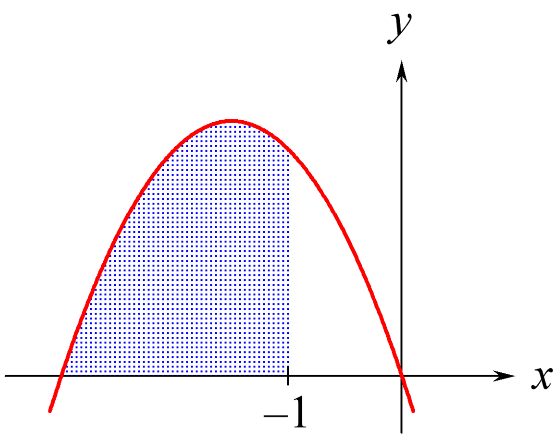
Integralregning

for gymnasiet og hf



2011 Karsten Juul

Dette hæfte gennemgår integralregningen
uden at gøre det mere indviklet end krævet.
Pensum til B-niveau: side 1-12 (ramme 1-15)

Pensum til A-niveau: side 1-20 (ramme 1-25)

Nyere hæfter:

http://mat1.dk/integralregning_for_a_niveau_i_stx.pdf
http://mat1.dk/integralregning_for_b_niveau_i_stx.pdf
http://mat1.dk/integralregning_for_b_niveau_i_hf.pdf
http://mat1.dk/integralregning_med_oevelser_for_b-niveau_i_gymnasiet_og_hf.pdf
http://mat1.dk/hvordan_leibniz_opfandt_integralregningen.pdf

1. Hvad er en stamfunktion?

1.1 Definition

$g(x)$ er en <u>stamfunktion</u> til $f(x)$

hvis

$g(x)$ differentieret giver $f(x)$

dvs. hvis

$g'(x) = f(x)$

1.2 Eksempel

$\frac{1}{3}x^3$ er stamfunktion til x^2

fordi

$$\left(\tfrac{1}{3}x^3\right)' = \tfrac{1}{3}\left(x^3\right)' = \tfrac{1}{3}\cdot 3x^2 = x^2$$

2. Hver funktion har mange stamfunktioner

2.1 Eksempel

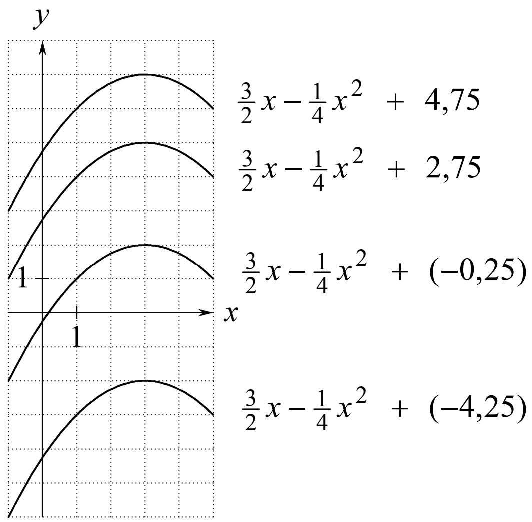
$$\left(\tfrac{3}{2}x - \tfrac{1}{4}x^2\right)' = \tfrac{3}{2} - \tfrac{1}{2}x$$

$$\left(\tfrac{3}{2}x - \tfrac{1}{4}x^2 + 5\right)' = \tfrac{3}{2} - \tfrac{1}{2}x$$

$$\left(\tfrac{3}{2}x - \tfrac{1}{4}x^2 + 8\right)' = \tfrac{3}{2} - \tfrac{1}{2}x$$

$\frac{3}{2}x - \frac{1}{4}x^2 + c$ er stamfunktion til $\frac{3}{2} - \frac{1}{2}x$
uanset hvilket tal vi skriver i stedet for k .

I koordinatsystemet har vi tegnet graferne for nogle af stamfunktionerne til $\frac{3}{2} - \frac{1}{2}x$.



2.2 Sætning

I et x-interval hvor funktionerne $h(x)$ og $f(x)$ er defineret, gælder

Hvis $h(x)$ er en af stamfunktionerne til $f(x)$,
så er funktionerne $h(x)+k$ samtlige stamfunktioner til $f(x)$.

Dette kan vi også formulere sådan:

Hvis vi kender grafen for en stamfunktion $h(x)$ til $f(x)$,
så kender vi også graferne for de andre stamfunktioner til $f(x)$.
Det er nemlig de grafer vi kan få ved at rykke $h(x)$-grafen op eller ned.

3. Stamfunktioner til nogle grundlæggende funktioner

3.1 Stamfunktion til konstant

Regel: k har stamfunktionen $k \cdot x$ da $(k \cdot x)' = k \cdot 1 = k$

Eksempler:
6 har stamfunktionerne $6x + c$
1 har stamfunktionerne $x + c$
$-\frac{1}{2}$ har stamfunktionerne $-\frac{1}{2}x + c$

3.2 Stamfunktion til potensfunktion

Regel: x^a har stamfunktionen $\frac{1}{a+1} \cdot x^{a+1}$ da $\left(\frac{1}{a+1} \cdot x^{a+1}\right)' = \frac{1}{a+1} \cdot (a+1)x^a = x^a$

Eksempler:
x^3 har stamfunktionerne $\frac{1}{4}x^4 + c$
$x^{-1,5}$ har stamfunktionerne $\frac{1}{-0,5}x^{-0,5} + c$ dvs. $-2x^{-0,5} + c$
x har stamfunktionerne $\frac{1}{2}x^2 + c$ da $x = x^1$

Advarsel: Regel 3.2 kan ikke bruges på eksponentialfunktioner:
a^x har **IKKE** stamfunktionen $\frac{1}{x+1} \cdot a^{x+1}$
4^x har **IKKE** stamfunktionen $\frac{1}{x+1} \cdot 4^{x+1}$

3.3 Stamfunktion til en $\frac{1}{x}$

Regel: $\frac{1}{x}$ har stamfunktionerne $\ln(x) + c$ i intervallet $x > 0$ da $(\ln(x) + c)' = \frac{1}{x}$

x^{-1} har stamfunktionerne $\ln(x) + c$ i intervallet $x > 0$ da $x^{-1} = \frac{1}{x}$

Advarsel: $\frac{1}{2-x}$ har **IKKE** stamfunktionen $\ln(2-x)$

3.4 Stamfunktion til e^{kx}

Regel: $e^{k \cdot x}$ har stamfunktionen $\frac{1}{k} \cdot e^{k \cdot x}$ da $\left(\frac{1}{k} \cdot e^{k \cdot x}\right)' = \frac{1}{k} \cdot k \cdot e^{k \cdot x} = e^{k \cdot x}$

