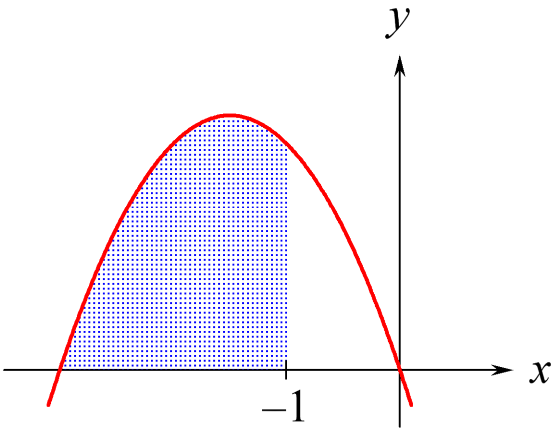
Integralregning

for A-niveau i stx, udgave 4



2017 Karsten Juul

Stamfunktion (ubestemt integral)

1. Hvad er en stamfunktion? 1
2. Undersøg om $g(x)$ er stamfunktion til $f(x)$ 1
3. Gør rede for at $g(x)$ er stamfunktion til $f(x)$ 1
4. En funktion har mange stamfunktioner. 2
5. Symbol for stamfunktion (ubestemt integral). 2
6. Bestem stamfunktion med Nspire. 2
7. Bestem stamfunktion uden hjælpemidler. 3
8. Bestem $\int f(x)\,dx$. 3
9. Integral af sammensat funktion. 4
10. Find en bestemt af stamfunktionerne. 5

Bestemt integral

11. Hvad er det bestemte integral. 6
12. Udregn $\int_a^b f(x)dx$ med Nspire. 6
13. Udregn $\int_a^b f(x)dx$ uden hjælpemidler. 6

Areal og bestemt interal

14. Areal og bestemt integral. 7
15. Kvadrant. 7
16. Areal mellem graf og x-akse. Uden hjælpemidler. 8
17. Areal mellem graf og x-akse. Med hjælpemidler. 8
18. Areal mellem grafer. Eksempel 1. 10
19. Areal mellem grafer. Eksempel 2. 10
20. Areal i tilfælde der ikke er standard. 11
21. Opgave hvor integral og areal er givet. 11
22. Opdelt område. 12
23. Fortolk integral. Eksempel 1. 12
24. Fortolk integral. Eksempel 2. 12
25. Fortolk integral. Eksempel 3. 12
26. Bestem k så areal er lig et oplyst tal. 13

Rumfang af omdrejningslegeme

27. Rumfang af omdrejningslegeme. 14
28. Rumfang af skål. 14
29. Rumfang af ring. 15

Andre anvendelser

30. Andre anvendelser. 15

Beviser

31. Formler for bestemt integral. 16
32. Hvad er en arealfunktion? 17
33. Vigtig regel om arealfunktioner. 17
34. Bevis for at $A'(x) = f(x)$ 18
35. Areal når graf ligger over x-akse. 19
36. Areal mellem grafer. 20
37. Areal når graf ligger under x-akse. 21

Tidligere versioner af dette hæfte har skiftet adresse til

http://mat1.dk/integralregning_for_a_niveau_i_stx_udgave_1.pdf
http://mat1.dk/integralregning_for_a_niveau_i_stx_udgave_2.pdf
http://mat1.dk/integralregning_for_a_niveau_i_stx_udgave_3.pdf

Stamfunktion (ubestemt integral)

1. Hvad er en stamfunktion?

$g(x)$ er en stamfunktion til $f(x)$

hvis

$g(x)$ differentieret giver $f(x)$

dvs. hvis

$g'(x) = f(x)$

2. Undersøg om $g(x)$ er stamfunktion til $f(x)$.

Opgave

Undersøg om $g(x) = \frac{1}{3}x^3 + 4x$ er en stamfunktion til $f(x) = x^2$.

Besvarelse

For at undersøge om $g(x)$ er stamfunktion til $f(x)$,
vil vi differentiere $g(x)$:

$$g'(x) = \left(\tfrac{1}{3}x^3 + 4x\right)' = \left(\tfrac{1}{3}x^3\right)' + (4x)' = \tfrac{1}{3}\left(x^3\right)' + 4 = \tfrac{1}{3}\cdot 3x^2 + 4 = x^2 + 4 \neq f(x)$$

Da $g(x)$ differentieret ikke giver $f(x)$, gælder:

$\underline{\underline{g(x) \text{ er ikke en stamfunktion til } f(x)}}$

3. Gør rede for at $g(x)$ er stamfunktion til $f(x)$.

Opgave

Gør rede for at $g(x) = \frac{1}{3}x^3 + 4$ er en stamfunktion til $f(x) = x^2$.

