégrales de Wallis d'ordre $n \geq 2$ sont liées par la formule de récurrence suivante:

$$W_n = \frac{n-1}{n} W_{n-2} - \frac{1}{n} \sin^{n-1} \varphi \cos \varphi$$

L'étude de la convergence de la suite $(b_p)_{p \in \mathbf{N}}$ montre que le calcul des 5 premiers termes permet de connaître β avec une précision meilleure que 1 mm. Nous retiendrons donc $\beta = \sum_{p=0}^4 b_p$; cette somme peut s'exprimer uniquement à l'aide des fonctions $\sin(2p\varphi)$, $p \leq 4$, comme indiqué page suivante :

$$\beta = a(b_0 \varphi + b_1 \sin 2\varphi + b_2 \sin 4\varphi + b_3 \sin 6\varphi + b_4 \sin 8\varphi)$$

avec

$$b_0 = 1 - \frac{1}{4}e^2 - \frac{3}{64}e^4 - \frac{5}{256}e^6 - \frac{175}{16384}e^8$$

$$b_1 = -\frac{3}{8}e^2 - \frac{3}{32}e^4 - \frac{45}{1024}e^6 - \frac{105}{4096}e^8$$

$$b_2 = \frac{15}{256}e^4 + \frac{45}{1024}e^6 + \frac{525}{16384}e^8$$

$$b_3 = -\frac{35}{3072}e^6 - \frac{175}{12288}e^8$$

$$b_4 = \frac{315}{131072}e^8$$

5 Passages entre coordonnées cartésiennes et géographiques

5.1 Passage des coordonnées géographiques aux coordonnées cartésiennes

Soient $M(X, Y, Z)_R$ un point quelconque de l'espace et $M^*(x^*, y^*, z^*)_R$ sa projection normale sur l'ellipsoïde; M^* est donc définie de telle sorte que $\overline{M^*M} = h \cdot \vec{n}$. h est la **hauteur** de M au-dessus de l'ellipsoïde (éventuellement $h < 0$).

Les coordonnées (λ, φ, h) sont appelées **coordonnées géographiques** de M .

$$\text{On a } \begin{cases} x^* = a \cos \lambda \cos \psi \\ y^* = a \sin \lambda \cos \psi \\ z^* = b \sin \psi \end{cases} \quad \text{or} \quad \begin{cases} \cos \varphi = w \cos \psi \\ \sin \varphi = \frac{a}{b} w \sin \psi \end{cases}$$

L'expression de (x^*, y^*, z^*) en fonction de λ et de φ est donc:

$$\begin{cases} x^* = \frac{a \cos \lambda \cos \varphi}{w} \\ y^* = \frac{a \sin \lambda \cos \varphi}{w} \\ z^* = \frac{b^2}{a w} \sin \varphi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^* = N \cos \lambda \cos \varphi \\ y^* = N \sin \lambda \cos \varphi \\ z^* = N(1 - e^2) \sin \varphi \end{cases}$$

En outre, $\overline{M^*M} = h \cdot \vec{n}$ avec $\vec{n} = \begin{pmatrix} \cos \lambda \cos \varphi \\ \sin \lambda \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{pmatrix}$

Il s'en déduit la formule de transformation des **coordonnées géographiques** (λ, φ, h) aux **coordonnées cartésiennes géocentriques** (X, Y, Z) , c'est à dire dans le repère R centré au centre de la Terre.

$$\begin{cases} X = (N + h) \cos \lambda \cos \varphi \\ Y = (N + h) \sin \lambda \cos \varphi \\ Z = [N(1 - e^2) + h] \sin \varphi \end{cases}$$

5.2 Passage des coordonnées cartésiennes aux coordonnées géographiques

5.2.a Processus itératif

L'objet de ce paragraphe est d'inverser le système précédent. Autrement dit, à partir des formules précédentes, d'exprimer (λ, φ, h) en fonction de (X, Y, Z) .

On obtient immédiatement: $\tan \lambda = \frac{Y}{X}$.

Obtenir φ et h est plus difficile, car N est une fonction de φ . Écrivons $\frac{Z}{\sqrt{X^2 + Y^2}}$ en fonction de φ et de h :

$$\frac{Z}{\sqrt{X^2 + Y^2}} = \frac{[N(1 - e^2) + h] \sin \varphi}{(N + h) \cos \varphi}$$

$$\Leftrightarrow \frac{Z}{\sqrt{X^2 + Y^2}} = \tan \varphi - \underbrace{e^2 \frac{N}{N + h}}_{T_2(\varphi, h)} \tan \varphi = \tan \varphi (1 - T_2)$$

Il est clair que, si $\tan \varphi$ est une fonction inversible en φ , cela n'est pas le cas pour T_2 . Nous savons en outre que, tant que h reste suffisamment *petit*, $1/T_2$ est de l'ordre de $1/150$, c'est à dire négligeable. Cette remarque conduit à envisager la méthode itérative suivante:

- calcul d'une valeur approchée φ_0 par $\varphi_0 = \arctan\left(\frac{Z}{\sqrt{X^2 + Y^2}}\right)$,
- utilisation de φ_0 pour calculer h_0 puis φ_1 avec les formules:

$$\begin{cases} h_0 = \frac{\sqrt{X^2 + Y^2}}{\cos \varphi_0} - N_0 \\ \varphi_1 = \arctan\left(\frac{Z}{\sqrt{X^2 + Y^2}} \times \frac{1}{1 - T_2(\varphi_0, h_0)}\right) \end{cases}$$

- de la même manière, utilisation de φ_{n-1} et h_{n-1} pour calculer h_n et φ_n .

On peut démontrer que le processus itératif que nous venons de définir converge. Nous retiendrons donc les formules de transformation ci-dessous:

$$\tan \lambda = \frac{Y}{X}$$

φ et h sont les limites des suites convergentes respectives $(\varphi_n)_{n \in \mathbf{N}}$ et $(h_n)_{n \in \mathbf{N}}$ définies par:

$$\left\{ \begin{array}{l} \varphi_0 = \arctan \frac{Z}{\sqrt{X^2 + Y^2}} \\ h_0 = \frac{\sqrt{X^2 + Y^2}}{\cos \varphi_0} - N_0 \end{array} \right. \quad \text{avec } N_i = \frac{a}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi_i}} \text{ d'où}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \varphi_n = \arctan \left[\frac{Z}{\sqrt{X^2 + Y^2}} \times \frac{1}{1 - e^2 \frac{N_{n-1}}{N_{n-1} + h_{n-1}}} \right] \\ h_n = \frac{\sqrt{X^2 + Y^2}}{\cos \varphi_n} - N_n \end{array} \right.$$

5.2.b Processus direct

Source : Bowring, 1985, « The accuracy of geodetic latitude and height equations », survey review, 28, pp202-206

$$f = 1 - \sqrt{1 - e^2} \quad R = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2} \quad \lambda = \arctg \left(\frac{Y}{X} \right)$$

$$\mu = \arctg \left[\frac{Z}{\sqrt{X^2 + Y^2}} \cdot \left((1 - f) + \left(\frac{e^2 a}{R} \right) \right) \right]$$

$$\varphi = \arctg \left[\frac{Z(1 - f) + e^2 a \sin^3 \mu}{(1 - f) \left[\sqrt{X^2 + Y^2} - e^2 a \cos^3 \mu \right]} \right]$$

$$h = \left[\sqrt{X^2 + Y^2} \cdot \cos \varphi \right] + \left[Z \sin \varphi \right] - \left[a \sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi} \right]$$

Les deux processus fournissent un résultat numérique identique.

6 Calcul des lignes géodésiques

6.1 Problématique

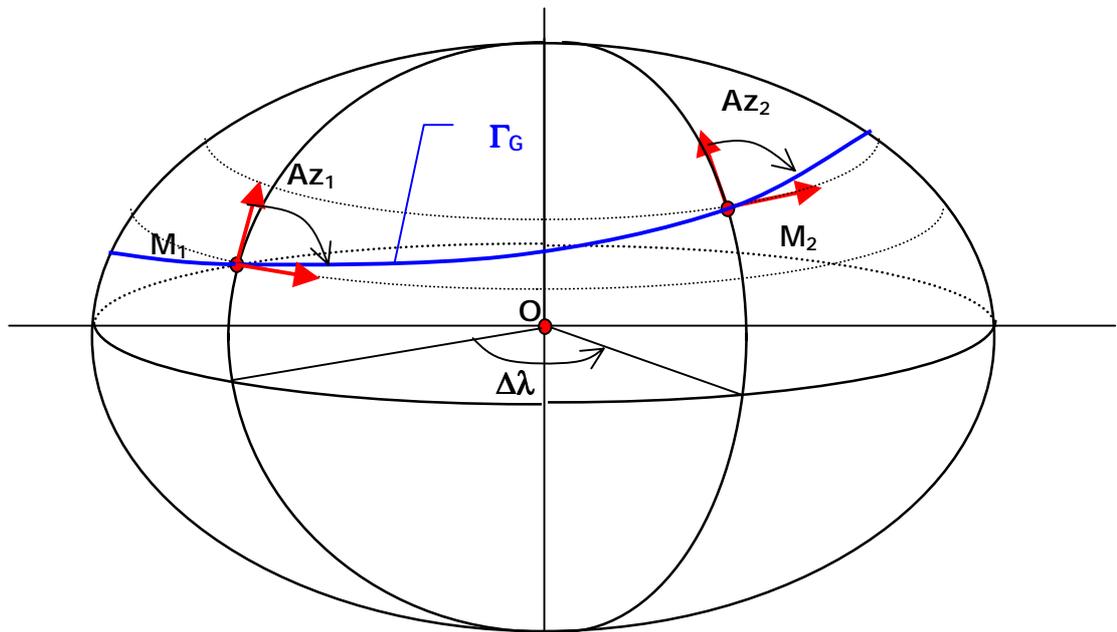


Fig. 11 : Lignes géodésique de l'ellipsoïde

Le problème de calcul de lignes géodésiques sur l'ellipsoïde peut se poser selon deux aspects:

(a) Aspect dit "direct"

Soient (λ_1, φ_1) les coordonnées d'un point M_1 de l'ellipsoïde et l'azimut en M_1 Az_1 d'une ligne géodésique Γ_G passant par M_1 . Définissons M_2 comme le point de Γ_G tel que la distance entre M_1 et M_2 mesurée sur Γ_G vaut Δs donné. Résoudre le problème direct revient à déterminer les coordonnées géographiques (λ_2, φ_2) de M_2 et l'azimut de Γ_G en M_2 Az_2 . Le problème direct peut donc être schématisé par:

$$(\lambda_1, \varphi_1), Az_1, \Delta s \rightarrow (\lambda_2, \varphi_2), Az_2$$

(b) Aspect "inverse"

Connaissant les coordonnées de deux points $M_1(\lambda_1, \varphi_1)$ et $M_2(\lambda_2, \varphi_2)$ de l'ellipsoïde, déterminer la longueur Δs de la ligne géodésique Γ_G les reliant, son azimut en M_1 Az_1 et son azimut en M_2 Az_2 . Schématiquement, le problème inverse se résume par:

$$(\lambda_1, \varphi_1), (\lambda_2, \varphi_2) \rightarrow \Delta s, Az_1, Az_2$$

Les *outils* disponibles pour résoudre ces problèmes sont les suivants:

- le système d'équations différentielles caractéristique des lignes géodésiques (expression simplifiée propre aux surfaces de révolution),
- les relations de Clairaut et de Laplace

relation de Laplace :

sur l'ellipsoïde $\varphi = \pi - \chi_p$

$$dAz = \sin \varphi d\lambda$$

relation de Clairaut :

$$r_1 \cdot \sin Az_1 = r_2 \cdot \sin Az_2 = C$$

avec r_1 : rayon du parallèle en un point M_1 de la géodésique Γ_G

Az_1 : azimut en M_1 de la géodésique Γ_G

r_2 : rayon du parallèle en un point M_2 de la géodésique Γ_G

Az_2 : azimut en M_2 de la géodésique Γ_G

C : constante de Clairaut.

- la possibilité, dans certains cas, d'assimiler l'ellipsoïde à une autre surface plus simple; plan tangent ou sphère d'approximation.

En résumé, il existe deux types de **méthodes**:

(1) Méthodes locales

Elles consistent à assimiler localement l'ellipsoïde par une surface voisine plus facile à utiliser: pratiquement le plan tangent ou une sphère d'approximation. Ces méthodes sont de mise en œuvre légère, mais ne sont valables que sur une zone limitée: une centaine de mètres si on utilise le plan tangent, quelques dizaines de km si on utilise une sphère d'approximation.

(2) Méthodes générales

En général, les problèmes faisant intervenir des lignes géodésiques, intègrent une résolution géométrique et numérique.

Une méthode retenue pour la résolution géométrique est dite par représentation ou *correspondance* de la ligne géodésique sur la sphère paramétrique de l'ellipsoïde, sphère auxiliaire dite sphère de Jacobi.

Soit un ellipsoïde de révolution de demi grand axe a . La sphère de Jacobi est la sphère circonscrite le long de l'équateur. On établit entre l'ellipsoïde et cette sphère une *correspondance ponctuelle* qui ne concerne que les points de 2 géodésiques, l'une (g) tracée sur l'ellipsoïde, l'autre (g') tracée sur la sphère (grand cercle). Ainsi, à tout point d'une géodésique de

l'ellipsoïde de révolution, on a fait correspondre un point image sur un grand cercle, géodésique, d'une sphère ayant les propriétés suivantes :

- les 2 géodésiques ont même azimut équatorial.
- la latitude du point M' image sur la sphère est égale à la latitude du point M correspondant sur l'ellipsoïde dans un rapport b/a (soit la latitude paramétrique).
- conservation des azimuts

Les longitudes ne sont pas conservées.

Dans cette méthode, les problèmes relatifs à l'arc géodésique de l'ellipsoïde vont donc se ramener aux problèmes *correspondants* sur l'arc de grand cercle de la sphère de Jacobi. La solution comportera en général les étapes suivantes :

- calcul des éléments connus du triangle sphérique puis résolution de triangles sphériques correspondant aux triangles ellipsoïdiques.
- retour aux éléments inconnus de l'ellipsoïde par la correspondance de Jacobi.

Les formules de la trigonométrie sphérique restent rigoureuses pour les géodésiques de l'ellipsoïde de révolution en les appliquant aux triangles admettant le pôle pour sommet, deux méridiens et un arc de géodésique pour côtés.

La méthode d'intégration numérique choisie pour résoudre les intégrales elliptiques d'expression de la longitude $d\lambda$ et de la longueur ds de l'arc en fonction de l'élongation $d\omega$ sur la sphère, est celle de la quadrature de Gauss, utilisant les paramètres suivants :

n: nième polynôme de Legendre. C'est le nombre de points d'intégration.(on prendra **n=8**).

w_i , z_i : coefficients et abscisses d'interpolation calculés à partir des polynômes de Legendre.

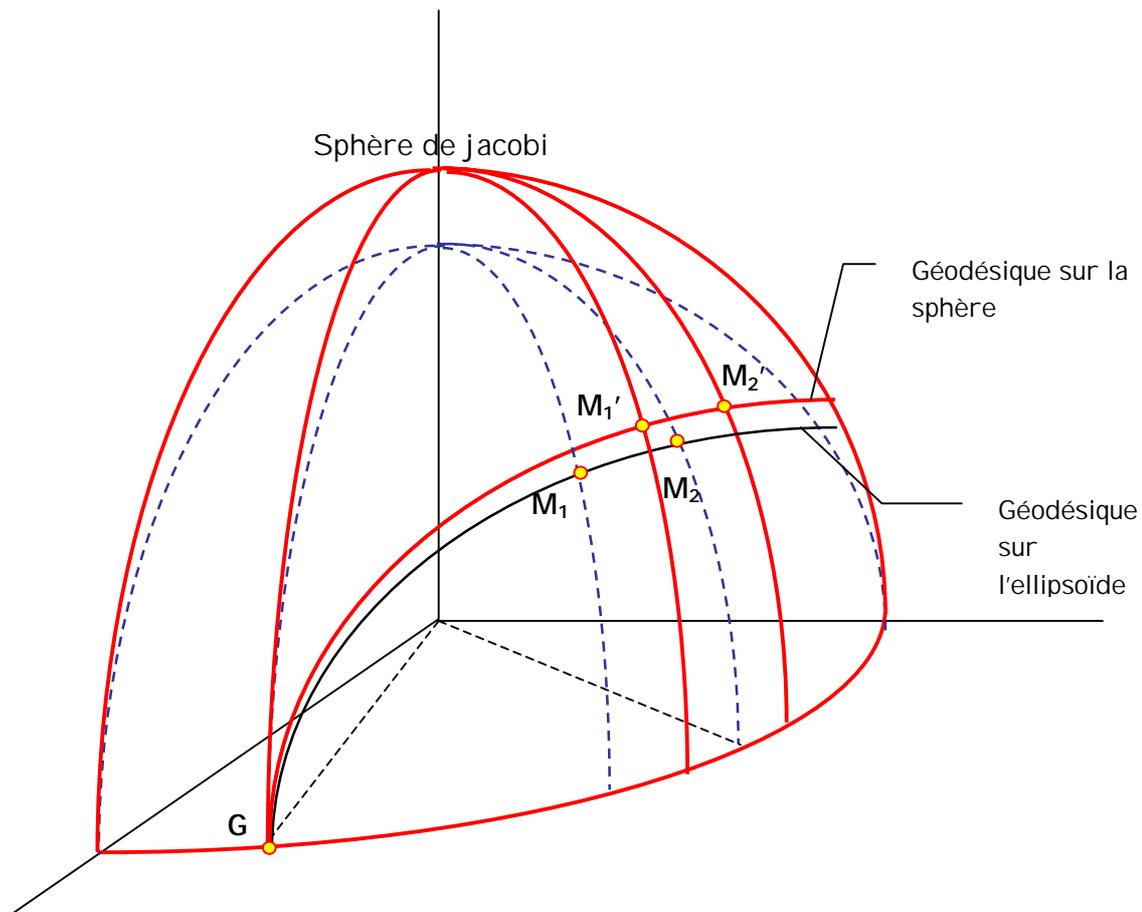


Fig. 12 : Sphère de Jacobi

Vous trouverez en annexe de ce chapitre les algorithmes développés par le **Service de Géodésie et Nivellement** de l'IGN pour appliquer cette méthode.

Un logiciel de calcul « GEO2 » a également été développé à l'IGN utilisant un algorithme similaire formulé par le docteur « Tsumuto Saïto ».

6.2 Méthode locale par utilisation d'une sphère d'approximation

6.2.a Utilisation du repère local en M_1

On appelle **repère local en M** le repère orthonormal direct centré en M , et dont les trois axes sont dirigés respectivement vers l'Est, vers le Nord et vers le haut.

Il est noté \mathbb{R}_L . Avec les conventions habituelles, on peut écrire:

$$\mathbb{R}_L = (M; \mathbf{T}_p, \mathbf{T}_m, \mathbf{n})$$

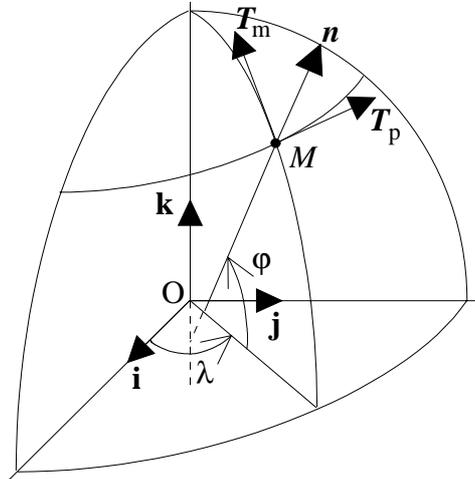


Fig. 13 : Repère local

Soient M_1 un point donné de l'ellipsoïde et \mathbb{R}_{L_1} son repère local. Soit P un point quelconque de l'ellipsoïde. On note:

$$P(x, y, z)_R \quad \text{et} \quad P(X_L, Y_L, Z_L)_{R_{L_1}}$$

Cherchons à exprimer (X_L, Y_L, Z_L) en fonction de (x, y, z) et inversement. Il s'agit d'un problème de changement de repère, autrement dit d'un changement d'origine (translation de O à M_1) et d'un changement de base:

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OM_1} + \overrightarrow{M_1P}$$

$$\overrightarrow{OP} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_R = \overrightarrow{OM_1} \begin{pmatrix} N_1 \cos \lambda_1 \cos \varphi_1 \\ N_1 \sin \lambda_1 \cos \varphi_1 \\ N_1 (1 - e^2) \sin \varphi_1 \end{pmatrix}_R + \overrightarrow{M_1P} \begin{pmatrix} X_L \\ Y_L \\ Z_L \end{pmatrix}_{R_{L_1}}$$

La base $(\mathbf{T}_p, \mathbf{T}_m, \mathbf{n})$ se déduit de $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ par composition de 3 rotations élémentaires:

- rotation positive d'angle λ_1 autour du 3ème axe $R_3^+(\lambda_1)$,
- rotation positive d'angle $\frac{\pi}{2} - \varphi_1$ autour du 2ème axe $R_2^+(\frac{\pi}{2} - \varphi_1)$,

• rotation positive d'angle $\frac{\pi}{2}$ autour du 3ème axe $R_3^+\left(\frac{\pi}{2}\right)$.

$$\begin{aligned} \text{Nous avons donc: } \begin{pmatrix} \vec{\mathbf{T}}_p \\ \vec{\mathbf{T}}_m \\ \vec{\mathbf{n}} \end{pmatrix} &= R_3^+\left(\frac{\pi}{2}\right) R_2^+\left(\frac{\pi}{2}-\varphi_1\right) R_3^+(\lambda_1) \begin{pmatrix} \vec{\mathbf{i}} \\ \vec{\mathbf{j}} \\ \vec{\mathbf{k}} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{2} & \sin\frac{\pi}{2} & 0 \\ -\sin\frac{\pi}{2} & \cos\frac{\pi}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\pi}{2}-\varphi_1\right) & 0 & -\sin\left(\frac{\pi}{2}-\varphi_1\right) \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\left(\frac{\pi}{2}-\varphi_1\right) & 0 & \cos\left(\frac{\pi}{2}-\varphi_1\right) \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \cos\lambda_1 & \sin\lambda_1 & 0 \\ -\sin\lambda_1 & \cos\lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \vec{\mathbf{i}} \\ \vec{\mathbf{j}} \\ \vec{\mathbf{k}} \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} \vec{\mathbf{T}}_p \\ \vec{\mathbf{T}}_m \\ \vec{\mathbf{n}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin\lambda_1 & \cos\lambda_1 & 0 \\ -\sin\varphi_1 \cos\lambda_1 & -\sin\varphi_1 \sin\lambda_1 & \cos\varphi_1 \\ \cos\varphi_1 \cos\lambda_1 & \cos\varphi_1 \sin\lambda_1 & \sin\varphi_1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \vec{\mathbf{i}} \\ \vec{\mathbf{j}} \\ \vec{\mathbf{k}} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Nous retiendrons les formules de passage du repère local au repère géocentrique et vice et versa:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} X_L \\ Y_L \\ Z_L \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -\sin\lambda_1 & \cos\lambda_1 & 0 \\ -\sin\varphi_1 \cos\lambda_1 & -\sin\varphi_1 \sin\lambda_1 & \cos\varphi_1 \\ \cos\varphi_1 \cos\lambda_1 & \cos\varphi_1 \sin\lambda_1 & \sin\varphi_1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x - N_1 \cos\lambda_1 \cos\varphi_1 \\ y - N_1 \sin\lambda_1 \cos\varphi_1 \\ z - N_1 (1-e^2) \sin\varphi_1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} N_1 \cos\lambda_1 \cos\varphi_1 \\ N_1 \sin\lambda_1 \cos\varphi_1 \\ N_1 (1-e^2) \sin\varphi_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\sin\lambda_1 & -\sin\varphi_1 \cos\lambda_1 & \cos\varphi_1 \cos\lambda_1 \\ \cos\lambda_1 & -\sin\varphi_1 \sin\lambda_1 & \cos\varphi_1 \sin\lambda_1 \\ 0 & \cos\varphi_1 & \sin\varphi_1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} X_L \\ Y_L \\ Z_L \end{pmatrix} \end{aligned}$$

6.2.b Problème direct

Supposons donnés (λ_1, φ_1) , Δs et Az_1 et cherchons (λ_2, φ_2) et Az_2 .

On approxime la ligne géodésique Γ_G entre M_1 et M_2 à son cercle osculateur Ω_{G_1} en M_1 .

Appelons C_{G_1} le centre de Ω_{G_1} et R_{G_1} son rayon.

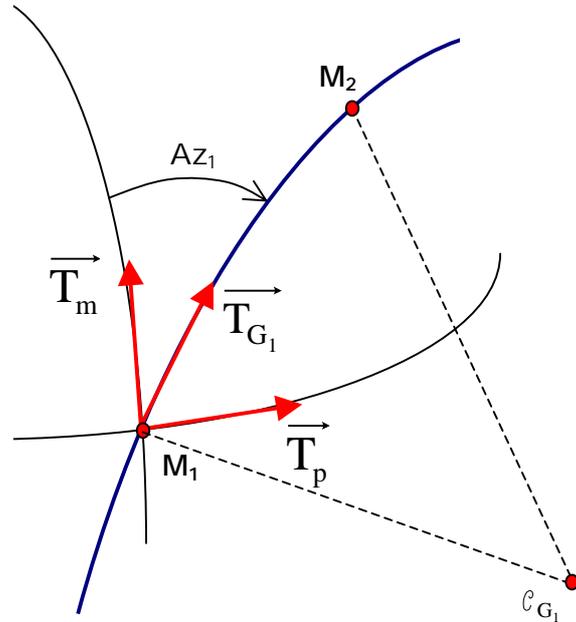


Fig. 14 : Ligne géodésique au voisinage de M1

Selon cette hypothèse, entre M_1 et M_2 , Γ_G est alors une courbe plane dans le plan osculateur $(M_1; \mathbf{T}_{G_1}, \mathbf{n})$. On peut ainsi définir α tel que:

$$\alpha = \frac{\Delta s}{R_{G_1}},$$

R_{G_1} étant donné par la formule d'Euler:

$$\frac{1}{R_{G_1}} = \frac{\sin^2 Az_1}{N_1} + \frac{\cos^2 Az_1}{\rho_1}.$$

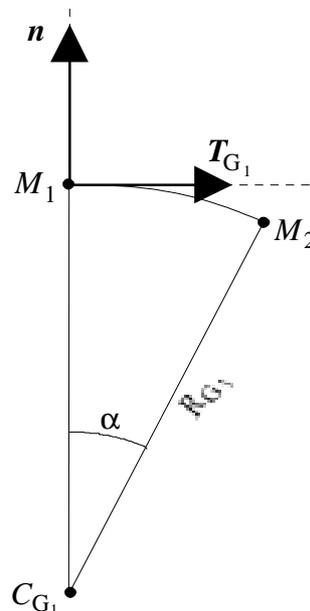


Fig. 15 : Ligne géodésique dans le plan osculateur

Déterminer les coordonnées de M_2 en fonction de $\Delta s, R_{G_1}$ et α revient à résoudre un problème de trigonométrie plane dans le plan osculateur:

$$\begin{aligned}\overline{\mathbf{M}_1\mathbf{M}_2} &= \overline{\mathbf{M}_1\mathbf{C}_{G_1}} + \overline{\mathbf{C}_{G_1}\mathbf{M}_2} = -R_{G_1}\vec{\mathbf{n}} + \sin\alpha R_{G_1}\overline{\mathbf{T}_{G_1}} + \cos\alpha R_{G_1}\vec{\mathbf{n}} \\ &= \sin\alpha R_{G_1}\overline{\mathbf{T}_{G_1}} + R_{G_1}(\cos\alpha - 1)\vec{\mathbf{n}}\end{aligned}$$

$\overline{\mathbf{T}_{G_1}}$ se décompose lui-même selon $\overline{\mathbf{T}_p}$ et $\overline{\mathbf{T}_m}$:

$$\overline{\mathbf{T}_{G_1}} = \sin Az_1 \overline{\mathbf{T}_p} + \cos Az_1 \overline{\mathbf{T}_m}$$

Nous disposons ainsi des coordonnées $(X_{L_2}, Y_{L_2}, Z_{L_2})$ de M_2 dans le repère local en M_1 :

$$\begin{pmatrix} X_{L_2} \\ Y_{L_2} \\ Z_{L_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin\alpha \sin Az_1 R_{G_1} \\ \sin\alpha \cos Az_1 R_{G_1} \\ (\cos\alpha - 1)R_{G_1} \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \alpha = \frac{\Delta s}{R_{G_1}} \\ \frac{1}{R_{G_1}} = \frac{\sin^2 Az_1}{N_1} + \frac{\cos^2 Az_1}{\rho_1} \end{cases}$$

Ces formules permettent ensuite de déterminer les coordonnées (x_2, y_2, z_2) de M_2 dans \mathbb{R} , puis (λ_2, φ_2) .

Quant à Az_2 , il est obtenu à partir de la relation de Clairaut:

$$r_1 \sin Az_1 = C = r_2 \sin Az_2 \quad \Leftrightarrow \quad \sin Az_2 = \frac{r_1}{r_2} \sin Az_1 = \frac{N_1 \cos \varphi_1}{N_2 \cos \varphi_2} \sin Az_1$$

6.2.c Problème inverse

Supposons données (λ_1, φ_1) et (λ_2, φ_2) , le problème consiste à chercher Δs , Az_1 et Az_2 . Il suffit de déterminer les coordonnées $(X_{L_2}, Y_{L_2}, Z_{L_2})$ de M_2 dans R_{L_1} . On obtient ensuite Az_1 , R_{G_1} , α , Δs et Az_2 à l'aide des identités ci-après:

$$\begin{aligned}\tan Az_1 &= \frac{X_{L_2}}{Y_{L_2}} \\ \frac{1}{R_{G_1}} &= \frac{\sin^2 Az_1}{N_1} + \frac{\cos^2 Az_1}{\rho_1} \\ \sin^2 \alpha &= \frac{X_{L_2}^2 + Y_{L_2}^2}{R_{G_1}^2} \\ \Delta s &= \alpha R_{G_1} \\ \sin Az_2 &= \frac{N_1 \cos \varphi_1}{N_2 \cos \varphi_2} \sin Az_1\end{aligned}$$

Cette méthode approchée de calcul de lignes géodésiques consistant à modéliser l'ellipsoïde par la sphère de courbure normale dans la direction considérée fournit des résultats avec une exactitude millimétrique jusqu'à 50 km environ.

ANNEXES



E N S G

**École Nationale
des Sciences
Géographiques**

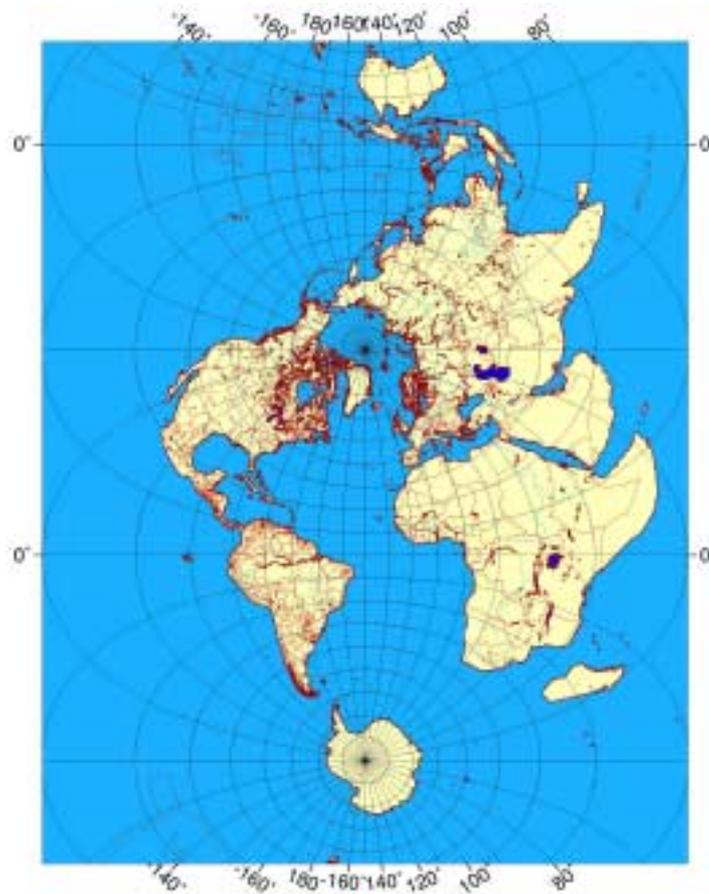
Cours de Géodésie

Chapitre 3

REPRESENTATIONS PLANES

Version 2.1

20/10/2002



Didier BOUTELOUP

Cellule pédagogique et de recherche en astro-géodésie

Didier.bouteloup@ensg.ign.fr

(33) 01 64 15 31 37

CHAPITRE III

REPRÉSENTATIONS PLANES

1	<i>Bref historique de la cartographie</i>	3
1.1	Introduction	3
1.2	La période grecque	3
1.3	La période romaine	4
1.4	Les temps modernes	5
2	<i>Représentation d'une surface sur une autre</i>	9
2.1	Définitions générales	9
2.2	Altérations	10
2.2.a	Notion d'applicabilité entre deux surfaces	10
2.2.b	Module et altération linéaires	10
2.2.c	Altération angulaire	11
2.2.d	Module aérolaire	11
2.3	Indicatrice de Tissot	11
2.3.a	Directions principales de la représentation; modules linéaires principaux	11
2.3.b	Indicatrice de Tissot	11
2.3.c	Calculs des modules linéaire et aérolaire	13
2.4	Conformité et équivalence	14
2.4.a	Représentation conforme	14
2.4.b	Représentation équivalente	15
2.4.c	Surfaces applicables	15
3	<i>Classification des représentations</i>	16
3.1	Typologie selon les déformations	16
3.2	Classification selon le canevas	16
3.3	Classification selon l'aspect	18
3.4	Exemples	19
4	<i>Étude de représentations conformes particulières</i>	21
4.1	Conditions de Cauchy	21
4.2	Représentation conforme de Mercator directe	22
4.2.a	Construction mathématique	22
4.2.b	Étude du module linéaire	24
4.3	Représentation conique conforme de Lambert	28
4.3.a	Construction mathématique	28
4.3.b	Étude du module linéaire	30
4.3.c	Formulaire	34
4.3.d	Représentations de Lambert en usage en France métropolitaine	36
4.4	Représentation stéréographique polaire	41
4.4.a	Construction mathématique	41
4.4.b	Étude du module linéaire	42
4.4.c	Formulaire	42
4.5	Représentation transverse de Mercator	44
4.5.a	Coordonnées de Cassini-Soldner de la sphère	44
4.5.b	Représentation transverse de Mercator de la sphère	46
4.5.c	Représentation conforme de l'ellipsoïde sur la sphère	48

4.5.d	Représentation de Gauss-Laborde	51
4.5.e	Définition des représentations UTM	52
4.5.f	Mise en oeuvre des représentations UTM	54
4.5.g	UTM : Définition initiale de US Army	56

CHAPITRE III

REPRÉSENTATIONS PLANES

1 Bref historique de la cartographie

1.1 Introduction

Dès une époque très reculée les hommes sentent le besoin de connaître les pays qu'ils habitent et qu'ils parcourent. Ils commencent par s'informer des distances, de la direction des itinéraires, du nom des lieux les plus remarquables. En regroupant ces renseignements, ils font naître la géographie. Celle-ci est d'abord descriptive et utilitaire, c'est à dire constituée par des recueils de notions écrites sur les pays visités, accompagnées de dessins approximatifs ; elle devient mathématique, lorsqu'on imagine, pour relier et orienter les objets situés sur ces dessins, de les rapporter à des lignes déterminées par rapports aux observations de la voûte céleste.