Eksempler:
e^{3x} har stamfunktionerne $\frac{1}{3}e^{3x} + c$
e^x har stamfunktionerne $e^x + c$

4. Stamfunktion til $k \cdot f(x)$, $f(x)+g(x)$ og $f(x)-g(x)$

4.1 Stamfunktion til konstant gange udtryk

Hvis: $f(x)$ har stamfunktionen $F(x)$
så: $k \cdot f(x)$ har stamfunktionen $k \cdot F(x)$

Vi beholder konstanten og erstatter x-udtrykket med dets stamfunktion

Eksempler:

$12x^3$ har stamfunktionerne $12 \cdot \frac{1}{4}x^4 + c$ dvs. $3x^4 + c$

$12\,\mathrm{e}^{3x}$ har stamfunktionerne $12 \cdot \frac{1}{3}\mathrm{e}^{3x} + c$ dvs. $4\,\mathrm{e}^{3x} + c$

$12\,\mathrm{e}^{x}$ har stamfunktionerne $12 \cdot \mathrm{e}^{x} + c$ dvs. $12\,\mathrm{e}^{x} + c$

$12x$ har stamfunktionerne $12 \cdot \frac{1}{2}x^2 + c$ dvs. $6x^2 + c$

4.2 Stamfunktion til udtryk plus udtryk og til udtryk minus udtryk

Hvis: $f(x)$ har stamfunktionen $F(x)$ og
$g(x)$ har stamfunktionen $G(x)$

så: $f(x)+g(x)$ har stamfunktionen $F(x)+G(x)$
$f(x)-g(x)$ har stamfunktionen $F(x)-G(x)$

På begge sider af + og – erstatter vi udtrykket med dets stamfunktion

Eksempler:

$x^3 + \mathrm{e}^{3x}$ har stamfunktionerne $\frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}\mathrm{e}^{3x} + c$

$6 - \mathrm{e}^{x}$ har stamfunktionerne $6x - \mathrm{e}^{x} + c$

$x + \frac{1}{x}$ har stamfunktionerne $\frac{1}{2}x^2 + \ln(x) + c$ i intervallet $x > 0$

4.3 Advarsel.

Man kan IKKE integrere et udtryk ved at integrere hver del af udtrykket

(bortset fra visse specielle tilfælde som f.eks. regel 4.2)

Eksempler:

$x^3 \cdot \mathrm{e}^{3x}$ har **IKKE** stamfunktionen $\frac{1}{4}x^4 \cdot \frac{1}{3}\mathrm{e}^{3x}$

$\dfrac{x^3}{\mathrm{e}^{3x}}$ har **IKKE** stamfunktionen $\dfrac{\frac{1}{4}x^4}{\frac{1}{3}\mathrm{e}^{3x}}$

$5 \cdot \mathrm{e}^{x}$ har **IKKE** stamfunktionen $5x \cdot \mathrm{e}^{x}$

$\dfrac{5}{\mathrm{e}^{x}}$ har **IKKE** stamfunktionen $\dfrac{5x}{\mathrm{e}^{x}}$

5. Symbol for stamfunktion

<u>Symbolet</u> $\int f(x)\,dx$

<u>betyder:</u> stamfunktionerne til $f(x)$

<u>og læses:</u> det <u>ubestemte integral</u> af $f(x)$

Når vi finder ud af hvad $\int f(x)\,dx$ er lig
så siger vi at vi <u>integrerer</u> $f(x)$
$f(x)$ kaldes <u>integranden</u>

<u>Eksempel:</u> $\int (2x+1)dx \;=\; x^2+x+c$

Her har vi integreret $2x+1$

$2x+1$ er integranden

Vi har sat <u>parentes om integranden</u> fordi den består af <u>mere end ét led</u>

6. Sådan finder vi stamfunktioner på TI-Nspire

For at finde stamfunktion på Nspire vælger vi i menuen:

I et regnevindue: Calculus / Integral

I et notevindue: Beregn / Calculus / Integral

Så fremkommer skabelonen $\int_{\square}^{\square} (\square)\,d\square$

Vi skal kun skrive i de to sidste felter i denne skabelon når vi skal finde stamfunktion.

<u>Nspire skriver kun én af stamfunktionerne</u>: $\int (7^x)dx = \frac{7^x}{\ln(7)}$ Vi må selv tilføje $+c$.

Hvis vi taster $\text{integral}(7^x,x,c)$ skriver Nspire resultatet $\frac{7^x}{\ln(7)}+c$

For at finde stamfunktion til

$$f(x) = 3x - \frac{2}{x} \quad , \quad x > 0$$

skal vi efter integraltegnet angive at $x > 0$:

$$\int \left(3\cdot x - \frac{2}{x}\right)dx | x>0 \;=\; \frac{3\cdot x^2}{2} - 2\cdot \ln(x)$$

Husk at trykke på højre-pilen inden du taster den lodrette streg!

7. Sådan finder vi en bestemt af en funktions stamfunktioner

Opgave 1 (Vi kender et punkt på stamfunktionens graf)

F er en stamfunktion til $f(x) = 2x + 3$.

Det er oplyst at

grafen for F går gennem punktet $(-1, -6)$.

I nogle opgaver er denne oplysning formuleret sådan:

$F(-1) = -6$.

Find F .

Besvarelse

Da F er en stamfunktion til $f(x) = 2x + 3$, findes en konstant c så

$$F(x) = x^2 + 3x + c$$

Da grafen for F går gennem punktet $(-1, -6)$, må

$$(-1)^2 + 3\cdot(-1) + c = -6$$

så $c = -4$, dvs.

$$\underline{\underline{F(x) = x^2 + 3x - 4 \ , \quad x \in \mathrm{R}}}$$

> Når vi indsætter et grafpunkts x-koordinat i forskriften og regner ud, så får vi grafpunktets y-koordinat.

Opgave 2 (Vi kender en linje der er tangent til stamfunktionens graf)

F er en stamfunktion til $f(x) = 2x + 3$.

Det er oplyst at

Linjen med ligningen $y = x - 5$ er tangent til grafen for F .

Find F .

