PUBLICATIONS MATHÉMATIQUES DE L'I.H.É.S.

PIERRE CARTIER

La folle journée, de Grothendieck à Connes et Kontsevich. Évolution des notions d'espace et de symétrie

Publications mathématiques de l'I.H.É.S., tome S88 (1998), p. 23-42

<http://www.numdam.org/item?id=PMIHES_1998__S88__23_0>

LA FOLLE JOURNÉE, DE GROTHENDIECK A CONNES ET KONTSEVICH

Évolution des Notions d'Espace et de Symétrie

par PIERRE CARTIER

Introduction

Ajouter au concert de louanges en me référant à ma propre expérience serait de peu d'intérêt, mais je n'oublie nullement toutes les facilités de travail procurées si longtemps par l'IHÉS, et surtout les occasions toujours renouvelées de rencontres et d'échanges. Si des jours ont pu être plus difficiles, il n'est point besoin d'en faire état.

Une des grandes vertus de l'IHÉS fut de ne pas mettre de barrière entre les mathématiques et la physique théorique. Il y a toujours eu une grande interpénétration de ces deux centres d'intérêt, et cela est allé en s'accentuant. Dès le début, Louis Michel, par sa dévotion à la théorie des groupes, fut l'un des ponts. Aujourd'hui, les perspectives scientifiques ayant beaucoup changé en quarante années, la fusion semble naturelle, et personne ne se demande si Connes ou Kontsevich sont des physiciens ou des mathématiciens. J'ai longtemps navigué dans l'entre-deux, à une époque où cela était aller à contre-courant, et je me réjouis de la synthèse actuelle.

Alexander Grothendieck a dominé les dix premières années de l'IHÉS et j'aimerais qu'on ne l'oublie pas. Je l'ai bien connu dans les années 50 et 60, surtout par Bourbaki, mais nous n'avons jamais coïncidé à l'IHÉS – il l'a quitté en décembre 1970 et je suis arrivé en juillet 1971. Grothendieck ne tirait pas son inspiration de la physique et de ses problèmes mathématiques; ce n'était pas que son intelligence n'ait pu se saisir de ce domaine – il y songea fugitivement vers 1967 –, mais le système de valeurs morales qu'il s'était bâti rejetait la physique, surtout après Hiroshima, dans les ténèbres extérieures. Il est surprenant que certaines des idées les plus fécondes de Grothendieck, portant sur la nature de l'espace et des symétries, se sont naturellement mariées aux directions nouvelles de la physique contemporaine. C'est ce mariage inattendu – et ses aspects parfois burlesques – que je voudrais ici relater; la « folle journée », comme on sait, est le sous-titre donné par Beaumarchais au *Mariage de Figaro*. Avec un certain recul, il y a moins lieu d'être étonné; les notions d'espace et de symétrie sont si fondamentales qu'elles sont nécessairement au centre de toute réflexion scientifique sérieuse. Des mathématiciens aussi influents que Bernhardt Riemann ou Hermann Weyl, pour ne citer que quelques-uns, ont poursuivi l'analyse de ces notions sur le double plan physique et mathématique.

1. Une biographie sommaire de Grothendieck

Grothendieck a écrit un long mémoire très personnel *Récoltes et semailles*, mais on y trouverait difficilement un récit de sa vie, et surtout de son enfance. Dans les trois volumes du *Grothendieck Festschrift* que j'ai contribué à publier à l'occasion de son 60^{e} anniversaire, il y a une courte introduction, et une assez longue analyse par Dieudonné des travaux de Grothendieck. Le récit de sa vie y est assez sommaire – et d'ailleurs tronqué par rapport aux projets initiaux. Dans son autobiographie [10], Laurent Schwartz parle de son élève Grothendieck, mais de manière rapide, et avec beaucoup d'inexactitudes dans les faits. Ce que je sais de sa vie, je le tiens de lui-même, recoupé par quelques témoignages; cela forme la trame du récit qui suit.

Il faut d'abord parler de la personnalité remarquable de ses parents. Son père s'appelait Shapiro – j'ignore le prénom. Il a dû naître vers 1880, aux confins de la Lituanie, de la Pologne et de la Biélorussie. Tous les Shapiro (il y a de nombreuses graphies du nom : Shapira, Szpiro...) sont issus d'un groupe géographiquement assez limité; le grand-père d'Alexander Grothendieck devait être un de ces sages de la communauté des juifs hassidims, à laquelle appartiennent les Shapiro. Ce sont des juifs très pieux, qu'on dirait aujourd'hui fondamentalistes; certains d'entre eux étaient si « fous de Dieu » qu'ils se faisaient emmurer dans une petite tour avec un guichet où les fidèles venaient leur faire l'aumône de la nourriture. J'ai vu chez Grothendieck un portrait de son père fait par un codétenu du camp de la mort de Dachau en 1943. Il ressemble beaucoup à la photographie de son fils que nous avons mise en tête du *Festschrift*, le crâne rasé avec un regard de feu.

Comme me l'a dit Alexander, la carrière politique de son père constitue le *Who's who* de la révolution européenne de 1900 à 1940. Vu les frontières de l'époque, il est né citoyen russe. Il participe à la révolution manquée de 1905 contre le Tsar, en compagnie des principaux courants révolutionnaires de l'époque. Après l'échec de la révolution, il est déporté en Sibérie, puis exilé en Suisse – aux côtés de Lénine et des anarchistes comme Kropotkine. A Zürich et à la Chaux-de-Fonds se retrouvent de nombreux exilés russes – Bakounine y a fondé la Fédération Jurassienne, qui regroupe la plupart des anarchistes. En 1916 et 1917, ces exilés rentrent en Russie, à la faveur de la décomposition du tsarisme. A Saint-Pétersbourg ont lieu les deux révolutions – menchevik de février 1917 et bolchevik d'octobre 1917. Shapiro est l'un des dirigeants du parti « socialiste-révolutionnaire de gauche ». D'abord alliés des bolcheviks en octobre 1917, ils se heurteront rapidement à Lénine, et feront partie des multiples révolutionnaires – bolcheviks ou non – épurés par Lénine ([1]).

([1]) Shapiro est mis en scène dans le célèbre livre de John Reed *Dix jours qui ébranlèrent le monde*, récit à peine romancé de la révolution d'octobre 1917.

Après l'effondrement des deux Empires centraux, l'Europe est agitée d'une multitude de mouvements révolutionnaires : Rosa Luxemburg et les spartakistes à Berlin en 1919, les Soviets de Munich, la révolution de Bela Kun en Hongrie. Ajoutons-y les divers épisodes de la guerre civile en Russie, dont le mouvement de Makhno ([1]) en Ukraine. Le père de Grothendieck participe à tous ces mouvements. Dans les années 20, il séjourne essentiellement en Allemagne, menant la lutte politique et armée contre Hitler et les nazis. Il rencontre en Allemagne Hanka Grothendieck, une juive du nord de l'Allemagne ([2]). Elle a un fils de Shapiro, qui naît à Berlin le 28 mars 1928; c'est notre héros. Mais bientôt, Hitler prend le pouvoir. Après 1933, l'Allemagne est trop malsaine pour des juifs révolutionnaires, et tous deux fuient en France, en laissant leur fils caché dans une ferme près de Hambourg.

En 1936, éclate la guerre civile espagnole. Shapiro, comme Simone Weil, rejoint les milices anarchistes de la F.A.I. en lutte contre les fascistes de Franco. Il semble que Hanka Grothendieck soit restée en France pendant ce temps; en tout cas, en 1938, elle y fait venir son fils. C'est la débâcle des républicains espagnols, qui refluent dans le midi de la France. On ouvre des camps de réfugiés, dont certains se transforment en camps de détention – je n'ose dire de concentration. Au Vernet dans la Montagne Noire, et à Gurs dans les Pyrénées, on organise hâtivement des camps où l'on parque tous les « étrangers dangereux » : juifs allemands, anarchistes espagnols, trotskistes ([3]). La déclaration de guerre à l'Allemagne le 3 septembre 1939 n'améliore pas le sort de ces proscrits, on s'en doute. Au moment de la défaite de juin 1940, on ouvre de nombreuses prisons – dont celle d'André Weil à Rouen – et la famille de Grothendieck se retrouve momentanément libre. Dès octobre 1940, Vichy promulgue les lois antijuives, qui s'appliquent aussi en zone non occupée. Shapiro rejoint rapidement la Résistance française, dans les rangs du M.O.I. ([4]) je pense. Il est capturé par la Gestapo, envoyé à Dachau, où il meurt en 1943.

Grothendieck et sa mère survécurent difficilement dans la France vichyste et antisémite. Leur salut vint du mouvement de résistance protestant des Cévennes. Le pasteur Trocmé, directeur du lycée privé protestant de Chambon-sur-Lignon (appelé Collège Cévenol), transforme cette charmante station de vacances, fréquentée par la bonne société protestante, en un centre de résistance à la fois spirituelle et militaire à l'occupant nazi ([5]).