Extrait de : Historique de la cartographie, G. ALI NHAC, publication ENSG.

1.2 La période grecque

Homère (IX^{ème} siècle avant J.C.) à travers ses récits de l'Iliade et de l'Odyssée est considéré comme le précurseur de la géographie.

Thalès de Milet (640-548 avant J.C.) contribua au développement la géographie mathématique.

Eratosthène (275-194 avant J.C.) améliorant les premières ébauches de cartes tracées par ses prédécesseurs, on lui doit outre la première estimation du rayon terrestre, une carte où figurent les méridiens et parallèles passant par les lieux les plus connus. Les méridiens et parallèles sont représentés par des droites concourantes se coupant à angle droit, cette représentation du monde est connue sous le nom de projection plate carrée.

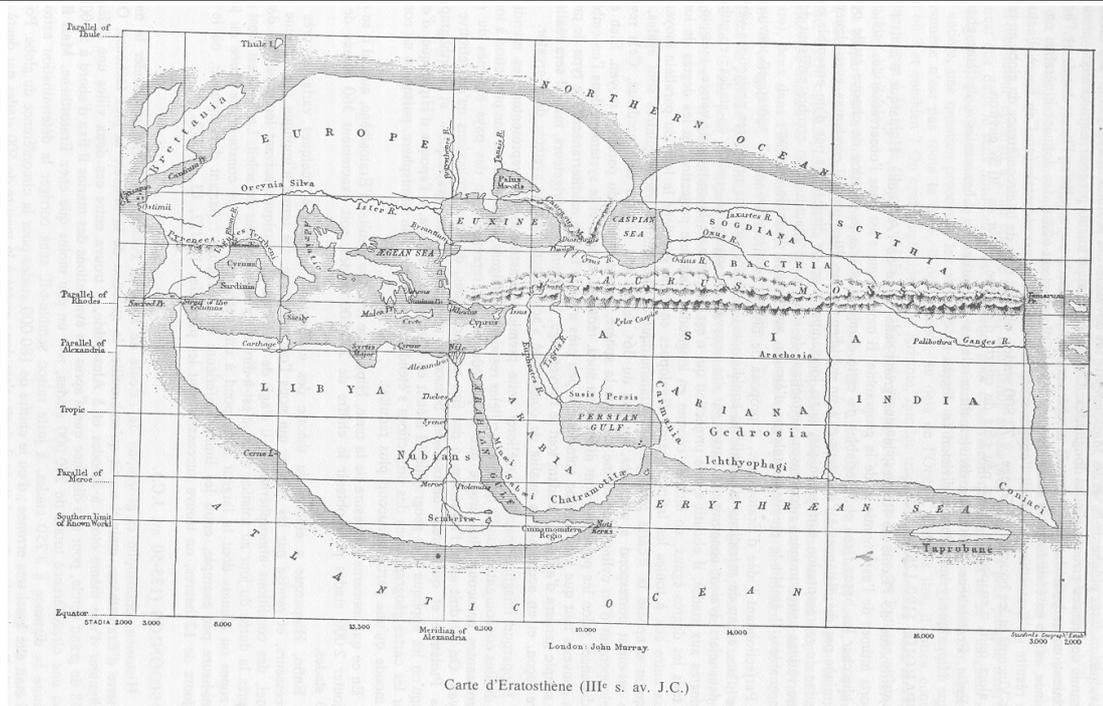


Fig. 1 : carte d'Eratosthène III av. J.C.

1.3 La période romaine

Ptolémée (90-168) géomètre, astronome et géographe était un grec d'Alexandrie, il publia deux ouvrages fondamentaux « l'almageste » recueil de cosmographie et d'astronomie ainsi qu'un « Guide géographique » en huit volumes comportant le relevé des coordonnées géographiques de plus de 8000 lieux. Il développe la projection dite Homéotère où les parallèles sont représentés par des cercles concentriques et les méridiens par des courbes tracées points par points.

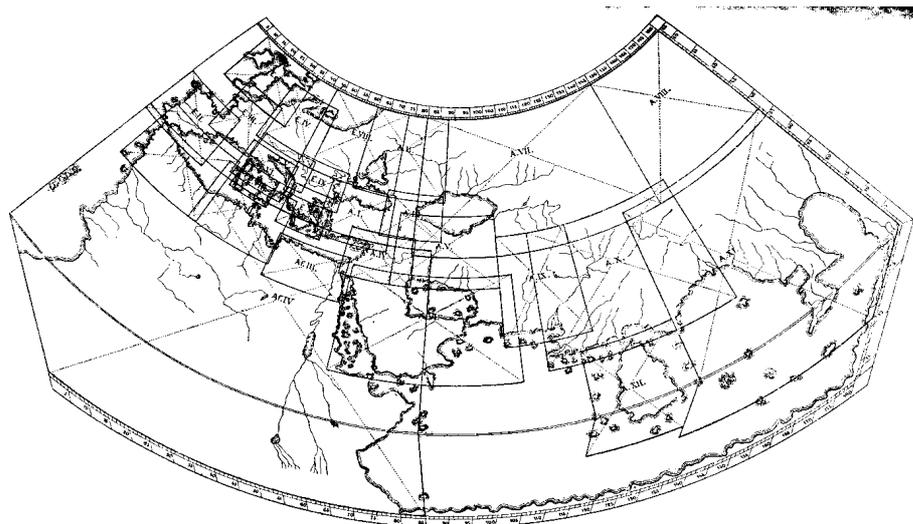
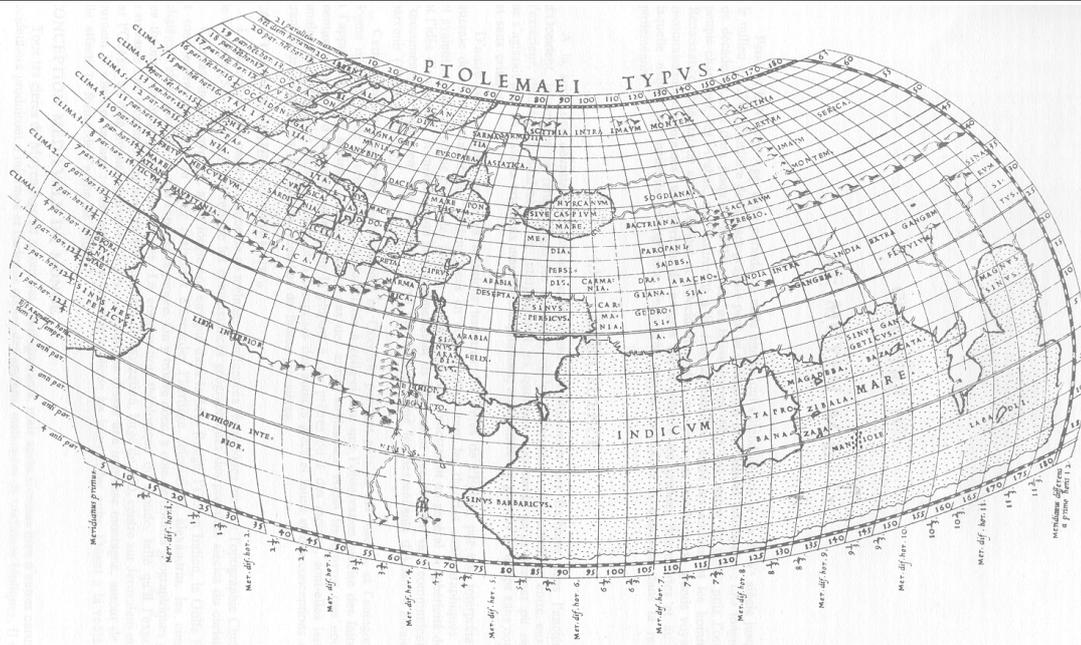


Tableau d'assemblage des cartes de Ptolémée (II^e siècle)

Fig. 2 : tableau d'assemblage des cartes de Ptolémée

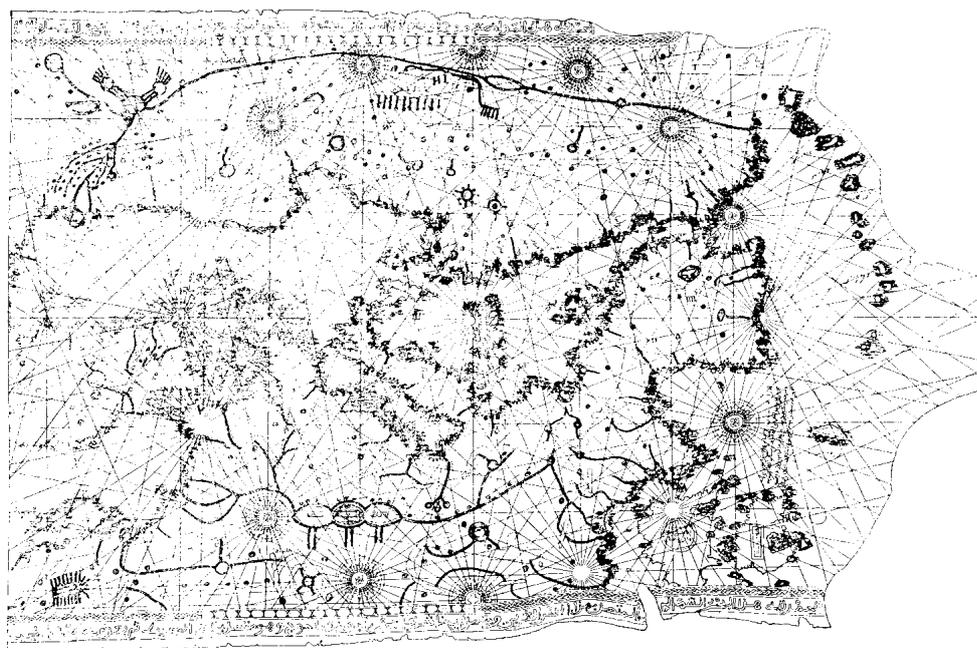


Carte du Monde de Ptolémée (d'après une édition vénitienne, 1561)

Fig. 3 : carte du monde de Ptolémée

1.4 Les temps modernes

Le moyen âge mis fin à la période romaine, pendant cette période obscure **Al Edrisi (1099-1164)** géographe arabe compléta l'œuvre de Ptolémée sur les routes empruntées par les commerçants arabes. L'invention de la boussole et le développement de la navigation maritime conduisit à la fabrication de nombreux « Portulans » basés sur l'observation des directions des routes maritimes.



Portulan arabe (1600)

Fig. 4 : portulan arabe 1600

La représentation plane d'une vaste partie du monde minimisant les déformations posait cependant un problème aux cartographes. Une des solutions consista en la production de cartographie en fuseaux développées vers 1507 par **Waldseemüller**.

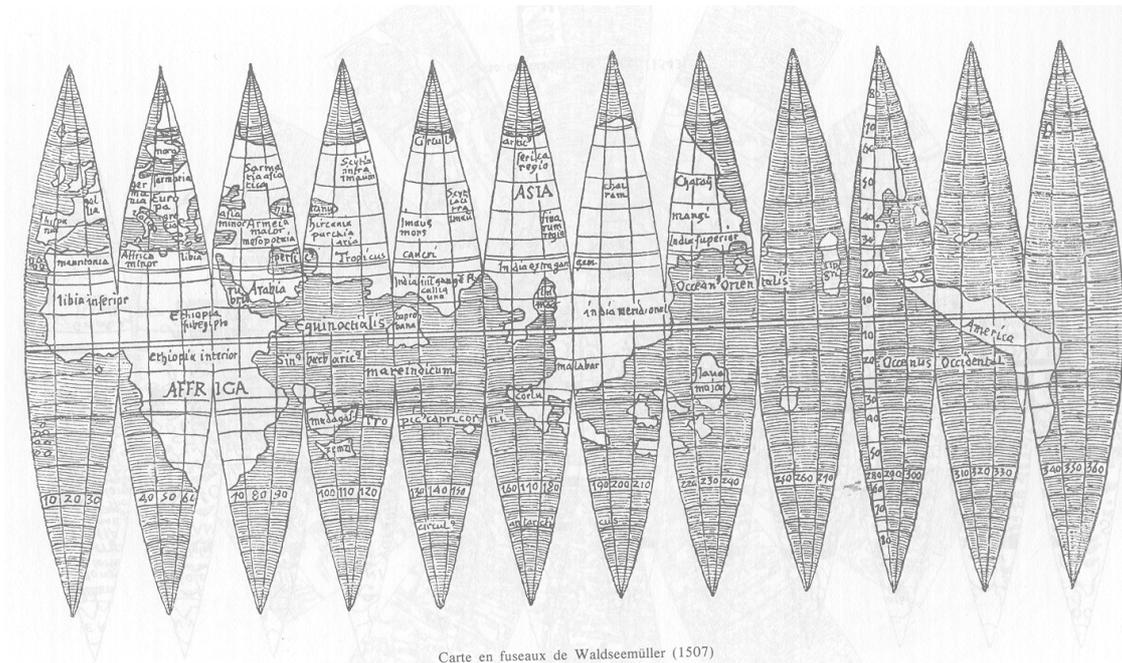


Fig. 5 : carte en fuseau de Waldseemüller (1507)

Sur les planisphère, les terres nouvellement découvertes restaient très déformées par la projection plate carré, il faudra attendre **Mercator (1512-1594)** pour voir apparaître la projection à latitudes croissantes qui a gardé son nom. Outre ce système de projection on lui doit un recueil de 107 cartes gravées auquel il donna le nom d'Atlas proposant ainsi comme patron aux cartographes modernes, le géant légendaire qui portait le monde sur ses épaules.

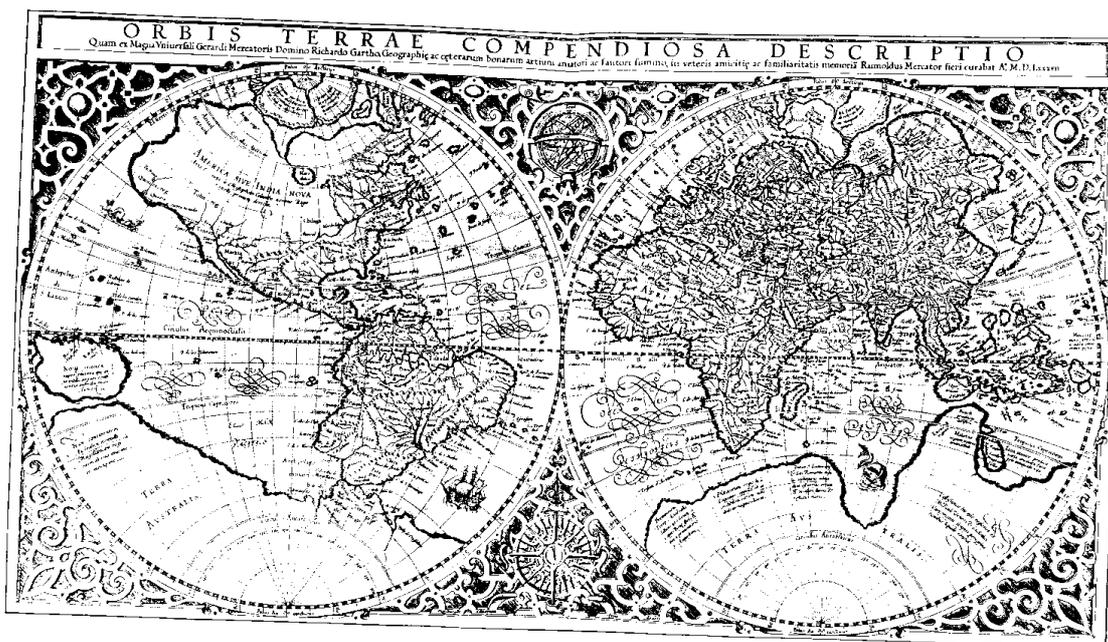


Fig. 6 : Mappemonde de Mercator (1595)

La cartographie de l'Europe au XVIII^{ème} siècle a ses grands traits de géographie physique à peu près arrêtés, des observations astronomiques ont fixé les contours des royaumes, il faudra attendre l'invention de l'horloge pour cependant connaître avec précision les longitudes astronomiques. Dans le domaine des projections, tous les types de canevas ont été essayés et construits géométriquement, les perfectionnements dont les artisans sont **Lambert(1728-1777)**, **Bonne(1727-1794)** et **Gauss(1777-1855)**, interviendront surtout dans leur définition analytique qui permettra la réalisation rigoureuse des propriétés de conformité et d'équivalence.

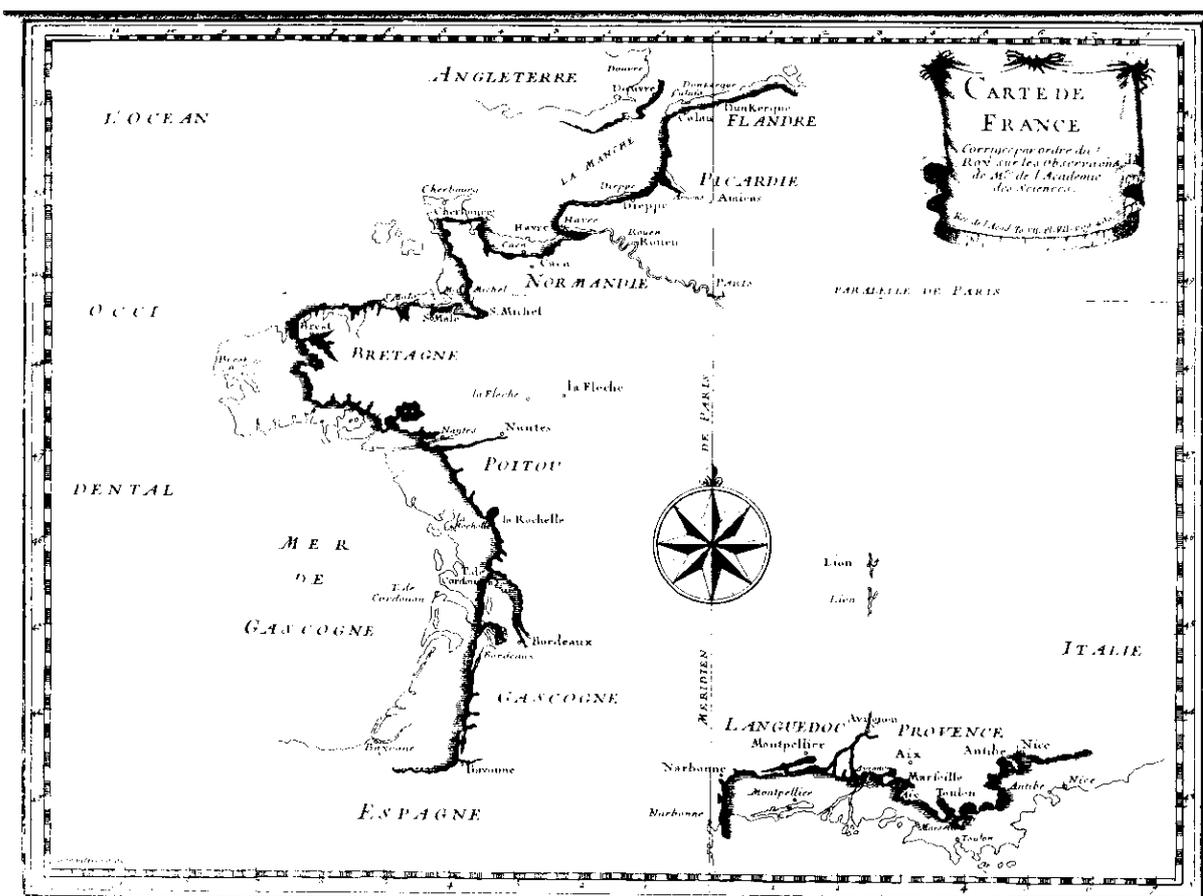


Fig. 7 : carte de La Hire (1682)

Les travaux géodésiques de triangulation générale de la France depuis la méridienne de **Picard (1669-1671)**, reprise ensuite dans la **triangulation de Cassini (1733-1740)**, permirent la réalisation de cartes topographiques précises au 1:86400 couvrant le territoire national (carte de Cassini).

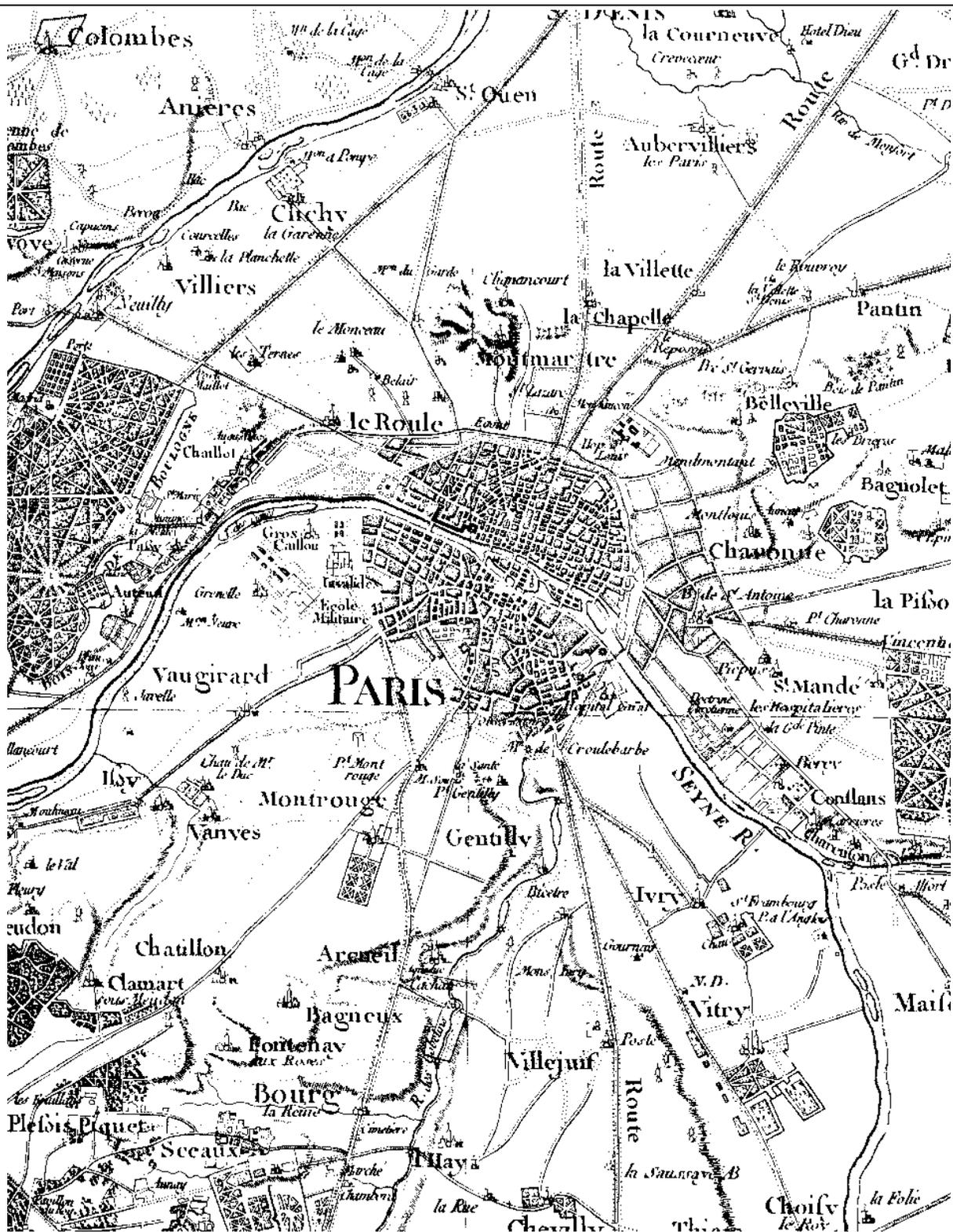


Fig. 8 : carte de Cassini (1756)

2 Représentation d'une surface sur une autre

2.1 Définitions générales

Soient deux surfaces régulières σ et Σ , on appelle **représentation de σ sur Σ** toute fonction F de σ vers Σ bijective, "presque partout" en tout cas:

$$F \left(\begin{array}{l} \sigma \longrightarrow \Sigma \\ m \longrightarrow F(m) = M \end{array} \right)$$

Si on se donne une nappe paramétrée de σ (g_1, D_1) , $D_1 \subset \mathbf{R}^2$, et une nappe paramétrée de (g_2, D_2) , $D_2 \subset \mathbf{R}^2$, alors la donnée de F équivaut à la donnée de F^* :

$$F^* \left(\begin{array}{l} D_1 \longrightarrow D_2 \\ (u, v) \longrightarrow F^*(u, v) = (U, V) \end{array} \right) ,$$

et aussi à la donnée des deux projections de F^* :

$$F_1^* \left(\begin{array}{l} D_1 \longrightarrow \mathbf{R} \\ (u, v) \longrightarrow U \end{array} \right) \quad \text{et} \quad F_2^* \left(\begin{array}{l} D_2 \longrightarrow \mathbf{R} \\ (u, v) \longrightarrow V \end{array} \right) ,$$

c'est à dire à la donnée de $U(u, v)$ et de $V(u, v)$. Désormais, par abus de langage, nous confondrons F et F^* .

Dans la suite du chapitre, nous limiterons l'étude aux cas de fonctions F continue et différentiable en tout point de définition, telles que leur réciproque F^{-1} soit elle aussi continue et différentiable en tout point et telles que le jacobien de F J_F admette deux valeurs propres non nulles.

Appelons m un point σ et $M = F(m)$; m et M sont appelés **points correspondants**. Soient γ_1 et γ_2 deux courbes tracées sur σ passant par m et \vec{t}_1 (respectivement \vec{t}_2) le vecteur unitaire tangent à γ_1 (resp. γ_2) en m , et notons \vec{T}_1 (resp. \vec{T}_2) le vecteur unitaire tangent à $\Gamma_1 = F(\gamma_1)$ - resp. $\Gamma_2 = F(\gamma_2)$ - en M sur Σ . \mathbf{t}_1 et \mathbf{T}_1 (resp. \mathbf{t}_2 et \mathbf{T}_2) sont appelés **directions correspondantes**.

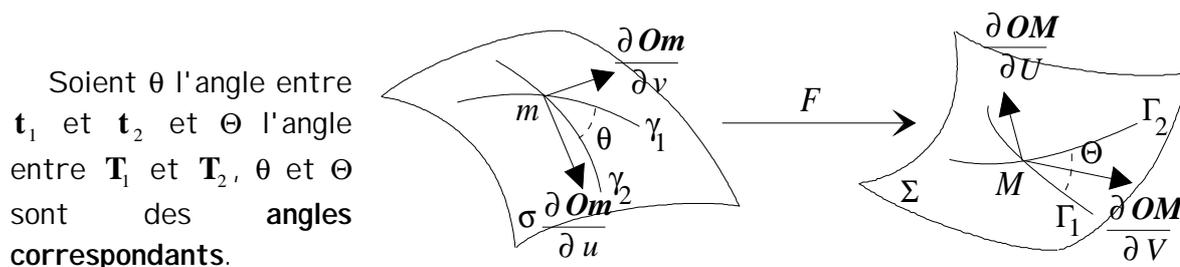


Fig. 9 : Schéma d'une représentation d'une surface sur une autre

2.2 Altérations

2.2.a Notion d'applicabilité entre deux surfaces

σ et Σ sont dites **applicables** si et seulement si il existe une représentation F de σ vers Σ telle que, au voisinage de tout point m de σ , toute figure infiniment petite de σ a pour image par F une figure identique en forme et en surface sur Σ .

2.2.b Module et altération linéaires

Soient $m \in \sigma$ et le point correspondant $M \in \Sigma$, et \mathbf{t} une direction autour de m . On appelle **module linéaire** de F en m dans la direction de \mathbf{t} le rapport $\mu = \frac{dS}{ds}$ où :

- . ds est un élément de longueur infiniment petit autour de m ,
- . dS est l'élément de longueur correspondant sur Σ .

Nous savons déjà que la première forme quadratique fondamentale fournit une expression de ds ($ds^2 = E du^2 + 2F du dv + G dv^2$) et que la donnée de \mathbf{t} revient à la donnée de $\frac{dv}{du}$ (Chap.I 3.3.a).

En général, μ dépend de m et de la direction considérée.

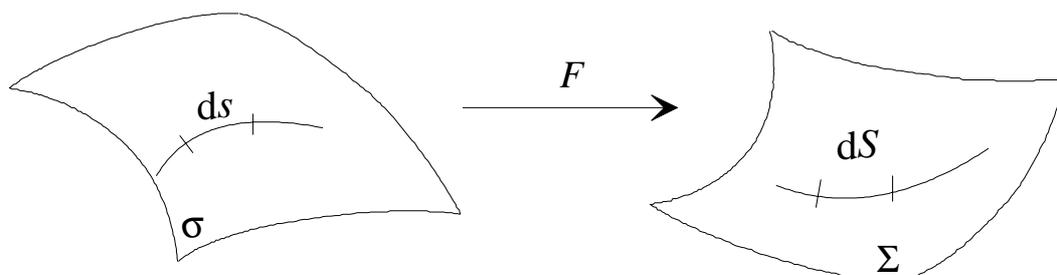


Fig. 10 : Module linéaire

On appelle **altération linéaire** la quantité $\epsilon = \mu - 1$.

2.2.c Altération angulaire

Avec les conventions précédemment indiquées, on appelle **altération angulaire** la quantité $\Xi - \theta$.

En général, l'altération angulaire dépend de m et des directions considérées.

2.2.d Module aérolaire

Soient γ_f une courbe fermée infiniment petite autour de m sur σ , et Γ_f la courbe correspondante sur Σ . Si on note $d\omega$ et $d\Omega$ respectivement les aires intérieures à γ_f et Γ_f , on appelle **module aérolaire** $k = \frac{d\Omega}{d\omega}$.

On admet que k ne dépend pas de γ_f mais uniquement de m .

2.3 Indicatrice de Tissot

2.3.a Directions principales de la représentation; modules linéaires principaux

Étant données les hypothèses prises pour F (principalement le fait que J_F est de rang 2 à valeurs propres non nulles μ_1 et μ_2), nous admettons que, en tout point m de σ , il existe 2 directions orthogonales et 2 seulement \mathbf{t}_1 et \mathbf{t}_2 qui se transforment par F en directions orthogonales \mathbf{T}_1 et \mathbf{T}_2 sur Σ .

Les directions \mathbf{t}_1 et \mathbf{t}_2 sont appelées **directions principales de la représentation** F en m . Les modules linéaires de F dans les directions principales sont μ_1 et μ_2 ; ils sont les **modules linéaires principaux** de F en m .

Dans la suite, nous supposons toujours que $\mu_1 \geq \mu_2$. Évidemment, les directions principales de F peuvent varier d'un point à un autre et sont a priori différentes des directions principales de la surface σ .

2.3.b Indicatrice de Tissot

Les plans tangents π (de σ en m) et Π (de Σ en \mathcal{M}) sont chacun munis de leur base normée principale relativement à F , respectivement $(\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2)$ et $(\mathbf{T}_1^*, \mathbf{T}_2^*)$;

$$\text{Avec } \begin{cases} \mathbf{T}_1^* = \frac{\mathbf{T}_1}{\|\mathbf{T}_1\|} \\ \mathbf{T}_2^* = \frac{\mathbf{T}_2}{\|\mathbf{T}_2\|} \end{cases}$$

Cherchons l'image par F du cercle \mathcal{C} de σ de centre m et de rayon ds .