Besvarelse

Da F er en stamfunktion til $f(x) = 2x + 3$, findes en konstant c så

$$F(x) = x^2 + 3x + c$$

Først udregner vi et punkt der ligger på grafen for F ,
nemlig det punkt (x_0, y_0) hvori tangenten rører grafen.
Af tangentens ligningen $y = x - 5$ ser vi at tangenthældningen er 1 :

$$F'(x_0) = 1$$
$$2x_0 + 3 = 1$$
$$x_0 = -1$$

> Når vi indsætter et grafpunkts x-koordinat i forskriften for differentialkvotienten og regner ud, så får vi grafpunktets tangenthældning.

Da $x_0 = -1$ og (x_0, y_0) ligger på linjen med ligningen

$$y = x - 5$$

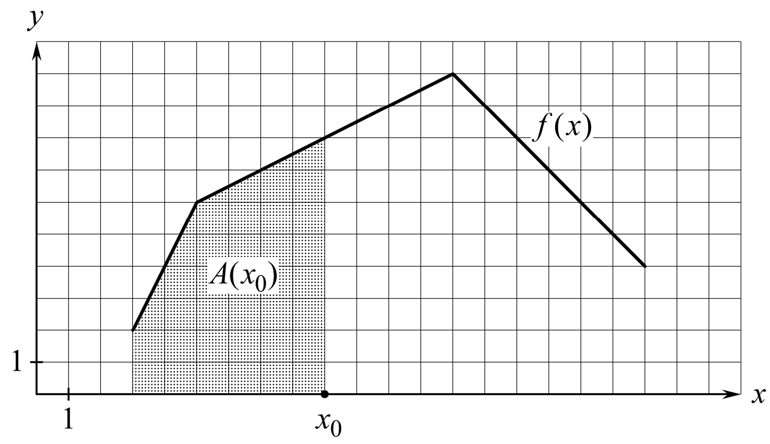
får vi

$$y_0 = (-1) - 5$$
$$y_0 = -6$$

> At en linjes ligning er $y = ax + b$ betyder at for et punkt på linjen kan vi udregne y-koordinaten ved at gange x-koordinaten med a og lægge b til

Nu kender vi et punkt på grafen for F . Så kan vi bruge metoden fra opgave 1.

8. Arealfunktion



8.1 Hvad er en arealfunktion?

Den viste graf er på en skærm.

Når vi trækker x_0-prikken mod højre, bliver det grå område større.

$A(x_0)$ er arealet af det grå område.

$A(x)$ kaldes arealfunktionen for f .

8.2 Eksempel

På billedet ser vi at $f(10) = 8{,}5$, $A(9) = 36$ og $A(11) = 53$.

$$A'(10) \approx \frac{A(11) - A(9)}{11 - 9}$$ ⟵ Her bruger vi formlen for numerisk differentiation.

dvs.

$$A'(10) \approx 8{,}5$$

så

$$A'(10) \approx f(10)$$

8.3 Sætning

Betyder at grafen ligger på eller over *x*-aksen.

Når

$A(x)$ er arealfunktionen for en ikke-negativ funktion $f(x)$, $a \le x \le b$

så gælder at

$A(x)$ er en stamfunktion til $f(x)$

dvs.

$$A'(x) = f(x)$$

9. Bestemt integral

<u>9.1 Definition</u> af bestemt integral

Hvis

$f(x)$ har stamfunktionen $F(x)$ i intervallet $a \le x \le b$

så definerer man at

$$\int_a^b f(x)\,dx \;=\; F(b)-F(a)$$

Symbolet til venstre for lighedstegnet læser man sådan:

Integralet fra a til b af $f(x)$.

$f(x)$ kaldes <u>integranden</u> .

<u>9.2 Bemærk:</u>

I definitionen af bestemt integral er det IKKE krævet at $f(x) \ge 0$.

Det bestemte integral er et tal.

Det ubestemte integral er funktioner.

<u>9.3 Sætning</u> om bestemt integral og areal

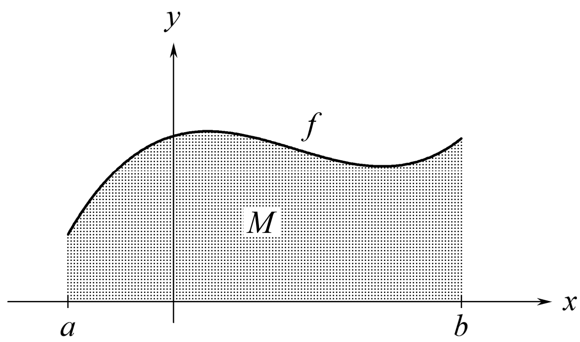
Hvis

$f(x) \ge 0$ for $a \le x \le b$ og

M er området mellem *f*-grafen og *x*-aksen i intervallet $a \le x \le b$

så gælder

$$\int_a^b f(x)\,dx \;=\; \text{arealet af } M$$



<u>Bevis</u>

$A(x)$ er arealfunktionen for $f(x)$.

$F(x)$ er en stamfunktion til $f(x)$.

Da $A(x)$ og $F(x)$ er stamfunktion til samme funktion, findes en konstant c så

$(*)\qquad A(x) = F(x)+c$.

Nu fås

areal af M	$= A(b)$	Ifølge definitionen på arealfunktion.
	$= A(b)-A(a)$	Da $A(a)=0$.
	$= \big(F(b)+k\big)-\big(F(a)+k\big)$	Ifølge $(*)$.
	$= F(b)-F(a)$	
	$= \int_a^b f(x)\,dx$	Ifølge definitionen på bestemt integral.

Hermed er sætning 9.3 bevist.

10. Sådan udregner vi bestemte integraler

10.1 Udregne bestemt integral uden hjælpemidler

Når vi udregner bestemte integraler uden hjælpemidler, er det praktisk at bruge

symbolet $\left[F(x)\right]_a^b$ som betyder $F(b)-F(a)$

Fordelen er at vi kan skrive stamfunktionen inden vi indsætter grænserne a og b for x.

Eksempel på brug af denne skrivemåde:

$$
\begin{aligned}
\int_{-1}^{4}(6x^2-5)\,dx &= \left[2x^3-5x\right]_{-1}^{4} \\
&= \left(2\cdot 4^3-5\cdot 4\right)-\left(2\cdot(-1)^3-5\cdot(-1)\right) \\
&= \underline{\underline{105}}
\end{aligned}
$$

10.2 Udregne bestemt integral på TI-Nspire

For at udregne et bestemt integral på Nspire vælger vi i menuen:

I et regnevindue: Calculus / Integral

I et notevindue: Beregn / Calculus / Integral

Så fremkommer skabelonen $\int_{\square}^{\square}(\square)\,d\square$

Eksempel: $\int_{-1}^{0}\left(\frac{x^2}{e^x}\right)dx = e-2$

11. Opgave hvor vi skal fortolke et integral

I en opgave er $f(x)=-3x-x^2$

Vi har udregnet at $\int_{-1}^{0} f(x)\,dx = \frac{7}{6}$

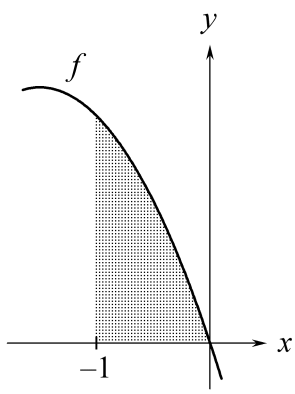
Vi skal give en geometrisk fortolkning af dette tal.