Besvarelse

For at gøre rede for at $g(x)$ er stamfunktion til $f(x)$,
vil vi differentiere $g(x)$:

$$g'(x) = \left(\tfrac{1}{3}x^3 + 4\right)' = \left(\tfrac{1}{3}x^3\right)' + 4' = \tfrac{1}{3}\left(x^3\right)' + 0 = \tfrac{1}{3}\cdot 3x^2 = x^2 = f(x)$$

Da $g(x)$ differentieret giver $f(x)$, gælder:

$g(x)$ er en stamfunktion til $f(x)$

4. En funktion har mange stamfunktioner.

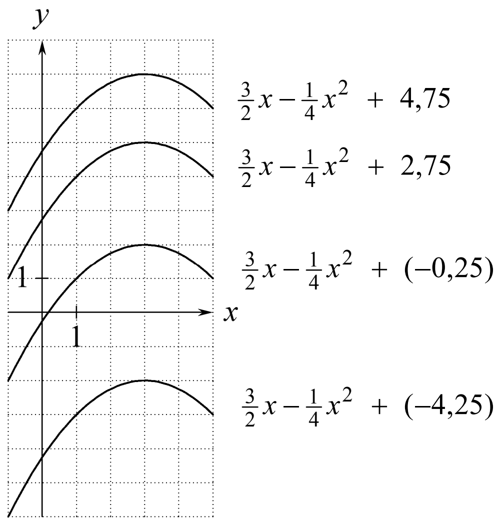
$$\left(\tfrac{3}{2}x-\tfrac{1}{4}x^2\right)' = \tfrac{3}{2}-\tfrac{1}{2}x$$

$$\left(\tfrac{3}{2}x-\tfrac{1}{4}x^2 + 5\right)' = \tfrac{3}{2}-\tfrac{1}{2}x$$

$$\left(\tfrac{3}{2}x-\tfrac{1}{4}x^2 + 8\right)' = \tfrac{3}{2}-\tfrac{1}{2}x$$

$\tfrac{3}{2}x-\tfrac{1}{4}x^2+c$ er stamfunktion til $\tfrac{3}{2}-\tfrac{1}{2}x$
uanset hvilket tal vi skriver i stedet for c .

I koordinatsystemet har vi tegnet graferne for nogle af stamfunktionerne til $\tfrac{3}{2}-\tfrac{1}{2}x$.



4a Regel Hvis $h(x)$ er en af stamfunktionerne til $f(x)$, så er funktionerne $h(x)+k$ samtlige stamfunktioner til $f(x)$.

4b Regel Hvis $h(x)$ er en stamfunktion til $f(x)$, så vil stamfunktionerne til $f(x)$ være de funktioner hvis graf vi kan få ved at rykke $h(x)$-grafen op eller ned.

5. Symbol for stamfunktion (ubestemt integral).

Symbolet $\int f(x)\,dx$

betyder: stamfunktionerne til $f(x)$

og læses: det ubestemte integral af $f(x)$

Når vi finder ud af hvad $\int f(x)\,dx$ er lig, så siger vi at vi integrerer $f(x)$

Eksempel: $\int (2x+1)\,dx = x^2+x+c$

6. Bestem stamfunktion med Nspire.

På skabelon-paletten vælger vi integralskabelonen $\int \square \, \mathrm{d}\square$

Nspire skriver kun én af stamfunktionerne: $\int 7^x \, \mathrm{d}x = \dfrac{7^x}{\ln(7)}$ Vi må selv tilføje $+c$: $\int 7^x \, \mathrm{d}x = \dfrac{7^x}{\ln(7)} + c$

For at finde stamfunktion til

$$f(x) = 3x - \frac{2}{x} \;,\quad x>0$$

skal vi efter integraltegnet angive at $x>0$:

Husk at trykke på højre-pilen inden du taster den lodrette streg!