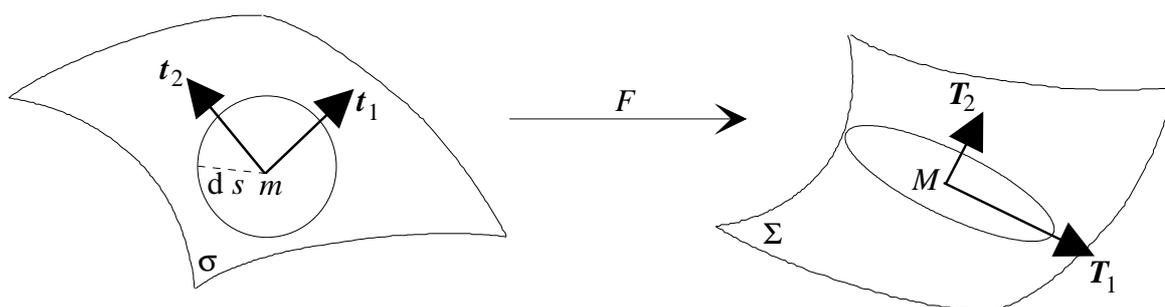


Fig. 11 : Image par F du cercle infiniment petit C

Par définition de la fonction différentielle, μ_1 et μ_2 étant les valeurs propres de F , si p est un point quelconque de \mathcal{C} et $P = F(p)$, on a :

$$\overrightarrow{mp} = \cos \xi ds \overrightarrow{t_1} + \sin \xi ds \overrightarrow{t_2}$$

$$\overrightarrow{MP} = \cos \xi \mu_1 ds \overrightarrow{T_1^*} + \sin \xi \mu_2 ds \overrightarrow{T_2^*}$$

Lorsque ξ décrit $[0, 2\pi]$, l'ensemble des points P forme, sur Σ , la transformée par l'affinité de valeur $\frac{\mu_2}{\mu_1}$ selon $\overrightarrow{T_2^*}$ du cercle de centre M et de rayon $\mu_1 ds$.

$F(\mathcal{C})$ est donc l'ellipse de demi grand axe $\mu_1 ds$ selon $\overrightarrow{T_1^*}$ et de demi petit axe $\mu_2 ds$ selon $\overrightarrow{T_2^*}$.

L'image par F du cercle sur σ de centre m est de rayon ds est une ellipse sur Σ de centre M , de demi grand axe $\mu_1 ds$ selon $\overrightarrow{T_1^*}$ et de demi petit axe $\mu_2 ds$ selon $\overrightarrow{T_2^*}$. On l'appelle **indicatrice de Tissot** de F en m .

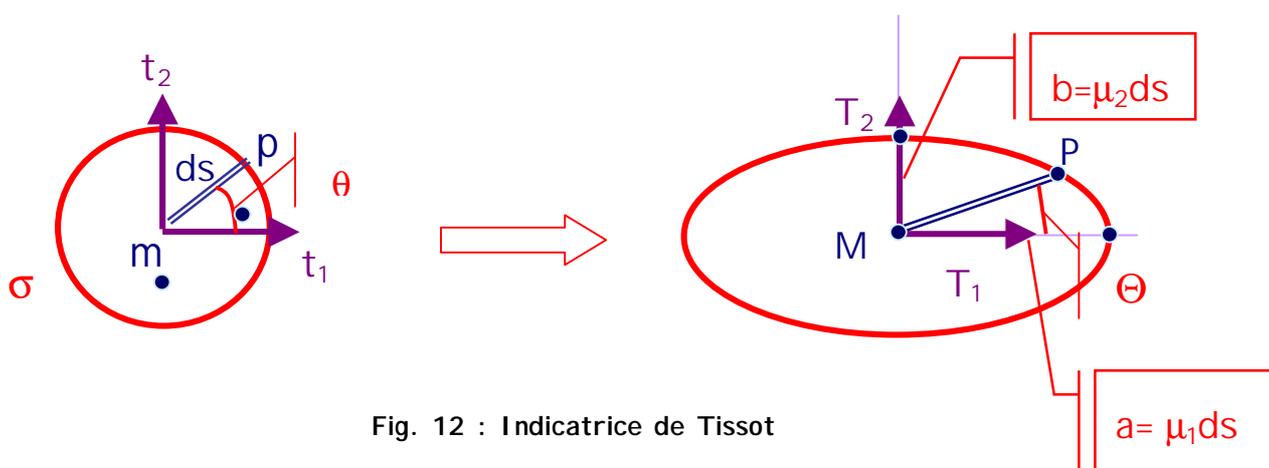


Fig. 12 : Indicatrice de Tissot

L'équation cartésienne de cette ellipse dans le repère $(M; \overrightarrow{T_1^*}, \overrightarrow{T_2^*})$ de Π est :

$$\frac{\alpha^2}{\mu_1^2} + \frac{\beta^2}{\mu_2^2} = ds^2$$

Les directions principales de F en m sont donc les axes de symétrie de l'indicatrice de Tissot.

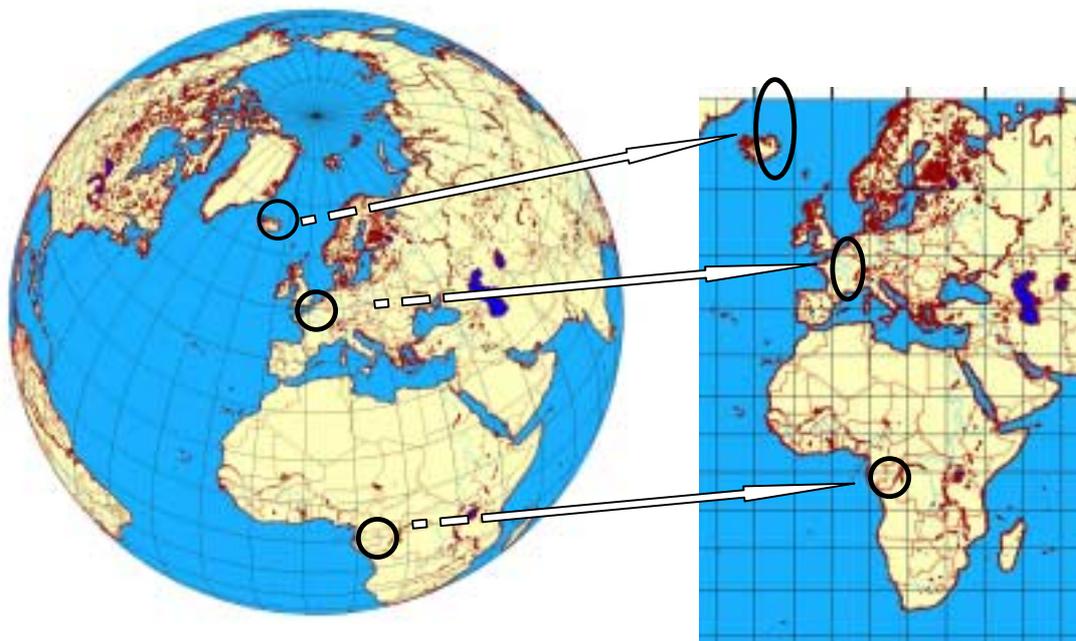


Fig. 13 : interprétation graphique de l'indicatrice de Tissot

2.3.c Calculs des modules linéaire et aérotaire

Dans la direction de $\cos \xi \mathbf{t}_1 + \sin \xi \mathbf{t}_2$, le module linéaire vaut:

$$\mu = \frac{dS}{ds} = \frac{\|\overline{\mathbf{MP}}\|}{\|\underline{\mathbf{mp}}\|} \Leftrightarrow \mu^2 = \frac{(\mu_1^2 \cos^2 \xi + \mu_2^2 \sin^2 \xi) ds^2}{ds^2}$$

$$\text{soit } \mu = \sqrt{\mu_1^2 \cos^2 \xi + \mu_2^2 \sin^2 \xi}$$

Pour le module aérotaire: $k = \frac{A(F(C))}{A(C)} = \frac{\pi \mu_1 ds \mu_2 ds}{\pi ds^2} = \mu_1 \mu_2$

Pour établir la relation entre les angles correspondants ξ et Ξ , on se souvient que, avec les notations habituelles, on a démontré la relation suivante entre les latitudes géocentrique, paramétrique et géographique (cf. chap II) :

$$\tan \omega = \frac{b}{a} \tan \psi = \frac{b^2}{a^2} \tan \varphi$$

Dans le cadre présent, on obtient: $\tan \Xi = \frac{\mu_2}{\mu_1} \tan \xi$

2.4 Conformité et équivalence

2.4.a Représentation conforme

Une représentation est dite **conforme** si et seulement si, en tout point, l'indicatrice de Tissot est un cercle.

Remarquons que les propositions suivantes sont des conditions nécessaires et suffisantes de conformité:

- En tout point, $\mu_1 = \mu_2$.
- En tout point, μ est le même dans toutes les directions.
- En tout point, μ ne dépend que de la position.
- En tout point, quelque soit ξ , $\Xi = \xi$.
- **F conserve les angles en tout point.**

Pour des représentations conformes, on caractérise des lignes privilégiées de σ :

- on appelle **ligne isomètre** une courbe le long de laquelle μ est constant,
- si on désigne par μ_0 la valeur minimale de μ sur σ , on appelle **isomètre centrale** la (les) courbe(s) le long de laquelle (desquelles) μ vaut μ_0
- on appelle **ligne automécoïque** une isomètre particulière le long de laquelle μ vaut 1,
- on appelle **ligne isomorphe** une courbe orthogonale aux courbes isomètres.

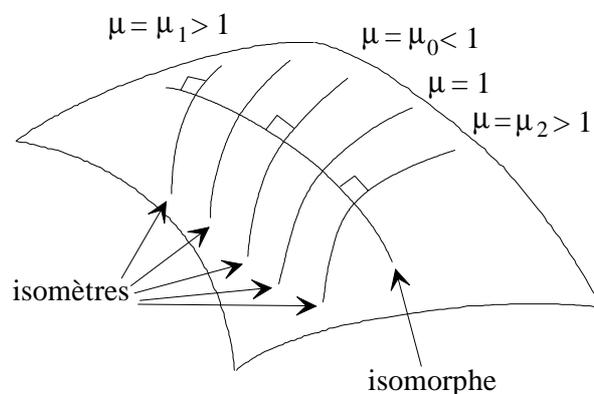


Fig. 14 : Isomètres et isomorphes

"Réduction" des distances en représentation:

$$\mu = \frac{dS}{ds} \text{ donc } S = \int_{M_1, M_2} \mu ds . \text{ Pratiquement, l'intégrale est discrétisée:}$$

- soit $S = \mu s$

- soit $S = \frac{\mu_1 + \mu_2}{2} s$

- soit $S = \frac{\mu_1 + 4\mu_{1/2} + \mu_2}{6} s$

2.4.b Représentation équivalente

Une représentation est dite **équivalente** si et seulement si, en tout point, l'aire de l'indicatrice de Tissot vaut πds^2 .

Les propositions suivantes sont des conditions nécessaires et suffisantes de l'équivalence d'une représentation:

- En tout point, $\mu_1 \mu_2 = 1$.
- En tout point, $k = 1$.
- F conserve les surfaces élémentaires en tout point.

2.4.c Surfaces applicables

Il est clair que σ et Σ sont applicables si et seulement si il existe une représentation conforme et équivalente de σ vers Σ .

Or, on admet qu'une condition nécessaire et suffisante pour que deux surfaces soient applicables est qu'elles aient même courbure totale en tout point. Or, la courbure totale de l'ellipsoïde est $\frac{1}{\sqrt{N\rho}}$, celle du plan est 0 et celle de la sphère

$$\frac{1}{R}$$

Donc l'ellipsoïde, la sphère et le plan sont des surfaces non applicables deux à deux. Il **n'existe donc pas** de représentation conforme et équivalente entre ces trois surfaces.

3 Classification des représentations

3.1 Typologie selon les déformations

On distingue les représentations **conformes**, **équivalentes** ou **aphylactiques** (c'est-à-dire ni conforme, ni équivalente).

Les représentations conformes sont très utilisées dans les sciences géographiques (topographie, géodésie, ...), dans l'artillerie ou en navigation; un angle mesuré en représentation est égal à l'angle correspondant sur la sphère ou l'ellipsoïde.

L'intérêt des représentations équivalentes réside dans le calcul des petites aires: calcul de l'impôt foncier (cadastre), études d'occupation des sols, etc.

Les représentations aphyllactiques sont principalement utilisées pour des représentations générale de la Terre à très petite échelle; elles permettent de ne pas avoir des déformations angulaires ou aérolaires extrêmes et laissent une grande "liberté esthétique" au cartographe.

3.2 Classification selon le canevas

On classe d'autre part les représentations planes de l'ellipsoïde ou de la sphère selon leur **canevas**, c'est à dire l'image des méridiens et des parallèles en représentation:

- représentation **conique**:
 - les images des méridiens sont des demi droites concourantes en un point P , image du pôle (Nord ou Sud),
 - les images des parallèles sont des arcs de cercle concentriques autour de P .

Comme leur nom l'indique, ces projection correspondent à des applications de la sphère ou de l'ellipsoïde sur un cône sécant ou tangent à la sphère. Le cône étant développable, on peut en faire une représentation plane sans déformation. Selon la propriété qu'on voudra voir vérifiée, la projection sera conforme ou équivalente. A noter que la conformité ou l'équivalence de ces projections est maintenue pour une Terre ellipsoïdale, lorsque l'axe du cône est confondu avec l'axe de rotation de la Terre.

- représentation **cylindrique**:
 - les images des méridiens sont des faisceaux de droites parallèles,
 - les images des parallèles sont des faisceaux de droites parallèles, orthogonales aux images des méridiens.

Comme leur nom l'indique, ces projections correspondent à des applications de la sphère sur un cylindre sécant ou tangent à la sphère. Le cylindre étant développable, on peut en faire une représentation plane sans déformation. Seules les projections transverses permettent de construire des projections conservant, sur l'ellipsoïde, leurs propriétés. Les parallèles sont des droites parallèles, horizontales dans la projection directe.

- représentation **azimutale**:

- les images des méridiens sont des demi droites concourantes en P , image du pôle (Nord ou Sud),
- les images des parallèles sont des cercles **entiers** concentriques autour de P .

Un canevas azimutal est donc un cas particulier de canevas conique.

Ces projections sont des projections au sens mathématique du terme, elles possèdent un centre de projection¹. La projection s'opère sur un plan tangent à la surface terrestre. Lorsque le point de tangence est le pôle terrestre, les parallèles apparaissent en projection sous forme de cercles concentriques, et les méridiens, sous forme de droites. Plus généralement, lorsque la surface terrestre est sphérique, la famille des grands cercles passant par le point de tangence devient dans le plan l'ensemble des droites passant par l'homologue du point en projection. Cette propriété rend très utile ces projections pour la navigation

- représentation **mériconique**:

- les images des parallèles sont des arcs de cercles concentriques autour de P , image du pôle (Nord ou Sud),
- l'image **d'un** méridien est une demi droite passant par P , les autres méridiens étant quelconques.

- représentation **méricylindrique**:

- les images des parallèles sont des faisceaux de droites parallèles,
- l'image **d'un** méridien est une droite orthogonale aux parallèles, les autres méridiens étant quelconques.

¹ Excepté la projection azimutale équivalente

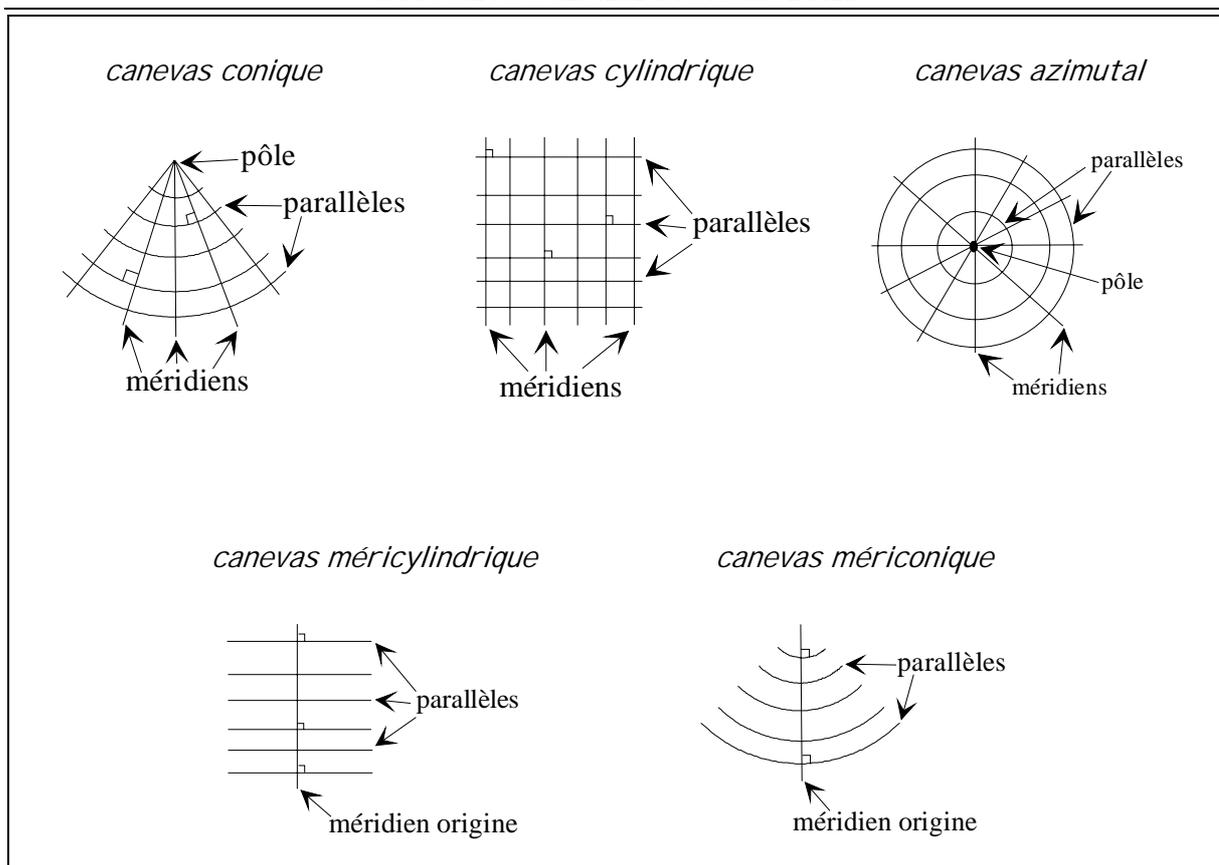
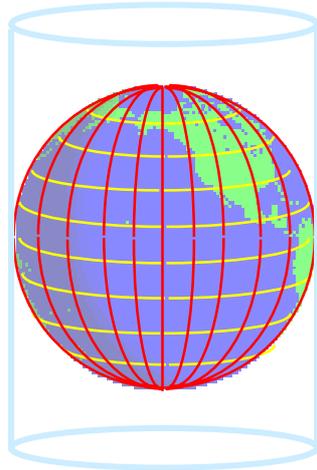


Fig. 15 : Classification selon le canevas

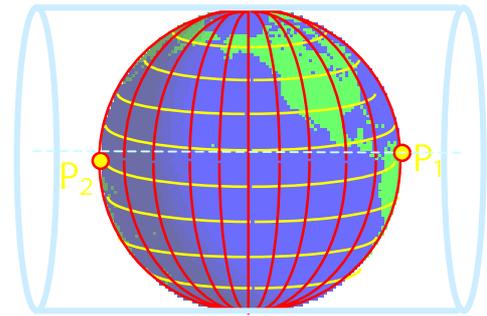
3.3 Classification selon l'aspect

La notion d'**aspect** traduit l'usage d'un pseudo-canevas pour qualifier la représentation:

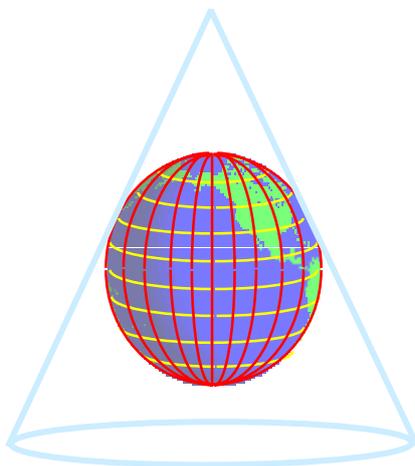
- **aspect direct**: utilisation du canevas des parallèles et des méridiens,
- **aspect transverse**: utilisation d'un canevas transverse, obtenu à partir de 2 points P_1 et P_2 diamétralement opposés sur l'équateur pris comme pseudo-pôles,
- **aspect oblique**: utilisation d'un canevas oblique, obtenu à partir de 2 points P_1 et P_2 diamétralement opposés quelconques pris comme pseudo-pôles.



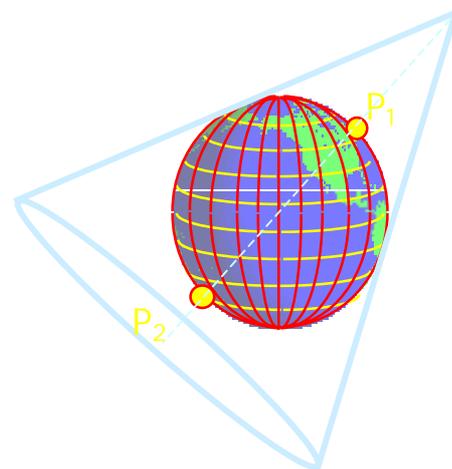
représentation cylindrique **directe**



représentation cylindrique **transverse**



représentation conique **directe**



représentation conique **oblique**

3.4 Exemples

Certaines représentations ont été très étudiées et portent ainsi des noms particuliers:

- représentations cylindriques conformes (directes): représentations de **Mercator**. Par extension:
 - représentation cylindrique conforme transverse: Mercator transverse,
 - représentation cylindrique conforme oblique: Mercator oblique.
- représentations coniques conformes (directes): représentations conformes de **Lambert**.

- représentations azimutales conformes (directes): représentations **stéréographiques (polaires)**. Sous son aspect transverse, une représentation stéréographique est dite méridienne.

4 Étude de représentations conformes particulières

4.1 Conditions de Cauchy

Soient (u, v) des coordonnées **symétriques** de σ et (U, V) des coordonnées **symétriques** de Σ ,

Sur une surface quelconque, la première forme quadratique fondamentale se formule:

$$ds^2 = e du^2 + 2f du dv + g dv^2$$

or, dans le cas de coordonnées symétriques, $\begin{cases} e = g \\ f = 0 \end{cases}$ donc:

$$ds^2 = e(du^2 + dv^2)$$

Sur Σ , on notera de même $dS^2 = E(dU^2 + dV^2)$

Le module linéaire peut donc s'écrire: $\mu^2 = \frac{dS^2}{ds^2} = \frac{E}{e} \times \frac{dU^2 + dV^2}{du^2 + dv^2}$

D'autre part $\begin{cases} dU = \frac{\partial U}{\partial u} du + \frac{\partial U}{\partial v} dv \\ dV = \frac{\partial V}{\partial u} du + \frac{\partial V}{\partial v} dv \end{cases}$ et μ^2 devient:

$$\mu^2 = \frac{E}{e} \times \frac{\left[\left(\frac{\partial U}{\partial u} \right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial u} \right)^2 \right] du^2 + 2 \left[\frac{\partial U}{\partial u} \times \frac{\partial U}{\partial v} + \frac{\partial V}{\partial u} \times \frac{\partial V}{\partial v} \right] du dv + \left[\left(\frac{\partial U}{\partial v} \right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial v} \right)^2 \right] dv^2}{du^2 + dv^2}$$

Si on note $J_F = \begin{pmatrix} \frac{\partial U}{\partial u} & \frac{\partial U}{\partial v} \\ \frac{\partial V}{\partial u} & \frac{\partial V}{\partial v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, alors

$$\mu^2 = \frac{E}{e} \times \frac{(a^2 + c^2)du^2 + 2(ab + cd)du dv + (b^2 + d^2)dv^2}{du^2 + dv^2} = \frac{E}{e} \times \frac{(a^2 + c^2) + 2(ab + cd)\frac{dv}{du} + (b^2 + d^2)\frac{dv^2}{du^2}}{1 + \frac{dv^2}{du^2}}$$

La représentation est conforme si et seulement si μ est indépendant de la direction, c'est-à-dire de $\frac{dv}{du}$, donc si et seulement si:

$$\begin{cases} a^2 + c^2 = b^2 + d^2 \\ ab + cd = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2b^2 + c^2b^2 = b^4 + d^2b^2 \\ ab = -cd \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = c \\ a = -d \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} b = -c \\ a = d \end{cases}$$

Ainsi

(u, v) et (U, V) étant des paramétrages symétriques respectivement de σ et de Σ , une représentation de σ vers Σ est conforme si et seulement si elle satisfait aux **conditions de Cauchy**:

$$\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial u} = \frac{\partial V}{\partial v} \\ \frac{\partial U}{\partial v} = -\frac{\partial V}{\partial u} \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} \frac{\partial U}{\partial u} = -\frac{\partial V}{\partial v} \\ \frac{\partial U}{\partial v} = \frac{\partial V}{\partial u} \end{cases}$$

4.2 Représentation conforme de Mercator directe

4.2.a Construction mathématique

Il s'agit de définir une projection cylindrique directe conforme de l'ellipsoïde. Mathématiquement, dire que le canevas est cylindrique peut se traduire par:

$$\begin{cases} \frac{\partial X}{\partial \varphi} = 0 \\ \frac{\partial Y}{\partial \lambda} = 0 \end{cases}$$

D'autre part, on connaît un paramétrage symétrique de l'ellipsoïde (λ et ℓ) et un autre du plan (X et Y). Les conditions de Cauchy peuvent donc s'écrire comme il suit:

$$(A) \begin{cases} \frac{\partial X}{\partial \lambda} = \frac{\partial Y}{\partial L} \\ \frac{\partial X}{\partial L} = -\frac{\partial Y}{\partial \lambda} \end{cases} \quad \text{ou} \quad (B) \begin{cases} \frac{\partial X}{\partial \lambda} = -\frac{\partial Y}{\partial L} \\ \frac{\partial X}{\partial L} = \frac{\partial Y}{\partial \lambda} \end{cases}$$

On souhaite aussi que X varie dans le même sens que λ et Y dans le même sens que φ et L (L est une fonction croissante de φ). Autrement dit, on impose que, en représentation, le Nord soit "vers le haut" et l'Est "vers la droite":

$$\begin{cases} \frac{\partial X}{\partial \lambda} > 0 \\ \frac{\partial Y}{\partial L} > 0 \end{cases}$$

Le système (B) ne satisfait pas cette condition et n'est pas retenu. La deuxième condition du système (A) est triviale, puisqu'elle revient à écrire: $0=0$. Ainsi la condition de conformité se formule:

$$\frac{\partial X}{\partial \lambda} = \frac{\partial Y}{\partial L}$$

Dans cette équation, le terme de gauche ne dépend que de λ , et celui de droite ne dépend que de φ . Il s'agit donc d'une équation différentielle à variables séparées. Ce type d'équation différentielle se résout en écrivant que chaque terme est constant.

$$\begin{cases} \frac{\partial X}{\partial \lambda} = n \\ \frac{\partial Y}{\partial L} = n \end{cases}, \quad n \text{ étant une constante positive}$$

Finalement l'expression générale des représentations directes de Mercator est:

$$\begin{cases} X = X_c + n \lambda \\ Y = Y_c + n L \end{cases}$$

n, X_c et Y_c étant 3 constantes

4.2.b Étude du module linéaire

Le représentation étant conforme, en un point, μ est le même dans toutes les directions. Pour déterminer μ , il suffit par exemple de le calculer dans la direction du parallèle:

$$\mu = \mu_{\text{paral}} = \frac{dS_{\text{paral}}}{ds_{\text{paral}}} \text{ avec:}$$

$$\bullet ds_{\text{paral}} = N \cos \varphi d\lambda$$

$$\bullet dS_{\text{paral}} = dX = n d\lambda$$

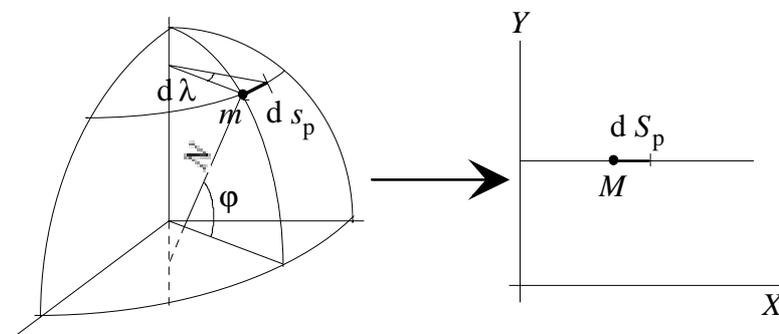


Fig. 16 : Module linéaire le long d'un parallèle

$$\text{En définitive: } \mu = \frac{n}{N \cos \varphi} = \frac{n}{a} \times \frac{(1 - e^2 \sin^2 \varphi)^{\frac{1}{2}}}{\cos \varphi}$$

μ n'est fonction que de φ ; donc les lignes isomètres sont les parallèles et les lignes isomorphes les méridiens.

Étudions les variations de μ en fonction de φ :

$$\begin{aligned} \frac{d\mu}{d\varphi} &= \frac{n}{a} \times \frac{\frac{1}{2} \times \frac{-2e^2 \sin \varphi \cos \varphi \cos \varphi}{(1 - e^2 \sin^2 \varphi)^{\frac{1}{2}}} + (1 - e^2 \sin^2 \varphi)^{\frac{1}{2}} \sin \varphi}{\cos^2 \varphi} \\ &= \frac{n}{a} \times \frac{-e^2 \sin \varphi \cos^2 \varphi + (1 - e^2 \sin^2 \varphi) \sin \varphi}{(1 - e^2 \sin^2 \varphi)^{\frac{1}{2}} \cos^2 \varphi} \\ &= \frac{n}{a} \times \frac{-e^2 \sin \varphi + e^2 \sin^3 \varphi + \sin \varphi - e^2 \sin^3 \varphi}{(1 - e^2 \sin^2 \varphi)^{\frac{1}{2}} \cos^2 \varphi} \end{aligned}$$

$$\text{Et } \frac{d\mu}{d\varphi} = \frac{n}{a} \times \frac{\sin \varphi (1 - e^2)}{(1 - e^2 \sin^2 \varphi)^{\frac{1}{2}} \cos^2 \varphi} \cdot \frac{d\mu}{d\varphi} \text{ est donc du signe de } \sin \varphi - n \text{ est}$$

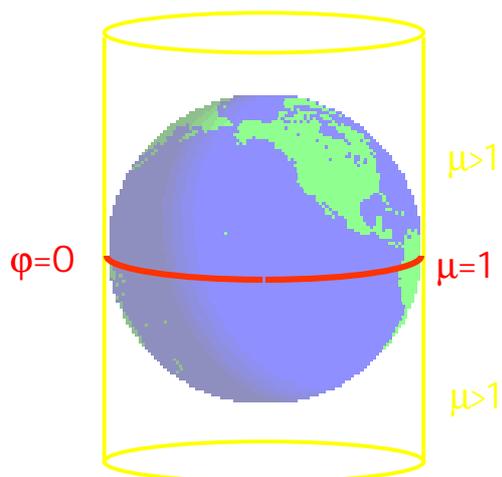
positif - . On peut maintenant tracer le tableau de variations de μ :

φ	$-\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$		
$\frac{d\mu}{d\varphi}$	$-\infty$	$-$	0	$+$	$+\infty$
μ	$+\infty$	\searrow	$\frac{n}{a}$	\nearrow	$+\infty$

On remarque que l'équateur est isomètre centrale. n est choisi de sorte à minimiser les altérations linéaires, c'est-à-dire à rendre μ proche de 1. Deux cas sont donc envisageables:

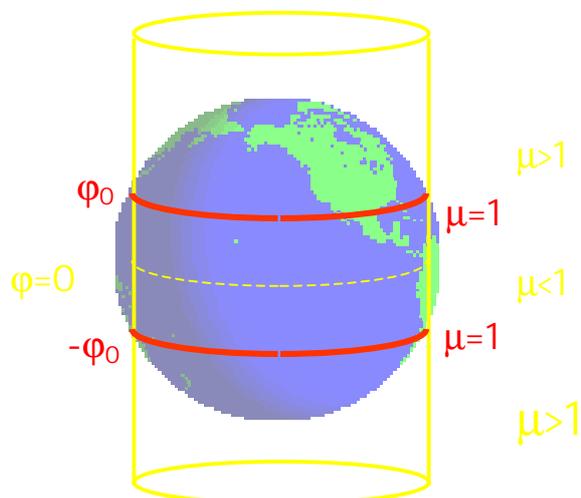
① Soit $n = a$:

Dans ce cas, $\mu = 1$ lorsque $\varphi = 0$.
L'équateur est automécoïque et la représentation est alors dite **tangente**.