Svar på dette spørgsmål:

På figuren har vi skitseret grafen for f

$-1<0$ og $f(x)\geq 0$ for $-1\leq x\leq 0$

så $\frac{7}{6}$ er $\underline{\underline{\text{arealet af det grå område}}}$



12. Bestemme integral ud fra arealer

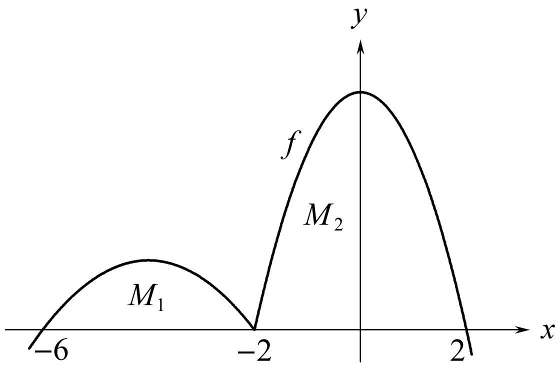
Opgave

På figuren ses grafen for en funktion f der har nulpunkterne -6 , -2 og 2 .

Sammen med x-aksen afgrænser grafen en punktmængde M_1 der har arealet $\frac{7}{2}$.

Sammen med x-aksen og y-aksen afgrænser grafen i 2. kvadrant en punktmængde M_2 som har arealet 6 .

Bestem $\int_{-6}^{0} f(x)\,dx$.



Besvarelse

$-6 < 0$ og $f(x) \geq 0$ for $-6 < x < 0$ så

$$\int_{-6}^{0} f(x)\,dx \quad = \quad \text{arealet mellem } x\text{-aksen og grafen i intervallet } -6 < x < 0$$

Dette areal får vi ved at lægge arealerne af M_1 og M_2 sammen:

$$\tfrac{7}{2} + 6 = \tfrac{19}{2}$$

Dvs.

$$\int_{-6}^{0} f(x)\,dx = \underline{\underline{\frac{19}{2}}}$$

13 Bestemme areal mellem graf og x-akse

Opgave

En funktion f har forskriften

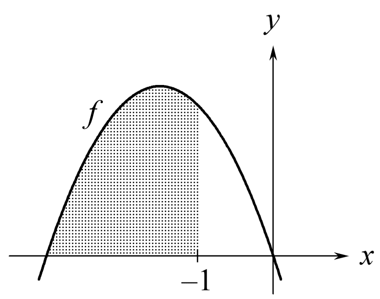
$$f(x) = -x^2 - 3x \ .$$

Grafen for f , x-aksen og linjen med ligningen $x = -1$ afgrænser i anden kvadrant en punktmængde M der har et areal.

Bestem arealet af M .

Besvarelse

Først tegner vi en skitse der viser M .
M er det grå område på skitsen.



Ud fra skitsen ser vi at vi har brug for at kende x-koordinaten til det venstre af grafens skæringspunkter med x-aksen.

Da ligningen $f(x) = 0$ har løsningerne -3 og 0 , er -3 førstekoordinat til det venstre af grafens skæringspunkter med førsteaksen.

Vi skal skrive hvordan vi har fundet løsningerne.

Vi ser at

$$f(x) \geq 0 \quad \text{for} \quad -3 \leq x \leq -1$$

så arealet af M er lig

$$\int_{-3}^{-1} f(x)\,dx$$

Vi taster dette integral og får det udregnet.

En anden mulighed er at vi udregner integralet på den måde som er vist i 10.1 .

Vi får $\frac{10}{3}$ så

arealet af M er $\underline{\underline{\frac{10}{3}}}$.

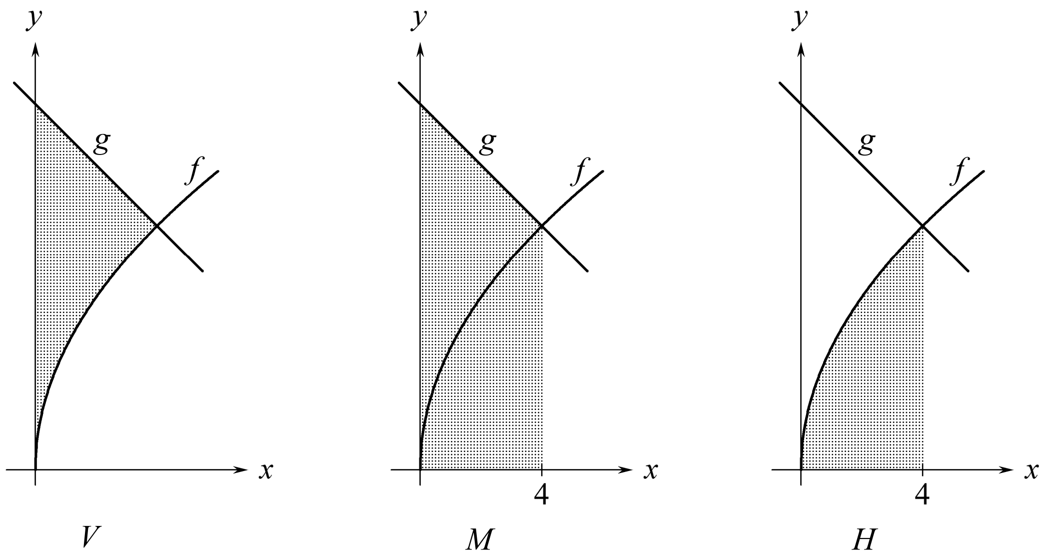
14. Areal mellem to grafer

I nogle opgaver skal et areal udregnes ved at udregne to arealer og trække det ene fra det andet.

I koordinatsystemerne har vi tegnet graferne for funktionerne

$$f(x) = 4\cdot\sqrt{x} \qquad \text{og} \qquad g(x) = 12 - x$$

Vi vil udregne arealet af det grå område V på venstre figur.