$|x>0$ skal stå uden for $\int \square \, \mathrm{d}\square$

$$\int \left(3\cdot x-\frac{2}{x}\right)\mathrm{d}x \,|\, x>0 = \frac{3\cdot x^2}{2} - 2\cdot \ln(x)$$ Udregnet af Nspire

7. Bestem stamfunktion uden hjælpemidler.

7a	k	har stamfunktionen	$k \cdot x$ k er en konstant	**f.eks.**	6	har stamfunktionerne	$6x + c$
7b	x	har stamfunktionen	$\frac{1}{2}x^2$	**dvs.**	x	har stamfunktionerne	$\frac{1}{2}x^2 + c$
7c	x^a	har stamfunktionen	$\frac{1}{a+1} \cdot x^{a+1}$	**f.eks.**	x^3	har stamfunktionerne	$\frac{1}{4}x^4 + c$
				MEN	4^x	har **IKKE** stamfunktionen	$\frac{1}{x+1} \cdot 4^{x+1}$

7d	x^{-1}	har stamfunktionen	$\ln(x)$ i intervallet $x > 0$	**dvs.**	x^{-1}	har stamfunktionerne	$\ln(x) + c$, $x > 0$
7e	$\frac{1}{x}$	har stamfunktionen	$\ln(x)$ i intervallet $x > 0$	**dvs.**	$\frac{1}{x}$	har stamfunktionerne	$\ln(x) + c$, $x > 0$
				MEN	$\frac{1}{2-x}$	har **IKKE** stamfunktionen	$\ln(2-x)$
7f	e^x	har stamfunktionen	e^x	**dvs.**	e^x	har stamfunktionerne	$e^x + c$

7g Hvis: $f(x)$ har stamfunktionen $F(x)$
så: $k \cdot f(x)$ har stamfunktionen $k \cdot F(x)$

f.eks. $12x^3$ har stamfunktionerne $12 \cdot \frac{1}{4}x^4 + c$ dvs. $3x^4 + c$

7h Hvis: $f(x)$ har stamfunktionen $F(x)$ og
$g(x)$ har stamfunktionen $G(x)$

så: $f(x) + g(x)$ har stamfunktionen $F(x) + G(x)$
$f(x) - g(x)$ har stamfunktionen $F(x) - G(x)$

f.eks. $6 - e^x$ har stamfunktionerne $6x - e^x + c$

f.eks. $x + \frac{1}{x}$ har stamfunktionerne $\frac{1}{2}x^2 + \ln(x) + c$ i intervallet $x > 0$

7i $\int f(g(x)) \cdot g'(x)\, dx = F(g(x)) + c$, hvor $F'(t) = f(t)$. Se ramme 9.

f.eks. $\int (x^2+1)^3 \cdot 2x\, dx = \int (x^2+1)^3 \cdot (x^2+1)'\, dx = \frac{1}{4}(x^2+1)^4 + c$ da $\left(\frac{1}{4}t^4\right)' = t^3$

7j <u>Advarsel:</u> Man kan IKKE integrere et udtryk ved at integrere hver del af udtrykket (bortset fra visse specielle tilfælde), f.eks.

$x^3 \cdot e^x$ har **IKKE** stamfunktionen $\frac{1}{4}x^4 \cdot e^x$

$\frac{x^3}{e^x}$ har **IKKE** stamfunktionen $\frac{\frac{1}{4}x^4}{e^x}$

$5 \cdot e^x$ har **IKKE** stamfunktionen $5x \cdot e^x$

8. Bestem $\int f(x)\, dx$.

8a Opgave Bestem integralet $\int 6x^2 dx$.

Besvarelse $\int 6x^2 dx = 6 \cdot \frac{1}{2+1} x^{2+1} + c = 6 \cdot \frac{1}{3}x^3 + c = \underline{\underline{2x^3 + c}}$.

8b Opgave: Bestem integralet $\int (8x^3 + 2x - 5)dx$.

Besvarelse

$$\int (8x^3 + 2x - 5)dx = 8 \cdot \frac{1}{3+1} x^{3+1} + 2 \cdot \frac{1}{2} x^2 - 5 \cdot x + c = 8 \cdot \frac{1}{4} \cdot x^4 + 1 \cdot x^2 - 5x + c = \underline{\underline{2x^4 + x^2 - 5x + c}}$$

9. Integral af sammensat funktion.

9a Regel for stamfunktion til sammensat funktion:

$$\int f(g(x))\cdot g'(x)\,dx \;=\; F(g(x))+c \quad , \qquad \text{hvor } F'(t)=f(t)\ .$$

Bevis for reglen ved hjælp af metoden fra ramme 2:

Vi bruger reglen for at differentiere sammensat funktion:

$$\left(F(g(x))+c\right)' \;=\; F'(g(x))\cdot g'(x) \;+\; 0 \;=\; f(g(x))\cdot g'(x)$$

Da $F(g(x))+c$ differentieret giver $f(g(x))\cdot g'(x)$, er $F(g(x))+c$ en stamfunktion til $f(g(x))\cdot g'(x)$.