([1]) De 1920 à 1924, l'Ukraine connut une éphémère indépendance. La guerre y fut triangulaire entre les Rouges bolcheviks, les Blancs tsaristes et les makhnovistes. Ce dernier mouvement combinait des aspects de jacquerie paysanne avec le nationalisme ukrainien; il fut revendiqué par les anarchistes espagnols comme un modèle d'*autogestion paysanne*, à tort ou à raison. Dans l'Ukraine maintenant indépendante, Makhno est révéré comme un héros national, au moins par les partis les plus nationalistes.

([2]) On m'a souvent demandé si le nom «Grothendieck» était hollandais; le «platt-deutsch» du nord de l'Allemagne est linguistiquement proche du flamand.

([3]) Contrairement à ce qu'a souvent prétendu la propagande française, ces camps fonctionnèrent dès la fin de 1938, et non pas à partir de septembre 1939. A cette dernière date, on ouvrit de nouveaux camps pour les «ressortissants ennemis».

([4]) Le «Mouvement de la Main-d'œuvre Immigrée» regroupait des résistants originaires de l'Europe Centrale et Orientale, qui avaient fui le nazisme. D'inspiration communiste, ce mouvement sera trahi par les staliniens, et décimé par les nazis.

([5]) La Wehrmacht n'osa jamais se hasarder dans ces régions montagneuses, où l'on se flatte d'avoir appris l'esprit de résistance après la Révocation de l'Édit de Nantes, en 1684!

Grothendieck fut élève du Collège Cévenol, et pensionnaire au Foyer Suisse qui recueillait les enfants proscrits de toutes origines ([1]). Après son baccalauréat, et, je pense, avec des recommandations protestantes, il devint étudiant à Montpellier. On a souvent dit qu'il y dépassa ses maîtres, et qu'il montrait déjà là un goût pour l'extrême généralisation en mathématiques. Il arriva à Paris, sa licence terminée, à l'automne 1948, muni d'une lettre de recommandation de ses protecteurs cévenols pour Henri Cartan ([2]).

Ici se termine l'évangile de l'enfance, et commence la carrière publique du prophète. Elle durera de 1949 à 1970; elle est trop connue pour que je la redise, et l'on peut se fier au récit de Dieudonné, même s'il est un peu bref. Rappelons seulement que Grothendieck s'intéressa de 1950 à 1957 à l'Analyse Fonctionnelle, que sa thèse [7] est un monument, mais que l'article qui a eu le plus d'influence dans la suite fut sans doute [8], point de départ de la théorie géométrique des espaces de Banach. Ensuite, de 1956 à 1970, il rénova complètement l'algèbre homologique et la géométrie algébrique. Sa carrière scientifique s'arrête là, pour l'essentiel.

Je voudrais essayer d'analyser les raisons de cet arrêt si brutal, à 42 ans, d'une carrière si étonnante et si féconde. Le prétexte fut qu'il avait découvert une subvention du ministère des Armées à l'IHÉS. Les finances de l'IHÉS sont moins opaques aujourd'hui qu'au temps de Motchane, et, autant que je le sache, il y a toujours une modeste ligne de financement, intitulée D.R.E.T. Pour comprendre la violence de la réaction de Grothendieck, il faut prendre en compte et son passé, et la situation politique du temps. Il est le fils d'un militant anarchiste antimilitariste qui a consacré sa vie à la révolution; ce père, il l'a peu connu directement, seulement par la vénération de sa mère. Il a vécu toute son enfance comme un proscrit, il fut pendant des années un « apatride » ([3]) voyageant avec un passeport des Nations Unies (dit passeport Nanssen). Il a toujours assez mal supporté la fréquentation des milieux « bien » et se sentait plus à l'aise avec les pauvres, et même les misérables. La solidarité des proscrits avait créé chez lui un fort sentiment de *compassion*; il le mettait en action, et son domicile fut toujours largement ouvert aux « chats perdus sans collier ». Il avait fini par considérer Bures comme une cage dorée qui le tenait à l'écart de la vie. Il s'y ajoutait une faille, un doute quant à la valeur de l'activité scientifique; dès 1957, lors d'un Congrès Bourbaki, il me confia ses doutes et m'annonça qu'il songeait à d'autres activités que les mathématiques ([4]). Peut-être faut-il ajouter l'effet d'un « syndrome Nobel » assez connu. Après sa consécration de 1966 au Congrès de Moscou, où il a reçu la médaille Fields, alors qu'il peine devant les dernières phases (décisives) de la preuve des conjectures de Weil, et qu'il commence peut-être à percevoir qu'il faudra Deligne pour achever en 1974 le programme qu'il s'est fixé, cédant peut-être à cette opinion pernicieuse qui fixe à 40 ans la

---

([1]) Dans les années 60, je fis connaissance d'un ancien professeur du Collège Cévenol, alors à la veille de la retraite. J'arrangeai une rencontre entre Grothendieck et son ancien professeur, qui leur procura beaucoup d'émotion à tous deux.

([2]) Henri Cartan a toujours entretenu des relations très étroites avec les milieux protestants du Midi.

([3]) Ses papiers d'État civil ont disparu dans l'apocalypse de Berlin en 1945!

([4]) Sa mère avait écrit des poèmes et des romans – en allemand, bien entendu. Il envisageait de poursuivre cette voie.

fin de la créativité mathématique, il a pu croire qu'il avait dépassé ses plus hautes possibilités et qu'il ne ferait plus désormais que se répéter, en moins bien.

L'air du temps y fut aussi pour beaucoup. Le désastre qu'avait été la deuxième guerre du Viêt-Nam, de 1963 à 1972, avait réveillé bien des consciences. Autour de lui, ses amis étaient nombreux à lutter politiquement contre la guerre du Viêt-Nam; un nombre non négligeable de mathématiciens français s'engagèrent concrètement et firent comme lui le voyage de Hanoï. La révolte étudiante de 1968 est en grande partie issue de ce mouvement. Son aspect anarchiste avait de quoi le séduire, et l'obligea à admettre que, de proscrit, il était devenu un mandarin de la science. Le mouvement de mai 1968 en ébranla d'autres dans Bourbaki, comme Chevalley, Samuel ou Godement. La guerre froide battait son plein, et le risque de l'affrontement nucléaire était bien réel. On commençait aussi à prendre la mesure des problèmes de surpopulation, de pollution, de développement incontrôlé – tout ce qu'on range sous l'étiquette écologique. Beaucoup de raisons de mettre en cause la Science !

Il réagit avec son caractère excessif et fonda la petite secte de « Survivre ». Plus d'une fois, il désola par ses excès et sa maladresse tactique ceux qui étaient proches de son combat politique ([1]). Son itinéraire est assez voisin de celui de Simone Weil, et l'anarchisme politique prendra de plus en plus chez lui une couleur religieuse. Mais, si le catholicisme de Simone Weil est violemment antisémite (en 1942 !), le bouddhisme de Grothendieck ressemble beaucoup aux pratiques de ses ancêtres hassidims ([2]). Il fut longtemps accueillant à toutes sortes de marginaux « hippies », ce qui lui valut un retentissant et absurde procès en 1977, en vertu d'une ordonnance de 1945 qui réprimait l'accueil d'un étranger en situation irrégulière. Il eut beau jeu de paraître en moderne Socrate, et fut condamné à une peine hypocrite de six mois de prison avec sursis et de 20 000 francs d'amende. Il me semble qu'il faut dater de là sa rupture définitive avec le milieu scientifique. Il se retira de plus en plus sous sa tente. Depuis 1993, il n'a plus d'adresse postale et se terre dans un hameau des Pyrénées. Bien peu ont pu l'y voir. Si j'en crois mes amis Pierre Lochak et Leila Schneps qui l'ont visité récemment, il est obsédé par le diable qu'il voit partout à l'œuvre dans le monde, détruisant l'harmonie divine et remplaçant 300 000 km/s par 299 887 km/s pour la vitesse de la lumière !

C'est pourtant le même Grothendieck qui contribua au renom de l'IHÉS pendant les dix premières années de son existence. C'est le même à qui nous devons ces magnifiques idées sur l'espace et les symétries que je vais maintenant développer.

([1]) Il y eut deux incidents fameux, à Nice en septembre 1970 et à Anvers en juillet 1972. Il s'y aliéna une « opinion publique mathématique » assez réceptive à ses thèses, par des provocations insoucieuses des délicats agencements politiques de ses amis; il ruina en dix minutes des mois d'efforts.

([2]) Depuis très longtemps, il s'est imposé des interdits alimentaires, qui peuvent être rattachés, au choix, au judaïsme ou au bouddhisme.