Det grå område M på midterste figur har arealet

$$\int_0^4 g(x)\,dx = 40$$

Det grå område H på højre figur har arealet

$$\int_0^4 f(x)\,dx = \tfrac{64}{3}$$

Hvis vi fjerner H fra M, får vi V, så arealet af V er $40 - \frac{64}{3} = \underline{\underline{\frac{56}{3}}}$

<u>Bemærkning:</u> Vi kunne have udregnet arealet af M uden at bruge integralregning da M er begrænset af rette linjer.

15. Bestem k så arealet af M er lig en given værdi

En funktion f har forskriften $\quad f(x) = x^2 + 1$

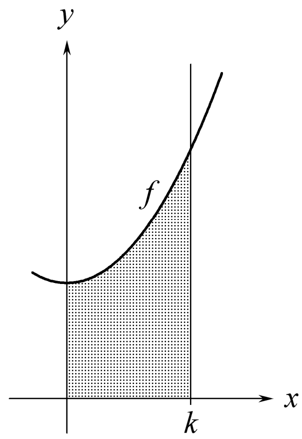
og en konstant k opfylder at $\quad k > 0$

Det grå område kalder vi M.

Det oplyses at $\quad$ areal af $M = \frac{3}{2}$

Vi løser ligningen $\quad \int_0^k f(x)\,dx = \frac{3}{2}$

mht. k for $k > 0$ og får $\quad k = \underline{\underline{1{,}08004}}$



En funktion f har forskriften $\quad f(x) = 2 - kx^2$

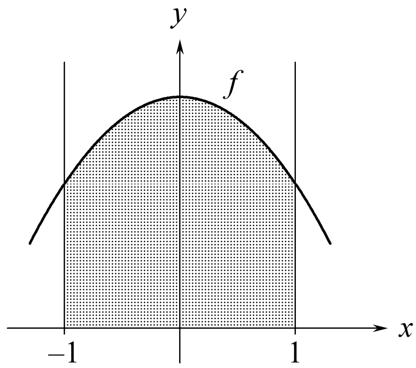
hvor konstanten k opfylder at $\quad 0 < k < 2$

Det grå område kalder vi M.

Det oplyses at $\quad$ areal af $M = \frac{7}{2}$

Vi løser ligningen $\quad \int_{-1}^{1} f(x)\,dx = \frac{7}{2}$

mht. k for $0 < k < 2$ og får $\quad k = \underline{\underline{\frac{3}{4}}}$



En funktion f har forskriften $\quad f(x) = 1 - x^2$

En funktion g har forskriften $\quad g(x) = k - x$

hvor konstanten k opfylder at $\quad k > \frac{5}{4}$

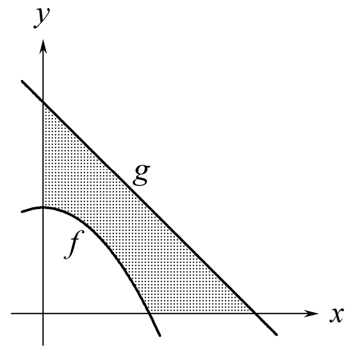
Det grå område kalder vi M.

Det oplyses at $\quad$ areal af $M = \frac{4}{3}$

Vi løser $f(x) = 0$ og får $x = \pm 1$
Vi løser $g(x) = 0$ og får $x = k$

Vi løser ligningen $\quad \int_0^k g(x)\,dx - \int_0^1 f(x)\,dx = \frac{4}{3}$

mht. k for $k > \frac{5}{4}$ og får $\quad k = \underline{\underline{2}}$



I mange opgaver skal du ikke løse disse ligninger.
Måske skal du løse $f(x) = g(x)$.
Måske fremgår alle integralernes grænser af tekst og figur.

16. Integration ved substitution

16.1 Formlen for integration ved substitution

$$\int g'(x)\cdot f\big(g(x)\big)dx \;=\; \int f(t)\,dt \quad , \qquad t = g(x)$$

For at bestemme integralet på venstre side af lighedstegnet skal vi altså opskrive udtrykket for stamfunktionerne til $f(t)$ og derefter i dette udtryk indsætte $g(x)$ for t.

16.2 Simpelt eksempel

$$\int 2x\cdot(x^2+1)^3\,dx \qquad\qquad t = x^2+1$$

$$t' = 2x$$

$$= \int t^3 dt$$

$$= \tfrac{1}{4}t^4 + c$$

$$= \tfrac{1}{4}(x^2+1)^4 + c$$

16.3 Eksempel med ekstra omskrivning

$$\int x\cdot(x^2+1)^3\,dx \qquad\qquad t = x^2+1$$

$$t' = 2x$$

$$= \tfrac{1}{2}\cdot\int 2x\cdot(x^2+1)^3\,dx$$

$$= \tfrac{1}{2}\cdot\int t^3 dt$$

$$= \tfrac{1}{8}t^4 + c$$

$$= \tfrac{1}{8}(x^2+1)^4 + c$$

16.4 Eksempel med bestemt integral

$$\int_0^1 \frac{3x^2}{x^3+1}\,dx$$

Først bruger vi 15.1 til at bestemme stamfunktion til integranden:

$$\int 3x^2\cdot\frac{1}{x^3+1}\,dx \qquad\qquad t = x^3+1$$

$$t' = 3x^2$$

$$= \int \frac{1}{t}\,dt$$

$$= \ln(t) + c$$

$$= \ln(x^3+1) + c$$

Herefter får vi:

$$\int_0^1 \frac{3x^2}{x^3+1}\,dx$$

$$= \Big[\ln(x^3+1)\Big]_0^1$$

$$= \ln(2) - \ln(1)$$

$$= \underline{\underline{\ln(2)}}$$

17. Formler for bestemt integral

17.1 Sætning (Indskudssætningen for integraler)

Når f har en stamfunktion i et interval, og a, b og c er tal i dette interval, så er

$$\int_a^b f(x)\,dx \;=\; \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

17.2 Sætning (Regneregler for bestemt integral)

Når f og g har stamfunktioner i et interval, og a og b er tal i dette interval, og k er et tal, så er

$$\int_a^b \big(f(x)+g(x)\big)dx \;=\; \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$$

$$\int_a^b \big(f(x)-g(x)\big)dx \;=\; \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx$$

$$\int_a^b k\cdot f(x)\,dx \;=\; k\cdot\int_a^b f(x)\,dx$$

17.3 Bevis (Indskudssætningen for integraler)

Lad F være en stamfunktion til f.

$$\int_a^c f(x)\,dx \quad + \quad \int_c^b f(x)\,dx$$

$= \quad F(c)-F(a) \quad + \quad F(b)-F(c)$ Ifølge definitionen på bestemt integral.