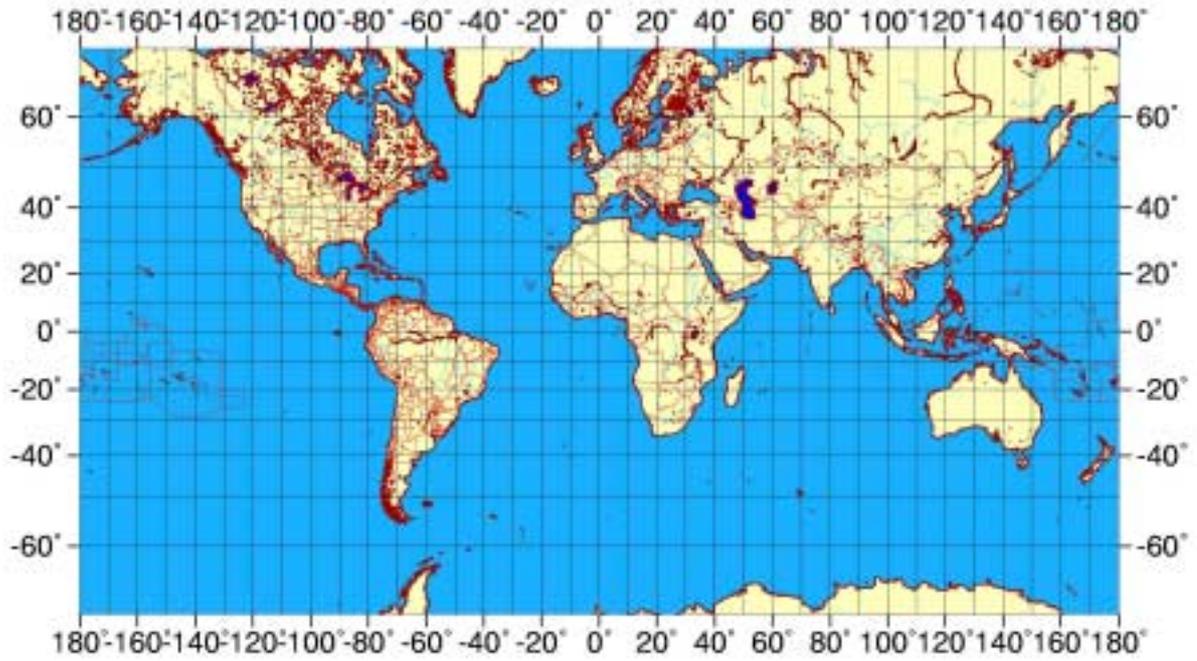
② Soit $n < a$:

Il existe alors $\varphi_0 \neq 0$ tel que les parallèles $\varphi = -\varphi_0$ et $\varphi = \varphi_0$ sont automécoïques. On dit que la représentation est **sécante**.



(le cas où $n > a$ ne présente pas d'intérêt)

PROJECTION CYLINDRIQUE CONFORME MERCATOR DIRECTE



4.3 Représentation conique conforme de Lambert

4.3.a Construction mathématique

On appelle représentation (**conique conforme**) de Lambert une représentation conique et conforme.

La conicité du canevas nous suggère d'utiliser des coordonnées planes polaires (γ, R) :

- $\overrightarrow{OM} \begin{pmatrix} X_p + R \sin \gamma \\ Y_p - R \cos \gamma \end{pmatrix}$,
 (X_p, Y_p) étant les coordonnées du pôle Nord,

- R n'est fonction que de φ et varie dans le sens contraire de φ ;
 $\frac{dR}{d\varphi} \leq 0$,

R diminue quand φ augmente

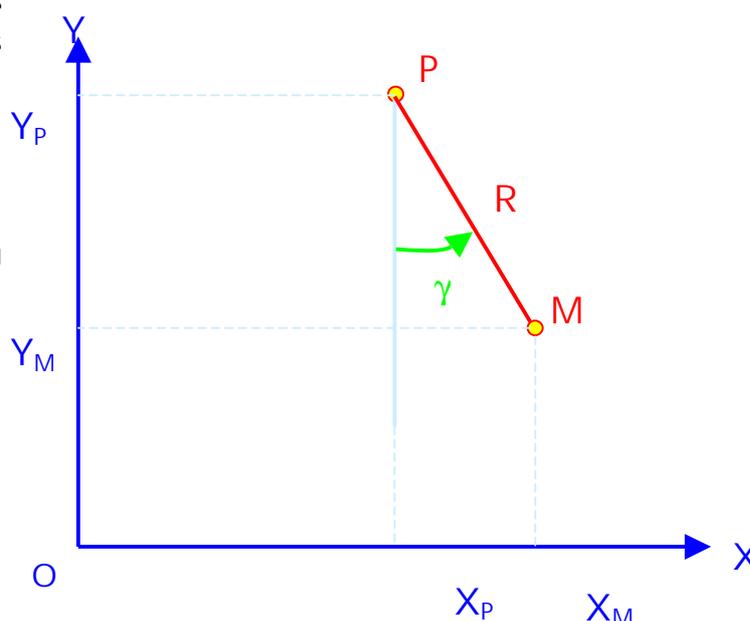


Fig. 19 : Coordonnées polaires du plan

- γ n'est fonction que de λ et varie dans le même sens que λ (en représentation, l'Est est à droite). γ est appelée la **convergence** des méridiens.

La conformité peut se traduire par l'identité $\mu_1 = \mu_2$ en tout point, μ_1 et μ_2 étant les modules linéaires principaux de la représentation. Les directions du parallèle et du méridien sont directions principales en tout point de l'ellipsoïde et La condition de conformité s'écrit donc:

$$\mu_{\text{mér}} = \mu_{\text{paral}}$$

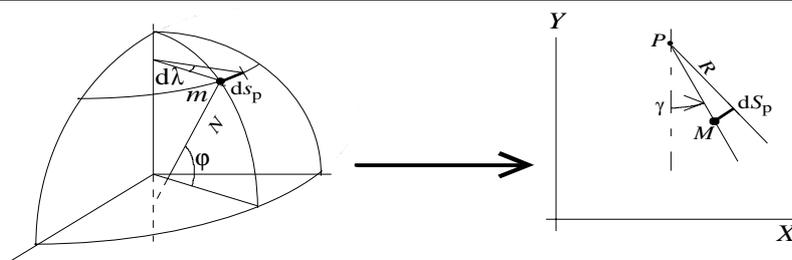


Fig. 20 : Module linéaire dans les directions du parallèle et du méridien

Il est clair que $\mu_{\text{mér}} = -\frac{dS_m}{\underbrace{dS_m}_{=d\beta}} = -\frac{dR}{\rho d\varphi}$ et que $\mu_{\text{paral}} = \frac{dS_p}{dS_p} = \frac{R d\gamma}{N \cos \varphi d\lambda}$.

Donc:

$$\mu_{\text{mér}} = \mu_{\text{paral}} \Leftrightarrow -\frac{dR}{\rho d\varphi} = \frac{R d\gamma}{N \cos \varphi d\lambda}$$

Puisque R ne dépend que de φ et γ que de λ , il va être possible de *séparer les variables* dans cette équation différentielle:

$$\mu_{\text{mér}} = \mu_{\text{paral}} \Leftrightarrow \underbrace{-\frac{dR}{R} \times \frac{N \cos \varphi}{\rho d\varphi}}_{\text{fonction de } \varphi \text{ seulement}} = \underbrace{\frac{d\gamma}{d\lambda}}_{\text{fonct. de } \lambda \text{ seul.}} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{dR}{R} \times \frac{N \cos \varphi}{\rho d\varphi} = n \\ \frac{d\gamma}{d\lambda} = n \end{cases}$$

où n est une constante strictement positive

Ce système d'équations différentielles s'intègre aisément:

$$\begin{cases} \frac{dR}{R} = -n \frac{(1-e^2) d\varphi}{w^2 \cos \varphi} = -n dL \\ \gamma = n d\lambda \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \ln R = -nL + K \\ \gamma = n(\lambda - \lambda_0) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} R = \exp(-nL) \times \exp K = C \exp(-nL) \\ \gamma = n(\lambda - \lambda_0) \end{cases}$$

λ_0 et C étant deux constantes d'intégration.

L'expression générale d'une représentation conforme de Lambert est:

$$\begin{cases} X = X_p + C \exp(-nL) \sin[n(\lambda - \lambda_0)] \\ Y = Y_p - C \exp(-nL) \cos[n(\lambda - \lambda_0)] \end{cases}$$

Cinq paramètres sont nécessaires pour définir une projection Lambert: les coordonnées du pôle en représentation X_p et Y_p , l'exposant n , la longitude origine λ_0 et C .

Pratiquement, on utilise un point origine $p_0(\lambda_0, \varphi_0)$ et son image en représentation $P_0(X_0, Y_0)$. Si on note $R_0 = R(\varphi_0)$ et $L_0 = L(\varphi_0)$, on peut écrire les égalités suivantes:

$$\begin{cases} X_P = X_0 \\ Y_P = Y_0 + R_0 \\ C = R_0 \exp(nL_0) \end{cases}$$

La représentation est alors parfaitement définie par la donnée de:

$$X_0, Y_0, R_0, n, \lambda_0, \varphi_0$$

4.3.b Étude du module linéaire

L'expression du module linéaire est $\mu = \mu_{\text{paral}} = \frac{R d\gamma}{N \cos \varphi d\lambda} = \frac{nR}{N \cos \varphi}$.

μ ne dépend que de φ ; on en déduit que les lignes isomètres sont les parallèles et les méridiens sont isomorphes.

Pour connaître les variations de μ , étudions le signe de sa dérivée:

$$d\mu = \frac{n dR N \cos \varphi - nR(\cos \varphi dN - N \sin \varphi d\varphi)}{N^2 \cos^2 \varphi}$$

Or $\begin{cases} dR = -C \exp(-nL) n dL = -\frac{Cn(1-e^2)}{w^2 \cos \varphi} \exp(-nL) d\varphi = -\frac{nR(1-e^2)}{w^2 \cos \varphi} d\varphi \\ dN = \frac{a e^2 \cos \varphi \sin \varphi d\varphi}{(1-e^2 \sin^2 \varphi)^{3/2}} = \frac{N e^2 \cos \varphi \sin \varphi d\varphi}{w^2} \end{cases}$

Ainsi $d\mu = -\frac{n^2 R(1-e^2)}{N \cos^2 \varphi w^2} d\varphi - \frac{n R e^2 \sin \varphi}{N w^2} d\varphi + \frac{n R \sin \varphi}{N \cos^2 \varphi} d\varphi$

$$= \frac{1}{N \cos^2 \varphi w^2} \left[-n^2 R(1-e^2) - n R e^2 \sin \varphi \cos^2 \varphi + n R \sin \varphi w^2 \right] d\varphi$$

$$= \frac{nR(1-e^2)}{N \cos^2 \varphi w^2} (\sin \varphi - n) d\varphi$$

Nous retiendrons que $\frac{d\mu}{d\varphi} = \frac{\mu(1-e^2)}{w^2 \cos \varphi} (\sin \varphi - n)$

Il est clair que $\frac{d\mu}{d\varphi}$ est du signe de $\sin \varphi - n$.

Nous nous limitons aux cas où $n \in [0, 1[$; on peut assurer qu'il existe alors $\varphi^* \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ tel que $\frac{d\mu}{d\varphi}$ change de signe en s'annulant en φ^* , et les variations de μ sont décrites dans le tableau ci-dessous:

φ	$-\frac{\pi}{2}$		0	φ^*		$\frac{\pi}{2}$	
$\frac{d\mu}{d\varphi}$			$-\infty$	$-$	0	$+$	$+\infty$
μ			$+\infty$	\searrow	μ^*	\nearrow	$+\infty$

Le parallèle de latitude φ^* est isomètre centrale. Dans la pratique, les constantes sont toujours choisies de telle sorte que $\mu^* \leq 1$, afin que μ varie peu et soit proche de 1 sur un certain voisinage de φ^* :

① Soit $\mu^* = 1$:

Le parallèle de latitude φ^* est automécoïque. Le point-origine p_0 est pratiquement choisi sur ce parallèle ($\varphi^* = \varphi_0$).

La représentation est dite **tangente**. Les 4 constantes suivantes suffisent à la définir:

$$X_0, Y_0, \lambda_0, \varphi_0$$

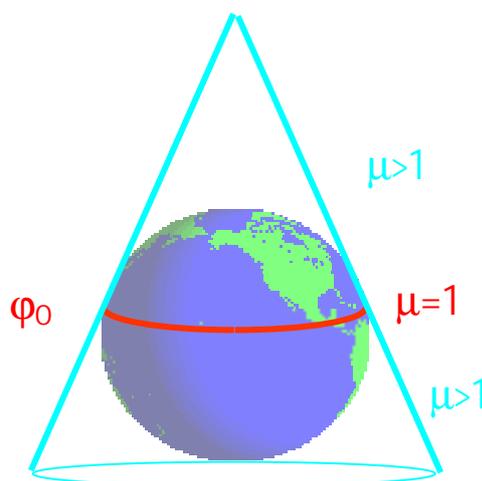


Fig. 21 : Représentation de Lambert tangente

En effet, par définition de φ^* :

$$\begin{cases} \frac{d\mu}{d\varphi}(\varphi_0) = 0 \\ \mu(\varphi_0) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n = \sin \varphi_0 \\ R_0 = N_0 \cot \varphi_0 \end{cases}$$

② Soit $\mu^* < 1$:

Il existe deux parallèles φ_1 et φ_2 ($\varphi_1 < \varphi^* < \varphi_2$) automécoïques:

- . si $\varphi \in]\varphi_1, \varphi_2[$, alors $\mu < 1$,
- . sinon, $\mu > 1$.

La représentation peut être définie de deux manières différentes:

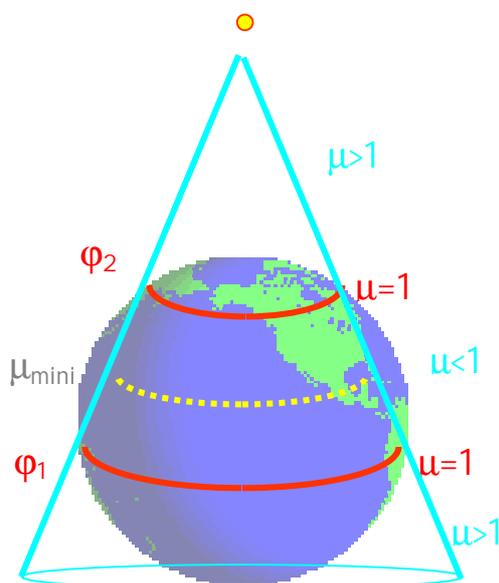


Fig. 22 : Représentation de Lambert sécante

(2a) La représentation est définie par la donnée des deux parallèles automécoïques φ_1 et φ_2 . On parle dans ce cas de représentation **sécante**. n et C s'obtiennent par les formules suivantes:

$$\mu(\varphi_1) = \mu(\varphi_2) = 1 \Leftrightarrow \frac{nR_1}{N_1 \cos \varphi_1} = \frac{nR_2}{N_2 \cos \varphi_2} = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{nC \exp(-nL_1)}{N_1 \cos \varphi_1} = \frac{nC \exp(-nL_2)}{N_2 \cos \varphi_2} \\ \frac{nC e^{-nL_1}}{N_1 \cos \varphi_1} = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\begin{cases} n = \frac{\ln \frac{N_2 \cos \varphi_2}{N_1 \cos \varphi_1}}{L_1 - L_2} \\ C = \frac{N_1 \cos \varphi_1}{n} \exp(nL_1) \end{cases}}$$

(2b) La représentation est définie par la donnée de l'isomètre centrale $\varphi_0 = \varphi^*$ et de $k_0 = \mu^*$, $k_0 < 1$. La représentation est dite **tangente avec facteur d'échelle** et k_0 est appelé **facteur d'échelle**. n et C s'obtiennent comme il suit:

$$\begin{cases} \mu(\varphi_0) = k_0 \\ \frac{d\mu}{d\varphi}(\varphi_0) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \boxed{\begin{cases} R_0 = N_0 k_0 \cot \varphi_0 \\ n = \sin \varphi_0 \end{cases}}$$

Il faut noter que les termes "sécante" et "tangente avec facteur d'échelle" peuvent s'appliquer à la même représentation; ils caractérisent simplement le mode de définition d'une représentation qui n'est pas tangente. En d'autres termes, une représentation tangente avec facteur d'échelle peut donc être considérée comme une représentation sécante et inversement.

Traditionnellement, en France, on définit les représentations coniques conformes de Lambert comme des projections tangentes avec facteur d'échelle - c'est à dire à l'aide de φ_0 et k_0 -, alors que dans les pays anglo-saxons, elles sont définies comme des représentations sécantes - avec φ_1 et φ_2 -.

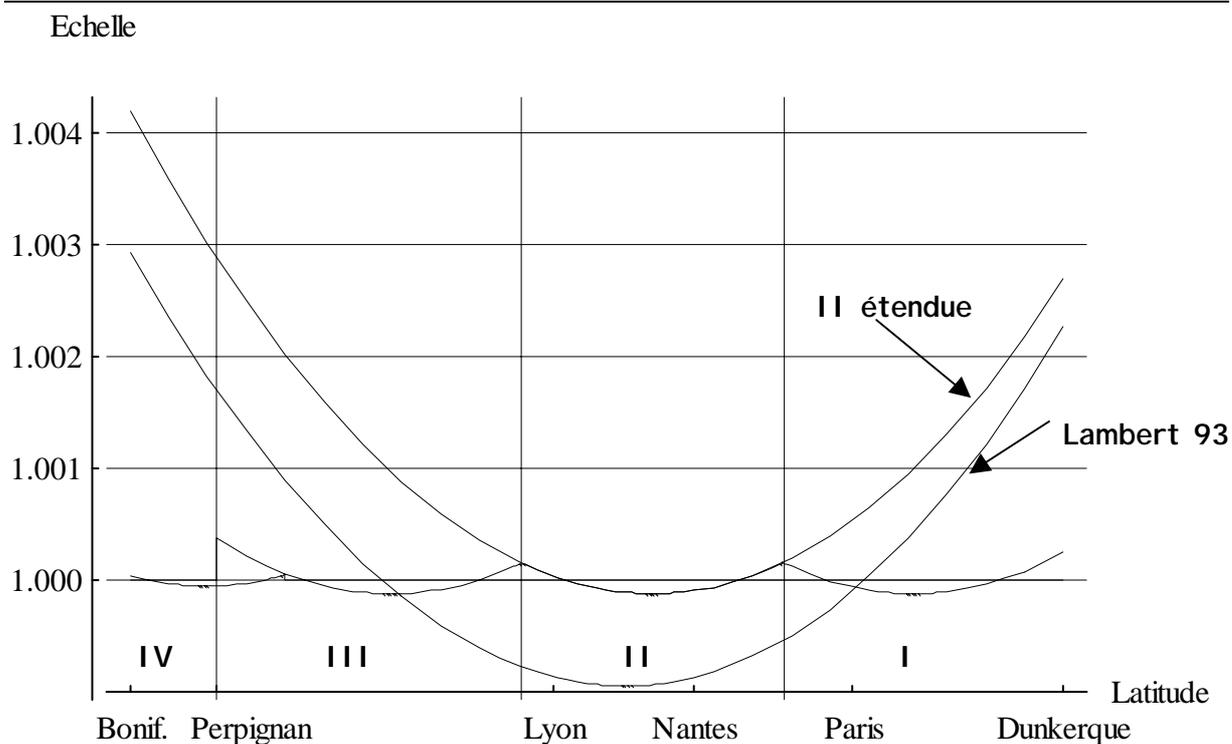


Fig. 23 : comparaison des modules linéaires des projections "Lambert"

4.3.c Formulaire

Vous trouverez en annexe les algorithmes et jeux d'essais utilisés pour cette représentation.

▪ Une représentation sécante est définie par:

- ✓ λ_0, φ_0 (coord. du point-origine p_0)
- ✓ X_0, Y_0 (coord. planes de P_0)
- ✓ φ_1, φ_2 (parallèles automécoïques)

On en déduit n, C, X_p et Y_p :

$$\bullet n = \frac{\ln \frac{N_2 \cos \varphi_2}{N_1 \cos \varphi_1}}{L_1 - L_2}$$

$$\bullet C = \frac{N_1 \cos \varphi_1}{n} \exp(nL_1)$$

$$\bullet R_0 = C \exp(-nL_0)$$

$$\bullet X_p = X_0 \text{ et } Y_p = Y_0 + R_0$$

- Une représentation tangente (avec ou sans facteur d'échelle) est définie par:

$$\checkmark X_0, Y_0, \lambda_0, \varphi_0, k_0$$

(φ_0 est l'isomètre centrale et k_0 le facteur d'échelle)

n, R_0 et C s'obtiennent par:

- $n = \sin \varphi_0$
- $R_0 = N_0 k_0 \cot \varphi_0$
- $C = R_0 \exp(nL_0)$
- $X_p = X_0$ et $Y_p = Y_0 + R_0$

- Passage de (λ, φ) à (X, Y) par:

- $X = X_p + C \exp(-nL) \sin[n(\lambda - \lambda_0)]$
- $Y = Y_p - C \exp(-nL) \cos[n(\lambda - \lambda_0)]$

- Passage de (X, Y) à (λ, φ) par:

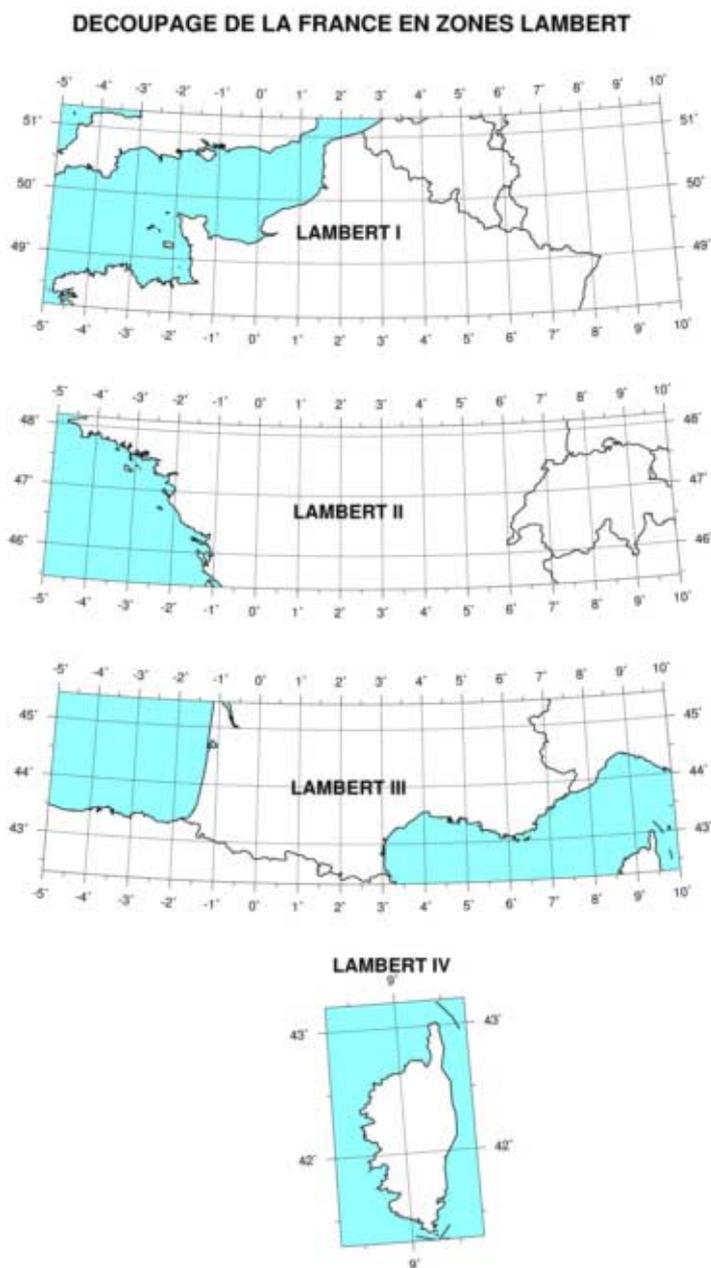
$$\bullet \lambda = \lambda_0 + \frac{\arctan \frac{X - X_p}{Y_p - Y}}{n}$$

$$\bullet L = -\frac{1}{n} \ln \frac{\sqrt{(X - X_p)^2 + (Y_p - Y)^2}}{C}$$

- φ est obtenue à partir de L de manière itérative, comme limite d'une suite convergente $(\varphi_n)_{n \in \mathbf{N}}$ définie par:

$$\left\{ \begin{array}{l} \varphi_0 = 2 \times \arctan(\exp L) - \frac{\pi}{2} \\ \varphi_{i+1} = 2 \times \arctan \left[\left(\frac{1 + e \sin \varphi_i}{1 - e \sin \varphi_i} \right)^{\frac{e}{2}} \exp L \right] - \frac{\pi}{2} \end{array} \right.$$

4.3.d Représentations de Lambert en usage en France métropolitaine

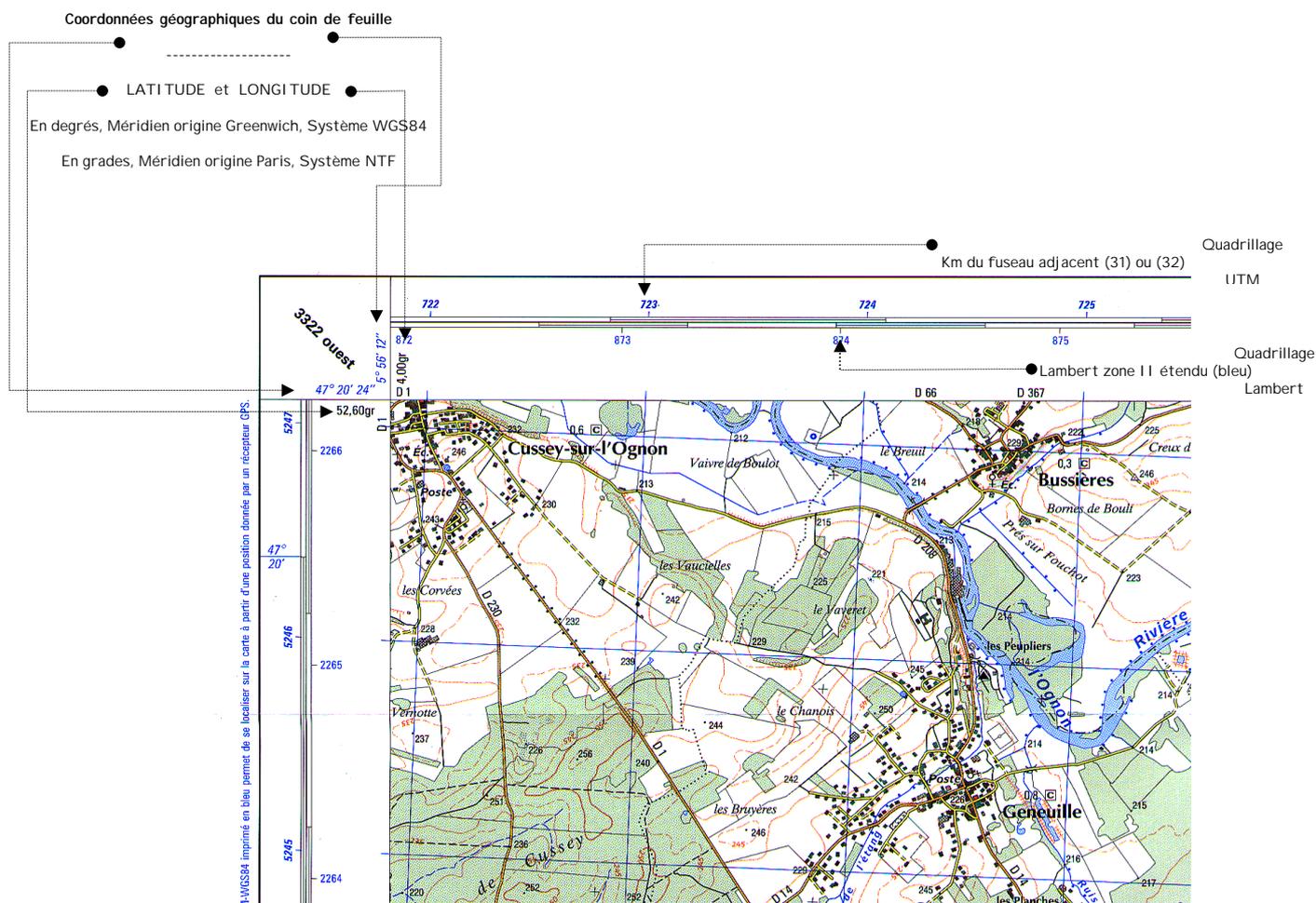


Les coordonnées inscrites sur les cartes de base ne sont pas exactement des coordonnées Lambert I, II, III ou IV, mais plutôt des coordonnées dites **Lambert I, II, III ou IV cartographiques**. Une représentation Lambert *i* cartographique ne diffère de la représentation Lambert *i* (*i* valant I, II, III ou IV) que par la valeur de sa constante Y_0 :

$$Y_{0 \text{ Lambert } i \text{ carto.}} = Y_{0 \text{ Lambert } i} + i \times 1000000$$

Le Lambert II cartographique est aussi appelé **Lambert II étendu**, car il est couramment utilisé pour des travaux de cartographie à petite échelle et la constitution de bases de données nationales sur l'ensemble du territoire métropolitain.

Cartes IGN Top25 (nouvelle édition)



Suite à l'adoption de la loi "Aménagement et développement durable" relative à l'aménagement du territoire, l'usage d'une nouvelle projection conique conforme de Lambert, appelée **Lambert 93**, va prochainement être rendu obligatoire pour tous les travaux géographiques en France métropolitaine. Cette représentation sécante est associée au système géodésique RGF93² et à l'ellipsoïde GRS 1980:

$$\begin{cases} a = 6378137 \text{ m} \\ e^2 = 0,006694380022 \end{cases}$$

Ses paramètres sont les suivants:

- $\lambda_0 = 3^\circ$ Est de Greenwich ,
- $\varphi_0 = 46^\circ 30'$ Nord ,
- $X_0 = 700000$ m ,
- $Y_0 = 6600000$ m ,
- $\varphi_1 = 44^\circ$ Nord ,
- $\varphi_2 = 49^\circ$ Nord .

Une projection tangente avec facteur d'échelle équivalente peut être définie de manière suivante :

- $\lambda_0 = 3^\circ$ Est de Greenwich ,
- $\varphi_0 = 46,51943022399$ Nord ,
- $X_0 = 700000$ m ,
- $Y_0 = 6602157.83881$ m ,
- $k_0 = 0.9990510286374691$,

2: La notion de système géodésique est abordée à la fin du chapitre VI puis étudiée en détail au chapitre VIII.

Paramètres des projections coniques conformes de LAMBERT utilisées en France métropolitaine

Zone Lambert	I	II	III	IV	II étendu	Lambert-93 (*)
Zone d'application	57,0 gr - 53,5 gr	53,5 gr - 50,5 gr	50,5 gr - 47,0 gr	47,8 gr - 45,9 gr	56,5 gr - 45,9 gr	41° - 51°
Latitude origine	55 gr = 49° 30'	52 gr = 46° 48'	49 gr = 44° 06'	46,85 gr = 42° 09' 54"	52 gr = 46° 48'	46° 30'
Longitude origine	0 gr Paris	3° 00'				
Parallèles automécoïques (valeurs indicatives)	48° 35' 54,682" 50° 23' 45,282"	45° 53' 56,108" 47° 41' 45,652"	43° 11' 57,449" 44° 59' 45,938"	41° 33' 37,396" 42° 46' 03,588"	45° 53' 56,108" 47° 41' 45,652"	44° 49° (valeurs de définition)
E ₀ (ou X ₀)	600 000 m	600 000 m	600 000 m	234,358 m	600 000 m	700 000 m
N ₀ (ou Y ₀)	200 000 m	200 000 m	200 000 m	185 861,369 m	2 200 000 m	6 600 000 m
Facteur d'échelle	0,999 877 34 (valeur de définition)	0,999 877 42 (valeur de définition)	0,999 877 50 (valeur de définition)	0,999 944 71 (valeur de définition)	0,999 877 42 (valeur de définition)	0,999 051 03 (valeur approchée)

0 grade Paris = 2° 20' 14,025" Est Greenwich

Référentiel géodésique associé : N.T.F. (Nouvelle Triangulation de la France)

(*) RGF93 (Réseau Géodésique Français)

Ellipsoïde de référence associé : **CLARKE 1880 IGN**

demi grand axe : $a = 6\,378\,249,2$ m (paramètre de définition)

demi petit axe : $b = 6\,356\,515,0$ m (paramètre de définition)

aplatissement : $f = 1/293,466\,021\,294$ (paramètre calculé)

première excentricité : $e = 0,082\,483\,256\,763$ (paramètre calculé)

IAG GRS 80

$a = 6\,378\,137,00$ m (paramètre de définition)

$f = 1/298,257\,222\,101$ (paramètre de définition)

$e = 0,081\,819\,191\,043$ (paramètre calculé)

4.4 Représentation stéréographique polaire

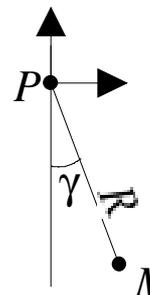
4.4.a Construction mathématique

Caractères: azimutale conforme directe

→ Cas particulier de la représentation de Lambert où l'images des parallèles sont des cercles entiers.