2. Sur la nature de l'espace et de ses points

Le problème central est celui des *points* de l'espace. Le débat remonte à Leibniz et Newton. Pour Leibniz, le constituant de toutes choses – matérielles et spirituelles – est fourni par les monades : celles-ci sont sans fenêtre – nous dirions sans structure interne – et seules comptent les relations qu'elles entretiennent entre elles. On croit reconnaître la première « définition » donnée par Bourbaki au début de son exposé de la théorie des ensembles :

> 1. Un *ensemble* est formé d'*éléments* susceptibles de posséder certaines *propriétés* et d'avoir entre eux, ou avec des éléments d'autres ensembles, certaines *relations.*

Dans ce point de vue ontologique, les éléments – ou points – préexistent et le problème est de les organiser – de les structurer. Du point de vue physique, on postule avec Newton l'existence d'un espace absolu, dans lequel se développent les phénomènes : *les lieux sont prédéterminés, destinés à être habités par les accidents de la matière.*

Dans la philosophie de Mach au contraire, *l'espace est déterminé par la matière* ; la forme mathématique la plus achevée est bien sûr fournie par les équations de la gravitation d'Einstein :

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = 8\pi\kappa T_{\mu\nu} \,. \tag{E}$$

Le second membre $T_{\mu\nu}$ est déterminé par la matière présente – ou, sous une forme plus moderne, est une fonctionnelle des champs autres que la gravitation – tandis que le premier membre est une fonctionnelle du seul champ de gravitation $g_{\mu\nu}$ – identifié au tenseur métrique qui définit la géométrie. Contrairement aux vues de Newton, l'espace n'est plus un simple réceptacle, mais un acteur de la physique – comme en témoigne la courbure des rayons lumineux dans un champ de gravitation. Pour Mach et Einstein, *le point n'apparaît alors que comme un label permettant d'identifier un événement.*

La monade n'a pas de structure, le point non plus. Il en est de même de l'atome dans les premières conceptions; il est insécable, donc ne peut révéler de mécanisme interne, n'a pas de parties, mais cela ne l'empêche pas d'avoir des caractéristiques externes : une taille certainement, une forme peut-être ([1]). Pourtant, l'histoire de la physique nous a habitués à un jeu de poupées russes – la molécule du chimiste étant composée d'atomes, qui eux-mêmes possèdent un nuage électronique et un noyau, ce dernier composé de protons et de neutrons qui s'avèrent à leur tour être des assemblages de quarks, provisoirement insécables. Sur le plan mathématique, la présentation moderne du continu suppose deux niveaux seulement : une droite par exemple est constituée de points préexistants. La vue classique au XVIII[e] siècle suppose, au contraire, une hiérarchie d'infiniment petits et d'infiniment grands des divers ordres : à un ordre donné, les infiniment petits de l'ordre immédiatement supérieur apparaissent comme des points sans structure, jusqu'au moment où l'on ouvre la boîte qu'ils constituent et qui révèle des infiniment petits d'un ordre plus grand jouant

---

([1]) Rappelons-nous l'expression d'*atomes crochus* passée dans le langage courant.

provisoirement le rôle de points. Brouwer – et dans une moindre mesure Hermann Weyl – a essayé de fonder une théorie mathématique du continu sur ces idées.

Les nombreuses présentations axiomatiques connues de la géométrie rencontrent des problèmes analogues. Pour Euclide, il y a des *figures géométriques*, et le point n'est qu'un des éléments des figures – le plus élémentaire peut-être, puisqu'il est postulé sans dimension : ni longueur, ni largeur, ni épaisseur. Les figures s'engendrent l'une l'autre : une droite donnée D est définie par la propriété de passer par deux points donnés a et b, mais un point P est défini comme l'intersection de deux droites D et Δ, le cercle est défini par la donnée de son centre et de son rayon... Il y a bien sûr une *propriété de détermination* : deux droites, ou deux cercles, qui ont les mêmes points, sont égaux, mais il n'est pas dans l'esprit d'Euclide de considérer une droite comme un ensemble de points. Une figure au sens d'Euclide est plus qu'un simple ensemble de points. Ce point de vue traditionnel est *génétique* : les lignes s'engendrent. Le point de vue moderne est *ontologique* : les points préexistent et sont sans identité propre; comme les monades, ils sont simplement soumis à des relations. La même dualité se retrouve en logique formelle. Pour le point de vue *syntaxique*, il y a des formules de base et des règles d'engendrement qui accroissent indéfiniment le stock de formules disponibles. Dans le point de vue *sémantique*, on oppose à cette *infinité potentielle* de formules la fiction commode de l'*infinité actuelle* de toutes les formules supposées construites une fois pour toutes ([1]).

La théorie des *lattices* a été inventée par Birkhoff, et développée par Glivenko, dans les années 20, en partie pour fournir une axiomatique de la géométrie projective. On y met sur un même plan les variétés linéaires de toutes dimensions; la relation fondamentale est celle d'*incidence* (ou d'inclusion) : la droite Δ est située sur le plan Π. De là, on obtient des notions dérivées d'*intersection* et de *joint* (par exemple, le plan défini par un point et une droite). L'aboutissement naturel de cette tendance est fourni par les *géométries combinatoires* de Rota et Crapo (appelées aussi matroïdes) [4]. L'algébrisation de la logique par Boole et Venn (au XIX^{e} siècle) est mue par la même stratégie : la donnée de base est celle de proposition – ou assertion – et l'implication des propositions joue le rôle de l'incidence des variétés linéaires.

Si l'on veut appliquer les mêmes méthodes en Topologie, il faut décrire un espace, non par ses points, mais par la classe de ses parties ouvertes, le troisième exemple d'un lattice. C'est chez Ehresmann qu'on trouve ce point de vue explicité, mais les considérations de Brouwer – reprises et approfondies par H. Weyl dans *Das Kontinuum* – y menaient aussi. Réfléchissant au problème bien connu de l'infinité des décimales, Brouwer critique la possibilité d'affirmer l'égalité de deux nombres ([2]), mais tient pour légitime la notion de l'intervalle ouvert $]\frac{1}{4}, \frac{3}{4}[$, c'est-à-dire la possibilité de vérifier les inégalités $\frac{1}{4} < x < \frac{3}{4}$ (si elles ont lieu) par un processus *fini*. Mais le pas décisif fut franchi par Grothendieck :

([1]) En algèbre, le point de vue *potentiel* consiste à définir un groupe, ou une algèbre, par générateurs et relations; le point de vue *actuel* consiste à le définir comme un ensemble d'éléments structuré par des opérations.

([2]) Car la vérifier supposerait la vérification d'une infinité d'égalités entre les décimales.

en s'inspirant de l'idée de Riemann d'une surface étalée sur le plan ([1]), il remplace les ouverts d'un espace X par les espaces étalés sur lui. Il revient au même de considérer la catégorie $\mathfrak{F}(X)$ de tous les faisceaux sur X. Les constructions sur les espaces topologiques se traduisent en – et sont remplacées par – des constructions sur les catégories de faisceaux. Par une étape supplémentaire d'abstraction, Grothendieck, suivi par Lawvere et Tierney, dégage une notion abstraite de « topos » qui est pour lui l'ultime généralisation de celle d'espace. Mais la notion de topos est assez générale pour que la catégorie de « tous » les ensembles soit un topos. Depuis Cantor, et Hilbert qui ne voulait pas être chassé du paradis de Cantor, on a pris l'habitude de transcrire toutes les mathématiques dans le cadre du topos particulier des ensembles. Grothendieck revendique *le droit de retranscrire les mathématiques dans n'importe quel topos.* Brouwer et Heyting avaient depuis longtemps remarqué que les règles du calcul intuitionniste des propositions sont semblables aux règles de manipulation des ouverts. Ceci s'éclaire dans la théorie des topos : dans tout topos $\mathfrak{T}$, il y a un objet logique Ω, dont les « éléments » sont les valeurs de vérité du topos; lorsque $\mathfrak{T}$ est le topos des ensembles, on a les valeurs classiques (vrai/faux), mais lorsque le topos $\mathfrak{T}$ est celui des faisceaux sur un espace X, les valeurs de vérité correspondent aux ouverts de X ([2]).

3. Vers la notion de spectre

Acceptons provisoirement le point de vue de Grothendieck sur l'espace : un espace X est décrit au moyen du topos $\mathfrak{F}(X)$ des faisceaux sur X. Quel est le rôle du point? Si a est un point de X, on peut d'abord lui associer le « filtre » $\mathfrak{U}_a$ des parties ouvertes U de X contenant a, c'est-à-dire des voisinages ouverts de a ([3]). Identifier le point a au filtre $\mathfrak{U}_a$ conduit à une stratégie fructueuse : pour enrichir l'espace X, on introduit des points idéaux en correspondance avec d'autres filtres. C'est ainsi que Bourbaki construit la complétion d'un espace uniforme, qu'on définit diverses compactifications (comme celle de Stone-Čech), et aussi diverses frontières en théorie du potentiel ou des systèmes dynamiques déterministes ou aléatoires.

Un point de vue analogue prévaut dans la *théorie des modèles* en Logique. Un modèle M d'un ensemble $\mathcal{P}$ de propositions a pour effet de valider certaines propositions A, ce qu'on note

$$M \vdash A.$$

Au lieu du modèle M, on peut légitimement considérer la classe $\mathcal{P}_M$ des propositions validées par M, qui est aussi un filtre ([4]). Le modèle est dit *non contradictoire* si toutes les propositions

---

([1]) Qui donne l'interprétation définitive des fonctions analytiques (ou holomorphes) multiformes!

([2]) Ceci ouvre la possibilité d'une logique où le *hic* et le *nunc* sont pris en considération. On a essayé, avec J. Bénabou, de fournir des fondations «topiques» à la logique juridique, surtout dans une situation de droit fédéral ou international.