Eksempler på brug af denne regel:

9b $\int (x^2+1)^3\cdot 2x\,dx \;=\; \int (x^2+1)^3\cdot (x^2+1)'\,dx \;=\; \underline{\underline{\tfrac{1}{4}(x^2+1)^4+c}}$, da $\left(\tfrac{1}{4}t^4\right)'=t^3$.

Kontrol for regnefejl (se ramme 2): $\left(\tfrac{1}{4}(x^2+1)^4\right)' = \tfrac{1}{4}\cdot 4(x^2+1)^{4-1}\cdot (x^2+1)' \;=\; (x^2+1)^3\cdot 2x$

9c I følgende eksempel tilføjer vi tallet 2 foran x for at opnå at det der står, er differentialkvotienten af den indre funktion x^2+1 . For at lighedstegnet skal gælde, ganger vi samtidig integralet med $\tfrac{1}{2}$.

$\int (x^2+1)^3\cdot x\,dx \;=\; \tfrac{1}{2}\cdot\int (x^2+1)^3\cdot 2x\,dx \;=\; \tfrac{1}{2}\cdot\int (x^2+1)^3\cdot (x^2+1)'\,dx \;=$

$\tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{4}(x^2+1)^4+c \;=\; \underline{\underline{\tfrac{1}{8}(x^2+1)^4\;+c}}$, da $\left(\tfrac{1}{4}t^4\right)'=t^3$.

9d $\int 3\mathrm{e}^{1+3x}dx \;=\; \int \mathrm{e}^{1+3x}\cdot (1+3x)'\,dx \;=\; \underline{\underline{\mathrm{e}^{1+3x}+c}}$, da $\left(\mathrm{e}^t\right)'=\mathrm{e}^t$.

9e $x>-1:\; \int \frac{3x^2}{x^3+1}\,dx \;=\; \int \frac{1}{x^3+1}\cdot 3x^2dx \;=\; \int \frac{1}{x^3+1}\cdot (x^3+1)'dx \;=\; \underline{\underline{\ln(x^3+1)+c}}$,

da $\ln'(t)=\tfrac{1}{t}$, $t>0$.

10. Find en bestemt af stamfunktionerne.

10a Opgave (Vi kender et punkt på stamfunktionens graf)

F er en stamfunktion til $f(x) = 2x + 3$.

Det er oplyst at

grafen for F går gennem punktet $(-1, -6)$.

I nogle opgaver er denne oplysning formuleret sådan:

$F(-1) = -6$.

Find F .

Besvarelse

Da F er en stamfunktion til $f(x) = 2x + 3$, findes en konstant c så

$$F(x) = x^2 + 3x + c$$

Da grafen for F går gennem punktet $(-1, -6)$, må

$$(-1)^2 + 3\cdot(-1) + c \;=\; -6$$

Når vi indsætter et grafpunkts *x*-koordinat i forskriften og regner ud, så får vi grafpunktets *y*-koordinat.

så $c = -4$, dvs.

$$\underline{\underline{F(x) = x^2 + 3x - 4 \;,\quad -\infty < x < \infty}}$$

10b Opgave (Vi kender en linje der er tangent til stamfunktionens graf)

F er en stamfunktion til $f(x) = 2x + 3$.

Det er oplyst at

Linjen med ligningen $y = x - 5$ er tangent til grafen for F .

Find F .

Besvarelse

Da F er en stamfunktion til $f(x) = 2x + 3$, findes en konstant c så

$$F(x) = x^2 + 3x + c$$

Først udregner vi et punkt der ligger på grafen for F ,
nemlig det punkt (x_0, y_0) hvori tangenten rører grafen.
Af tangentens ligningen $y = x - 5$ ser vi at tangenthældningen er 1 :

$$F'(x_0) \;=\; 1$$
$$2x_0 + 3 \;=\; 1$$
$$x_0 \;=\; -1$$

Når vi indsætter et grafpunkts *x*-koordinat i forskriften for differentialkvotienten og regner ud, så får vi grafpunktets tangenthældning.