Formulation générale des représentations de Lambert:

$$\begin{cases} \gamma = n(\lambda - \lambda_0) \\ R = C \exp(-nL) \end{cases}$$



Dans le cas de la représentation stéréographique polaire, $n=1$:

$$\begin{cases} X = X_p + C \exp(-L) \sin(\lambda - \lambda_0) \\ Y = Y_p - C \exp(-L) \cos(\lambda - \lambda_0) \end{cases}$$

Autre expression:

Soit Φ définie par $L_s(\Phi) = L_E(\varphi)$ où

$$\begin{cases} L_s(x) = \ln \left[\tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2} \right) \right] \\ L_E(x) = \ln \left[\tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2} \right) \right] - \frac{e}{2} \ln \frac{1+e \sin x}{1-e \sin x} \end{cases}$$

$$\exp(-L) = \frac{1}{\exp \left(\ln \left[\tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\Phi}{2} \right) \right] \right)} = \frac{1}{\tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\Phi}{2} \right)} = \frac{\cos \Phi}{1 + \sin \Phi} \quad , \quad \text{car}$$

$$\tan^2 \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\Phi}{2} \right) = \frac{1 + \sin \Phi}{1 - \sin \Phi} \quad , \text{et on a:}$$

$$\begin{cases} X = X_p + C \frac{\cos \Phi}{1 + \sin \Phi} \sin(\lambda - \lambda_0) \\ Y = Y_p - C \frac{\cos \Phi}{1 + \sin \Phi} \cos(\lambda - \lambda_0) \end{cases}$$

4.4.b Etude du module linéaire

$$\begin{aligned} \mu &= \frac{R}{N \cos \varphi} = \frac{Cw}{a \cos \varphi \sqrt{\frac{1+\sin \varphi}{1-\sin \varphi}} \left(\frac{1-e \sin \varphi}{1+e \sin \varphi}\right)^{\frac{e}{2}}} \\ &= \frac{Cw}{a(1+\sin \varphi)} \left(\frac{1+e \sin \varphi}{1-e \sin \varphi}\right)^{\frac{e}{2}} \end{aligned}$$

Remarquons que $\lim_{\varphi \rightarrow \frac{\pi}{2}} \mu = \frac{C\sqrt{1-e^2}}{2a} \left(\frac{1+e}{1-e}\right)^{\frac{e}{2}} = k_0$

$$\frac{d\mu}{d\varphi} = \frac{\mu(1-e^2)}{w^2 \cos \varphi} (\sin \varphi - 1)$$

φ	$-\frac{\pi}{2}$		$\frac{\pi}{2}$
$\frac{d\mu}{d\varphi}$		-	
μ		$+\infty$	k_0

The diagram shows a horizontal line representing the value of mu. At the left end, corresponding to phi = -pi/2, the value is +infinity. An arrow points from this point towards the right end, corresponding to phi = pi/2, where the value is k0. The sign of the derivative dmu/dphi is negative in the interval between -pi/2 and pi/2, indicating that mu is decreasing as phi increases.

Pratiquement, on choisit $k_0 \leq 1$, et $C = \frac{2ak_0}{\sqrt{1-e^2}} \left(\frac{1-e}{1+e}\right)^{\frac{e}{2}}$

4.4.c Formulaire

constantes de la représentation : λ_0, k_0, X_p, Y_p

$$C = \frac{2ak_0}{\sqrt{1-e^2}} \left(\frac{1-e}{1+e}\right)^{\frac{e}{2}}$$

- Passage de (λ, φ) à (X, Y) :

$$\Phi = 2 \arctan \mathbf{L} - \frac{\pi}{2}$$

$$\left\} \mathbf{L}_s(\Phi) = \ln \left[\tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\Phi}{2} \right) \right] \left\langle$$

$$X = X_p + C \frac{\cos \Phi}{1 + \sin \Phi} \sin(\lambda - \lambda_0)$$

$$Y = Y_p - C \frac{\cos \Phi}{1 + \sin \Phi} \cos(\lambda - \lambda_0)$$

▪ Passage de (X, Y) à (λ, φ) :

$$\lambda = \lambda_0 + \arctan \frac{X - X_p}{Y_p - Y}$$

$$D^2 = (X - X_p)^2 + (Y_p - Y)^2$$

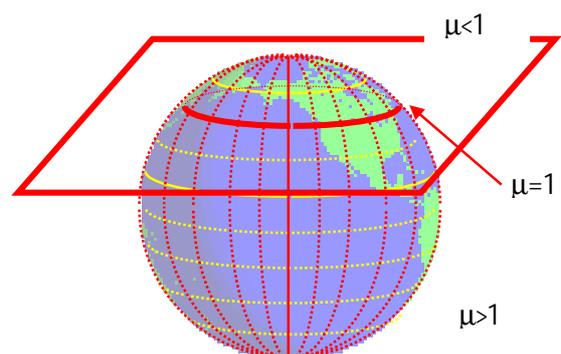
$$\Phi = \arcsin \frac{C^2 - D^2}{C^2 + D^2}$$

$$\left\} D^2 = C^2 \frac{\cos^2 \Phi}{(1 + \sin \Phi)^2} \left\langle$$

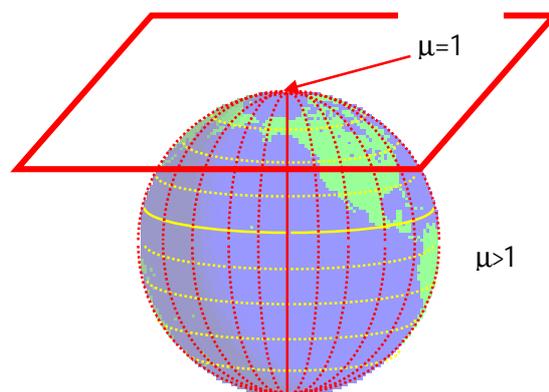
$$\mathbf{L}_E(\varphi) = \mathbf{L}_s(\Phi)$$

$$\mathbf{L}_E(\varphi) \rightarrow \varphi$$

① $k_0 < 1$, représentation sécante

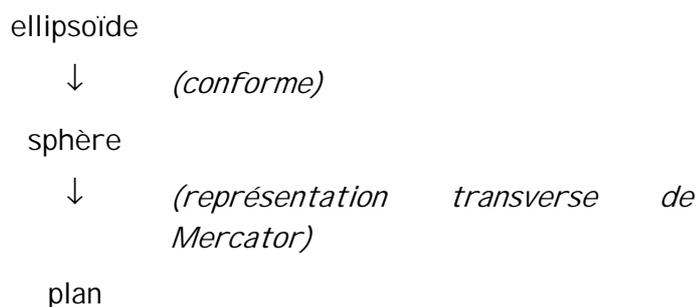


② $k_0 = 1$, représentation tangente



4.5 Représentation transverse de Mercator

Nous allons définir la représentation transverse de Mercator de l'ellipsoïde sur le plan par le principe de la double représentation (algorithme de Gauss-Laborde):



4.5.a Coordonnées de Cassini-Soldner de la sphère

Soient la sphère de rayon a et λ_0 une longitude choisie comme origine. Se donner λ_0 permet de se donner deux pivots sur l'équateur P_1 et P_2 tels que le méridien de longitude λ_0 soit pseudo-équateur dans le **canevas transverse** défini par les deux pseudo-pôles P_1 et P_2 :

$$P_1 \begin{cases} \lambda = \lambda_0 + \frac{\pi}{2} \\ \varphi = 0 \end{cases}$$

et

$$P_2 \begin{cases} \lambda = \lambda_0 - \frac{\pi}{2} \\ \varphi = 0 \end{cases}$$

Soit $M(\lambda, \varphi)$ un point quelconque de la sphère. On appelle **coordonnées de Cassini-Soldner** la spseudo-latitude h et la pseudo-longitude ℓ de M dans le système transverse défini par P_1 et P_2 .

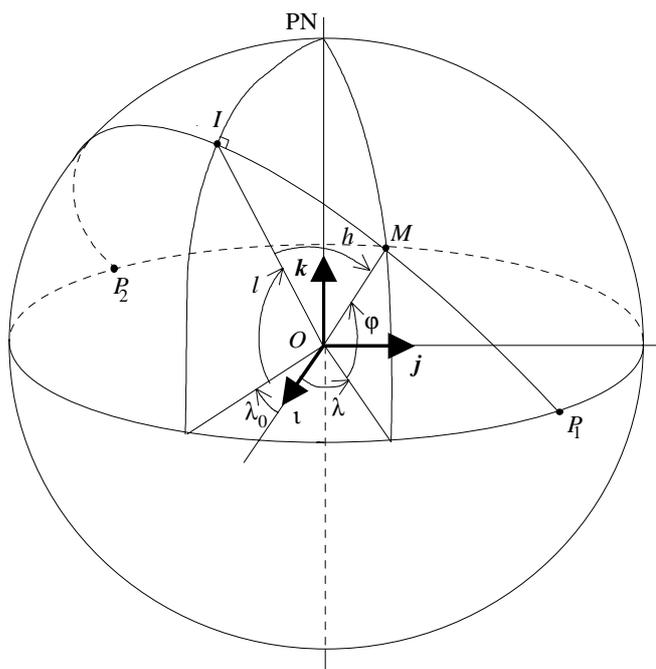


Fig. 57: Coordonnées de Cassini-Soldner

Cherchons h et ℓ en fonction de λ , φ et de λ_0 . Pour ce faire, considérons le triangle sphérique (I, PN, M) :

La "règle des sinus" $\left(\frac{\sin a}{\sin A} = \frac{\sin b}{\sin B} \right)$

nous donne:

$$\frac{\sin h}{\sin(\lambda - \lambda_0)} = \frac{\cos \varphi}{1} \quad , \quad \text{soit:}$$

$$\sin h = \cos \varphi \sin(\lambda - \lambda_0)$$

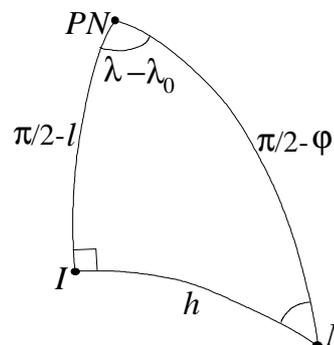


Fig. 58: Triangle sphérique (I, PN, M)

La formule des cotangentes relie 2 angles et 2 côtés:

$$0 = \tan \varphi \cos \ell - \sin \ell \cos(\lambda - \lambda_0)$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\tan \ell = \frac{\tan \varphi}{\cos(\lambda - \lambda_0)}}$$

Pour obtenir λ en fonction de h et de ℓ , utilisons à nouveau la règle dite des contangentes:

$$1 \times \cot(\lambda - \lambda_0) = \cot h \cos \ell - \sin \ell \times 0$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\tan(\lambda - \lambda_0) = \frac{\tan h}{\cos \ell}}$$

La formule fondamentale fournit φ en fonction de h et de ℓ :

$$\sin \varphi = \cos h \sin \ell - \cos \ell \sin h \times 0$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\sin \varphi = \sin \ell \cos h}$$

4.5.b Représentation transverse de Mercator de la sphère

Il suffit d'appliquer les formules directes de Mercator aux pseudo-coordonnées (ℓ, h) en imposant cette fois les conditions ci-dessous:

$$\begin{cases} X \text{ est une fonction croissante de } h \text{ seulement} \\ Y \text{ est une fonction croissante de } \ell \text{ seulement} \end{cases}$$

La formulation générale est donc

$$\boxed{\begin{cases} X = X_C + n L_s(h) \\ Y = Y_C + n \ell \end{cases}}$$

L_S (respectivement L_E) représente désormais les fonctions donnant la latitude isométrique sur la sphère (resp. sur l'ellipsoïde) :

$$\begin{cases} L_S(x) = \ln \left[\tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2} \right) \right] \\ L_E(x) = \ln \left[\tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2} \right) \right] - \frac{e}{2} \ln \frac{1+e \sin x}{1-e \sin x} \end{cases}$$

Et $L_S(h)$ peut s'écrire:

$$L_S(h) = \frac{1}{2} \ln \left[\tan^2 \left(\frac{\pi}{4} + \frac{h}{2} \right) \right] = \frac{1}{2} \ln \frac{1+\sin h}{1-\sin h} = \frac{1}{2} \ln \frac{1+\cos \varphi \sin(\lambda-\lambda_0)}{1-\cos \varphi \sin(\lambda-\lambda_0)}$$

La représentation est définie par la donnée de X_C , Y_C , n et λ_0 .

Le module linéaire se déduit de celui d'une représentation de Mercator $\left(\mu = \frac{n}{N \cos \varphi} \right)$: ici, il faut remplacer N par a et φ par h :

$$\mu = \frac{n}{a \cos h}$$

Pratiquement, les formules de la représentation sont:

- calcul de (X, Y) en fonction de (λ, φ) :

$$X = X_C + \frac{n}{2} \ln \frac{1+\cos \varphi \sin(\lambda-\lambda_0)}{1-\cos \varphi \sin(\lambda-\lambda_0)}$$

$$Y = Y_C + n \arctan \frac{\tan \varphi}{\cos(\lambda-\lambda_0)}$$

- calcul de (λ, φ) en fonction de (X, Y) :

$$h = 2 \arctan \left[\exp \left(\frac{X - X_C}{n} \right) \right] - \frac{\pi}{2}$$

$$\lambda = \lambda_0 + \arctan \frac{\tan h}{\cos \frac{Y - Y_C}{n}}$$

$$\varphi = \arctan \left[\cos(\lambda - \lambda_0) \tan \frac{Y - Y_C}{n} \right]$$

4.5.c Représentation conforme de l'ellipsoïde sur la sphère

Soient l'ellipsoïde terrestre de demi grand axe a et de demi petit axe b et une sphère tangente à l'ellipsoïde en $M_0(\lambda_0, \varphi_0)$ de rayon r .

Notons λ et φ les coordonnées géographiques d'un point sur l'ellipsoïde et Λ et Φ celles du point correspondant sur la sphère.

Cherchons une représentation conforme telle que:

$$\begin{cases} \Lambda \text{ ne dépend que de } \lambda \text{ et } \frac{\partial \Lambda}{\partial \lambda} \geq 0 \\ \Phi \text{ ne dépend que de } \varphi \text{ et } \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} \geq 0 \end{cases}$$

Les conditions de Cauchy se formulent alors:

$$\begin{cases} \frac{\partial \Lambda}{\partial \lambda} = \frac{\partial L_S}{\partial L_E} \\ \frac{\partial \Lambda}{\partial L_E} = -\frac{\partial L_S}{\partial \lambda} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\partial \Lambda}{\partial \lambda} = n \\ \frac{\partial L_S}{\partial L_E} = n \\ 0 = 0 \end{cases} \text{ avec } n > 0$$

$$\text{D'où } \begin{cases} \Lambda = C_\lambda + n \lambda \\ L_S = C_\varphi + n L_E \end{cases}$$

Si on utilise un point origine $m_0(\lambda_0, \varphi_0)$ dont l'image est $M_0(\Lambda_0, \Phi_0)$, la formulation générale devient:

$$\begin{cases} \Lambda = \Lambda_0 + n(\lambda - \lambda_0) \\ L_S = L_{S_0} + n(L_E - L_{E_0}) \end{cases}$$

La représentation est définie par 6 paramètres:

$$\lambda_0, \varphi_0, \Lambda_0, \Phi_0, n, r$$

Étude du module linéaire:

$$\mu = \mu_{\text{paral}} = \frac{r \cos \Phi d\Lambda}{N \cos \varphi d\lambda} = \frac{nr}{N} \times \frac{\cos \Phi}{\cos \varphi}$$

et
$$\frac{d\mu}{d\varphi} = + \frac{nr \cos \Phi}{a \cos \varphi} \times \frac{dw}{d\varphi} - \frac{nrw}{a \cos \varphi} \sin \Phi \frac{d\Phi}{d\varphi} + \frac{nrw \cos \Phi}{a} \times \frac{\sin \varphi}{\cos^2 \varphi}$$

avec:
$$\bullet \frac{dw}{d\varphi} = - \frac{e^2 \sin \varphi \cos \varphi}{w}$$

• par définition de ℓ (voir chap. II), $dL = \frac{1-e^2}{w^2 \cos \varphi} d\varphi$,

et de plus $\frac{dL_S}{dL_E} = n$. On peut ainsi écrire:

$$n = \frac{\frac{1}{\cos \Phi} d\Phi}{\frac{1-e^2}{w^2 \cos \varphi} d\varphi} \Leftrightarrow \frac{d\Phi}{d\varphi} = \frac{n(1-e^2) \cos \Phi}{w^2 \cos \varphi}$$

Ainsi, $\frac{d\mu}{d\varphi}$ se simplifie en:
$$\frac{d\mu}{d\varphi} = \frac{\mu(1-e^2)}{w^2 \cos \varphi} (\sin \varphi - n \sin \Phi)$$

Si $n = \frac{\sin \varphi_0}{\sin \Phi_0}$, alors $\frac{d\mu}{d\varphi}$ change de signe en s'annulant en φ_0 , et μ varie selon

le tableau suivant:

φ	$-\frac{\pi}{2}$	φ_0	$\frac{\pi}{2}$
$\frac{d\mu}{d\varphi}$		-	+
μ		\searrow	\nearrow

$$\rangle \mu_0 = \mu(\varphi_0) \langle$$

D'autre part, le calcul montre que:

$$\frac{d^2 \mu}{d\varphi^2}(\varphi_0) = 0 \Leftrightarrow n^2 = \frac{\cos^2 \varphi_0}{\cos^2 \Phi_0} \times \frac{1 - e^2 \sin^2 \varphi_0}{1 - e^2}$$

Pratiquement, n et φ_0 sont choisis de telle manière que:

$$\begin{cases} \frac{d\mu}{d\varphi}(\varphi_0) = 0 \\ \frac{d^2 \mu}{d\varphi^2}(\varphi_0) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n^2 = 1 + e'^2 \cos^4 \varphi_0 \\ \sin \Phi_0 = \frac{\sin \varphi_0}{n} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \mu_0 = \frac{n r \cos \Phi_0 w_0}{a \cos \varphi_0} = \frac{n r w_0^2}{n \sqrt{1 - e^2} a} = \frac{r}{\left(\frac{a}{w_0} \times \frac{a(1 - e^2)}{w_0^3} \right)^{\frac{1}{2}}} = \frac{r}{\sqrt{\rho_0 N_0}}$$

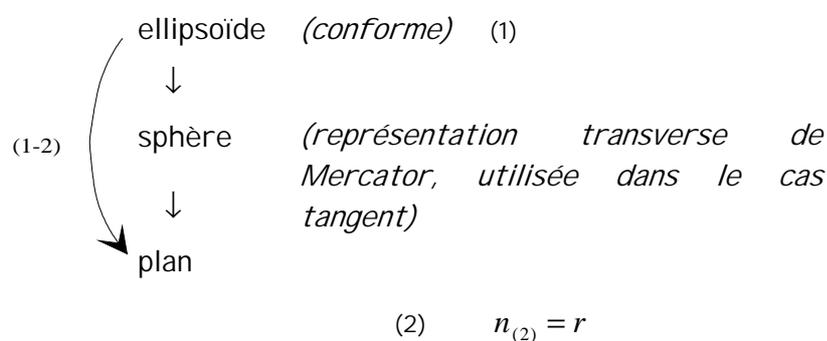
Nous retiendrons que r est, au facteur d'échelle μ_0 près, le rayon de **courbure totale**:

$$r = \mu_0 \sqrt{\rho_0 N_0}$$

La sphère de courbure totale est celle qui annule les deux premières dérivées de μ en M_0 . Géométriquement, c'est la sphère "la plus tangente" à l'ellipsoïde parmi toutes les sphères tangentes.

4.5.d Représentation de Gauss-Laborde

C'est la double représentation transverse de Mercator:



Les formules sont les suivantes:

- $n_{(1)} = \sqrt{1 + e'^2 \cos^4 \varphi_0}$
- $\sin \Phi_0 = \frac{\sin \varphi_0}{n_{(1)}}$
- $L_S(\Phi) = L_S(\Phi_0) + n_{(1)} (L_E(\varphi) - L_E(\varphi_0))$
- $\Lambda = n_{(1)} (\lambda - \lambda_0)$
- $n_{(2)} = \mu_{(1)0} \sqrt{\rho_0 N_0}$
- $X = X_C + \frac{n_{(2)}}{2} \ln \frac{1 + \cos \Phi \sin \Lambda}{1 - \cos \Phi \sin \Lambda}$
- $Y = Y_C + n_{(2)} \arctan \frac{\tan \Phi}{\cos \Lambda}$

Étude du module linéaire :

$$\mu = \mu_{(1-2)} = \mu_{(1)} \times \mu_{(2)} = \frac{n_{(1)} r \cos \Phi}{N \cos \varphi} \times \frac{n_{(2)}}{r \cosh h} = n_{(1)} r \times \frac{\cos \Phi}{N \cos \varphi} \times \frac{1}{\cosh h}$$

Il y a lieu de prendre note des trois remarques suivantes:

- $\mu(\varphi_0) = \mu_{(1)\varphi_0} \cdot \frac{1}{\cosh_0} = \mu_{(1)\varphi_0}$,
- μ n'est pas constant sur le méridien origine,
- lorsque l'on s'éloigne du méridien origine, autrement dit lorsque $h \neq 0$, μ augmente.

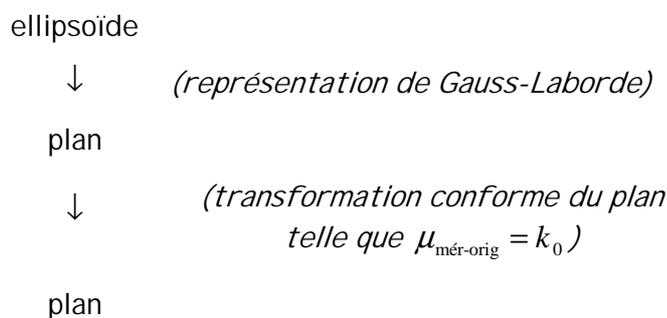
Pratiquement, la représentation est définie par:

$$\lambda_0 \quad , \quad \varphi_0 \quad , \quad X_C \quad , \quad Y_C \quad , \quad k_0 = \mu_{(1)\varphi_0}$$

(facteur d'échelle)

4.5.e Définition des représentations UTM

Les représentations UTM sont des représentations transverses de Mercator de l'ellipsoïde telles que le module linéaire est constant sur le méridien origine. On peut les définir par composition de trois représentations conformes.



On démontre que cette transformation conforme du plan peut s'exprimer au voisinage de $M_0(X_0, Y_0)$ sous la forme du développement limité suivant:

$$\begin{cases} X_{UTM} = X_0 + C_1x - C_3x^3 + 3C_3xy^2 \\ Y_{UTM} = Y_0 + C_1y + C_3y^3 - 3C_3yx^2 \end{cases} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} x = X_{G-Lab} - X_0 \\ y = Y_{G-Lab} - Y_0 \end{cases}$$

On démontre aussi que le choix fait pour $n_{(1)}$ et r lors du passage de l'ellipsoïde à la sphère impose les valeurs de C_1 et de C_3 :

$$\begin{cases} C_1 = \frac{w_0}{n_{(1)}\sqrt{1-e^2}} \times \frac{\cos \varphi_0}{\cos \Phi_0} \\ C_3 = 0 \end{cases}$$

C représentant le point-intersection de l'équateur et du méridien origine ($\lambda_c = \lambda_0$ et $\varphi_c = 0$), les coordonnées (X_0, Y_0) du point M_0 sont obtenues comme il suit:

$$\begin{cases} X_0 = X_c \\ Y_0 = Y_c + \beta(\varphi_0) \end{cases}$$

Ainsi, au voisinage de M_0 ,

$$\begin{cases} X = X_c + \frac{C_1 n_{(2)}}{2} \ln \frac{1 + \cos \Phi \sin \Lambda}{1 - \cos \Phi \sin \Lambda} \\ Y = Y_c + k_0 \beta(\varphi_0) + C_1 n_{(2)} \left(\arctan \frac{\tan \Phi}{\cos \Lambda} - \Phi_0 \right) \end{cases}$$

Finalement, la sphère tangente en M_0 n'est qu'un intermédiaire de calcul, et on peut obtenir la même représentation en utilisant plusieurs sphères intermédiaires. Pratiquement, pour calculer les coordonnées planes de $M(\lambda, \varphi)$, on utilise la sphère tangente en (λ_0, φ) . De la sorte, les formules se simplifient beaucoup.

Le formulaire de passage de (λ, φ) à (X, Y) est le suivant:

- $n^{(1)} = \sqrt{1 + e'^2 \cos^4 \varphi}$

- $\Lambda = n^{(1)} (\lambda - \lambda_0)$

$$\begin{aligned}
 & \bullet V = \sqrt{1 + e'^2 \cos^2 \varphi} \\
 & \bullet X = X_C + \frac{k_0 a \sqrt{1 + e'^2}}{2V^2} \ln \frac{n^{(1)} + V \cos \varphi \sin \Lambda}{n^{(1)} - V \cos \varphi \sin \Lambda} \\
 & \bullet Y = Y_C + k_0 \beta(\varphi) + \frac{k_0 a \sqrt{1 + e'^2}}{V^2} \left(\arctan \frac{\tan \varphi}{V \cos \Lambda} - \arctan \frac{\tan \varphi}{V} \right)
 \end{aligned}$$

Pour passer de (X, Y) à (λ, φ) , on utilise le formulaire ci-dessous:

$$\begin{aligned}
 & \bullet \varphi_0 = \frac{Y - Y_C}{k_0 a} \\
 & \bullet n^{(1)} = \sqrt{1 + e'^2 \cos^4 \varphi_0} \\
 & \bullet V = \sqrt{1 + e'^2 \cos^2 \varphi_0} \\
 & \bullet \xi = \frac{(X - X_C) V^2}{k_0 a \sqrt{1 + e'^2}} \\
 & \bullet \eta = \left[Y - Y_C - k_0 \beta(\varphi_0) \right] \frac{V^2}{k_0 a \sqrt{1 + e'^2}} + \arctan \frac{\tan \varphi_0}{V} \\
 & \bullet \lambda = \lambda_0 + \frac{1}{n^{(1)}} \arctan \frac{\tan \left[2 \arctan (\exp \xi) - \frac{\pi}{2} \right]}{\cos \eta} \\
 & \bullet \Lambda = n^{(1)} \sin(\lambda - \lambda_0) \\
 & \bullet \Phi = \arctan(\cos \Lambda \tan \eta) \\
 & \bullet \mathbf{L}_E(\varphi) = \frac{1}{n^{(1)}} \left(\mathbf{L}_S(\Phi) - \mathbf{L}_S \left(\arctan \frac{\tan \varphi_0}{V} \right) \right) + \mathbf{L}_E(\varphi_0)
 \end{aligned}$$

4.5.f Mise en oeuvre des représentations UTM

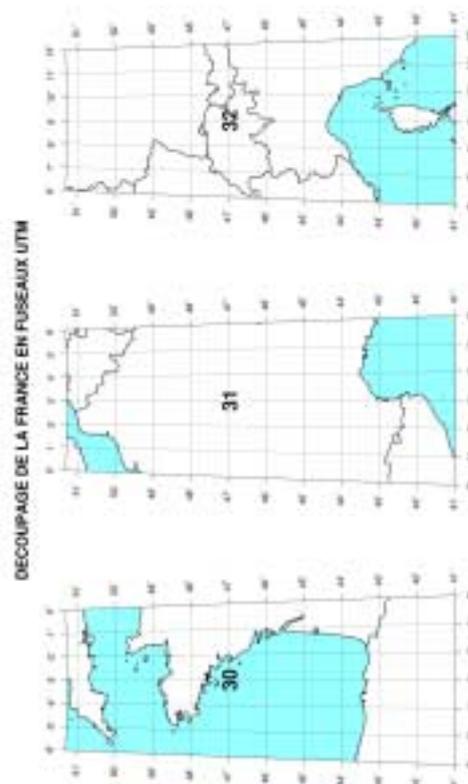
Les représentations dites "*Universal Transverse Mercator*" (**U.T.M.** en abrégé) forment un ensemble de 120 représentations transverses de Mercator de l'ellipsoïde conçues par l'armée américaine dans les années 1940.

<i>Numéro de fuseau</i>	<i>Étendue</i>		<i>Hémisphère</i>
	λ_{\min}	λ_{\max}	
n ($1 \leq n \leq 60$)	$6(n-31)$	$6(n-30)$	Nord
n ($1 \leq n \leq 60$)	$6(n-31)$	$6(n-30)$	Sud

Tableau 1 : Zones d'application des représentations UTM

Chaque représentation est définie comme il suit :

- $\lambda_0 = 6(n - 31) + 3$
- $k_0 = 0,9996$
- $X_c = 500\,000\text{ m}$
- $\begin{cases} \text{hémisphère Nord: } Y_c = 0\text{ m} \\ \text{hémisphère Sud: } Y_c = 10\,000\,000\text{ m} \end{cases}$



Le système UTM est le système de représentations utilisé par l'OTAN, et, entre autres, par l'armée française en France métropolitaine. C'est pourquoi le canevas UTM apparaît en surcharge sur les cartes de base à 1 : 50 000.

Le territoire métropolitain est à cheval sur 3 fuseaux; les fuseaux 30, 31 et 32.

De plus, l'IGN a cartographié de nombreux départements et territoires d'outremer en système UTM.

4.5.g UTM : Définition initiale de US Army

□ Définition

L'UTM est une projection mercator transverse de l'ellipsoïde développée par le service géographique de l'US Army dans le but de fournir une projection unique utilisable en tout point du globe à partir de « tables de la représentation UTM » préalablement calculées pour chaque ellipsoïde.

La définition initiale est basée sur le développement limité de fonctions complexes définies de la façon suivante :

Soit un point $m(\lambda, \varphi)$ de l'ellipsoïde de coordonnées et le point $M(X, Y)$ associé en projection.

Soit les valeurs complexes définies comme suit

- $z = L(\varphi) + i\lambda$
- $Z = Y + iX$

ou L est la latitude isométrique

Et la fonction $f : \left\{ \begin{array}{l} C \rightarrow C \\ z \rightarrow f(z) = Z \end{array} \right\}$

On impose deux conditions à cette fonction :

- L'image du méridien origine dit méridien central est l'axe des Y
- Le méridien central est automécoïque

La première impose donc que $f(L) = Y$

La deuxième impose que $\mu = \frac{dS}{ds} = \frac{\int_0^\varphi \rho d\varphi}{Y} \Rightarrow Y = \beta$

Si l'on réussit à trouver une telle fonction alors sa généralisation au plan complexe sera la solution recherchée. $\beta = f(L) \Rightarrow Z = f(z)$

L'arc de méridien est une intégrale elliptique de φ , il n'est pas possible d'en donner une expression finie, il en est de même pour f .

□ Passage des coordonnées géographiques aux coordonnées planes :

Soit z_0 un point sur le méridien central de longitude λ_0 , un développement limité de f au voisinage de z_0 nous donne :

$$Z - Z_0 = f(z) - f(z_0) = (z - z_0) \frac{df_z(z_0)}{dz} + \frac{(z - z_0)^2}{2!} \frac{d^2f_z(z_0)}{dz^2} + \frac{(z - z_0)^3}{3!} \frac{d^3f_z(z_0)}{dz^3} + \dots$$

f est une fonction analytique, ses dérivées successives pourront être calculées quelque soit la direction, en particulier dans la direction du méridien

$$\beta = f(L) \text{ d'où } \frac{df_z(z_0)}{dz} = \frac{d\beta}{dL} \quad \frac{d^2f_z(z_0)}{dz^2} = \frac{d^2\beta}{dL^2} \quad \frac{d^nf_z(z_0)}{dz^n} = \frac{d^n\beta}{dL^n}$$

$$Z - Z_0 = Y + iX - Y_0 = \Delta Y + iX$$

$$z - z_0 = L + i\lambda - L_0 = \Delta L + i\lambda$$

Ecrivons le développement de Taylor en se fixant $L_0 = L$ d'où $z - z_0 = i\lambda$

$$Z - Z_0 = Y - \beta + iX = a_1(i\lambda) + a_2(i\lambda)^2 + a_3(i\lambda)^3 + \dots + a_n(i\lambda)^n$$

$$Z - Z_0 = a_1(i\lambda) - a_2(\lambda)^2 - a_3i(\lambda)^3 + a_4(\lambda)^4 + a_5i(\lambda)^5 \dots + a_n(i\lambda)^n$$

avec $a_p = \frac{1}{p!} \cdot \frac{d^p \beta}{dL^p}$

Soit en séparant parties réelles et imaginaires :

$$Y = \beta - a_2\lambda^2 + a_4\lambda^4 - a_6\lambda^6 + \dots$$

$$X = a_1\lambda - a_3\lambda^3 + a_5\lambda^5 + \dots$$

Les expressions des dérivées peuvent s'obtenir à partir de :

$$d\beta = \rho d\varphi$$

$$dL = \frac{\rho d\varphi}{N \cos \varphi}$$

et finalement :

$$\left\{ \begin{array}{l} a_1 = N_0 \cos \varphi_0 \\ a_2 = \frac{1}{2} N_0 \sin \varphi_0 \cos \varphi_0 \\ a_3 = \frac{1}{6} N_0 \cos^3 \varphi_0 (1 + \tan^2 \varphi_0 - e'^2 \cos^2 \varphi_0) \\ a_4 = \frac{1}{24} N_0 \cos^4 \varphi_0 \tan \varphi_0 (5 - \tan^2 \varphi_0 + 9(e' \cos \varphi_0)^2) + 4(e' \cos \varphi_0)^4 \\ a_5 = \frac{1}{120} N_0 \cos^5 \varphi_0 (5 - 18 \tan^2 \varphi_0 + \tan^4 \varphi_0 + 14(e' \cos \varphi_0)^4 - 58 \tan^2 \varphi_0 (e' \cos \varphi_0)^2) \dots \end{array} \right.$$

□ Passage des coordonnées planes aux coordonnées géographiques :

On procédera de manière analogue en considérant la fonction réciproque $z = F(Z)$

f est une fonction analytique, ses dérivées successives pourront être calculées quelque soit la direction, en particulier dans la direction du méridien

$$\mathbf{Z} - \mathbf{Z}_0 = \mathbf{Y} + i\mathbf{X} - \mathbf{Y}_0 = \Delta\mathbf{Y} + i\mathbf{X}$$

$$z - z_0 = \mathbf{L} + i\boldsymbol{\lambda} - \mathbf{L}_0 = \Delta\mathbf{L} + i\boldsymbol{\lambda}$$

Ecrivons le développement de Taylor en se fixant $\mathbf{Y}_0 = \mathbf{Y}$ d'où $\mathbf{Z} - \mathbf{Z}_0 = i\mathbf{X}$

$$z - z_0 = \mathbf{L} - \mathbf{L}_0 + i\boldsymbol{\lambda} = \mathbf{b}_1(i\mathbf{X}) + \mathbf{b}_2(i\mathbf{X})^2 + \mathbf{b}_3(i\mathbf{X})^3 + \dots + \mathbf{b}_n(i\mathbf{X})^n$$

$$\text{avec } \mathbf{b}_p = \frac{1}{p!} \cdot \frac{d^p \mathbf{L}}{d\beta^p}$$

Soit en séparant parties réelles et imaginaires:

$$\mathbf{L} - \mathbf{L}_0 = -\mathbf{b}_2 \mathbf{X}^2 + \mathbf{b}_4 \mathbf{X}^4 - \mathbf{b}_6 \mathbf{X}^6 + \dots$$

$$\boldsymbol{\lambda} = \mathbf{b}_1 \mathbf{X}^2 - \mathbf{b}_3 \mathbf{X}^3 + \mathbf{b}_5 \mathbf{X}^5 + \dots$$

On peut également obtenir directement la latitude en considérant le développement limité

$$\varphi - \varphi_0 = (\mathbf{L} - \mathbf{L}_0) \left(\frac{d\varphi}{d\mathbf{L}} \right)_0 + \frac{(\mathbf{L} - \mathbf{L}_0)^2}{2!} \left(\frac{d^2\varphi}{d\mathbf{L}^2} \right)_0 + \dots + \frac{(\mathbf{L} - \mathbf{L}_0)^n}{n!} \left(\frac{d^n\varphi}{d\mathbf{L}^n} \right)_0$$

Soit en remplaçant

$$\varphi = \varphi_0 - \mathbf{b}'_2 \mathbf{X}^2 + \mathbf{b}'_4 \mathbf{X}^4 - \mathbf{b}'_6 \mathbf{X}^6 + \dots$$

$$\boldsymbol{\lambda} = \mathbf{b}_1 \mathbf{X}^2 - \mathbf{b}_3 \mathbf{X}^3 + \mathbf{b}_5 \mathbf{X}^5 + \dots$$

avec :

$$\left. \begin{array}{l} \mathbf{b}_1 = \frac{1}{N_0 \cos \varphi_0} \\ \mathbf{b}'_2 = \frac{1}{2N_0^2} \tan \varphi_0 (1 + \eta_0^2) \\ \mathbf{b}_3 = \frac{1}{6N_0 \cos^3 \varphi_0} (1 + 2 \tan^2 \varphi_0 + \eta_0^2) \\ \mathbf{b}'_4 = \frac{1}{24N_0^4} \tan \varphi_0 (5 + 3 \tan^3 \varphi_0 - 6\eta_0^2 - 6 \tan^2 \varphi_0 \eta_0^2 - 3\eta_0^4 - 9 \tan^2 \varphi_0 \eta_0^4) \\ \mathbf{b}_5 = \frac{1}{120N_0 \cos^5 \varphi_0} (5 + 28 \tan^2 \varphi_0 + 24 \tan^4 \varphi_0 + 6\eta_0^2 + 8 \tan^2 \varphi_0 \eta_0^2) \\ \text{avec } \eta_0 = e' \cos \varphi_0 \end{array} \right\}$$

□ Mise en oeuvre de la représentation UTM

Des tables de conversions issues des développements limités d'ordre 5 peuvent être utilisée partout dans le monde, il est par contre nécessaire de disposer d'une table correspondant à chaque ellipsoïde de référence.