$= \quad F(b)-F(a)$

$= \quad \int_a^b f(x)\,dx$ Ifølge definitionen på bestemt integral.

Hermed er sætningen bevist.

17.4 Bevis (Regneregler for bestemt integral)

De tre formler kan bevises på næsten samme måde. Vi beviser den første.

$f(x)$ har en stamfunktion $F(x)$, og $g(x)$ har en stamfunktion $G(x)$.

Funktionen $H(x)=F(x)+G(x)$ er en stamfunktion til $h(x)=f(x)+g(x)$ da

$$H'(x) \;=\; \big(F(x)+G(x)\big)' \;=\; F'(x)+G'(x) \;=\; f(x)+g(x) \;=\; h(x)$$

hvor reglen for at differentiere en sum er begrundelsen for andet lighedstegn. Nu er

$$\int_a^b \big(f(x)+g(x)\big)dx \;=\; \int_a^b h(x)\,dx \;=\; H(b)-H(a) \;=\; \big(F(b)+G(b)\big) - \big(F(a)+G(a)\big) \;=$$

$$F(b)-F(a) \;+\; G(b)-G(a) \;=\; \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$$

Hermed er formlen bevist.

18. Formlen for areal mellem grafer

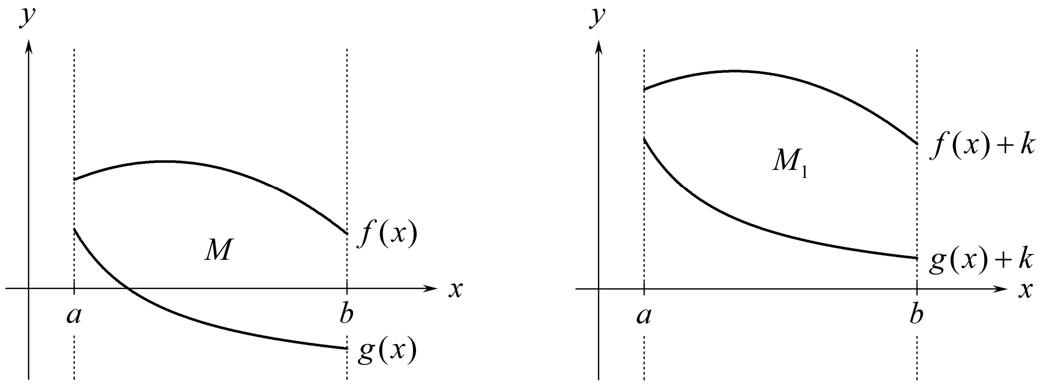
Sætning

Hvis der i et interval $a \le x \le b$ gælder om to funktioner f og g at

$$f(x) \ge g(x)$$

og M er området mellem f-grafen og g-grafen i dette interval (se venstre figur), så er

$$\text{areal af } M \;=\; \int_a^b \big(f(x) - g(x)\big)dx$$



Bevis

Vi vælger et tal k så graferne for $f(x)+k$ og $g(x)+k$ ligger over x-aksen. Se højre figur. Nu får vi

$$\begin{aligned}
\text{Areal af } M &= \text{areal af } M_1 \\
&= \begin{pmatrix}\text{areal mellem } x\text{-akse} \\ \text{og graf for } f(x)+k\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}\text{areal mellem } x\text{-akse} \\ \text{og graf for } g(x)+k\end{pmatrix} \\
&= \int_a^b \big(f(x)+k\big)dx \;-\; \int_a^b \big(g(x)+k\big)dx \\
&= \int_a^b \Big(\big(f(x)+k\big) - \big(g(x)+k\big)\Big)dx \qquad \text{ifølge formlen for integral af differens.} \\
&= \int_a^b \big(f(x) - g(x)\big)dx
\end{aligned}$$

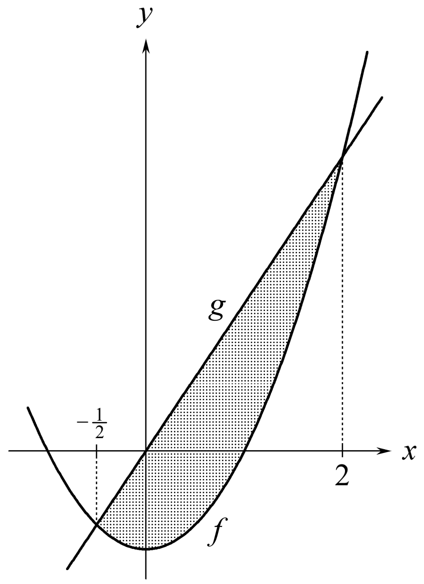
Hermed er sætningen bevist.

19. Eksempel på brug af formlen for areal mellem grafer

Graferne for funktionerne

$$f(x) = x^2 - 1 \qquad \text{og} \qquad g(x) = \tfrac{3}{2} \cdot x$$

afgrænser et område der har et areal.
Vi vil udregne dette areal.



(1) Først tegner vi graferne for f og g.

(2) Så løser vi ligningen $f(x) = g(x)$ og får at førstekoordinaterne til grafernes skæringspunkter er $-\frac{1}{2}$ og 2.

(3) Da $g(x) \geq f(x)$ for $-\frac{1}{2} \leq x \leq 2$, er det søgte areal lig $\int_{-\frac{1}{2}}^{2} \left(g(x) - f(x)\right)dx$.

(4) Vi udregner dette integral og får at arealet er $\underline{\underline{\dfrac{125}{48}}}$.

20. Areal når graf ligger under x-akse

<u>Sætning</u>

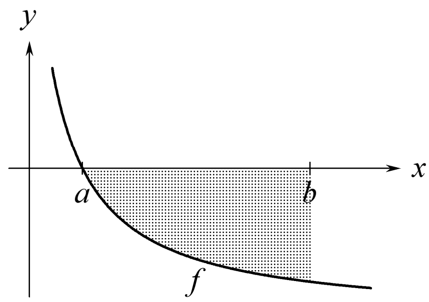
A er arealet mellem f-graf og x-akse i intervallet $a \leq x \leq b$.