([3]) La propriété de filtre de $\mathfrak{U}_a$ signifie ceci : si U et V appartiennent à $\mathfrak{U}_a$, il en est de même de l'intersection $U \cap V$, et aussi de tous les ouverts U' contenant U.

([4]) Cela signifie que, si les propositions A et B sont dans $\mathcal{P}_M$, il en est de même de la conjonction $A \wedge B$ (lire A *et* B) et de toute proposition A' impliquée par A.

n'y sont pas validées; il revient au même de dire que le modèle M ne valide pas simultanément une proposition A et son contraire $\overline{A}$. Par contre, le modèle M est dit *catégorique* si, pour toute proposition A, le modèle M valide soit A, soit $\overline{A}$. Dans un modèle catégorique, on peut alors introduire la valuation $\upsilon(A)$ (ou plus précisément $\upsilon_M(A)$) qui vaut 1 si M valide A et 0 sinon. On a les propriétés algébriques ([1])

$$\upsilon(A) + \upsilon(B) = \upsilon(A \wedge B) + \upsilon(A \vee B) \tag{V_1}$$

$$\upsilon(V) = 1 , \qquad \upsilon(F) = 0 \tag{V_2}$$

qu'on peut prendre comme définition d'une valuation. Cette notion admet plusieurs variantes :

a) une valuation sur l'ensemble des ouverts de l'espace X correspond à un *ultrafiltre* (d'ouverts) sur X;

b) au lieu d'imposer à la valuation $\upsilon(A)$ d'une proposition de prendre les seules valeurs 0 et 1, on peut postuler plus généralement que $\upsilon(A)$ est un nombre réel compris entre 0 et 1. C'est en gros la stratégie de la logique « floue » ([2]).

Nous allons maintenant appliquer un tour de passe-passe qui est un des succès éclatants des mathématiques du XX^{e} siècle. Considérons de nouveau une algèbre $\mathcal{P}$ de propositions ([3]), et l'ensemble Ω de toutes les valuations sur $\mathcal{P}$. A chaque proposition A, faisons correspondre par *dualité* l'ensemble [A] de toutes les valuations υ telles que $\upsilon(A) = 1$, ou, ce qui revient au même, de tous les modèles catégoriques qui valident A. La correspondance $A \rightleftarrows [A]$ permet d'interpréter l'algèbre de propositions $\mathcal{P}$ comme une classe de parties de Ω, la conjonction et la disjonction devenant respectivement l'intersection et la réunion des ensembles :

$$[A \wedge B] = [A] \cap [B] , \qquad [A \vee B] = [A] \cup [B] . \tag{S}$$

C'est là l'énoncé du *théorème de représentation de Stone*, un modèle pour de nombreux résultats ultérieurs ([4]). L'espace Ω est appelé l'espace de Stone de l'algèbre de Boole $\mathcal{P}$; nous l'appellerons le *spectre* de $\mathcal{P}$, avec un petit anachronisme.

Le développement de la Théorie quantique, dans les années 30 et 40, a conduit à la notion *d'état*, qui est un nouvel avatar de celle de valuation. Supposons désormais que

---

([1]) On note V la proposition universellement vraie et F la proposition universellement fausse, d'où

$$F \Rightarrow A \Rightarrow V$$

pour toute proposition A. On note aussi $A \vee B$ la disjonction «A ou B» (avec un «ou» non exclusif).

([2]) Caratheodory et Kappos ont ainsi construit une alternative à l'axiomatique du Calcul des Probabilités due à Kolmogoroff. Malgré l'intérêt philosophique de cette méthode, elle est techniquement plus malcommode que l'approche de Kolmogoroff, surtout pour l'étude des processus stochastiques.

([3]) De manière plus explicite, une algèbre de Boole.

([4]) Ce résultat montre aussi *a posteriori* que le point de vue de Caratheodory et Kappos sur les probabilités n'est pas plus général que celui de Kolmogoroff.

l'espace X soit compact (1), et associons-lui l'espace de Banach $A = C^0(X;\mathbb{C})$ formé des fonctions continues à valeurs complexes sur X, avec la norme

$$\|f\| = \sup\{|f(a)| : a \in X\}. \tag{1}$$

On peut aussi introduire le produit $f_1 f_2$ de deux fonctions et le complexe-conjugué f^* de f. Un *état* sur A est une forme linéaire η sur A satisfaisant aux règles (2)

$$\eta(ff^*) \geqslant 0\,, \qquad \eta(\mathbb{1}) = 1\,. \tag{2}$$

Un état η est dit *pur* s'il n'est jamais le mélange $\eta = \frac{1}{2}(\eta_1 + \eta_2)$ de deux états distincts. Le théorème de *représentation de Gelfand* affirme que la formule :

$$f(a) = \eta(f) \qquad \text{pour toute } f \text{ dans A} \tag{G}$$

définit une bijection entre les points a de X et les états purs η de l'algèbre de Banach A. On a donc un moyen de reconstruire l'espace X au moyen de l'algèbre de Banach A.

La notion de filtre d'une algèbre de Boole est l'analogue de celle d'*idéal* d'une algèbre commutative. Dans les deux cas, on a une relation d'inclusion, et donc la notion de filtre ou d'idéal maximal (3). Le spectre de l'algèbre de Boole $\mathcal{P}$ (ou de l'algèbre de Banach $A = C^0(X;\mathbb{C})$) peut alors s'interpréter comme l'ensemble des filtres (ou des idéaux) maximaux. En arithmétique, on doit à Dedekind l'idée de considérer l'ensemble des idéaux premiers dans l'anneau $\mathfrak{O}_K$ des entiers algébriques dans un corps de nombres K (extension algébrique finie du corps $\mathbb{Q}$ des nombres rationnels). C'est pour lui l'analogue arithmétique de l'ensemble des points d'une courbe algébrique. Dans les années 50, on a déployé de gros efforts pour donner des fondements aussi larges que possible à la géométrie algébrique. Voici deux étapes importantes :

a) Considérons un corps k *algébriquement clos*, et une sous-variété algébrique X de l'espace affine k^n de coordonnées $T_1, \ldots, T_n$. Soit $\mathfrak{a}$ l'idéal des polynômes qui s'annulent identiquement sur X et A l'anneau-quotient $k[T_1, \ldots, T_n]/\mathfrak{a}$. Les propriétés géométriques intrinsèques de X (indépendantes du plongement de X dans k^n) se traduisent en propriétés de l'anneau A. En particulier, les points de X correspondent aux idéaux maximaux de A : c'est l'énoncé du *Nullstellensatz* de Hilbert. L'analogie avec le théorème de représentation de Gelfand est évidente; elle est un des points de départ de la théorie des faisceaux algébriques cohérents de Serre [11].

b) Considérons maintenant une variété algébrique X affine ou projective (4), définie sur un corps k. Le corps k n'est pas supposé algébriquement clos, mais X est *irréductible*. On peut définir le corps $K = k(X)$ des fonctions rationnelles sur X, et, pour chaque point x de X, l'anneau $\mathfrak{O}_x$ des fonctions rationnelles définies au point x. Plus généralement, si Y

(1) Le cas où X est localement compact nécessite quelques changements mineurs.

(2) On note $\mathbb{1}$ la fonction constante de valeur 1 sur X.

(3) Les filtres maximaux sont d'habitude qualifiés d'*ultrafiltres*.

(4) Ou même, une variété abstraite au sens de Weil.

est une sous-variété irréductible de X, on définit *l'anneau local de* X *le long de* Y, noté $\mathfrak{O}_{X,Y}$. Zariski avait développé la théorie de ces anneaux locaux, mais c'est Chevalley qui, dans son séminaire [2] de 1956, a mis à la base de la théorie la collection des $\mathfrak{O}_{X,Y}$ (pour Y variable) qu'il appelle le *schéma* de X. Il donne une caractérisation axiomatique de ses schémas.

Il fallait faire la synthèse de ces points de vue et se débarrasser des restrictions précédentes (k algébriquement clos ou X irréductible). Après divers essais préliminaires ([1]), Grothendieck comprit comment définir la notion générale de schéma au moyen de la topologie de Zariski ([2]) et d'un faisceau d'anneaux locaux. Il faut bien comprendre que l'ensemble associé par Grothendieck à une variété algébrique *n'est pas l'ensemble de ses points, mais celui de ses sous-variétés irréductibles* : c'est le sens du mot schéma ! Pour les points, voir le numéro suivant.

Une dernière remarque sur la terminologie « spectre ». En physique, chaque espèce atomique ou moléculaire possède un spectre caractéristique, formé de ses raies d'émission ou d'absorption lumineuses. La mécanique quantique les interprète comme les valeurs propres d'un opérateur, le hamiltonien, agissant dans un certain espace de Hilbert. Il est donc naturel de parler du spectre discret du hamiltonien; les bandes d'émission ou d'absorption correspondent à un spectre continu. Dès le début des années 30, von Neumann réussit brillamment à définir le concept d'opérateur (non borné) auto-adjoint H dans un espace de Hilbert $\mathfrak{h}$, et de son spectre S. La contribution de Gelfand, vers 1940, a consisté à associer à l'opérateur H une algèbre de Banach commutative A et un isomorphisme de A sur $C^0(S;\mathbb{C})$. On comprend dès lors les glissements de sens du mot « spectre » : pour Grothendieck, le spectre d'un anneau commutatif se compose de tous ses idéaux premiers (comme dans le cas de Dedekind).