Les formules de passage correspondant aux valeurs mises en tables sont les suivantes :

□ Géographiques->planes

$$\Delta E = (\text{IV})p + (\text{V})p^3 + B_5$$

$$\Delta N = (\text{I}) + (\text{II})p^2 + (\text{III})p^4 + A_6$$

avec $p = 10^{-4} \Delta \lambda''^{(sex)}$

les valeurs (I)(II) ..(V) sont fournies dans les tables américaines les valeurs B5 et A6 sont à interpoler dans des abaques.

□ Planes->géographiques

$$\varphi = \varphi' - (\text{VII})q^2 + (\text{VIII})q^4 - D_6$$

$$\lambda = (\text{IX})q - (\text{X})q^3 + E_5$$

avec $q = 10^{-6} \Delta E$ (ΔE exprimé en milliers de km)

φ' table inverse de (I)

(VII),(VIII)...(X) tables américaines

D6 et E5 sont interpolées dans un graphique.

On trouvent également dans ces tables :

La valeur du module linéaire

La convergence des méridiens

Applications :

Latitude = 34° 15' 34".742 longitude = 5° 57' 16".842

Méridien central : 3°

34°

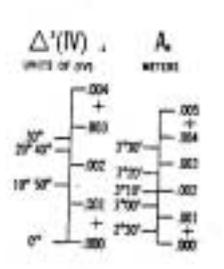
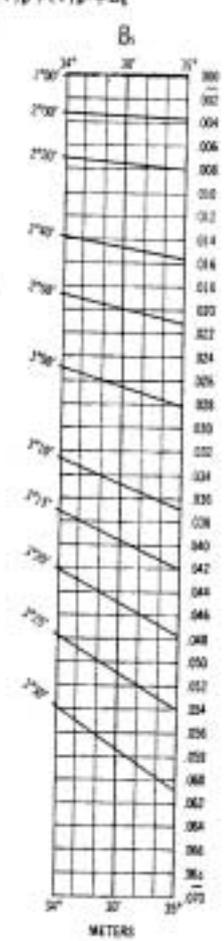
UNIVERSAL TRANSVERSE MERCATOR GRID

Latitude	p=.0001 Δ " (I)	N of Equator S of Equator	N = (I) + (II)p ² + (III)p ⁴ + A ₀ N = 10,000,000 - [(I) + (II)p ² + (III)p ⁴ + A ₀]		
			Diff. 1"	(II)	Diff. 1"
34°00'	3 762 214.378	30.80022	3 477.361	0.01367	2.147
01	3 764 062.392	30.80032	3 478.181	0.01365	2.147
02	3 765 910.411	30.80041	3 478.999	0.01363	2.146
03	3 767 758.436	30.80047	3 479.817	0.01361	2.145
04	3 769 606.464	30.80057	3 480.633	0.01359	2.145
34 05	3 771 454.499	30.80066	3 481.449	0.01357	2.144
06	3 773 302.538	30.80074	3 482.263	0.01355	2.144
07	3 775 150.583	30.80082	3 483.076	0.01353	2.143
08	3 776 998.632	30.80091	3 483.887	0.01351	2.142
09	3 778 846.686	30.80099	3 484.698	0.01349	2.142
34 10	3 780 694.746	30.80107	3 485.507	0.01347	2.141
11	3 782 542.810	30.80116	3 486.315	0.01345	2.141
12	3 784 390.880	30.80124	3 487.122	0.01343	2.140
13	3 786 238.954	30.80132	3 487.928	0.01341	2.139
14	3 788 087.034	30.80142	3 488.733	0.01339	2.139
34 15	3 789 935.119	30.80149	3 489.536	0.01337	2.138
16	3 791 783.209	30.80157	3 490.339	0.01335	2.137
17	3 793 631.303	30.80167	3 491.140	0.01333	2.137
18	3 795 479.404	30.80176	3 491.940	0.01331	2.136
19	3 797 327.509	30.80182	3 492.738	0.01329	2.135
34 20	3 799 175.619	30.80192	3 493.536	0.01327	2.135
21	3 801 023.734	30.80199	3 494.332	0.01325	2.134
22	3 802 871.854	30.80209	3 495.127	0.01323	2.134
23	3 804 719.979	30.80217	3 495.921	0.01321	2.133
24	3 806 568.109	30.80226	3 496.714	0.01319	2.132
34 25	3 808 416.245	30.80234	3 497.506	0.01317	2.132
26	3 810 264.385	30.80242	3 498.296	0.01315	2.131
27	3 812 112.531	30.80251	3 499.086	0.01314	2.130
28	3 813 960.681	30.80259	3 499.874	0.01312	2.130
29	3 815 808.837	30.80269	3 500.661	0.01310	2.129
34 30	3 817 656.998	30.80276	3 501.447	0.01308	2.128
31	3 819 505.164	30.80284	3 502.231	0.01306	2.128
32	3 821 353.334	30.80294	3 503.014	0.01304	2.127
33	3 823 201.510	30.80302	3 503.797	0.01302	2.126
34	3 825 049.692	30.80309	3 504.578	0.01300	2.126
34 35	3 826 897.877	30.80319	3 505.358	0.01298	2.125
36	3 828 746.069	30.80327	3 506.136	0.01296	2.124
37	3 830 594.265	30.80336	3 506.914	0.01294	2.124
38	3 832 442.467	30.80344	3 507.690	0.01292	2.123
39	3 834 290.673	30.80352	3 508.465	0.01290	2.122
34 40	3 836 138.884	30.80361	3 509.239	0.01288	2.122
41	3 837 987.101	30.80369	3 510.012	0.01286	2.121
42	3 839 835.322	30.80377	3 510.783	0.01284	2.120
43	3 841 683.549	30.80387	3 511.554	0.01282	2.120
44	3 843 531.781	30.80394	3 512.323	0.01280	2.119
34 45	3 845 380.017	30.80404	3 513.091	0.01278	2.118
46	3 847 228.260	30.80412	3 513.857	0.01276	2.118
47	3 849 076.507	30.80419	3 514.623	0.01274	2.117
48	3 850 924.759	30.80429	3 515.387	0.01272	2.116
49	3 852 773.016	30.80437	3 516.151	0.01270	2.116
34 50	3 854 621.279	30.80446	3 516.913	0.01268	2.115
51	3 856 469.546	30.80454	3 517.674	0.01266	2.114
52	3 858 317.818	30.80464	3 518.433	0.01264	2.114
53	3 860 166.097	30.80471	3 519.192	0.01262	2.113
54	3 862 014.379	30.80479	3 519.949	0.01260	2.112
34 55	3 863 862.666	30.80489	3 520.705	0.01258	2.111
56	3 865 710.960	30.80497	3 521.460	0.01256	2.111
57	3 867 559.258	30.80506	3 522.214	0.01254	2.110
58	3 869 407.562	30.80514	3 522.966	0.01252	2.109
59	3 871 255.870	30.80522	3 523.718	0.01250	2.109
35 00	3 873 104.183		3 524.468		2.108

INTERNATIONAL SPHEROID
METERS

34°

Latitude	$p=0.001 \Delta A$		$E' = (IV)p + (V)p^2 + B_0$	
	(IV)	Diff. 1"	(V)	Diff. 1"
34°00'	256 532.988	-0.83519	37.967	-0.00103
01	256 482.877	0.83555	37.905	0.00103
02	256 432.744	0.83591	37.843	0.00103
03	256 382.589	0.83627	37.782	0.00103
04	256 332.413	0.83664	37.720	0.00103
34 05	256 282.214	-0.83700	37.658	-0.00103
06	256 231.994	0.83736	37.596	0.00103
07	256 181.753	0.83772	37.534	0.00103
08	256 131.489	0.83808	37.472	0.00103
09	256 081.204	0.83845	37.410	0.00103
34 10	256 030.898	-0.83881	37.349	-0.00103
11	255 980.569	0.83917	37.287	0.00103
12	255 930.219	0.83953	37.225	0.00103
13	255 879.847	0.83989	37.163	0.00103
14	255 829.454	0.84025	37.101	0.00103
34 15	255 779.038	-0.84061	37.040	-0.00103
16	255 728.601	0.84098	36.978	0.00103
17	255 678.143	0.84134	36.916	0.00103
18	255 627.663	0.84170	36.854	0.00103
19	255 577.161	0.84206	36.793	0.00103
34 20	255 526.637	-0.84242	36.731	-0.00103
21	255 476.092	0.84278	36.669	0.00103
22	255 425.525	0.84314	36.607	0.00103
23	255 374.936	0.84350	36.545	0.00103
24	255 324.326	0.84386	36.484	0.00103
34 25	255 273.694	-0.84422	36.422	-0.00103
26	255 223.041	0.84459	36.360	0.00103
27	255 172.365	0.84495	36.299	0.00103
28	255 121.669	0.84531	36.237	0.00103
29	255 070.950	0.84567	36.175	0.00103
34 30	255 020.210	-0.84603	36.113	-0.00103
31	254 969.449	0.84639	36.052	0.00103
32	254 918.665	0.84675	35.990	0.00103
33	254 867.860	0.84711	35.928	0.00103
34	254 817.034	0.84747	35.867	0.00103
34 35	254 766.186	-0.84783	35.805	-0.00103
36	254 715.316	0.84819	35.743	0.00103
37	254 664.425	0.84855	35.682	0.00103
38	254 613.512	0.84891	35.620	0.00103
39	254 562.578	0.84927	35.558	0.00103
34 40	254 511.622	-0.84963	35.497	-0.00103
41	254 460.644	0.84999	35.435	0.00103
42	254 409.645	0.85035	35.374	0.00103
43	254 358.624	0.85071	35.312	0.00103
44	254 307.582	0.85106	35.250	0.00103
34 45	254 256.518	-0.85142	35.189	-0.00103
46	254 205.432	0.85178	35.127	0.00103
47	254 154.325	0.85214	35.066	0.00103
48	254 103.197	0.85250	35.004	0.00103
49	254 052.047	0.85286	34.942	0.00103
34 50	254 000.875	-0.85322	34.881	-0.00103
51	253 949.682	0.85358	34.819	0.00103
52	253 898.467	0.85394	34.758	0.00103
53	253 847.231	0.85430	34.696	0.00103
54	253 795.973	0.85465	34.635	0.00103
34 55	253 744.694	-0.85501	34.573	-0.00103
56	253 693.393	0.85537	34.512	0.00103
57	253 642.071	0.85573	34.450	0.00103
58	253 590.727	0.85609	34.389	0.00103
59	253 539.362	0.85645	34.327	0.00103
35 00	253 487.975		34.266	





E N S G
École Nationale
des Sciences
Géographiques

Cours de Géodésie

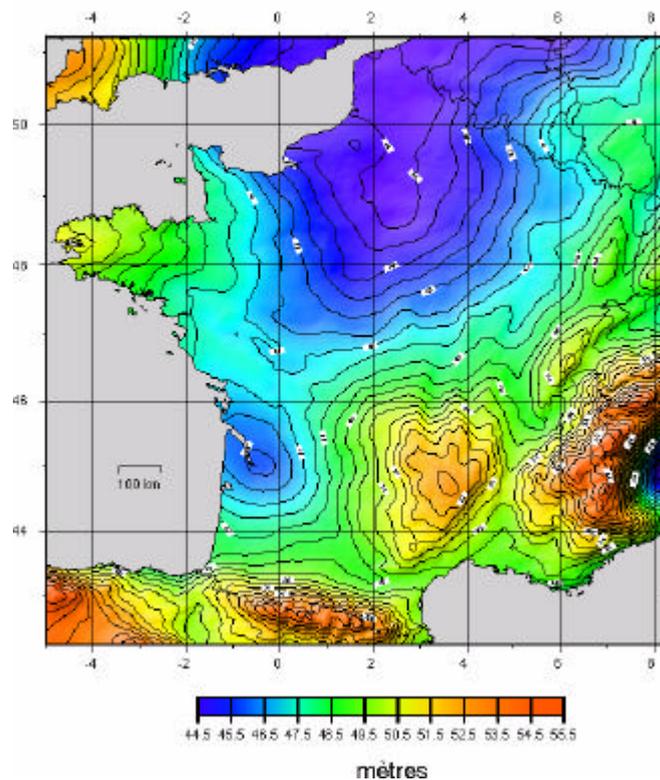
Chapitre 4

INTRODUCTION A LA GEODESIE PHYSIQUE

Version 2.0

20/10/2002

RAF98



Didier BOUTELOUP

Cellule pédagogique et de recherche en astro-géodésie

Didier.bouteloup@ensg.ign.fr

(33) 01 64 15 31 37

CHAPITRE 4

INTRODUCTION À LA GÉODÉSIE PHYSIQUE

1	<i>Introduction</i>	3
2	<i>Rappels sur la notion de potentiel</i>	3
2.1	Gradient	3
2.2	Potentiel	3
3	<i>Champ de pesanteur terrestre</i>	4
3.1	Bilan des forces en un point	4
3.1.a	Force de gravitation universelle	4
3.1.b	Force centrifuge	5
3.1.c	Accélération de pesanteur	5
3.2	Verticale; déviation de la verticale	5
3.2.a	Définitions	5
3.2.b	Coordonnées géographiques géodésiques et astronomiques	7
3.3	Potentiel de gravité	9
3.3.a	Définition	9
3.3.b	Potentiel créé par une sphère homogène	10
3.3.c	Développement en harmoniques sphériques	10
3.4	Géoïde	13
3.4.a	Potentiel centrifuge	13
3.4.b	Potentiel de pesanteur ; géoïde	13
3.4.c	Dénivelée élémentaire	14
3.5	Potentiel d'un corps à symétrie	15
3.5.a	Simplification du développement	15
3.5.b	Champ en J_2	15
4	<i>Champ de pesanteur normal</i>	16
4.1	Problématique	16
4.2	Expression du potentiel normal	16
4.3	Expression de la pesanteur normale	17
4.3.a	Pesanteur normale sur l'ellipsoïde de référence	17
4.3.b	Pesanteur normale à l'extérieur de l'ellipsoïde de référence	18
4.4	Définition d'un ellipsoïde géodésique de référence	19
4.4.a	Développement du potentiel normal en harmoniques sphériques	19
4.4.b	Paramètres de l'ellipsoïde	19
5	<i>Systèmes d'altitude</i>	21
5.1	Introduction	21
5.2	Cote géopotentielle	21
5.3	Altitude	21
5.4	Altitude dynamique	22

5.5	Altitude orthométrique	22
5.6	Altitude normale	24
5.6.a	Définition	24
5.6.b	Quasi-géoïde, relation entre altitude normale et hauteur ellipsoïdale	26
5.7	Comparaison entre les types d'altitudes	27
5.8	La conversion des hauteurs ellipsoïdales en altitudes	28
5.9	Système d'altitudes en France continentale	28
6	Estimation du géoïde	30
6.1	Anomalies de la pesanteur	30
6.2	Modèle gravimétrique	30
6.3	Modèle astro-géodésique	31
6.4	Modèle obtenu par nivellement et GPS	31
6.5	listes des modèles disponibles	33

1 Introduction

On appelle **géodésie physique** l'étude du champ de pesanteur terrestre. Cette étude permet de définir un certain nombre de liens entre d'une part le modèle géométrique et d'autre part le modèle dynamique (modèle de forces) de la Terre.

Pratiquement, la connaissance du champ de pesanteur terrestre est indispensable à deux types de travaux :

- la détermination des altitudes,
- l'orbitographie des satellites artificiels de la Terre.

Dans tout ce chapitre, nous supposerons toujours que la Terre est un système isolé : c'est-à-dire que nous négligerons l'influence de la Lune, du Soleil et des autres corps célestes. Entre autres, nous ne prendrons pas en considération les phénomènes de marées.

2 Rappels sur la notion de potentiel

2.1 Gradient

Soit U une fonction scalaire de l'espace;

$$U \left(\begin{array}{l} \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R} \\ \mathbf{M} \longrightarrow U(\mathbf{M}) \end{array} \right)$$

On appelle **gradient** de U la fonction vectorielle de l'espace notée **grad** U définie par:

$$\text{grad } U \left(\begin{array}{l} \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}^3 \\ \mathbf{M} \longrightarrow \text{grad } U(\mathbf{M}) \end{array} \right) \text{ avec } \text{grad } U \begin{pmatrix} \frac{\partial U}{\partial x} \\ \frac{\partial U}{\partial y} \\ \frac{\partial U}{\partial z} \end{pmatrix}$$

2.2 Potentiel

Soit \mathbf{F} un champ vectoriel de l'espace; $\mathbf{F} \left(\begin{array}{l} \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}^3 \\ \mathbf{M} \longrightarrow \mathbf{F}(\mathbf{M}) \end{array} \right)$.

On dit que **F** dérive d'un potentiel si et seulement si il existe une fonction scalaire U de l'espace telle que, en tout point M , $F(M) = \text{grad } U(M)$.

Lorsque **F** dérive d'un potentiel, on note donc $F = \text{grad } U$.

3 Champ de pesanteur terrestre

3.1 Bilan des forces en un point

Soit P le centre de gravité d'un solide de masse m à la surface ou à l'extérieur de la Terre, lié au mouvement de rotation de la Terre sur elle-même (mouvement diurne).

Inventorions l'ensemble des forces qui s'appliquent en P .

3.1.a Force de gravitation universelle

Au niveau élémentaire, considérons une fraction élémentaire de la Terre, de volume $d\nu$, de densité ρ et de centre de gravité P' . Si la masse de ce morceau élémentaire est dm' , on a: $\rho d\nu = dm'$.

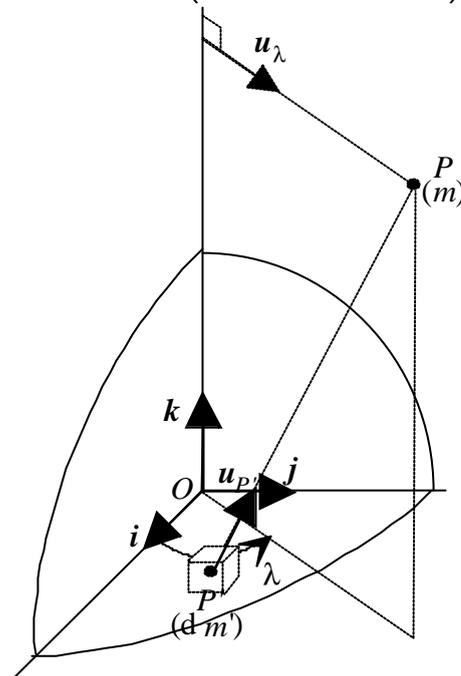


Fig. 1: Force de gravitation élémentaire

La force de gravitation exercée par P' sur P vaut:

$$-G \frac{m dm'}{\ell^2} \vec{u}_{P'}$$

avec: • G est la constante de gravitation universelle;

$$G \approx 6,672 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2},$$

$$\bullet \ell = \|\overline{P'P}\|$$

$$\bullet \vec{u}_{P'} = \frac{\overline{P'P}}{\|\overline{P'P}\|}$$

Donc, pour l'ensemble de la Terre, la force de gravitation se formule de cette manière:

$$\iiint_{\text{Terre T}} -G \frac{m dm'}{\ell^2} \vec{u}_{P'} = -Gm \iiint_{\text{T}} \frac{\mathbf{r} dv}{\ell^2} \vec{u}_{P'}$$

Remarquons que ρ , $\mathbf{u}_{P'}$ et ℓ dépendent du volume élémentaire considéré.

3.1.b Force centrifuge

Il s'agit de la force due à la rotation de la Terre sur elle-même.

Appelons ω_T la vitesse de rotation de la Terre; $\omega_T \approx 7,292 \cdot 10^{-5}$ rad/s.

La force centrifuge qui s'exerce sur P est $m\omega_T^2 \rho \vec{u}_I$ avec $\vec{u}_I = \cos I \vec{i} + \sin I \vec{j}$

3.1.c Accélération de pesanteur

Par définition, on appelle **accélération de pesanteur terrestre**, conventionnellement notée \vec{g} , l'accélération de P créée par l'attraction gravitationnelle de la Terre et par l'accélération centrifuge:

$$\vec{g} = -G \iiint_{\text{Terre}} \frac{\mathbf{r} dv}{\ell^2} \vec{u}_{P'} + \omega_T^2 \rho \vec{u}_I$$

\vec{g} est exprimé en m/s^2 , en gal ($1 \text{ gal} = 1 \text{ cm}/s^2$) ou en mgal. $\|\vec{g}\|$ est mesurable avec un gravimètre avec une précision de l'ordre de quelques μgal . Numériquement, à l'équateur $\|\vec{g}_e\| \approx 9,78 \text{ m}/s^2$ et au pôle $\|\vec{g}_p\| \approx 9,83 \text{ m}/s^2$. Il s'agit par exemple de l'accélération d'un corps en chute libre.

Nous noterons désormais $\vec{g} = \|\vec{g}\|$.

Le terme $-G \iiint_{\text{Terre}} \frac{\mathbf{r} dv}{\ell^2} \vec{u}_{P'}$ est appelé **accélération gravitationnelle**.

Le terme $\omega_T^2 \rho \vec{u}_I$ est appelé **accélération centrifuge**.

3.2 Verticale; déviation de la verticale

3.2.a Définitions

En un lieu M , on appelle **verticale** la direction du vecteur-accélération de pesanteur terrestre \vec{g} . La verticale est dirigée par le vecteur unitaire \vec{v} défini par
$$\vec{v} = -\frac{\vec{g}}{\|\vec{g}\|}$$

Autrement dit, la verticale est "la direction du fil à plomb". Le plan passant par M et orthogonal à \vec{v} est le **plan horizontal**. On appelle **zénith** la direction définie par $+\vec{v}$ et **nadir** la direction opposée de $-\vec{v}$.

On appelle **déviatio**n de la verticale l'angle θ entre \vec{n} et \vec{v} . On a $\cos q = \vec{n} \cdot \vec{v}$.

Le terme "déviation de la verticale" est défini de manière plus précise au chapitre

Numériquement, en France métropolitaine, on a toujours $\theta < 15''$, et, dans le monde, $\theta < 100''$.

Si $\vec{n} \neq \vec{v}$, définissons un vecteur normal \vec{T}_a orthogonal à \vec{n} et coplanaire avec \vec{n} et \vec{v} . \vec{T}_a est donc un vecteur du plan tangent et peut s'écrire:

$$\vec{T}_a = \sin a \vec{T}_p + \cos a \vec{T}_m$$

\vec{v} s'exprime alors:

$$\vec{v} = \cos \theta \vec{n} + \sin \theta \vec{T}_a$$

Il est clair que θ étant un angle infiniment petit, $\begin{cases} \cos q \approx 1 \\ \sin q \approx q \end{cases}$ et les composantes de \vec{v} dans le

repère local sont $\begin{pmatrix} q \sin a \\ q \cos a \\ 1 \end{pmatrix}_{R_L}$, où $\theta \cos \alpha$ et

$\theta \sin \alpha$ sont des angles infiniment petits.

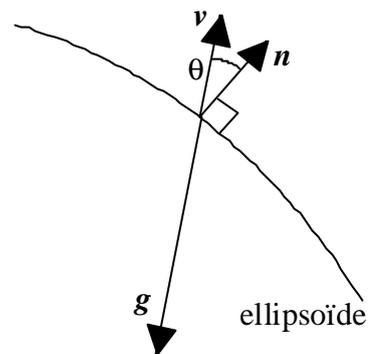


Fig. 2 : Vecteurs g et n

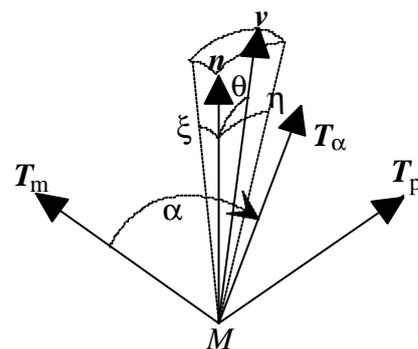


Fig. 3 : Décomposition de la déviation de la verticale

On retiendra:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{h} \\ \mathbf{x} \\ 1 \end{pmatrix}_{\mathbf{R}_L}$$

η et ξ sont les **composantes** de la déviation de la verticale, respectivement dans les directions Est-Ouest et Nord-Sud.

3.2.b Coordonnées géographiques géodésiques et astronomiques

Nous avons déjà étudié les coordonnées géographiques (\mathbf{l}, \mathbf{j}) au chapitre 2. Il est désormais nécessaire de les définir plus précisément:

On appelle **coordonnées géographiques géodésiques** les angles notés $(\mathbf{l}_g, \mathbf{j}_g)$ décrivant l'orientation du vecteur \mathbf{n} dans la base $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$.

On appelle **coordonnées géographiques astronomiques** les angles notés $(\mathbf{l}_a, \mathbf{j}_a)$ décrivant l'orientation du vecteur \mathbf{v} dans la même base.

L'utilisation ici de l'adjectif «astronomique» est expliqué au chapitre 5. On peut affirmer que les coordonnées géographiques astronomiques et géodésiques ne sont confondues que si $\vec{n} = \vec{v}$. Mais, a priori $\vec{n} \neq \vec{v}$ et $(\mathbf{l}_a, \mathbf{j}_a) \neq (\mathbf{l}_g, \mathbf{j}_g)$.

Appelons \mathcal{R}_{L_g} le repère local **géodésique** en M $(M; \vec{\mathbf{T}}_p, \vec{\mathbf{T}}_m, \vec{n})$ et $\mathbf{R}_{L_a} = (M; \vec{\mathbf{T}}_1, \vec{\mathbf{T}}_2, \vec{v})$ le repère local **astronomique** en M_1 défini comme il suit:

- $(M; \vec{\mathbf{T}}_2, \vec{v})$ est un repère orthonormé du **plan méridien astronomique**, c'est à dire du plan contenant \mathbf{v} et parallèle à l'axe des pôles,
- $\vec{\mathbf{T}}_1$ est tel que $(\vec{\mathbf{T}}_1, \vec{\mathbf{T}}_2, \vec{v})$ soit une base orthonormale directe.

Il est clair que, par définition de \mathcal{R}_{L_a} , a priori, $\mathcal{R}_{L_a} \neq \mathcal{R}_1^-(\mathbf{x})\mathcal{R}_2^+(\mathbf{h})\mathcal{R}_{L_g}$.

Cherchons une relation entre les coordonnées astronomiques (I_a, j_a) , les coordonnées géographiques (I_g, j_g) et les composantes (\mathbf{h}, \mathbf{x}) de la déviation de la verticale.

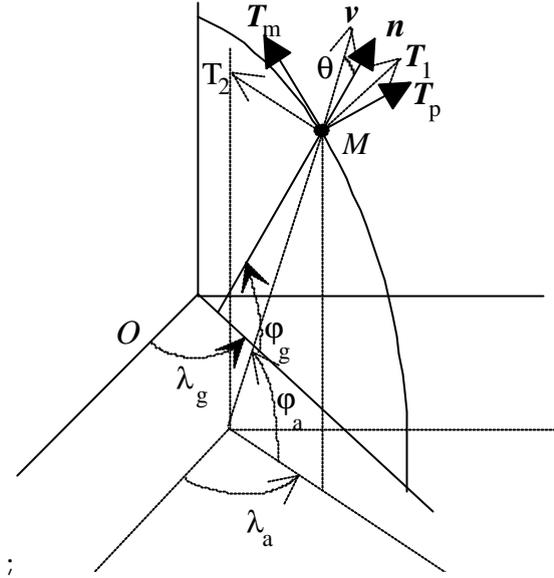


Fig. 4 : Repère local astronomique

Les composantes de \mathbf{v} sont connues dans \mathcal{R} et dans \mathcal{R}_{L_g} :

$$\mathbf{v} \begin{pmatrix} \cos I_a \cos j_a \\ \sin I_a \cos j_a \\ \sin j_a \end{pmatrix}_{\mathcal{R}} \quad \text{et} \quad \mathbf{v} \begin{pmatrix} \mathbf{h} \\ \mathbf{x} \\ 1 \end{pmatrix}_{\mathcal{R}_{L_g}}$$

Or la matrice R de passage de \mathcal{R} à \mathcal{R}_{L_g} a déjà été étudiée :

$$R = \begin{pmatrix} -\sin I_g & \cos I_g & 0 \\ -\sin j_g \cos I_g & -\sin j_g \sin I_g & \cos j_g \\ \cos j_g \cos I_g & \cos j_g \sin I_g & \sin j_g \end{pmatrix}$$

D'où on tire l'identité matricielle:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{h} \\ \mathbf{x} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin I_g & \cos I_g & 0 \\ -\sin j_g \cos I_g & -\sin j_g \sin I_g & \cos j_g \\ \cos j_g \cos I_g & \cos j_g \sin I_g & \sin j_g \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos I_a \cos j_a \\ \sin I_a \cos j_a \\ \sin j_a \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \mathbf{h} = \cos j_a \sin(I_a - I_g) & (1) \\ \mathbf{x} = \sin j_a \cos j_g - \cos j_a \sin j_g \cos(I_a - I_g) & (2) \\ 1 = \cos j_a \cos j_g \cos(I_a - I_g) + \sin j_a \sin j_g & (3) \end{cases}$$

L'égalité (1) montre que $\lambda_a - \lambda_g$ est de l'ordre de η , c'est à dire un infiniment petit de 1er ordre. Ainsi, au 1er ordre près, on peut donc écrire

$$\begin{cases} \sin(I_a - I_g) = I_a - I_g \\ \cos(I_a - I_g) = 1 \end{cases}$$

Les relations (1) et (2) s'écrivent donc:

$$\begin{cases} \mathbf{h} = \cos \mathbf{j}_a (\mathbf{I}_a - \mathbf{I}_g) \\ \mathbf{x} = \sin \mathbf{j}_a \cos \mathbf{j}_g - \cos \mathbf{j}_a \sin \mathbf{j}_g \times 1 = \sin(\mathbf{j}_a - \mathbf{j}_g) \end{cases}$$

On en déduit que $\varphi_a - \varphi_g$ est aussi un infiniment petit de 1er ordre. Dans ces conditions:

$$\begin{aligned} \cos \mathbf{j}_a (\mathbf{I}_a - \mathbf{I}_g) &= [\cos \mathbf{j}_g \cos(\mathbf{j}_a - \mathbf{j}_g) - \sin \mathbf{j}_g \sin(\mathbf{j}_a - \mathbf{j}_g)] (\mathbf{I}_a - \mathbf{I}_g) \\ &= \cos \mathbf{j}_g (\mathbf{I}_a - \mathbf{I}_g) - \underbrace{\sin \mathbf{j}_g (\mathbf{j}_a - \mathbf{j}_g)}_{\text{négligeable}} (\mathbf{I}_a - \mathbf{I}_g) = \cos \mathbf{j}_g (\mathbf{I}_a - \mathbf{I}_g) \end{aligned}$$

En définitive, on peut écrire:

$$\begin{aligned} \mathbf{h} &= \cos \mathbf{j} (\mathbf{I}_a - \mathbf{I}_g) \\ \xi &= \varphi_a - \varphi_g \end{aligned}$$

3.3 Potentiel de gravité

3.3.a Définition

Soient $d\nu$ un volume élémentaire à l'intérieur de la Terre ; dm' sa masse et P' son centre de gravité,

Considérons $f_{P'} \left(\begin{array}{l} \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R} \\ \mathbf{P} \longrightarrow f_{P'}(\mathbf{P}) = \frac{G dm'}{\ell} \end{array} \right)$ où $\ell = \|\overrightarrow{\mathbf{P}\mathbf{P}'}\|$

On peut montrer que $-G \frac{dm'}{\ell^2} \mathbf{u}_{P'} = \text{grad} f_{P'}(\mathbf{P})$. Ainsi, l'accélération gravitationnelle exercée par $d\nu$ sur P dérive du potentiel $\frac{G dm'}{\ell} = \frac{G \rho d\nu}{\ell}$.