Hvis

$$f(x) \leq 0 \qquad \text{for} \qquad a \leq x \leq b$$

så er

$$\int_a^b f(x)\,dx = -A$$



<u>Bevis</u>

Grafen for funktionen $g(x) = 0$ er sammenfaldende med x-aksen, så A er arealet mellem f-graf og g-graf i intervallet $a \leq x \leq b$.

$$A = \int_a^b \left(g(x) - f(x)\right)dx \qquad \text{ifølge sætning om areal mellem grafer (ramme 18)}$$

$$= \int_a^b \left(0 - f(x)\right)dx$$

$$= -\int_a^b f(x)\,dx \qquad k = -1 \text{ i regel om integral af } k \cdot f(x) \text{ (ramme 17)}$$

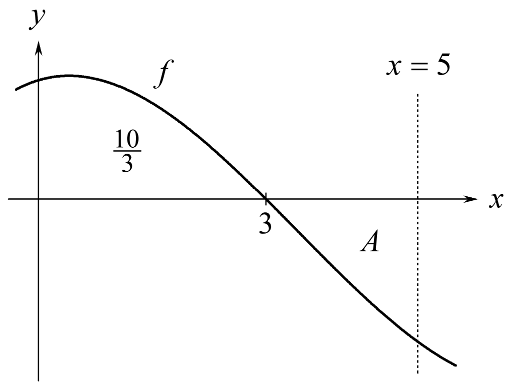
Hermed er sætningen bevist.

21. Opgave hvor integral og areal er givet

Figuren viser to områder med arealer $\frac{10}{3}$ og A.

Det er oplyst at

(1) $\int_0^5 f(x)\,dx = \frac{4}{3}$



Vi vil udregne A.

Da $f(x) \geq 0$ for $0 \leq x \leq 3$ er

(2) $\int_0^3 f(x)\,dx = \frac{10}{3}$

Da $f(x) \leq 0$ for $3 \leq x \leq 5$ er

(3) $\int_3^5 f(x)\,dx = -A$

Ifølge indskudssætningen er

$$\int_0^5 f(x)\,dx = \int_0^3 f(x)\,dx + \int_3^5 f(x)\,dx$$

I denne ligning erstatter vi de tre integraler med værdierne fra (1), (2) og (3) og får

$$\frac{4}{3} = \frac{10}{3} + (-A)$$

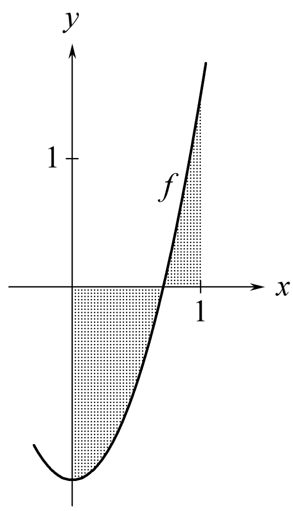
Heraf følger at $\underline{\underline{A = 2}}$.

22. Opgave hvor vi skal fortolke et integral

For funktionen $f(x) = 3x^2 - \frac{3}{2}$ skal vi udregne

$$\int_0^1 f(x)\,dx$$

og give en geometrisk fortolkning af resultatet.



(1) $\int_0^1 f(x)\,dx = \underline{\underline{-\frac{1}{2}}}$

Vi tegner grafen for f. Ligningen (1) betyder at

(grå areal over x-akse) – (grå areal under x-akse) $= -\frac{1}{2}$

Denne geometriske fortolkning af (1) kan vi også skrive sådan:

Det grå areal under x-aksen er $\frac{1}{2}$ enhed større end det grå areal over.

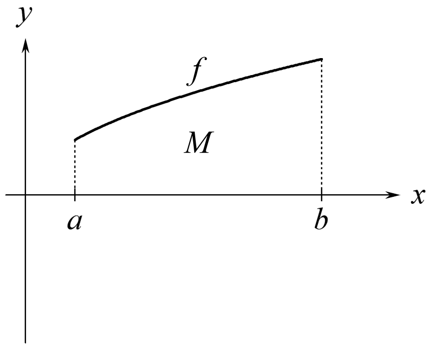
23. Rumfang af omdrejningslegeme

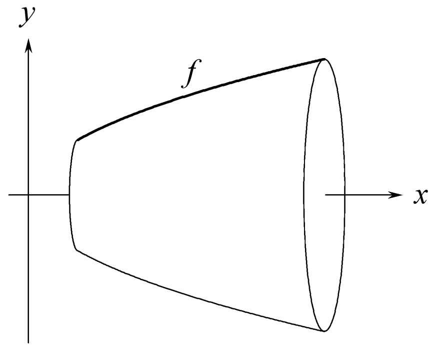
Punktmængden M på venstre figur drejer vi $360°$ om x-aksen.
Så får vi omdrejningslegemet på højre figur.

Sætning (Formlen for rumfang af omdrejningslegeme)

For omdrejningslegemet kan vi udregne rumfanget V ved hjælp af formlen

$$V = \pi\int_a^b \left(f(x)\right)^2 dx \ .$$





Venstre figur ovenfor viser grafen for funktionen

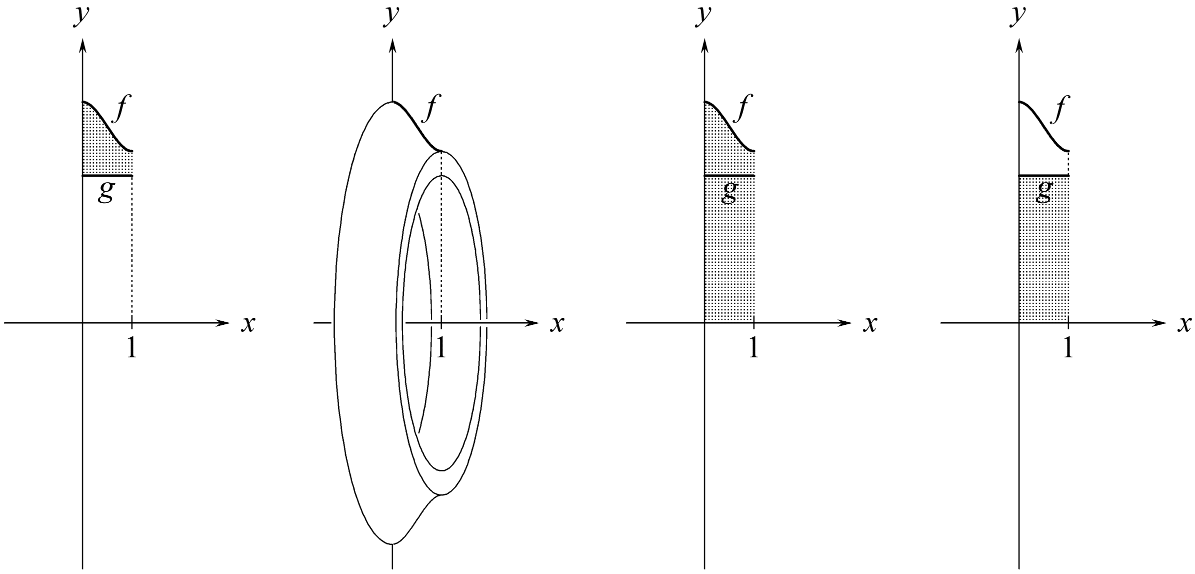
$$f(x) = \tfrac{4}{5}\sqrt{x} \ , \quad \tfrac{1}{2} \le x \le 3 \ .$$