Da $x_0 = -1$ og (x_0, y_0) ligger på linjen med ligningen

$$y = x - 5$$

får vi

$$y_0 \;=\; (-1) - 5$$
$$y_0 \;=\; -6$$

At en linjes ligning er $y = ax + b$ betyder at for et punkt på linjen kan vi udregne *y*-koordinaten ved at gange *x*-koordinaten med a og lægge b til resultatet.

Nu kender vi et punkt på grafen for F . Så kan vi bruge metoden fra opgave 10a.

Bestemt integral

11. Hvad er det bestemte integral.

Det bestemte integral fra a til b af $f(x)$ er tallet

$$\int_a^b f(x)\,dx \;=\; F(b)-F(a)$$

hvor $F(x)$ er en stamfunktion til $f(x)$.

Det bestemte integral er et tal. Det ubestemte integral er funktioner.

12. Udregn $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ med Nspire.

På skabelon-paletten vælger vi integralskabelonen $\int_{\square}^{\square} \square \,\mathrm{d}\square$

Eksempel: $\int_{-1}^{4} \left(6\cdot x^2-5\right)\mathrm{d}x = 105$ *udregnet af Nspire* ← Husk at skrive dette!

13. Udregn $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ uden hjælpemidler.

13a Når vi udregner bestemte integraler uden hjælpemidler, er det praktisk at bruge

symbolet $\left[F(x)\right]_a^b$ som betyder $F(b)-F(a)$

Fordelen er at vi kan skrive stamfunktionen inden vi indsætter grænserne a og b for x.

13b **Simpel opgave**

Udregn $\int_{-1}^{4}(6x^2-5)\,dx$.

Her skal du skrive en stamfunktion til det der står efter integraltegnet. Du skal IKKE skrive +c .

Øvre grænse 4 sættes først ind. Så indsættes nedre grænse –1.

Svar

$$\int_{-1}^{4}(6x^2-5)\,dx \;=\; \left[6\cdot\tfrac{1}{2+1}x^{2+1}-5x\right]_{-1}^{4} \;=\; \left[2x^3-5x\right]_{-1}^{4} \;=\; \left(2\cdot 4^3-5\cdot 4\right)-\left(2\cdot(-1)^3-5\cdot(-1)\right) \;=\; \underline{\underline{105}}$$

13c **Opgave med sammensat funktion**

Udregn $\int_{\frac{1}{2}}^{1}(2x-1)^3\,dx$.

Svar (*Først finder vi stamfunktionen ved hjælp af metoden fra ramme 9*)

$$\int(2x-1)^3\,dx \;=\; \tfrac{1}{2}\int(2x-1)^3\cdot 2\,dx \;=\; \tfrac{1}{2}\int(2x-1)^3\cdot(2x-1)'\,dx \;=\; \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{4}(2x-1)^4+c \;=\; \tfrac{1}{8}(2x-1)^4+c$$

$$\int_{\frac{1}{2}}^{1}(2x-1)^3\,dx \;=\; \left[\tfrac{1}{8}(2x-1)^4\right]_0^1 \;=\; \tfrac{1}{8}(2\cdot 1-1)^4-\tfrac{1}{8}(2\cdot\tfrac{1}{2}-1)^4 \;=\; \tfrac{1}{8}\cdot 1^4-\tfrac{1}{8}\cdot 0^4 \;=\; \underline{\underline{\tfrac{1}{8}}}$$

Areal og bestemt interal

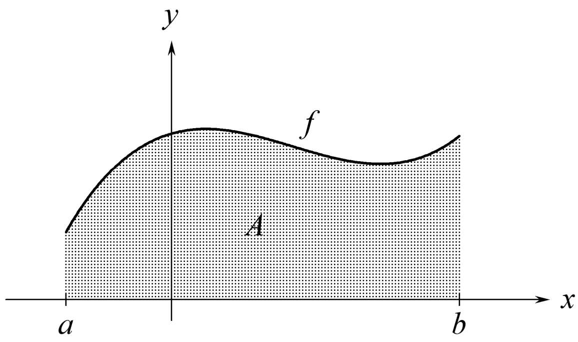
14. Areal og bestemt integral.

14a Regel *Areal når graf er over x-aksen*

A er arealet mellem f-graf og x-akse
i intervallet $a \le x \le b$.