Globalement, au niveau de la Terre, on peut écrire:

$$-G \iiint_{\text{Terre}} \frac{\mathbf{r} d\nu}{\ell^2} \mathbf{u}_{P'} = \iiint_{\text{T}} \text{grad} \left(\frac{G \mathbf{r} d\nu}{\ell} \right) = \text{grad} \left(\iiint_{\text{T}} \frac{G \mathbf{r} d\nu}{\ell} \right)$$

L'accélération gravitationnelle dérive du **potentiel gravitationnel**, noté V , défini par l'expression:

$$V = \iiint_{\text{Terre}} \frac{G \mathbf{r} d\nu}{\ell}$$

La connaissance de V nécessiterait a priori la connaissance de la densité des masses ρ en tout point de la Terre; connaissance évidemment impossible à

acquérir. Cette formule explicite qui définit V ne permet donc pas de le déterminer pratiquement.

3.3.b Potentiel créé par une sphère homogène

Soient une sphère homogène de centre O et de masse M et P un point extérieur à la sphère.

Si on note $r = \|\overrightarrow{OP}\|$, on peut montrer que le potentiel gravitationnel créé par la sphère a pour expression:

$$V(P) = \frac{GM}{r}$$

3.3.c Développement en harmoniques sphériques

Nous supposons dans ce paragraphe que la Terre est de forme quelconque.

Soit un point P extérieur à la Terre. Repérons P par les coordonnées sphériques $(\mathbf{l}, \mathbf{q}, \mathbf{r})$ définies de la manière suivante:

- λ est la longitude géographique,
- θ est la **colatitude** géocentrique;

$$\mathbf{q} = \frac{\mathbf{p}}{2} - \mathbf{w},$$

- $r = \|\overrightarrow{OP}\|$.

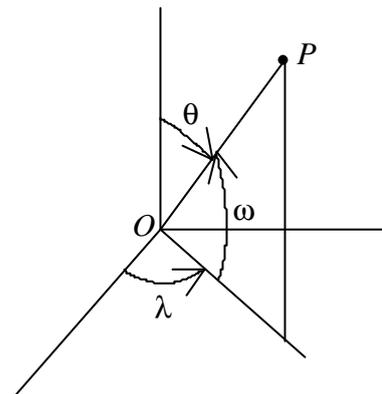


Fig. 5 : Colatitude de P

On admet que V peut se développer en série entière en fonction des coordonnées sphériques $(\mathbf{l}, \mathbf{q}, \mathbf{r})$; on parle alors de **développement en harmoniques sphériques**:

$$V = \frac{GM}{r} \left\{ 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{m=0}^n \left(\frac{a}{r} \right)^n [C_{nm} \cos(m\mathbf{l}) + S_{nm} \sin(m\mathbf{l})] P_{nm}(\cos \mathbf{q}) \right\}$$

avec les notations suivantes:

- a : demi-grand axe de l'ellipsoïde terrestre,
- M : masse totale de la Terre,

- C_{nm} et S_{nm} : constantes liées à la physique de la Terre,

On note aussi
$$\begin{cases} C_{n0} = C_n \\ S_{n0} = S_n \end{cases}$$

- $P_{nm}(x)$ représente la fonction de Legendre de 1ère espèce de degré n et d'ordre m définie de la manière suivante:

$$\begin{cases} P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \times \frac{d^n}{dx^n} \left[(x^2 - 1)^n \right] \\ P_{nm}(x) = (1 - x^2)^{m/2} \frac{d^m}{dx^m} P_n(x) \end{cases}$$

P_n est donc un polynôme de degré n . On note aussi $P_{n0} = P_n$.

Ce développement en harmoniques sphériques suggère plusieurs remarques :

- ① Le premier terme $\frac{Gm}{r}$ correspond au modèle d'une sphère homogène, et les autres termes du développement peuvent donc s'interpréter comme des "corrections" par rapport à ce modèle.
- ② Il convient d'observer précisément les fonctions de Legendre:
 - P_{n0} est un polynôme de degré n , pair ou impair selon la parité de n .
 - de manière générale, P_{nm} est le produit de $(1 - x^2)^{m/2}$ et du polynôme de degré $n - m$ $\frac{d^m}{dx^m} P_n(x)$.

Nous admettons que $P_{nm}(\cos \theta)$ admet $n - m + 2$ racines pour $\theta \in [0, \pi]$ et change $n - m + 1$ fois de signe sur l'intervalle $[0, \pi]$.
- ③ $\sin(m\lambda)$ et $\cos(m\lambda)$ s'annulent $2m$ fois pour $\lambda \in [0, 2\pi[$ et changent $2m - 1$ fois de signe sur $[0, 2\pi[$.
- ④ Les coefficients C_{nm} et S_{nm} deviennent de plus en plus petits lorsque n augmente.

Ainsi, lorsque n augmente, les harmoniques sphériques indiquent des variations de V de plus en plus **locales** et **faibles**. On parle alors des **longueurs d'onde** du potentiel de plus en plus courtes.

⑤ Lors d'une estimation du potentiel, par exemple avec les mesures satellitaires, la finesse de l'estimation repose sur le degré de développement en harmoniques sphériques de potentiel. Par exemple:

- le modèle de potentiel GRIM4 réalisé conjointement par le GRGS¹ et le DGF1² détermine tous les termes jusqu'au degré 50,
- dans le modèle OSU91 (de la *Ohio State University*), tous les termes jusqu'au degré 360 ont été estimés.

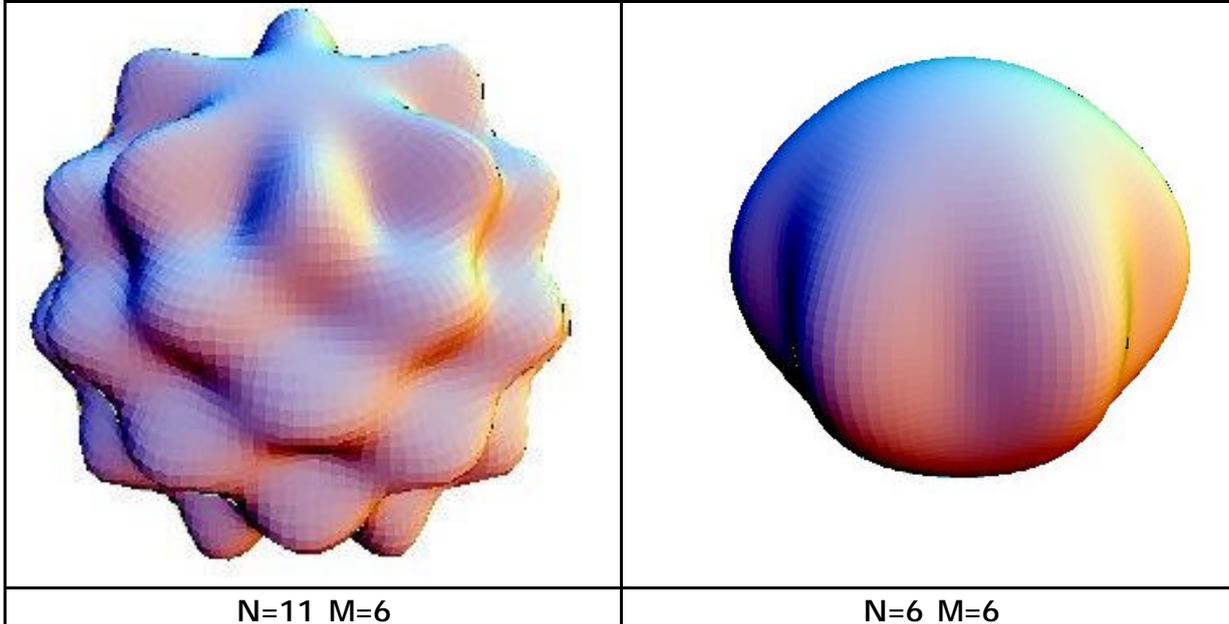
⑥ Plus on s'éloigne de la Terre, plus l'influence sur V des termes de degré élevé est négligeable, parce que ces termes sont multipliés par $\left(\frac{a}{r}\right)^n$.

On exprime le plus souvent le développement de V à l'aide des coefficients J_{nm} et K_{nm} :

$$\begin{cases} J_{nm} = -C_{nm} \\ K_{nm} = -S_{nm} \\ \text{pour } m = 0, J_{n0} = J_n \end{cases}$$

Et V s'écrit:
$$V = \frac{GM}{r} \left[1 - \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{m=0}^n \left(\frac{a}{r}\right)^n [J_{nm} \cos(mI) + K_{nm} \sin(mI)] P_{nm}(\cos q) \right]$$

Exemples



¹: Groupe de Recherche de Géodésie Spatiale, Toulouse.
²: Deutsches Geodätisches Forschungsinstitut, Munich.

3.4 Géoïde

3.4.a Potentiel centrifuge

On se rappelle que l'accélération centrifuge vaut $w_T^2 p u_I = w_T^2 r \sin q u_I$.

Soit la fonction scalaire Φ définie par
$$\mathbf{F} \left(\begin{array}{l} \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R} \\ \mathbf{P} \longrightarrow \mathbf{F}(\mathbf{P}) = \frac{1}{2} w_T^2 p^2 \end{array} \right)$$

Il se démontre rapidement que $w_T^2 p \vec{u}_I = \text{grad } \Phi$; c'est-à-dire que l'accélération centrifuge dérive du potentiel Φ .

3.4.b Potentiel de pesanteur ; géoïde

Notons $W = V + \Phi$. Il est clair que l'accélération de pesanteur \vec{g} dérive du potentiel W . W est appelé **potentiel de pesanteur**.

On appelle **surface équipotentielle** une surface où W est constant. Nous savons que la normale à une surface équipotentielle est colinéaire au gradient de W , c'est à dire à \vec{g} . La verticale est donc la normale à la surface équipotentielle.

Une ligne admettant \vec{g} comme vecteur tangent en tout point est appelée **ligne de force**.

Si on suppose que les mers ne sont soumises à aucune force autre que celle de pesanteur - entre autres, si on ne tient pas compte des marées - , alors le niveau moyen des mers peut être assimilé à une surface équipotentielle.

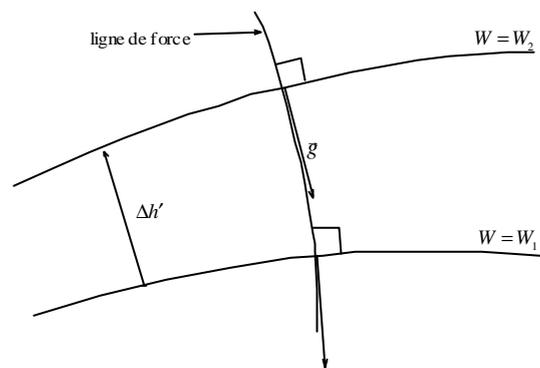


Fig. 6 : Équipotentiels et lignes de forces

Par définition, on appelle **géoïde** la surface équipotentielle du champ de pesanteur terrestre *proche* du niveau moyen des mers.

On appelle **hauteur du géoïde**, notée par convention N , la hauteur du géoïde par rapport à l'ellipsoïde. Pratiquement, il est rare que N dépasse une centaine de m.

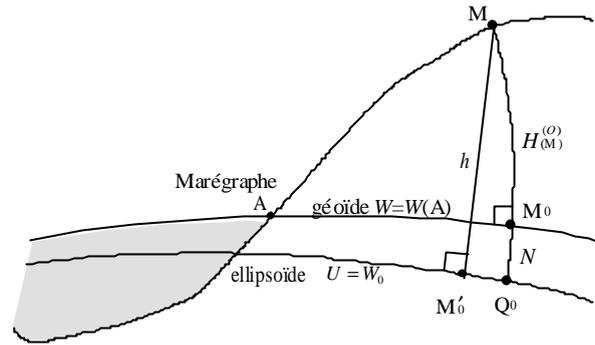


Fig. 7: Hauteur du géoïde

On remarque que l'on peut avoir $N < 0$.

Au niveau millimétrique, on peut négliger la courbure de la ligne de force et, si H_M désigne la longueur de la ligne de force entre M et P , il est légitime d'écrire:

$$h_M \approx H_M + N_P$$

3.4.c Dénivellée élémentaire

Soit une surface équipotentielle $W = W_1$ et une base orthonormée directe (I, J, K) liée à cette surface en un point M donné vérifiant:

$$\begin{cases} (I, J) \text{ est une base du plan horizontal en } M \\ K = v_M \end{cases}$$

Il est clair que $g \begin{pmatrix} \frac{\partial W}{\partial X} \\ \frac{\partial W}{\partial Y} \\ \frac{\partial W}{\partial Z} \end{pmatrix}_{(I, J, K)}$.

Or au voisinage de M $\frac{\partial W}{\partial X} = \frac{\partial W}{\partial Y} = 0$ donc $\frac{\partial W}{\partial Z} = -g$ et $dW = -\frac{\partial W}{\partial Z} dZ$.

Si on note $dZ = dn$, on a $dW = -gdn$

dn est appelée **dénivellée élémentaire**: c'est une longueur élémentaire mesurée le long d'une ligne de force.

3.5 Potentiel d'un corps à symétrie

3.5.a Simplification du développement

Étudions le cas particulier d'un corps présentant les symétries suivantes:

- (i) symétrie autour de l'axe (O;k)
- (ii) symétrie par rapport au plan (O;i, j)

Naturellement W (et V) doivent respecter ces 2 symétries:

- (i) W doit être indépendant de λ , donc, dans l'expression de V , les termes en $\cos(m\lambda)$ et $\sin(m\lambda)$ doivent disparaître, ce qui se traduit par:

$$J_{nm} = K_{nm} = 0 \quad \text{si } m \neq 0$$

- (ii) La symétrie par rapport au plan équatorial impose que, quel que soit θ , $W(\mathbf{p} - \mathbf{q}) = W(\mathbf{q})$. Or $F(\mathbf{p} - \mathbf{q}) = F(\mathbf{q})$, donc $V(\mathbf{p} - \mathbf{q}) = V(\mathbf{q})$.

Imposer cette contrainte à V revient à faire disparaître les polynômes de Legendre de degré impair:

$$J_{2n+1} = 0$$

Ainsi, le champ de gravité d'un tel corps peut-il s'écrire:

$$V = \frac{GM}{r} \left[1 - \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{a}{r} \right)^{2n} J_{2n} P_{2n}(\cos \theta) \right]$$

3.5.b Champ en J_2

On peut supposer en première approximation que la Terre correspond à un corps présentant ces deux symétries, et alors W vaut:

$$W = \frac{GM}{r} \left[1 - \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{a}{r} \right)^{2n} J_{2n} P_{2n}(\cos \theta) \right] + \frac{1}{2} \omega_T^2 r^2 \sin^2 \theta$$

Une deuxième approximation du potentiel terrestre consiste à négliger tous les termes de degré supérieur à 2.

Le polynôme de Legendre P_2 se calcule aisément :

$$P_2(x) = \frac{1}{2^2 2!} \frac{d^2}{dx^2} [(x^2 - 1)^2] = \frac{1}{8} \times \frac{d}{dx} [2 \times 2x(x^2 - 1)] = \frac{1}{2} (3x^2 - 1)$$

On aboutit au
champ en J_2 :

$$W \approx \frac{GM}{r} \left[1 + \left(\frac{a}{r} \right)^2 J_2 \frac{1 - 3 \cos^2 \mathbf{q}}{2} \right] + \frac{1}{2} \omega_T^2 r^2 \sin^2 \mathbf{q}$$

4 Champ de pesanteur normal

4.1 Problématique

Pour la géodésie géométrique, nous avons utilisé une surface de référence de la Terre, mathématiquement simple, par rapport à laquelle nous avons étudié la géométrie de la planète: il s'agit de l'ellipsoïde de révolution aplati à partir duquel sont définies les coordonnées géographiques $(\mathbf{l}, \mathbf{j}, h)$.

En ce qui concerne la géodésie physique, l'objectif est, de manière analogue, d'utiliser un champ de pesanteur mathématiquement simple, qui serve de référence à l'étude du champ de pesanteur réel. En outre, il serait plaisant que ces deux objets de référence soient liés.

Cette question a été résolue par Pizzetti (en 1894) et Somigliana (en 1922) avec la notion de **pesanteur normale**. Le problème est posé en ces termes: définir un corps ayant la forme d'un ellipsoïde de révolution aplati tel que :

- l'ellipsoïde soit une surface équipotentielle de son propre champ,
- le coefficient J_2 de ce champ soit égal au coefficient J_2 du champ de pesanteur terrestre.

Un tel champ est appelé **champ normal**, noté conventionnellement γ , et son potentiel associé est le **potentiel normal**, noté U . En pratique, U est très proche de W , γ est très proche de $\bar{\mathbf{g}}$, et le potentiel $T = W - U$ est appelé **potentiel perturbateur**.

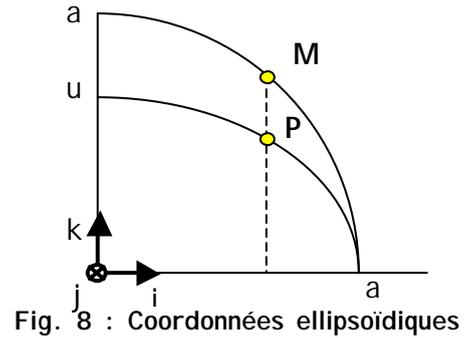
4.2 Expression du potentiel normal

Notons $U = V_N + \Phi$ où V_N est le potentiel gravitationnel normal.

Il se démontre que V_N a une expression finie en coordonnées ellipsoïdiques.

Étant donné un ellipsoïde de référence terrestre défini par a et b , appelons c sa distance focale ($c^2 = a^2 - b^2$) et rappelons ci-après la définition des **coordonnées ellipsoïdiques** $(u, \mathbf{b}, \mathbf{l})$ d'un point M quelconque:

- I est la longitude géographique de M ,
- u est le demi-petit axe de l'ellipsoïde homofocal à l'ellipsoïde de référence passant par M ,
- β est la latitude paramétrique de M relativement à l'ellipsoïde homofocal.



L'expression de V_N est:

$$V_N = \frac{GM}{c} \arctan \frac{c}{u} + \frac{1}{2} \omega_T^2 a^2 \frac{q}{q_0} \left(\sin^2 b - \frac{1}{3} \right)$$

avec: • $q(u) = \frac{1}{2} \left[\left(1 + 3 \frac{u^2}{c^2} \right) \arctan \frac{c}{u} - 3 \frac{u}{c} \right]$

- q_0 est la valeur de q sur l'ellipsoïde de référence ($q_0 = q(b)$).

Le terme Φ s'exprime simplement avec les coordonnées ellipsoïdiques:

$$\Phi = \frac{1}{2} \omega_T^2 p^2 = \frac{1}{2} \omega_T^2 v^2 \cos^2 \beta \quad \text{avec} \quad v^2 = u^2 + c^2$$

On aboutit à l'expression de U :

$$U(u, b) = \frac{GM}{c} \arctan \frac{c}{u} + \frac{1}{2} \omega_T^2 a^2 \frac{q}{q_0} \left(\sin^2 b - \frac{1}{3} \right) + \frac{1}{2} \omega_T^2 v^2 \cos^2 b$$

On vérifie que U est constant sur l'ellipsoïde de référence.

4.3 Expression de la pesanteur normale

4.3.a Pesanteur normale sur l'ellipsoïde de référence

Sur l'ellipsoïde de référence, la formulation de γ est la suivante:

- (i) à l'équateur:

$$\mathbf{g}_e = \frac{GM}{ab} \left[1 - m - \frac{m}{6} e' \frac{q_0^{(0)}}{q_0} \right] \quad \text{avec} \quad \begin{cases} m = \frac{w_T^2 a^2 b}{GM} \\ q^{(0)} = -\frac{v^2}{c} \times \frac{dq}{du} \end{cases}$$

$$\text{On trouve} \quad \begin{cases} q^{(0)}(u) = 3 \left(1 + \frac{u^2}{c^2} \right) \left(1 - \frac{u}{c} \times \arctan \frac{c}{u} \right) - 1 \\ q_0^{(0)} = q^{(0)}(b) = 3 \left(1 + \frac{1}{e'^2} \right) \left(1 - \frac{\arctan e'}{e'} \right) - 1 \end{cases}$$

(ii) au pôle:

$$\mathbf{g}_p = \frac{GM}{a^2} \left[1 + \frac{m}{3} e' \frac{q_0^{(0)}}{q_0} \right]$$

(iii) à une latitude quelconque:

$$\gamma = \frac{a \gamma_p \sin^2 \beta + b \gamma_e \cos^2 \beta}{\sqrt{a^2 \sin^2 \beta + b^2 \cos^2 \beta}}$$

Or, sur l'ellipsoïde de référence, $\beta = \psi$ est lié à la latitude géographique φ :

$$\begin{cases} \sin \mathbf{y} = \frac{b}{aw} \sin \mathbf{j} \\ \cos \mathbf{y} = \frac{\cos \mathbf{j}}{w} \end{cases}$$

On en tire la **formule de Somigliana** :

$$\mathbf{g}_0 = \frac{a \mathbf{g}_e \cos^2 \mathbf{j} + b \mathbf{g}_p \sin^2 \mathbf{j}}{(a^2 \cos^2 \mathbf{j} + b^2 \sin^2 \mathbf{j})^{1/2}}$$

a et b sont le demi-axe et le demi-axe de l'ellipsoïde, \mathbf{g}_e et \mathbf{g}_p sont les pesanteurs normales équatoriale et polaire sur l'ellipsoïde, \mathbf{j} est la latitude géographique

4.3.b Pesanteur normale à l'extérieur de l'ellipsoïde de référence

A la hauteur h au-dessus de l'ellipsoïde, le module de l'accélération normale se calcule à partir de \mathbf{g}_0 par le formulaire :

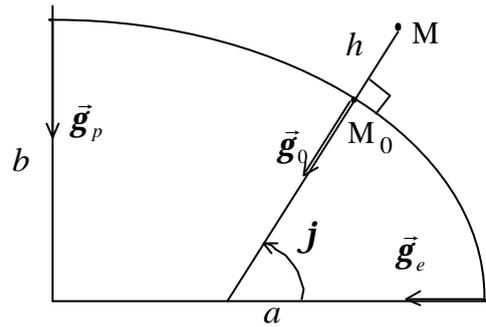


Fig. 9 : Pesanteur normale sur l'ellipsoïde.

$$f = \frac{a-b}{a}$$

$$m = \frac{\omega^2 a^2 b}{GM}$$

$$\mathbf{g} = \mathbf{g}_0 \left(1 - \frac{2}{a} (1 + f + m - 2f \sin^2 \mathbf{j}) h + \frac{3}{a^2} h^2 \right)$$

où f est l'aplatissement de l'ellipsoïde. Ces formules sont utilisées dans les calculs de certains types d'altitudes et pour la réalisation de géoïdes gravimétriques.

4.4 Définition d'un ellipsoïde géodésique de référence

4.4.a Développement du potentiel normal en harmoniques sphériques

Les symétries de l'ellipsoïde de référence autour de l'axe $(O;k)$ et par rapport au plan $(O;i, j)$ nous permettent d'affirmer que le développement de U en harmoniques sphériques ne comprendra que des termes en J_{2n} .

Or, le calcul montre que:

$$\bullet J_2 = \frac{e^2}{3} \left(1 - 2m \frac{e'}{15q_0} \right),$$

- tous les termes J_{2n} se déduisent du terme J_2 par une formule de récurrence.

Ainsi, la donnée de J_2 suffit de définir l'ensemble du développement

4.4.b Paramètres de l'ellipsoïde

GM et ω_T peuvent être estimés par des observations astronomiques. De plus, si l'ellipsoïde de référence est défini par 2 paramètres géométriques - (a, b) , (a, e^2) , $(a, 1/f)$, etc. -, et, si GM et ω_T sont connus, alors m peut être calculé et J_2 aussi.

Inversement, si l'ellipsoïde de référence est défini par a et J_2 (valeur du potentiel pesant réel et), on a:

$$J_2 = \frac{e^2}{3} \left(1 - 2 \frac{w_T^2 a^3 e}{15GMq_0} \right) \quad \text{où } q_0 \text{ est fonction de } e \text{ seulement.}$$

Cette dernière fonction n'est pas explicite en e , mais permet tout de même de déterminer e , par exemple de manière itérative.

Ainsi, le dernier ellipsoïde de référence recommandé pour servir de surface géométrique de référence et de surface équipotentielle du champ de pesanteur normal est l'ellipsoïde GRS 1980 (*Geodetic Reference System 1980*), adopté par l'Association Internationale de Géodésie en 1979, et défini de manière dynamique:

- $a = 6\,378\,137 \text{ m}$
- $GM = 3\,986\,005 \cdot 10^8 \text{ m}^3/\text{s}^2$
- $J_2 = 108\,263 \cdot 10^{-8}$
- $w_T = 7292115 \cdot 10^{-13} \text{ rad/s}$

D'où les constantes dérivées:

- $e^2 \approx 0,006\,694\,380\,022\,90$
- $\gamma_e \approx 9,780\,326\,771\,5 \dots \text{m}/\text{s}^2$
- $\gamma_p \approx 9,832\,186\,368\,5 \dots \text{m}/\text{s}^2$
- etc.

5 Systèmes d'altitude

5.1 Introduction

La notion d'altitude répond à la demande des aménageurs de pouvoir quantifier de manière "simple" l'éloignement par rapport au niveau de la mer. L'altitude devra donc être un indicateur, homogène à une longueur, de **l'éloignement par rapport au géoïde**. Cette grandeur dynamique est indispensable au percement des canaux, à la construction des voies ferrées, etc.

5.2 Cote géopotentielle

On appelle **cote géopotentielle** C la différence de potentiel par rapport au géoïde :

$$C_M = W_0 - W_M = - \int_P^M dW = \int_P^M g dn$$

On remarque que la cote géopotentielle est nulle en tout point du géoïde.

Soient M et M' deux points de la surface terrestre. Notons $DC_M^{M'} = C_{M'} - C_M = \int_M^{M'} g dn$.

$\Delta C_M^{M'}$ est **mesurable**. En effet:

- g est mesurable sur la surface terrestre avec un **gravimètre**.
- dn est mesurable avec un niveau et deux mires. Le niveau matérialise l'horizontale en S , et les deux mires sont maintenues verticales en A et B . Si la distance entre A et B est suffisamment petite (pratiquement inférieure à 100 m), on peut négliger le non parallélisme des surfaces équipotentielles, et la dénivellée entre A et B vaut $dn_A^B = l_A - l_B$.

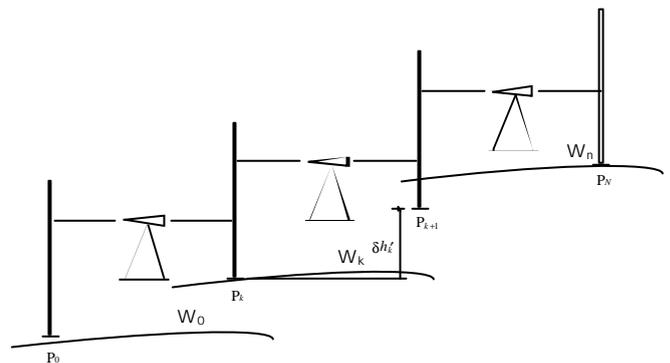


Fig. 10 : Principe du nivellement géométrique

Les cotes géopotentielles sont exprimées en m^2/s^2 ou en **unités géopotentielles** (abrégées par **UGP**): $1 \text{ UGP} = 10^3 \text{ gal} \cdot m = 10^6 \text{ mgal} \cdot m$.

5.3 Altitude

D'une manière générale, l'altitude d'un point M est son éloignement d'une surface de référence proche du géoïde. Comme on l'a vu ci-dessus, la technique du nivellement utilisée seule fournit une dénivelée entre deux points qui dépend du chemin suivi. Seule la différence de potentiel entre les deux points est invariante. On est donc conduit à adopter la définition générale suivante de l'altitude d'un point M :

$$H_{(M)}^{(*)} = \frac{W(A) - W(M)}{g^{(*)}(M)}$$

A est un point de référence dont l'altitude est conventionnellement nulle, par exemple le niveau moyen enregistré par un marégraphe. Le symbole (*) distingue les différents types d'altitude. $g^{(*)}(M)$ est une fonction du seul point M qui a la dimension d'une accélération. Comme la différence de potentiel ne dépend pas du chemin suivi, la formule ci-dessus garantit une définition correcte et sans équivoque de l'altitude. Le choix de la fonction $g^{(*)}(M)$ détermine le **type d'altitude**. En particulier, si la valeur de $g^{(*)}(M)$ est proche de la valeur de la pesanteur entre M et le géoïde, $H_{(M)}^{(*)}$ est proche de la hauteur de M au-dessus du géoïde. On comprend que la notion d'altitude est nécessairement liée à celle de potentiel. Pour établir un réseau de nivellement de grande étendue ou couvrant des zones montagneuses, il faut tenir compte des variations de g et déterminer des différences de potentiel, et pas seulement des dénivelées mesurées par le nivellement.

5.4 Altitude dynamique

On appelle **altitude dynamique** la grandeur $H_{(M)}^{(D)} = \frac{W(A) - W(M)}{g^{(*)}(M)}$

Remarquons que $H^{(D)}$ est exprimée en mètre.

Les altitudes dynamiques $H^{(D)}$ sont définies en choisissant pour $g^{(*)}(M)$ une constante notée $g^{(D)}$ égale à la pesanteur normale sur l'ellipsoïde, à la latitude de 45°. $g^{(D)}$ se calcule par la formule de Somigliana. Les altitudes dynamiques ont un intérêt scientifique évident : elles sont directement proportionnelles aux différences de potentiel et leur interprétation physique est très simple. Elles peuvent cependant s'écarter des hauteurs au-dessus du géoïde de 0,25 %, ce qui n'est pas tolérable pour de nombreuses applications où l'aspect géométrique prime sur la physique. Il est commode d'ajuster les réseaux de nivellement de grande étendue (nationaux ou continentaux) en altitude dynamique, quitte à les transformer ensuite en altitudes usuelles. La référence théorique des altitudes dynamiques est le géoïde.

5.5 Altitude orthométrique

On symbolise l'altitude orthométrique par $H^{(O)}$. Idéalement, l'altitude orthométrique du point M est son abscisse curviligne au-dessus du géoïde, comptée le long de la ligne de

force du champ de pesanteur (M_0M sur la figure 10). Ce type d'altitude est donc très proche de l'altitude commune, la "hauteur au-dessus du niveau de la mer". La valeur moyenne de g sur l'arc de ligne de force M_0M est :

$$\tilde{g} = \frac{1}{H_{(M)}^{(o)}} \int_{M_0M} g \cdot ds$$

ds est la différentielle de l'abscisse curviligne le long de la ligne de force. L'altitude orthométrique de M est donc :

$$H_{(M)}^{(o)} = \frac{W(A) - W(M)}{\tilde{g}}$$

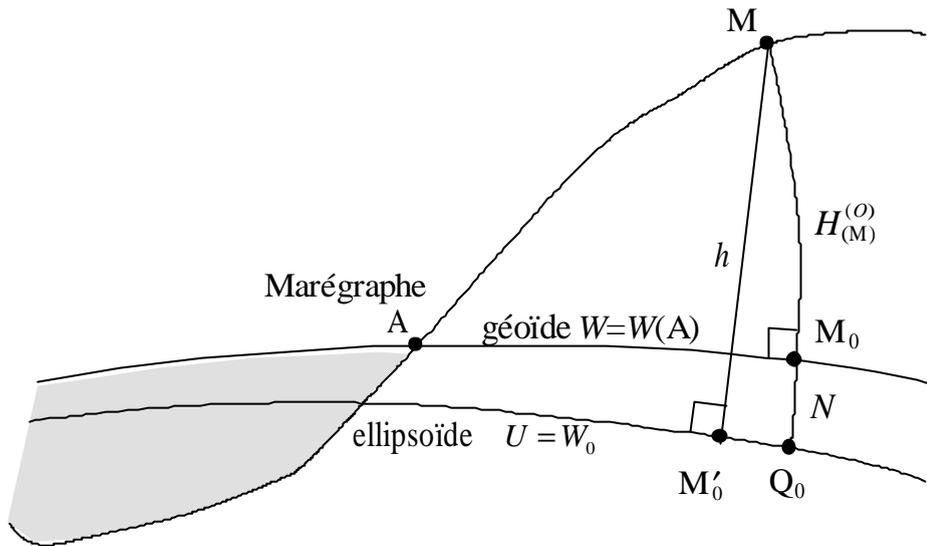


Fig. 11 : Altitude orthométrique.