4. Points et représentations

Si tous les points sont indiscernables *en soi*, ils ne peuvent différer qu'en *situation*. Autrement dit, il existe un point archétypal, et les autres points en sont des *représentations*. Traduisons cette idée de manière plus mathématique. Introduisons un espace à un seul point, noté $\mathbb{1}$; pour tout point a d'un espace X, il existe une application – ou représentation – unique de l'espace $\mathbb{1}$ dans l'espace X appliquant l'unique point de $\mathbb{1}$ sur le point a de X. La théorie des catégories est l'expression mathématique de l'idée de représentation (ou transformation) : on dispose d'une classe d'objets (ou d'espaces) et de transformations f d'un objet X dans un objet Y, avec la possibilité de composer ces transformations. La

---

([1]) Serre a d'abord considéré l'ensemble des idéaux maximaux d'un anneau commutatif A soumis à certaines restrictions. Martineau lui fit alors remarquer qu'à condition de prendre tous les idéaux premiers, et non seulement les idéaux maximaux, ses arguments restaient valables pour tout anneau commutatif. J'ai alors proposé une définition des schémas équivalente à celle de Grothendieck. Dans ma thèse, je me suis limité à un cadre voisin de celui de Chevalley, pour ne pas me lancer dans la rédaction de fondements trop longs !

([2]) Dans le cas de Chevalley, on dispose d'une collection $(V_s)_{s\in S}$ d'anneaux locaux ayant le même corps des fractions K. Une partie U de S est ouverte pour la topologie de Zariski s'il existe une partie F de K telle que $s \in U$ si et seulement si $F \cap V_s$ n'est pas vide. On pose alors $\mathfrak{O}(U) = \bigcap_{s\in U} V_s$, d'où le faisceau $\mathfrak{O}$ sur S.

« morale » des catégories consiste à ne considérer que les espaces et les transformations, mais non les points. Cependant, dans la plupart des catégories, il existe un objet, tel que $\mathbb{1}$, caractérisé par le fait qu'il y a exactement une transformation de X dans $\mathbb{1}$, quel que soit l'objet X; on peut alors appeler point de X toute transformation de $\mathbb{1}$ dans X, mais *il se peut fort bien qu'un objet n'ait aucun point* en ce sens ([1]).

Examinons le cas des algèbres de Boole. Prenons comme données de base dans une algèbre de Boole $\mathcal{P}$ la conjonction $A \wedge B$ et la disjonction $A \vee B$; la relation de comparaison $A \leqslant B$ est en effet synonyme de $A = A \wedge B$, ou aussi de $B = A \vee B$. Une représentation f d'une algèbre de Boole $\mathcal{P}$ dans une autre $\mathcal{P}'$ est une application f de $\mathcal{P}$ dans $\mathcal{P}'$ qui satisfait aux règles ([2]) :

$$f(A \vee B) = f(A) \vee f(B)\ , \qquad f(A \wedge B) = f(A) \wedge f(B)\ . \tag{3}$$

Il existe une algèbre de Boole, notée $\mathbb{1}$, qui se compose de deux éléments 0 et 1 avec les règles ([3])

$$0 \wedge 0 = 0 \wedge 1 = 1 \wedge 0 = 0 \qquad 1 \wedge 1 = 1$$
$$1 \vee 1 = 0 \vee 1 = 1 \vee 0 = 1 \qquad 0 \vee 0 = 0$$

d'où $0 \leqslant 1$. Pour toute algèbre de Boole $\mathcal{P}$, il y a une représentation et une seule de $\mathbb{1}$ dans $\mathcal{P}$, et les valuations de $\mathcal{P}$ sont les représentations de $\mathcal{P}$ dans $\mathbb{1}$. Pour se ramener au schéma général, on utilise le procédé de dualisation ou « renversement des flèches ». Appelons « noitatnesérper » de $\mathcal{P}'$ dans $\mathcal{P}$ toute « représentation » de $\mathcal{P}$ dans $\mathcal{P}'$; alors le spectre de $\mathcal{P}$ est l'ensemble des noitatnesérpers de $\mathbb{1}$ dans $\mathcal{P}$.

La nécessité d'inverser le sens des flèches apparaît plus clairement dans le cas de la représentation de Gelfand. Si X et Y sont deux espaces compacts, toute application continue u de X dans Y définit en sens inverse une représentation u^* de l'algèbre $B = C^0(Y; \mathbb{C})$ dans l'algèbre $A = C^0(X; \mathbb{C})$. Réciproquement, toute représentation ([4]) Φ de l'algèbre B dans l'algèbre A provient par la formule $\Phi = u^*$ d'une unique application continue u de X dans Y. A l'espace à un point correspond l'algèbre $\mathbb{C}$ des nombres complexes et l'espace X s'interprète comme l'ensemble des représentations de l'algèbre $A = C^0(X; \mathbb{C})$ dans l'algèbre $\mathbb{C}$. Plus généralement, si A est une algèbre de Banach commutative, avec une unité $\mathbb{1}$, les états purs de A sont les représentations de A dans $\mathbb{C}$, d'où une nouvelle interprétation du spectre de A.

([1]) Par exemple, dans la catégorie des espaces fibrés au-dessus d'une base fixée S, les « points » d'un fibré E sont ses sections globales. Beaucoup de fibrés intéressants n'ont pas de telle section; le fibré de Hopf (la sphère S^3 de dimension 3, fibrée au-dessus de S^2 avec des fibres homéomorphes à S^1) n'en a pas. Pour les physiciens, le fibré de Hopf est le monopole de Dirac.

([2]) La relation (S) peut donc s'interpréter en termes de représentation d'algèbres de Boole.

([3]) Si l'on interprète à la manière usuelle 1 comme la valeur «vrai» et 0 comme «faux», cette algèbre de Boole donne les règles universelles de manipulation du vrai et du faux.

([4]) Autrement dit, Φ est une application linéaire de B dans A telle que $\Phi(bb') = \Phi(b)\Phi(b')$ et $\Phi(1_B) = 1_A$, en notant 1_A l'élément unité de A et 1_B celui de B.

La géométrie algébrique a longtemps buté sur le problème des équations sans solutions, c'est-à-dire des espaces sans points. Considérons par exemple un cercle imaginaire dans le plan ; on peut supposer que son équation s'écrit

$$x^2 + y^2 + a^2 = 0\,. \tag{C}$$

Bien sûr, le nombre réel $a \neq 0$ étant donné, il n'y a aucun point à coordonnées x, y réelles satisfaisant à l'équation (C) ; les nombres complexes ont été inventés pour fournir des solutions à de telles équations. Dans le point de vue de Grothendieck, on introduit d'abord l'algèbre-quotient $\mathfrak{O} = \mathbb{R}[X,Y]/(X^2+Y^2+a^2)$. Le cercle Γ d'équation (C) est alors le spectre de l'anneau $\mathfrak{O}$, c'est-à-dire l'ensemble de ses idéaux premiers. Les solutions complexes de (C), autrement dit les points complexes du cercle Γ, correspondent aux représentations $\mathbb{R}$-linéaires de $\mathfrak{O}$ dans $\mathbb{C}$. Ceci suggère d'introduire, pour toute algèbre commutative A sur $\mathbb{R}$, l'ensemble $\Gamma(A)$ des représentations $\mathbb{R}$-linéaires de $\mathfrak{O}$ dans A, que nous appellerons les A-points de Γ. Le cercle « réel » Γ (c'est-à-dire d'équation à coefficients réels) n'a pas de $\mathbb{R}$-points, mais il a suffisamment de $\mathbb{C}$-points. Dans le cas d'un schéma quelconque, la considération des A-points pour toutes les algèbres commutatives A permet de se ramener à une situation familière ([1]). Par exemple, si G est un schéma en groupes, les A-points forment un groupe G(A) au sens standard, quelle que soit A.

La considération du topos $\mathfrak{F}(X)$ des faisceaux sur un espace topologique X permet de donner, avec Grothendieck, une autre extension de la notion de point. Si X et Y sont deux espaces topologiques, et u une application continue de X dans Y, on associe à u un foncteur u_* d'image directe et un foncteur u^* d'image inverse. Si F est un faisceau sur X, et G un faisceau sur Y, alors u_*F est un faisceau sur Y et u^*G un faisceau sur X ; on décrit facilement u_*F par la formule

$$u_*F(V) = F\left(u^{-1}(V)\right)$$

pour tout ouvert V de Y. De plus, les foncteurs u_* et u^* sont *adjoints*, ce qui veut dire que les représentations $F \longrightarrow u^*G$ de faisceaux sur X correspondent bijectivement aux représentations $u_*F \longrightarrow G$ sur Y. Cette propriété contient une caractérisation implicite du foncteur u^*.