Hvis $f(x) \ge 0$ for $a \le x \le b$

er $A = \int_a^b f(x)\,dx$



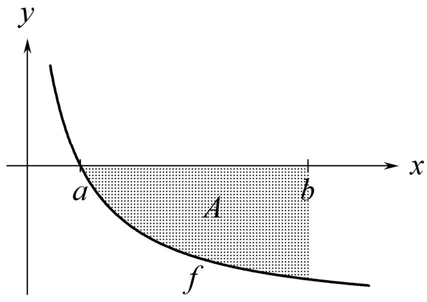
14b Regel *Areal når graf er under x-aksen*

A er arealet mellem f-graf og x-akse
i intervallet $a \le x \le b$.

Hvis $f(x) \le 0$ for $a \le x \le b$

er $A = -\int_a^b f(x)\,dx$

Bemærk: "minus integral"
er et positivt tal.

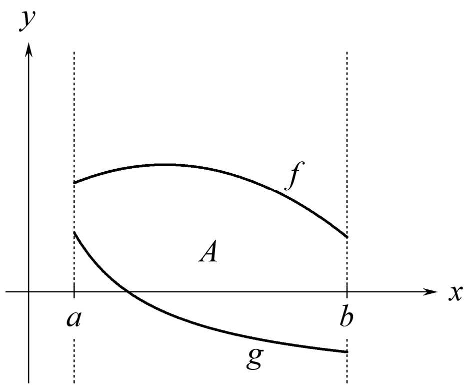


14c Regel *Areal mellem grafer*

A er arealet mellem f-graf og g-graf
i intervallet $a \le x \le b$.

Hvis $f(x) \ge g(x)$ for $a \le x \le b$

er $A = \int_a^b \big(f(x) - g(x)\big)\,dx$

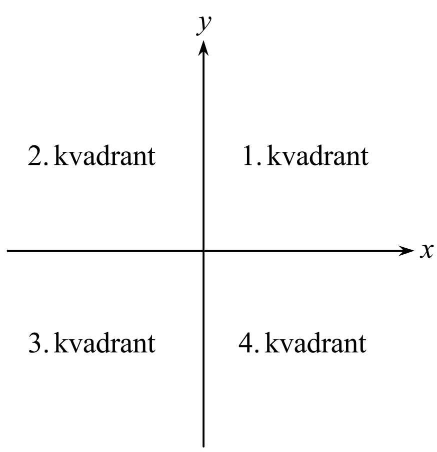


15. Kvadrant.

I opgaver hvor vi skal bestemme arealer,
kan der stå ordet **kvadrant**.

Koordinatakserne deler planen op i fire kvadranter.

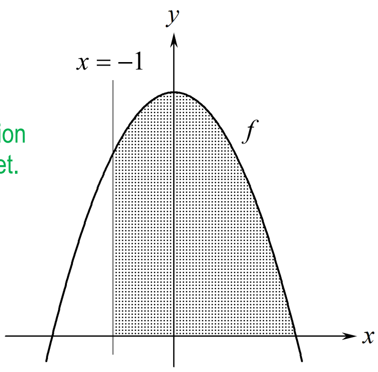
Figuren viser hvad de fire kvadranter hedder.



16. Areal mellem graf og x-akse. Uden hjælpemidler.

Opgave Oplysninger fra opgaveteksten som du bruger, skal med i besvarelsen selv om det ikke er vist her.

Figuren viser grafen for funktionen $f(x) = 4 - x^2$ og linjen med ligningen $x = -1$. Grafen for f skærer x-aksen i punkterne $(-2\,,0)$ og $(2\,,0)$. Bestem arealet af det grå område.



Besvarelse

Her skal du skrive en stamfunktion til det der står efter integraltegnet. Du skal ikke skrive +c .