Une formule pratique est obtenue en remplaçant \tilde{g} par la valeur de g au point milieu entre M_0 et M , à l'altitude $\frac{H_{(M)}^{(o)}}{2}$, obtenue par un développement limité :

$$H_{(M)}^{(o)} = \frac{W(A) - W(M)}{g(M) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g}{\partial H} \right)_{\text{moy}} \cdot H_{(M)}^{(o)}}$$

$\left(\frac{\partial g}{\partial H} \right)_{\text{moy}}$ est le gradient moyen de la pesanteur entre M et M_0 , $g(M)$ est la pesanteur réelle en M , sur la surface topographique. Le calcul de $H_{(M)}^{(o)}$ à partir de $W(A) - W(M)$ est itératif mais peut être remplacé par :

$$H_{(M)}^{(o)} = \frac{W(A) - W(M)}{g(M)} \left(1 - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g}{\partial H} \right)_{\text{moy}} \frac{W(A) - W(M)}{(g(M))^2} \right)$$

La modélisation de $\frac{\partial g}{\partial H}$ est délicate, il existe plusieurs choix possibles et donc plusieurs sous-types d'altitudes orthométriques. Pour les altitudes orthométriques de Helmert,

qui sont la meilleure réalisation des altitudes orthométriques, on part d'une formule due à Bruns (Heiskanen et Moritz, 1967, p. 53) :

$$\frac{\partial g}{\partial H} = -2gJ + 4\pi Gr - 2w^2$$

J est la courbure moyenne du géoïde au point M_0 , r est la masse volumique de la croûte terrestre. On approxime la courbure du géoïde par celle de l'ellipsoïde, g par l'accélération normale et on prend pour r une valeur moyenne, en général 2670 kg m^{-3} . Cela donne le gradient de Poincaré-Prey :

$$\left(\frac{\partial g}{\partial H}\right)_{\text{moy}} = -0,848 \times 10^{-6} \text{ s}^{-2} = -0,0848 \text{ mGal/m}$$

La référence idéale des altitudes orthométriques de Helmert est le géoïde, dans la mesure où la masse volumique réelle de la croûte terrestre est bien représentée par la valeur moyenne adoptée.

Pour les altitudes dites orthométriques normales³, on remplace le gradient moyen

$\left(\frac{\partial g}{\partial H}\right)_{\text{moy}}$ dans la formule) par le gradient moyen de la pesanteur normale. La référence

idéale des altitudes orthométriques normales n'est donc pas exactement le géoïde.

Relation entre altitude orthométrique et hauteur ellipsoïdale

La ligne de force du champ de pesanteur (MM_0) et la normale à l'ellipsoïde (MM'_0) ne diffèrent que par la courbure de la ligne de force et la déviation de la verticale (voir figure), on peut, à 1 mm près transformer une altitude orthométrique de Helmert en hauteur ellipsoïdale par :

$$h \approx N + H^{(o)}$$

où N est la hauteur du géoïde sur l'ellipsoïde.

5.6 Altitude normale

5.6.a Définition

On appelle surface sphéropotentielle d'un point M la surface équipotentielle du champ normal, dont le potentiel normal est égal au potentiel réel de M . Le point Q est l'intersection de la sphéropotentielle et de la ligne de force. L'altitude normale de M est la hauteur Q_0Q de la surface sphéropotentielle au-dessus de l'ellipsoïde, prise le long de la ligne de force du champ normal. L'arc de ligne de force compris entre Q et M est l'anomalie d'altitude z . \tilde{g} est l'accélération normale moyenne sur l'arc de ligne de force du champ normal Q_0Q :

$$\tilde{g} = \frac{1}{H_{(M)}^{(N)}} \int_{Q_0Q} \mathbf{g}(h) \cdot ds = \frac{U(Q_0) - U(Q)}{H_{(M)}^{(N)}} = \frac{W(A) - W(M)}{H_{(M)}^{(N)}}$$

où ds est la différentielle de l'abscisse curviligne de la ligne de force du champ normal.

³ Les altitudes NGF-Lallemand utilisées en France avant 1969 appartenait à ce type, à ceci près que g n'a pas été mesuré pour estimer les différences de potentiel, mais modélisé.

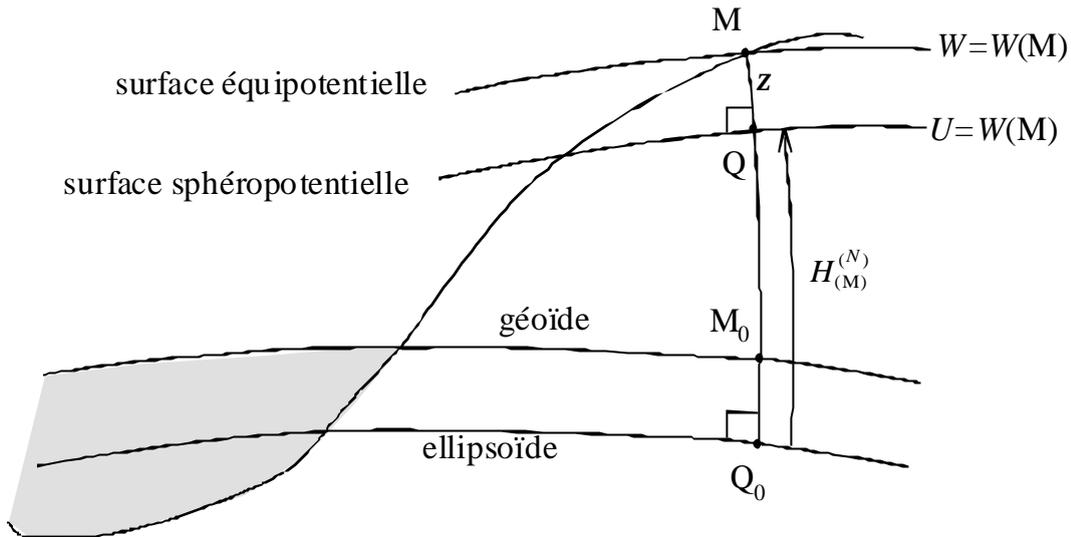


Fig. 12 : Altitude normale.

On a donc :

$$H_{(M)}^{(N)} = \frac{W(A) - W(M)}{\tilde{g}}$$

En pratique, on emploie la formule :

$$H_{(M)}^{(N)} = \frac{W(A) - W(M)}{g_0} \left(1 + (1 + f + m - 2f \sin^2 j) \frac{W(A) - W(M)}{ag_0} - \left(\frac{W(A) - W(M)}{ag_0} \right)^2 \right)$$

où g_0 est donné par la formule de Somigliana $g_0 = \frac{ag_e \cos^2 j + bg_p \sin^2 j}{(a^2 \cos^2 j + b^2 \sin^2 j)^{1/2}}$

et m par $m = \frac{w^2 a^2 b}{GM}$

Contrairement aux altitudes orthométriques, les altitudes normales sont tributaires d'une formule de pesanteur normale donc, dans une certaine mesure, du choix d'un ellipsoïde de référence. Par contre, elle ne dépend pas de la répartition des masses dans la croûte terrestre.

5.6.b Quasi-géοide, relation entre altitude normale et hauteur ellipsoïdale

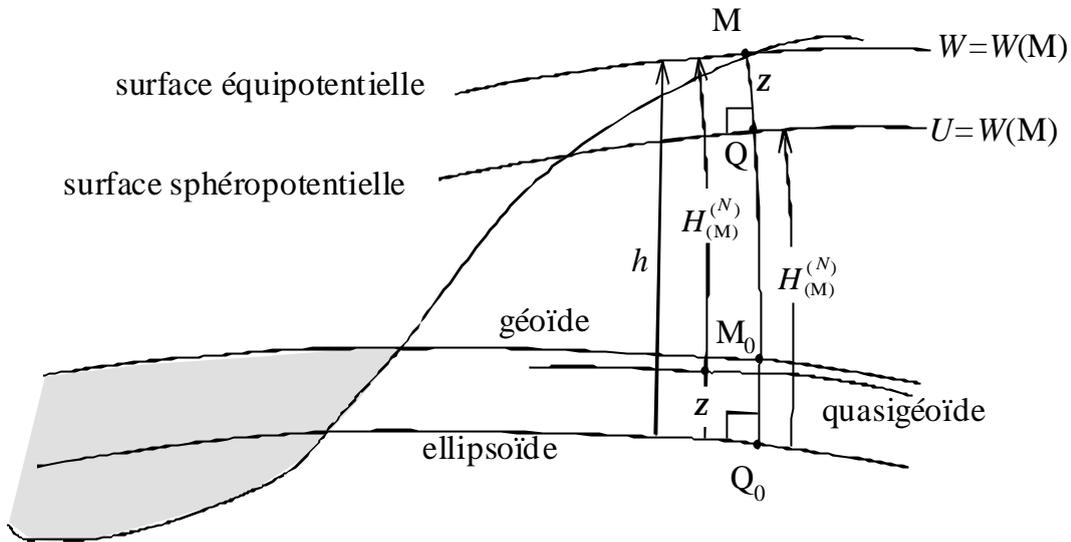


Fig. 13 : Quasigéοide

Le géοide est la surface d'altitude normale nulle. Le quasi-géοide est la surface obtenue en reportant depuis chaque point M de la surface topographique, vers le bas, son altitude normale. Pour passer d'une altitude normale à une hauteur ellipsoïdale, on ne commet pas d'erreur supérieure à 1 mm en confondant la normale à l'ellipsoïde et la ligne de force du champ de pesanteur. On obtient donc une relation entre la hauteur ellipsoïdale, l'anomalie d'altitude et l'altitude normale :

$$h \approx z + H^{(N)}$$

La différence entre l'anomalie d'altitude et de la hauteur du géοide est :

$$N - z = H^{(N)} - H^{(O)} = \frac{\tilde{g} - \tilde{\mathbf{g}}}{\tilde{\mathbf{g}}} H$$

où $H^{(O)}$ désigne ici l'altitude orthométrique de Helmert et H désigne indifféremment l'altitude normale ou l'altitude orthométrique. On emploie la formule et son équivalente pour la pesanteur normale :

$$\frac{\partial \tilde{\mathbf{g}}}{\partial H} = -2gJ_0 - 2w^2$$

J_0 est la courbure moyenne de l'ellipsoïde. Ces deux formules permettent de calculer $\tilde{g} - \tilde{\mathbf{g}}$ à partir des valeurs en surface g et $\tilde{\mathbf{g}}$:

$$\tilde{g} - \tilde{\mathbf{g}} = g - \tilde{\mathbf{g}} - 2pGrH + \mathbf{g}(J - J_0)H$$

Les trois premiers termes du second membre représentent, à une petite correction près, l'anomalie de Bouguer Δg_B telle qu'elle est cartographiée, en France, par le Bureau de Recherches Géologiques et Minières⁴. Le dernier terme, qui contient la courbure du géοide, est plus difficile à évaluer mais est très petit. On a donc :

⁴ La formule de la pesanteur normale utilisée est celle de 1930.

$$H^{(N)} - H^{(O)} \approx \frac{\Delta g_B}{\tilde{g}} H$$

Cette formule permet de convertir des altitudes de Helmert en altitudes normales, mais ne s'applique pas aux altitudes orthométriques normales.

5.7 Comparaison entre les types d'altitudes

Il est clair que la somme des dénivellées élémentaires mesurées $Dn_A^B = \int_A^B dn$ ne peut pas être à la base d'un système d'altitudes, car cette quantité dépend du "chemin suivi" entre A et B.

Les principaux critères de choix d'un système d'altitudes sont les suivants:

- ① possibilité de déterminer pratiquement les altitudes avec une précision suffisante,
- ② possibilité de négliger la différence d'altitudes entre deux points proches situés sur la même surface équipotentielle,
- ③ possibilité d'utiliser la dénivellée géométrique Δn_A^B entre deux points comme approximation de la différence d'altitudes.

Aucun type d'altitudes ne répond parfaitement à tous les critères; chacun d'eux représente une solution de compromis. Pour évaluer chaque type d'altitudes relativement au 3ème critère, il convient d'avoir à l'esprit les ordres de grandeur des variations de g à la surface de la Terre:

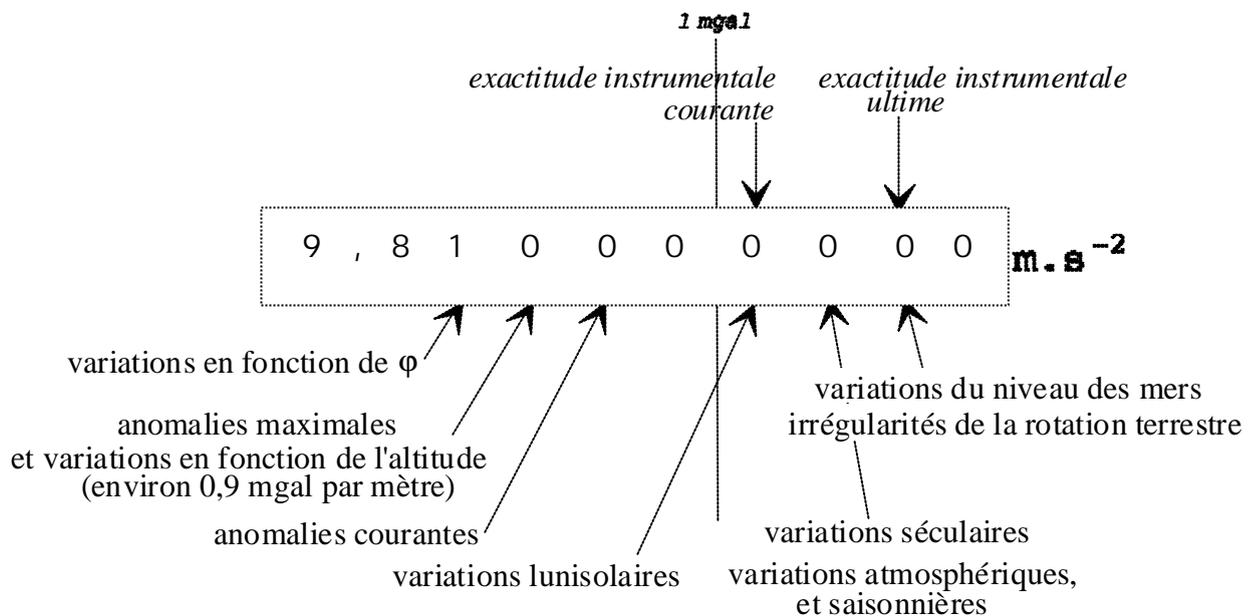


Fig. 14 : Ordre de grandeur des anomalies de pesanteur

5.8 La conversion des hauteurs ellipsoïdales en altitudes

Les formules précédentes montrent qu'idéalement, il suffirait de disposer d'un modèle de géoïde ou de quasi-géoïde, suivant le type d'altitude, pour effectuer ces conversions :

$$H^{(O)} = h - N$$

$$H^{(N)} = h - z$$

Ces formules s'appliquent dans le cas rare d'observation et traitement d'un point isolé. En général, on procède en mode différentiel (ou relatif). Le point M_1 étant connu en coordonnées et altitude, l'altitude du point M_2 est calculée par :

$$H_2^{(O)} = H_1^{(O)} + h_2 - h_1 - (N_2 - N_1)$$

ou

$$H_2^{(N)} = H_1^{(N)} + h_2 - h_1 - (z_2 - z_1)$$

Dans le cas de points très proches et si on peut supposer que la variation de la hauteur du (quasi) géoïde est faible, celle ci peut être négligée. Dans le cas contraire, cette variation est déduite d'un modèle local, régional ou global de géoïde ou de quasi-géoïde.

5.9 Système d'altitudes en France continentale

Un référentiel altimétrique (ou système d'altitude idéal) est défini par :

- un type d'altitude,
- les constantes relatives au type d'altitude ($g^{(D)}$ pour l'altitude dynamique, constantes de l'ellipsoïde pour l'altitude normale, etc.),
- une surface de référence idéale fixée par une constante W_0 ,
- une unité.

Pour les altitudes dynamiques et orthométriques, la surface de référence idéale est un géoïde. Pour les altitudes normales, la surface de référence idéale est un quasi-géoïde. Un système d'altitude est réalisé par un réseau formé d'un ensemble de repères matérialisés auxquels on a attribué une altitude. La surface de référence altimétrique réalisée diffère de la surface de référence idéale en raison des erreurs de mesure et, pour les altitudes orthométriques, en raison des défauts de modélisation du gradient de la pesanteur.

Une réalisation d'un système d'altitude comprend donc l'ensemble des constantes et algorithmes qui influent sur le système de référence, à savoir :

- un type d'altitude et les constantes associées,
- un point fondamental et son altitude conventionnelle. En pratique, le point fondamental est proche d'un marégraphe et son altitude est déduite des observations marégraphiques durant une période limitée. Il apparaît donc que la surface de référence est fixée non par la valeur de $W(A)$, mais par le fait qu'elle passe par le point fondamental,
- un réseau de repères de nivellement et un ensemble d'observations de nivellement de précision et de gravimétrie,
- un processus de calcul des altitudes des repères.

La qualité d'une référence d'altitude est directement fonction de la qualité du réseau qui la réalise. Les facteurs de qualité sont :

- l'extension géographique,
- l'exactitude des observations (systématismes éventuels),
- la précision des observations (erreurs accidentelles),
- la fiabilité du réseau (fautes d'observation et de calcul)
- la stabilité des repères ou la connaissance de leur vitesse verticale.

En France continentale, les altitudes fournies par l'IGN sont des **altitudes normales** (champ normal relatif à l'ellipsoïde GRS 1980), exprimées en mètre, la surface équipotentielle prise comme modèle de géoïde étant le niveau moyen de la mer Méditerranée mesuré au marégraphe de Marseille. Le système d'altitudes ainsi défini est appelé système altimétrique **IGN 1969**.

6 Estimation du géoïde

6.1 Anomalies de la pesanteur

Soient M un point quelconque de la surface topographique, P l'intersection de la ligne de force passant par M avec le géoïde et Q la projection de M sur l'ellipsoïde.

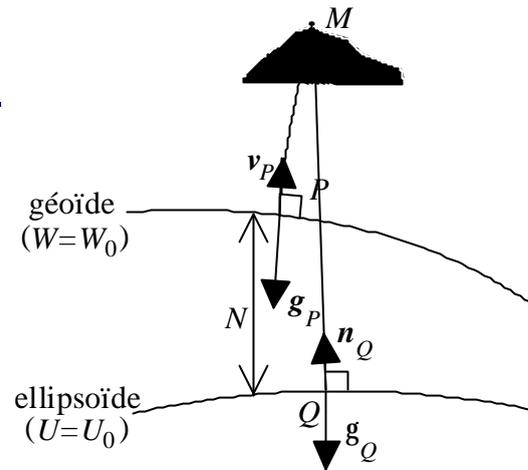


Fig. 15 : Anomalie de pesanteur

Comparons g_P et g_Q .

L'angle entre g_P et g_Q est la **dévi**ation de la verticale. On note conventionnellement η et ξ ses composantes dans les directions respectives Est-Ouest et Nord-Sud:

$$\begin{pmatrix} h \\ x \\ 1 \end{pmatrix}_{R_L}$$

La différence de normes $\|g_P\| - \|g_Q\|$ est appelée **anomalie de pesanteur** noté Δg .

6.2 Modèle gravimétrique

On peut connaître N en fonction de Δg (utilisation de la **formule de Stokes**).

En effet, la formule de **Bruns** lie N et le potentiel perturbateur T : $N = \frac{T}{\gamma}$.

Or, en faisant entre autres l'approximation sphérique, on démontre la relation suivante:

$$T = \frac{R}{4\pi} \iint_{\text{sphère}} S(\mathbf{y}) \mathbf{D} \quad \mathbf{g}(\mathbf{P}) d\mathbf{s}_P \quad , \quad \text{avec les notations indiquées page suivante.}$$

- R est le rayon de la sphère terrestre,
- (α, ψ) sont les pseudo-coordonnées obliques d'un point P quelconque de la surface terrestre, M étant utilisé comme pseudo-pôle,
- $d\sigma_P$ est l'élément de surface infiniment petit dans la direction de P de la sphère de rayon 1 centrée au centre O de la Terre. On a:

$$d\sigma_P = \sin \psi \, d\alpha \times d\psi$$

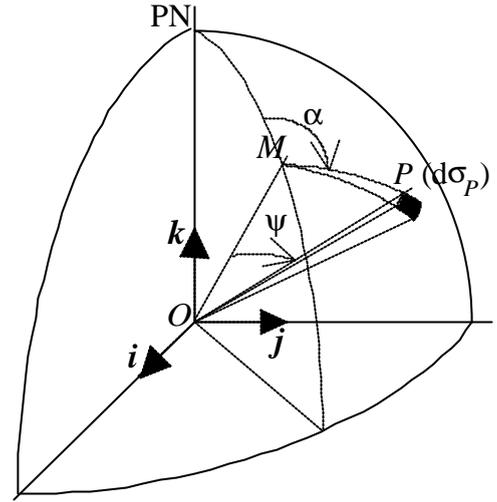


Fig. 16 : Intégration des anomalies gravimétriques

- $S(\mathbf{y})$ est la **fonction de Stokes**:

$$S(\mathbf{y}) = \frac{1}{\sin \frac{\mathbf{y}}{2}} - 6 \sin \frac{\mathbf{y}}{2} + 1 - \cos \mathbf{y} \left[5 + 3 \ln \left(\sin \frac{\mathbf{y}}{2} + \sin^2 \frac{\mathbf{y}}{2} \right) \right],$$

On en déduit la **formule de Stokes**:

$$N = \frac{R}{4\pi g} \iint_{\text{sphère}} S(\mathbf{y}) \mathbf{D} \quad g d\mathbf{s} = \frac{R}{2g} \int_0^p \left[\frac{1}{2p} \int_{a=0}^{2p} \mathbf{D} \quad g(\mathbf{a}, \mathbf{y}) d\mathbf{a} \right] S(\mathbf{y}) \sin \mathbf{y} \, d\mathbf{y}$$

6.3 Modèle astro-géodésique

On peut connaître N par l'intermédiaire de ξ et η ; η et ξ étant eux-mêmes données par la comparaison des coordonnées astronomiques et géodésiques en un point:

$$\begin{cases} \mathbf{h} = \cos \mathbf{j} (\mathbf{I}_a - \mathbf{I}_g) \\ \mathbf{x} = \mathbf{j}_a - \mathbf{j}_g \end{cases}$$

6.4 Modèle obtenu par nivellement et GPS

Cette méthode consiste à exploiter directement la relation suivante (suivant le type d'altitude)

$$N = h - H$$

où h désigne la hauteur ellipsoïdale obtenue par GPS exprimée dans un système de référence géodésique, H l'altitude exprimée dans un système altimétrique.

N désigne donc la hauteur de l'altitude 0 du système altimétrique sur l'ellipsoïde du système de référence géodésique.

Lorsque l'on dispose d'un semis de points déterminés dans les deux systèmes, il est possible de déterminer par interpolation la valeur de N en n'importe quel point. Cette méthode donne donc directement une surface de conversion des hauteurs ellipsoïdales du système de référence en altitudes et non le géoïde (ou du moins que dans la mesure où l'altitude 0 est proche du géoïde).

La précision de cette méthode dépend de :

- la précision de la réalisation du système de référence géodésique,
- la précision de la réalisation du système altimétrique,
- la précision de la mesure GPS de h ,
- la densité de points : contrairement aux données gravimétriques ou aux modèles numériques de terrain qui donne une information régionale pour la détermination du géoïde, cette mesure est ponctuelle. En particulier, il n'est pas possible de prédire des variations de la surface à des longueurs d'onde inférieures à la distance entre les points,
- l'interpolateur : le choix de l'interpolateur, en particulier sa régularité doit restituer le comportement de la surface de conversion entre les points d'appui. Son choix est important car associé à un critère statistique, il permet de détecter les fautes.

6.5 listes des modèles disponibles

Modèles	T*	Auteur / organisme	année	Etendue	pas	données utilisées
Levallois	S	Levallois/IGN	1970	France	-	nivellement astro-géodésique
Levallois	S	Levallois/IGN	1970	France	-	nivellement astro-gravimétrique
Deloménie	G	Deloménie/BGI - IGN	1987	France	-	Gravimétrie
OSU 91	P	Rapp et al. Ohio State University	1991	Monde		Trajectographie Gravimétrie Altimétrie
EGM96	P	NASA/NIMA	1996	Monde	15' x 15'	trajectographie altimétrie satellitaire gravimétrie
G96-01b	S	Jiang/IGN	1996	France	1/40° x 1/30°	points GPS nivelés MNT
QGF96	QG	Duquenne/ESGT et IGN	1996	France	1/40° x 1/30°	OSU91A Gravimétrie altimétrie satellitaire MNT
RAF96	S	Duquenne/ESGT et IGN	1996	France	1/40° x 1/30°	QGF96 points GPS nivelés
GGF97	S	Harmel/Nocquet IGN	1997	France + Corse	0.1° x 0.1°	points GPS nivelés
EGG97	G, QG	Torge/Denker IFE Université de Hannovre	1997	Europe	1/40° x 1/60°	EGM96 Gravimétrie Altimétrie satellitaire MNT
EGG97F05 EGG97-1D	S	Nocquet/IGN d'après EGG97	1997	France	1/40° x 1/60°	EGG97 points GPS nivelés
QGF98	QG	Duquenne/ESGT	1998	France	1/40° x 1/30°	OSU91 Gravimétrie Altimétrie satellitaire MNT
RAF98	S	Duquenne/ESGT	1998	France	1/40° x 1/30°	QGF98 points GPS/nivelés
GPM98A/B	P	Wenzel/université de Karlsruhe	1998	Monde	5' x 5'	Trajectographie Gravimétrie Altimétrie satellitaire MNT

liste des modèles de géoïde et de surface de conversion altimétrique (CNIG)

*T (type de modèle) : S surface de conversion altimétrique, G modèle de géoïde, QG quasi-géoïde, P modèle de potentiel de pesanteur

En France métropolitaine, un modèle de géoïde astro-géodésique sous la forme d'une carte de géoïde au-dessus de l'ellipsoïde Clarke 1880 IGN dans le système

géodésique NTF a été établi dans les années 1970. Il est communément désigné "modèle de géoïde Levallois".

En 1999, le CNI G⁵ a officiellement recommandé l'utilisation d'une nouvelle surface de référence; la **Référence d'Altitudes Françaises 1998 (RAF98)**. Il s'agit d'un quasi-géoïde correspondant aux altitudes normales IGN 1969. RAF98 est une grille régulière fournissant à chaque noeud la hauteur N du quasi-géoïde au-dessus de l'ellisoïde GRS 1980:

$$N = h_{\text{GRS80}} - H_{\text{IGN69}}^{(n)}$$

L'exactitude de cette grille est estimée de l'ordre de quelques cm.

RAF98

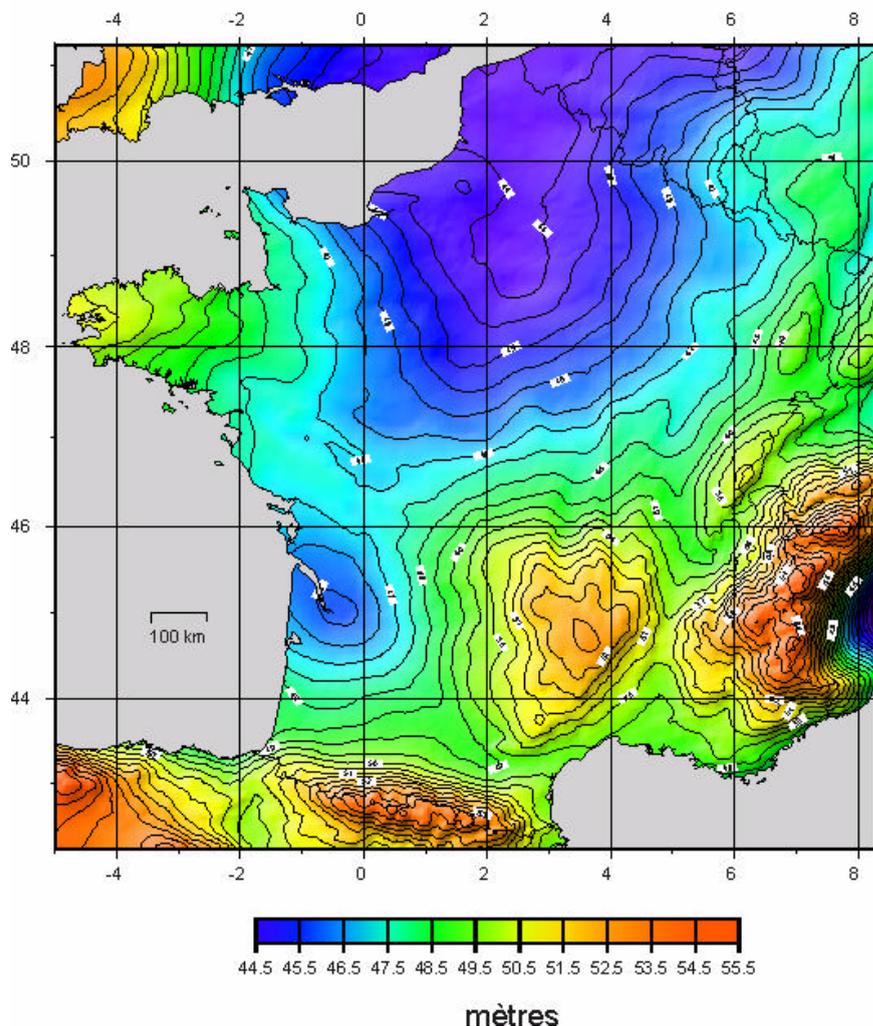


Fig. 17 : Géoïde RAF98

5: Conseil National de l'Information Géographique.

Le **GGF97** (Géoïde Géométrique Français) est la surface de conversion produite au Service de Géodésie et Nivellement (SGN) de l'IGN par A. Harmel et JM. Nocquet. Elle est obtenue simplement par interpolation de 1100 points nivelés du RBF. Cette surface a un pas de $0.1 \times 0.1^\circ$ (environ 10 km). Elle peut être considérée comme la représentation surfacique des points nivelés du RBF. Ce modèle inclut la **Corse** et la conversion RGF93-IGN78.

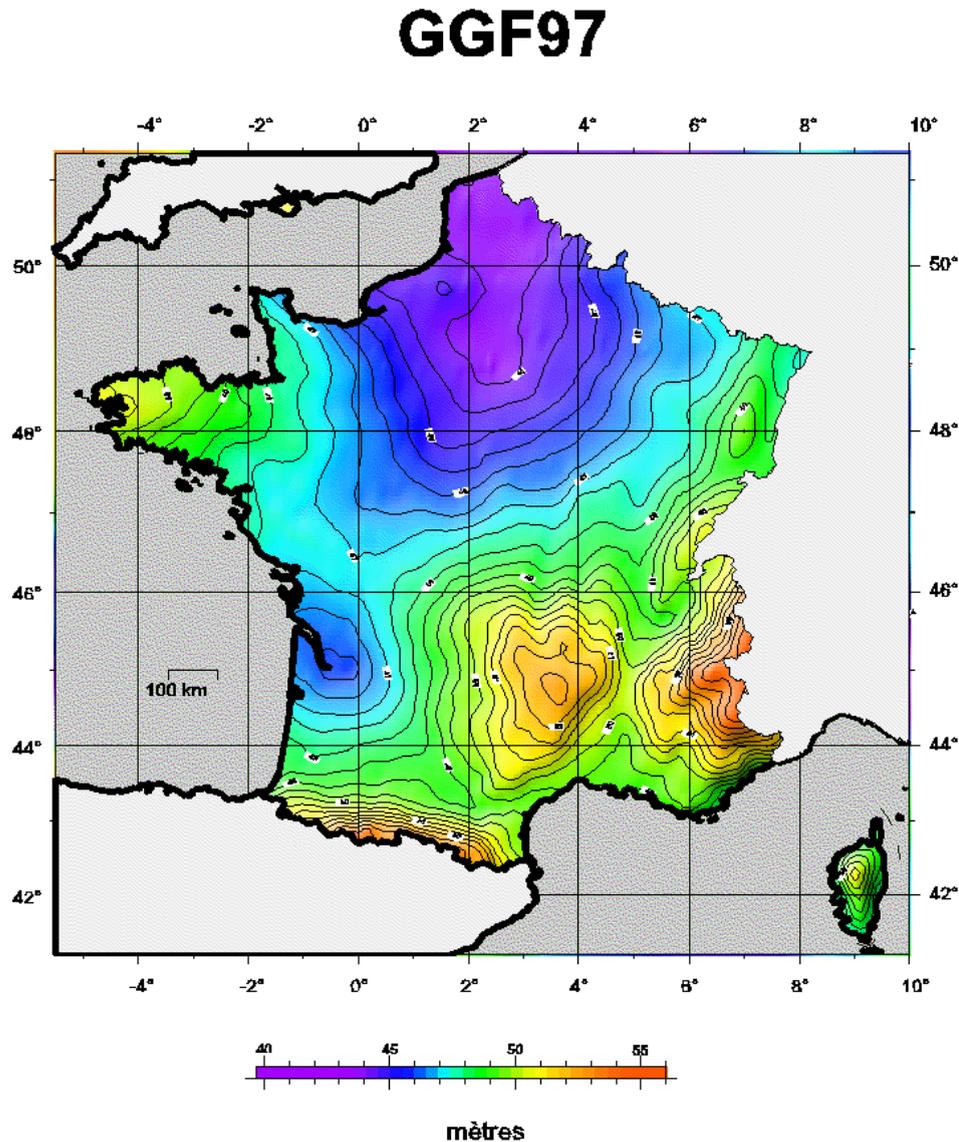


Fig. 18 : Géoïde géométrique GGF97

Bibliographie

- 📖 Groupe de Travail du CNI G « Positionnement Statique et Dynamique »
 Conversion altimétrique RGF93-IGN69
 De larges extraits de ce compte rendu ont servis de support dans ce document.

ANNEXES