Le topos $\mathfrak{Ens}$ des ensembles peut être considéré comme celui des faisceaux sur un espace réduit à un point. D'après ce qui précède, le choix d'un point a d'un espace topologique X définit donc deux foncteurs adjoints

$$\mathfrak{F}(X) \underset{a_*}{\overset{a^*}{\rightleftarrows}} \mathfrak{Ens}\,.$$

([1]) Cette idée remonte en fait à André Weil [13] qui l'avait introduite en géométrie différentielle ; par exemple, si A possède une base $1, \varepsilon$ sur $\mathbb{R}$ avec $\varepsilon^2 = 0$, les A-points d'une variété X sont les points du fibré tangent TX à X. Plus généralement, les espaces de jets se traitent de cette manière. J'ai introduit dans ma thèse, en 1958, une idée analogue pour les groupes algébriques, ce qui m'a permis d'aborder efficacement ce qu'on appelle les *isogénies inséparables* ; il s'agit des représentations $f : G \longrightarrow H$ de groupes algébriques qui sont une bijection sur les points, mais pourtant pas un isomorphisme. Par point, j'entends les k-points, où k est le corps de base, supposé algébriquement clos de caractéristique $p > 0$.

Le foncteur a^* est celui qui, à un faisceau F sur X, associe sa fibre ([1]) au point a. Cette circonstance explique pourquoi Grothendieck et Deligne parlent indifféremment de « point » ou de « foncteur fibre ».

5. Vers la géométrie non commutative

Nous continuons à pourchasser les espaces sans points, ou avec trop peu de points. Considérons par exemple un groupe G, supposé discret, opérant sur un espace $*$ réduit à un seul point. Que peut-on dire de l'espace des orbites de G sur $*$? A première vue, il y a une seule orbite, et l'on a perdu la mémoire du groupe G. Pourtant, on connaît trois réponses plus subtiles :

a) Selon Armand Borel [1], on ne doit pas faire de différence entre deux espaces homotopiquement équivalents. On remplace donc l'espace $*$ par un espace contractile EG sur lequel G opère librement. L'espace des orbites de G dans $*$ est alors interprété comme la base BG = EG/G de EG considéré comme espace fibré principal de groupe G. Plus généralement, si le groupe G opère sur un espace X, le « vrai » espace d'orbites, noté X//G, est le quotient de X $\times$ EG par l'action diagonale de G. On vient de décrire la méthode de l'*espace classifiant.*

b) Selon Grothendieck [T], on considère le topos $\mathfrak{E}_G$ des ensembles sur lesquels opère le groupe G; ces G-ensembles doivent être interprétés comme les faisceaux sur le mythique espace des orbites de G dans $*$. Vu la construction précédente, on peut appeler $\mathfrak{E}_G$ le *topos classifiant* de G, puisque BG s'appelle l'espace classifiant de G. Plus généralement, supposons que le groupe G opère continûment sur un espace topologique X. On peut définir l'espace naïf des orbites X/G et les faisceaux sur X/G, mais il se peut que l'espace X/G soit pathologique et n'ait que les ouverts « triviaux » : tout l'espace et l'ensemble vide ([2]). Dans ce cas, l'information fournie par les faisceaux sur X/G traitera cet espace comme un seul point. Grothendieck propose alors de remplacer les faisceaux sur X/G par les faisceaux F sur X, avec action compatible de G sur X et F : *le topos* $\mathfrak{F}(X/G)$ *est remplacé par le topos* $\mathfrak{F}(X;G)$ *des faisceaux G-équivariants sur* X.

L'espace classifiant BG a des groupes d'homologie, qui ne sont autres que les groupes d'homologie du groupe G, au sens algébrique. Les techniques de cohomologie des faisceaux ont une généralisation aux topos. Appliquées au topos $\mathfrak{F}(X;G)$, elles fournissent la définition de groupes de cohomologie équivariante pour le G-espace X; on peut les interpréter comme groupes de cohomologie de X//G.

c) Décrivons maintenant la méthode d'Alain Connes [NC]. Sur un espace discret X à un nombre fini de points, un faisceau F d'espaces vectoriels sur X n'est autre que la collection des fibres $(F_a)_{a\in X}$ et les sections de F forment l'espace vectoriel $\Gamma(F) = \bigoplus_{a\in X} F_a$. Sur cet espace

---

([1]) Par définition, c'est la limite inductive des ensembles F(U) lorsque U parcourt les voisinages ouverts de a.

([2]) Un exemple simple : X est un cercle, et G se compose des rotations d'angle $n\theta$ (n entier arbitraire) où $\theta/2\pi$ est irrationnel.

agit par multiplication l'algèbre $\mathbb{C}^{X}$ des fonctions sur X. En analyse hilbertienne, on a donc les traductions suivantes :

– un faisceau sur l'espace localement compact X correspond à une représentation involutive (1) de l'algèbre $C^0_\infty(X;\mathbb{C})$ des fonctions continues sur X nulles à l'infini;

– une action du groupe (2) G correspond à une représentation unitaire du groupe G dans un espace de Hilbert.

A tout groupe localement compact G, on sait associer (3) une C*-algèbre $C^*(G)$ telle que les représentations unitaires de G correspondent aux représentations involutives de $C^*(G)$. Dans l'optique de Connes, cette algèbre $C^*(G)$ correspond à l'espace classifiant BG. Lorsque le groupe G est commutatif, de dual de Pontrjagin $\hat{G}$, les C*-algèbres $C^*(G)$ et $C^0_\infty(\hat{G};\mathbb{C})$ sont isomorphes; on s'attend donc à des liens étroits entre BG et $\hat{G}$, ce qui est bien le cas si $G = \mathbb{Z}^n$, d'où $BG = \hat{G} = U(1)^n$. On notera cependant que BG n'est défini qu'à homotopie près, alors que $\hat{G}$ est défini de manière unique.

En revenant au cas d'un groupe G agissant sur un espace X, l'analogue d'un faisceau G-équivariant sur X est fourni par une paire compatible de représentations, l'une de $C^0_\infty(X;\mathbb{C})$, l'autre de G, dans le même espace de Hilbert. On sait définir une C*-algèbre $C^*(X;G)$, dont les représentations involutives correspondent aux paires décrites ci-dessus. *Cette algèbre joue le rôle de celle des fonctions continues sur l'espace des orbites de G dans X.*

On peut traiter le cas des feuilletages de manière analogue. Nous résumerons la situation dans le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
\text{G-espace X} \arrow[dr] & & \begin{array}{l}\text{variété X avec}\\ \text{feuilletage } \mathfrak{F}\end{array} \arrow[dl] \\
& \text{Groupoïde topologique } \mathfrak{G} \arrow[dl, "\text{Grothendieck}"'] \arrow[dr, "\text{Connes}"] & \\
\text{Topos des } \mathfrak{G}\text{–ensembles} \arrow[rr, leftrightarrow, dashed, "?", "\text{Tapia}"'] & & C^*\text{-algèbre } C^*(\mathfrak{G})
\end{tikzcd}$$

Les deux théories sont unifiées par la notion de groupoïde. Les groupoïdes sont des généralisations des groupes, et une bonne partie de la machinerie des groupes s'étend

(1) Si A est une C^*-algèbre, et $\mathfrak{h}$ un espace de Hilbert, une représentation involutive de A dans $\mathfrak{h}$ est une application linéaire $\pi : A \to \mathcal{L}(\mathfrak{h})$ telle que
$$\pi(ST) = \pi(S)\,\pi(T),\ \pi(1) = 1,\ \pi(S^*) = \pi(S)^*\ ;$$
on a noté $\mathcal{L}(\mathfrak{h})$ l'ensemble des opérateurs linéaires bornés dans $\mathfrak{h}$.

(2) Le groupe G est supposé localement compact; en particulier, il peut être discret.

(3) On note $L^1(G)$ l'espace des fonctions sur G intégrables au sens de Lebesgue pour la mesure de Haar; c'est une algèbre de Banach pour le produit de convolution. Un état η sur $L^1(G)$ est une forme linéaire continue de norme 1 sur $L^1(G)$ telle que $\eta(f * f^*) \geqslant 0$ pour toute f dans $L^1(G)$; la norme spectrale est définie comme la borne supérieure $\|f\|_s$ des nombres $\eta(f * f^*)^{1/2}$ où η parcourt l'ensemble des états. Alors $C^*(G)$ s'obtient en complétant $L^1(G)$ pour la norme spectrale.

à eux, d'où en particulier la notion de $\mathfrak{G}$-ensemble et la C*-algèbre $C^*(\mathfrak{G})$ (si $\mathfrak{G}$ est localement compact). La C*-algèbre $C^*(X;G)$ n'est autre que la C*-algèbre $C^*(\mathfrak{G})$, où $\mathfrak{G}$ est un groupoïde localement compact construit à partir de l'action de G sur X; les autres cas sont analogues.

On a des notions naturelles d'équivalence :

– équivalence d'homotopie pour les espaces topologiques;
– équivalence de topos;
– équivalence de Morita pour les C*-algèbres.