For omdrejningslegemet på højre figur kan vi udregne rumfanget V sådan:

$$\begin{aligned} V &= \pi\int_{\frac{1}{2}}^{3} \left(\tfrac{4}{5}\sqrt{x}\right)^2 dx \\ &= \tfrac{8}{25}\pi\int_{\frac{1}{2}}^{3} 2x\,dx \\ &= \tfrac{8}{25}\pi\left[x^2\right]_{\frac{1}{2}}^{3} \\ &= \tfrac{8}{25}\pi\left(3^2 - \left(\tfrac{1}{2}\right)^2\right) \\ &= \underline{\underline{\tfrac{14}{5}\pi}} \end{aligned}$$

24. Rumfang af ring

To funktioner f og g har forskrifterne $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + \frac{9}{2}$ og $g(x) = 3$.
Den grå punktmængde på 1. figur drejer vi 360° om x-aksen.
Så får vi det ringformede omdrejningslegeme på 2. figur.
Vi vil udregne ringens rumfang V_{ring} .



Den grå punktmængde på 3. figur drejer vi 360° om x-aksen. Så får vi en skive med rumfang V_{hel} . Herfra skal vi trække hullets rumfang V_{hul} . V_{hul} er rumfanget af det omdrejningslegeme vi får når vi drejer den grå punktmængde på 4. figur 360° om x-aksen.

$$V_{hel} \;=\; \pi \int_0^1 \left(f(x)\right)^2 dx \;=\; \frac{2257}{140}\pi$$

$$V_{hul} \;=\; \pi \int_0^1 \left(g(x)\right)^2 dx \;=\; 9\pi$$

Altså er ringens rumfang

$$V_{ring} \;=\; V_{hel} - V_{hul} \;=\; \underline{\underline{\frac{997}{140}\pi}}$$

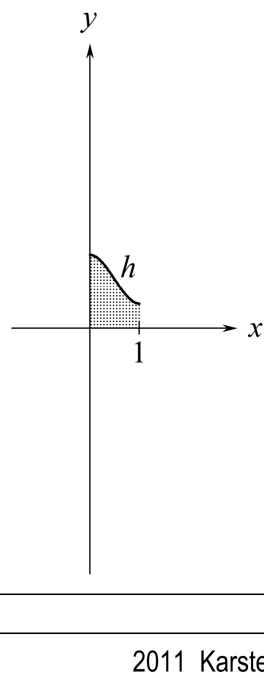
(Hullets rumfang kunne vi have udregnet ved at bruge formlen for rumfang af cylinder).

Figuren til højre viser grafen for funktionen $h(x) = f(x) - g(x)$.
Den grå punktmængde drejer vi 360° om x-aksen.
Så får vi et omdrejningslegeme med rumfanget

$$V \;=\; \pi \int_0^1 \left(f(x) - g(x) \right)^2 dx \;=\; \underline{\underline{\frac{157}{140}\pi}}$$

Vi ser at rumfanget er meget mindre end ringens rumfang.

Advarsel: Man kan ikke udregne ringens rumfang ved at indsætte $h(x) = f(x) - g(x)$ i formlen for rumfang af omdrejningslegme.



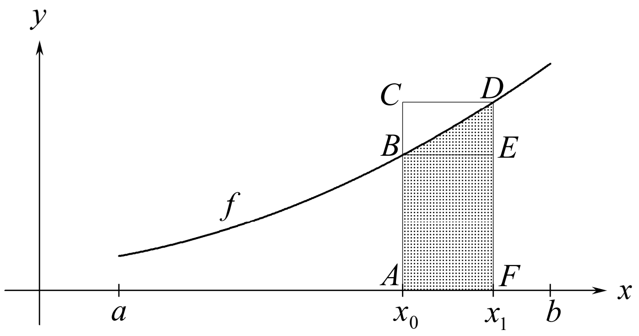
25. Bevis for at $A'(x) = f(x)$

Sætning (Se ramme 8)

Når $A(x)$ er arealfunktionen for en ikke-negativ funktion $f(x)$, $a \le x \le b$

er $A'(x) = f(x)$

Bevis



$f(x)$ er ikke-negativ og voksende i intervallet $a \le x \le b$.
x_0 og x_1 er to tal i intervallet $a \le x \le b$, og $x_0 < x_1$.

Vi beviser kun påstanden for voksende funktioner, men den gælder også for funktioner der ikke er voksende.

Af figuren ser vi at

areal af rektangel *ABEF* < areal af grå område < areal af rektangel *ACDF*

Dette kan vi også skrive sådan:

$$f(x_0) \cdot (x_1 - x_0) \quad < \quad A(x_1) - A(x_0) \quad < \quad f(x_1) \cdot (x_1 - x_0)$$

Ulighedstegnene gælder stadig når vi dividerer de tre udtryk med $x_1 - x_0$
da $x_1 - x_0$ er positiv:

(1) $$f(x_0) \quad < \quad \frac{A(x_1) - A(x_0)}{x_1 - x_0} \quad < \quad f(x_1)$$

På tilsvarende måde kan vi vise at (1) også gælder når $x_1 < x_0$.

Vi giver x_1 værdier der ligger tættere og tættere på x_0
så $f(x_1)$ kommer vilkårlig tæt på $f(x_0)$.

Så kommer brøken i (1) vilkårlig tæt på $f(x_0)$ (da den ifølge (1) er tættere på $f(x_0)$ end $f(x_1)$ er).

Med symboler kan vi skrive dette sådan:

(2) $$f(x_0) = \lim_{x_1 \to x_0} \frac{A(x_1) - A(x_0)}{x_1 - x_0}$$

Fra differentialregningen ved vi at differentialkvotienten kan udregnes som en grænseværdi på følgende måde:

(3) $$A'(x_0) = \lim_{x_1 \to x_0} \frac{A(x_1) - A(x_0)}{x_1 - x_0}$$

Af (2) og (3) følger at $A'(x_0) = f(x_0)$, og dette er det vi ville bevise.