Les invariants « topologiques » doivent être compatibles avec ces équivalences. Le caractère « pathologique » d'une action de groupe, ou d'un feuilletage, se traduit par le fait que *le topos* (ou la C*-algèbre) *associé n'est pas équivalent à celui d'un espace ordinaire.* Dans le cas d'une C*-algèbre, cela se traduit par le fait qu'elle n'est pas équivalente au sens de Morita à une C*-algèbre commutative, autrement dit, qu'elle est *vraiment non commutative.* On comprend maintenant le sens de l'expression « géométrie non commutative ». La comparaison entre les points de vue de Grothendieck et de Connes est à peine ébauchée (voir le travail [12] de J. Tapia).

Que sont les points d'un espace généralisé? On a défini les points d'un topos au n°4. Les points d'une C*-algèbre sont les classes d'équivalence de représentations involutives irréductibles ([1]).

6. Symétries internes

Nous commençons à soupçonner que tous les points ne sont pas identiques – il y a plusieurs espèces de monades. La question se pose donc de savoir si un point peut avoir des symétries. Considérons le cas simple d'un groupe fini G opérant sur une variété compacte X, et l'espace naïf des orbites X/G; si ξ est l'orbite $G\cdot x$ d'un point x de X, il y a de nombreuses raisons de considérer que *le stabilisateur* ([2]) G_x *de x dans* G *est le groupe de symétrie du point* ξ *de* X/G. En particulier, le point naïf de $*/G$ (voir le n°5) a G pour groupe de symétries. Ceci explique l'insuffisance du point de vue des faisceaux sur le quotient naïf X/G : la particularité d'un faisceau est que ce qui est connu en un point l'est sans ambiguïté aux points assez voisins, et ceci exclut la possibilité de ramifications ([3]). Ces remarques simples ont été développées dans la théorie des V-variétés de Satake (appelées « orbifolds » par Thurston), qui ont trouvé de nombreuses utilisations en physique mathématique.

([1]) D'après le théorème de Gelfand-Naimark-Segal, pour tout état pur η sur la C*-algèbre A, il existe une représentation involutive irréductible $\pi_\eta : A \to \mathcal{L}(\mathfrak{h}_\eta)$ et un vecteur ψ_η dans l'espace de Hilbert $\mathfrak{h}_\eta$ tel que $\eta(S) = \langle\psi_\eta|\pi_\eta(S)|\psi_\eta\rangle$ pour S dans A. On introduit sur l'ensemble des états purs une relation d'équivalence $\eta \equiv \eta'$ ssi π_η est équivalente à $\pi_{\eta'}$; alors *un point de* A *est une classe d'équivalence d'états purs.*

([2]) C'est l'ensemble des éléments g de G tels que $g\cdot x = x$.

([3]) Le phénomène de ramification est bien connu pour les fonctions analytiques d'une variable complexe. En un point de ramification z_0 d'ordre n, il faut utiliser des développements en série de puissances de $(z-z_0)^{1/n}$, mais cette racine n^e possède n branches autour de z_0.Ces n branches sont permutées circulairement entre elles, d'où un groupe cyclique d'ordre n de ramification au point z_0.

La question des symétries internes s'est posée avec insistance en physique des particules élémentaires. Le modèle de Kaluza-Klein a été introduit, dans les années 20, pour tenter d'unifier électromagnétisme et gravitation. A titre d'illustration, considérons d'abord la surface d'un cylindre circulaire d'axe D et de rayon r (c'est l'ensemble des points de l'espace à 3 dimensions à la distance r de la droite D). Chaque plan perpendiculaire à l'axe D coupe le cylindre selon un cercle de rayon r, et le cylindre est la réunion de ces cercles deux à deux disjoints. Si le rayon r est très petit, chacun de ces cercles se confond avec son centre, et le cylindre devient indiscernable de son axe; la dimension transversale a été *compactée.* Bien entendu, chaque cercle possède son groupe Γ de rotations, et lors de la contraction de ce cercle en un point, il ne faut pas en perdre la mémoire. On peut donc introduire Γ comme groupe de symétrie interne de chacun des points de la droite D en ajoutant une dimension supplémentaire; en termes plus techniques, le cylindre apparaît comme *espace fibré principal de base* D *et de groupe* Γ. Pour revenir au modèle de Kaluza-Klein, on remplace l'espace-temps à 4 dimensions M^4 par un espace à 5 dimensions, en éclatant chaque point de M^4 en un « tout petit » cercle; le groupe des symétries internes ainsi associé à chaque point est le groupe précédent $\Gamma = \mathrm{SO}(2)$ qui apparaît de manière implicite dans les changements de jauge du potentiel électromagnétique ([1]).

Lorsqu'on a voulu prendre en compte d'autres champs que le champ électromagnétique, et d'autres particules que les électrons et les photons, on a appliqué la même stratégie, en remplaçant le groupe $\mathrm{SO}(2)$ (isomorphe à $\mathrm{U}(1)$) par les groupes $\mathrm{SU}(2)$ et $\mathrm{SU}(3)$, ou même des groupes plus compliqués tels que E_8 dans certains modèles. On remplace l'espace M^4 à 4 dimensions par un espace à $4+d$ dimensions, où d est la dimension du groupe. Dans les années 60, on avait essayé d'unifier le groupe de Poincaré des symétries externes de l'espace-temps avec le groupe des symétries internes; cette unification fut un échec pour des raisons mathématiques ([2]).

Le point de vue de Grothendieck permet d'introduire le groupe de symétries d'un point. La remarque fondamentale est la suivante : supposons données deux catégories $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$; on peut définir les transformations de catégories (appelées « foncteurs »), soit $\mathrm{T} : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$, mais aussi les transformations entre foncteurs selon le schéma

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C} \arrow[r, bend left, "\mathrm{T}"] \arrow[r, bend right, "\mathrm{T}'"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow \Phi"] & \mathcal{C}'. \end{tikzcd}$$

([1]) En notant A_μ les composantes du potentiel électromagnétique, les composantes du champ électromagnétique sont $\mathrm{F}_{\mu\nu} = \partial_\mu \mathrm{A}_\nu - \partial_\nu \mathrm{A}_\mu$; les indices μ, ν prennent les valeurs 0, 1, 2, 3, correspondant aux coordonnées $x^0,\ x^1,\ x^2,\ x^3$ dans l'espace-temps, et l'on a posé $\partial_\mu = \partial/\partial x^\mu$. Un changement de jauge consiste à remplacer A_μ par $\mathrm{A}_\mu + \partial_\mu \Phi$, ce qui ne modifie pas les $\mathrm{F}_{\mu\nu}$. Mais la donnée de Φ définit en chaque point x de M^4 une rotation d'angle $e\Phi(x)/\hbar$ du cercle exprimant la symétrie interne de x.

([2]) A cause des théorèmes classiques d'Élie Cartan, on ne peut construire de groupe qui soit une extension du groupe externe par le groupe interne, et il faut se contenter d'en faire le produit direct, c'est-à-dire refuser de les faire interagir.

On peut composer les foncteurs, et aussi les transformations entre foncteurs; on peut donc parler du groupe des automorphismes d'un foncteur $T : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$, à savoir les transformations $T \overset{\Phi}{\Rightarrow} T$ qui possèdent un inverse. Puisqu'un point au sens de Grothendieck est interprété comme un foncteur entre topos, le tour est joué, il possède son groupe de symétries. Par exemple, si X est un espace topologique, et a un point de X, Grothendieck définit le *groupe fondamental* $\pi_1(X; a)$ de X au point a comme le groupe des automorphismes du foncteur fibre a^* restreint au sous-topos $\mathfrak{F}_{\ell c}(X)$ des faisceaux localement constants sur X

$$a^* : \mathfrak{F}_{\ell c}(X) \to \mathfrak{Ens} .$$

Autrement dit, *le groupe fondamental* $\pi_1(X; a)$ *est vu comme le groupe de symétries du point* a; grâce à l'introduction du spectre d'un corps commutatif, le groupe de Galois $\mathrm{Gal}(K/k)$ d'une extension de corps peut aussi être interprété comme le groupe des symétries d'un point!

La même idée peut être appliquée pour réinterpréter le théorème de dualité de Tannaka-Krein. Soit G un groupe compact; on peut introduire la catégorie $\mathfrak{Rep}_G$ dont les objets sont les représentations linéaires continues de dimension finie du groupe G ([1]). Introduisons aussi la catégorie $\mathfrak{Vect}_f$ formée des espaces vectoriels complexes de dimension finie, et des transformations linéaires. Le foncteur « fibre » $\Phi : \mathfrak{Rep}_G \to \mathfrak{Vect}_f$ associe à une représentation π l'espace vectoriel V_π où elle agit. *Le groupe* G *peut être reconstruit comme le groupe des automorphismes de ce foncteur* Φ *qui respectent en un sens convenable le produit tensoriel* ([2]).

L'interprétation de ce théorème est qu'*un groupe* G *n'existe que par l'intermédiaire de sa catégorie de représentations* $\mathfrak{Rep}_G$. En fait, l'utilisation des groupes pour classifier les particules élémentaires est analogue. Dans la chaîne de symétries brisées pour les hadrons

$$SU(3) \supset SU(2) \supset U(1) ,$$

on n'utilise en fait que les représentations de ces groupes, et les règles de branchement ([3]), pour organiser les familles de hadrons en multiplets, puis séparer les membres du multiplet par leur charge électrique (le groupe $U(1)$ correspondant à l'électromagnétisme, comme expliqué plus haut).

Le problème se pose donc de donner une caractérisation axiomatique des catégories de la forme $\mathfrak{Rep}_G$. Cela a été obtenu indépendamment par Deligne dans le *Grothendieck Festschrift* [5], en prolongement du programme de Grothendieck, et par les physiciens Doplicher et Roberts [6] motivés par la théorie des champs de jauge.

([1]) Soient π une représentation de G dans l'espace V_π et π' dans l'espace $V_{\pi'}$. Une *transformation* de π dans π' est une application linéaire T de V_π dans $V_{\pi'}$ telle que l'on ait $T\pi(g) = \pi'(g)T$ pour tout élément g de G.

([2]) Un automorphisme du foncteur Φ est la donnée, pour toute représentation π de G, d'un opérateur linéaire inversible S_π dans l'espace V_π où agit π; on impose la règle $TS_\pi = S_{\pi'}T$ pour toute transformation T de π dans π'. La compatibilité avec le produit tensoriel est la formule $S_{\pi\otimes\pi'} = S_\pi \otimes S_{\pi'}$. Alors le théorème de dualité affirme que, si les S_π satisfont à ces conditions, il existe un unique élément g de G tel que $S_\pi = \pi(g)$ pour toute représentation π.

([3]) Qui décrivent comment une représentation irréductible d'un groupe se décompose en représentations irréductibles d'un sous-groupe, après réduction de la représentation du groupe au sous-groupe.

7. « I have a dream »

Le rêve brisé de Grothendieck était de développer une théorie des *motifs*, unifiant en particulier la théorie de Galois et la topologie. Pour l'instant, nous n'avons que des bribes de cette théorie, mais je voudrais conclure par un développement magnifique et assez inattendu, où se rejoignent de nouveau physique et mathématiques.

Euler a été le premier à étudier les séries $\zeta(k) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-k}$ pour $k = 2, 3, \ldots$ En particulier, on lui doit les formules $\zeta(2) = \pi^2/6$ et $\zeta(4) = \pi^4/90$. Il a été le premier à considérer des séries multiples du même genre (nombres d'Euler-Zagier [14]) :

$$\zeta(k_1, \ldots, k_r) = \Sigma n_1^{-k_1} \ldots n_r^{-k_r}\,, \tag{4}$$

où la sommation est étendue aux systèmes d'entiers $n_1, \ldots, n_r$ tels que $n_1 > n_2 > \ldots > n_r \geqslant 1$. Le produit de deux tels nombres est une combinaison linéaire de nombres de la même espèce; citons le premier cas intéressant

$$\zeta(a)\zeta(b) = \zeta(a+b) + \zeta(a,b) + \zeta(b,a)\,, \tag{5}$$

qui se démontre par des manipulations élémentaires de séries. On postule que *toutes les relations polynomiales à coefficients rationnels entre les nombres $\zeta(k_1, \ldots, k_r)$ sont conséquence de ces relations de produit, et de quelques autres du même style*, connues explicitement. Pour donner une idée de l'ampleur de la conjecture, elle implique que les nombres $\zeta(3)$, $\zeta(5), \ldots$, sont transcendants; le seul résultat prouvé est que $\zeta(3)$ est irrationel (Apéry, 1979).

Notons $\mathfrak{A}_d$ l'ensemble des combinaisons linéaires à coefficients rationnels des nombres $\zeta(k_1, \ldots, k_r)$ pour $k_1 + \ldots + k_r$ égal à d. Les formules de produit montre que l'on a

$$\mathfrak{A}_d \cdot \mathfrak{A}_{d'} \subset \mathfrak{A}_{d+d'}\,,$$

donc la somme directe $\mathfrak{A}$ de $\mathfrak{A}_0 = \mathbb{Q}$, $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_2, \ldots$, est une algèbre commutative sur le corps $\mathbb{Q}$ des nombres rationnels. Drinfeld a introduit un groupe GT, dit de Teichmüller-Grothendieck; c'est un schéma en groupes sur le corps $\mathbb{Q}$, et il possède donc une algèbre de Lie, notée $\mathfrak{grt}_1$. La description de cette algèbre de Lie m'obligerait à donner des renseignements précis sur les équations de Knizhnik-Zamolodchikov, qui jouent un rôle fondamental dans la théorie des champs conformes. On postule que l'*algèbre de Lie* $\mathfrak{grt}_1$ *est une algèbre de Lie libre avec des générateurs* ψ_3, ψ_5, $\psi_7, \ldots$, correspondant de manière naturelle aux nombres $\zeta(3)$, $\zeta(5)$, $\zeta(7), \ldots$ De plus, le groupe GT joue le rôle de groupe de Galois pour les nombres transcendants de la forme $\zeta(k_1, \ldots, k_r)$, car il agit par automorphismes sur l'algèbre $\mathfrak{A}$ ([1]).

A peu près au même moment, à l'IHÉS, Connes et Kontsevich viennent de découvrir une intervention naturelle du groupe GT dans des problèmes fondamentaux de physique :

([1]) Pour les spécialistes, mentionnons que ce qui précède est un exposé terre à terre de la théorie des « motifs de Tate mixtes ».

a) Connes et Kreimer [3] ont découvert comment faire agir l'algèbre de Lie $\mathfrak{grt}_1$ (et d'autres algèbres analogues) sur l'algèbre correspondant aux diagrammes de Feynman. Il s'agit d'une nouvelle espèce de symétrie, agissant non pas sur un modèle particulier de théorie des champs, mais balayant toute une classe de lagrangiens possibles.

b) Kontsevich [9] a résolu récemment le problème de la *quantification par déformation pour les variétés de Poisson.* L'ensemble des quantifications possibles a un groupe de symétries et Kontsevich postule qu'il est isomorphe à GT.

Dans les deux problèmes, les nombres $\zeta(k_1, \ldots, k_r)$ apparaissent comme valeurs de certaines intégrales.

Ne pouvait-on rêver meilleur mariage, pour le 40^{e} anniversaire de l'IHÉS et le 30^{e} anniversaire de la rupture avec Grothendieck?

RÉFÉRENCES

[1] A. BOREL, *Sur la cohomologie des espaces fibrés principaux et des espaces homogènes de groupes de Lie compacts, Ann. Math.* (2) **57**, p. 115-207 (1953).

[2] H. CARTAN et C. CHEVALLEY, *Géométrie algébrique,* École Normale Supérieure 1955/6, réimprimé chez Benjamin.

[3] A. CONNES et D. KREIMER, *Hopf algebras, renormalization and noncommutative geometry,* prépublication IHÉS/M/98/60.

[4] H. CRAPO et G. C. ROTA, *On the foundations of combinatorial theory : combinatorial geometries,* M.I.T. Press, Cambridge, Mass. (1970).

[5] P. DELIGNE, *Catégories tannakiennes, in Grothendieck Festschrift,* vol. II, p. 111-195, *Progress in Math.,* vol. 87, Birkhäuser (1990).

[6] S. DOPLICHER et J. E. ROBERTS, *Endomorphisms of C^*-algebras, cross-products and duality for compact groups, Ann. Math.* (2) **130**, p. 75-119 (1989).

[7] A. GROTHENDIECK, *Produits tensoriels topologiques et espaces nucléaires, Mem. Amer. Math. Soc.* n°16 (1955).

[8] A. GROTHENDIECK, *Résumé de la théorie métrique des produits tensoriels topologiques, Bol. Soc. Mat.* **8**, São Paulo, p. 1-79 (1956).

[9] M. KONTSEVICH, *Quantization deformation of Poisson manifolds I,* q-alg/9709040.

[10] L. SCHWARTZ, *Un mathématicien aux prises avec le siècle,* Odile Jacob, Paris (1997).

[11] J.-P. SERRE, *Faisceaux algébriques cohérents, Ann. Math.* (2) **61**, p. 197-278 (1955).

[12] J. TAPIA, *Quelques spectres en K-théorie topologique des algèbres de Fréchet et applications à l'algèbre des fonctions de classe C^∞ sur une variété,* prépublication IHÉS/M/91/37.

[13] A. WEIL, *Théorie des points proches sur les variétés différentiables, in* Colloque de Géométrie Différentielle (Strasbourg 1953), C.N.R.S., p. 111-117.

[14] D. ZAGIER, *Values of zeta functions and their applications,* Progress in Maths, vol. 120, p. 497-512 (1994).

Ouvrages fondamentaux :

[T] A. GROTHENDIECK (et collaborateurs), *Théorie des topos et cohomologie étale des schémas,* Springer Lect. Notes in Maths, vol. 269, 270, 305 (1972/3).

[NC] A. CONNES, *Noncommutative geometry,* Academic Press (1994).

Pierre CARTIER
ENS - DMI, 75230 Paris, France