Det grå område er

området mellem grafen for f og x-aksen i intervallet $-1 \le x \le 2$

Da $f(x) \ge 0$ i dette interval, er arealet Se 14a

$$\int_{-1}^{2}(4 - x^2)\,dx = \left[4x - \tfrac{1}{3}x^3\right]_{-1}^{2}$$ Se 13b

Disse klammer skal du kun bruge hvis opgaven er uden hjælpemidler. Med hjælpemidler skal du kun taste integralet og trykke på enter.

$$= \left(4\cdot 2 - \tfrac{1}{3}\cdot 2^3\right) - \left(4\cdot(-1) - \tfrac{1}{3}\cdot(-1)^3\right)$$

Venstre grænse skal stå nederst.

$$= 8 - \tfrac{8}{3} - \left(-4 + \tfrac{1}{3}\right)$$

Øvre grænse først, så nedre.

$$= 8 - \tfrac{8}{3} + 4 - \tfrac{1}{3}$$

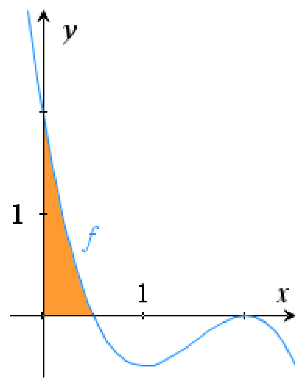
$$= 9$$

Arealet af det grå område er $\underline{\underline{9}}$.

17. Areal mellem graf og x-akse. Med hjælpemidler.

17a Opgave

$f(x) = -x^3 + 4{,}5x^2 - 6x + 2$. Bestem areal af området der i første kvadrant afgrænses af f-graf og koordinatakser.



Bemærkning

Nspire tegner f-graf, og vi markerer det søgte areal.

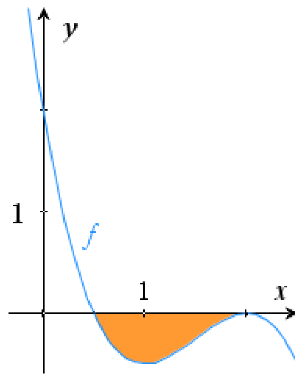
Når vi går fra venstre mod højre, så starter området ved y-aksen, dvs. der hvor x er 0, så integralets nedre grænse er 0.

Området slutter ved det ene fællespunkt for f-graf og x-akse, så dette punkts x-koordinat er integralets øvre grænse. Vi skal løse ligningen $f(x) = 0$ for at finde x-koordinater til fællespunkter for f-graf og x-akse. På figur ser vi at vi skal bruge den af løsningerne der ligger mellem 0 og 1.

$$areal = \int_{0}^{0,5} f(x)\,dx = \int_{0}^{0,5}(-x^3 + 4{,}5x^2 - 6x + 2)\,dx$$ Se 14a

17b Opgave

$f(x) = -x^3 + 4{,}5x^2 - 6x + 2$. Bestem areal af området der i fjerde kvadrant afgrænses af f-graf og førsteakse.



Bemærkning

Nspire tegner f-graf, og vi markerer det søgte areal.

Når vi går fra venstre mod højre, så starter området ved et fællespunkt for f-graf og x-akse, så dette punkts x-koordinat er integralets nedre grænse.

Området slutter ved et fællespunkt for f-graf og x-akse, så dette punkts x-koordinat er integralets øvre grænse. Vi skal løse ligningen $f(x) = 0$ for at finde x-koordinater til fællespunkter for f-graf og x-akse.

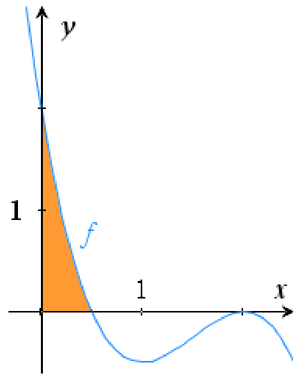
$$areal = -\int_{0,5}^{2} f(x)\,dx = -\int_{0,5}^{2}(-x^3 + 4{,}5x^2 - 6x + 2)\,dx$$ Se 14b

Ramme 17 fortsætter på næste side.

17c Opgave

$f(x) = -x^3 + 4{,}5x^2 - 6x + 2$. Bestem areal af området der i første kvadrant afgrænses af *f*-graf og koordinatakser.

Besvarelse 1 Skal kunnes.



På figur har Nspire tegnet graf for $f(x) = -x^3 + 4{,}5x^2 - 6x + 2$, og vi har vist området der i første kvadrant er afgrænset af *f*-graf og koordinatakser. Vi ser at dette område starter ved *y*-aksen, dvs. ved $x = 0$, så integralets nedre grænse er 0. Området slutter ved et fællespunkt for *f*-graf og *x*-akse, så dette punkts *x*-koordinat er integralets øvre grænse.

Nspire løser ligningen $f(x) = 0$ dvs. ligningen $-x^3 + 4{,}5x^2 - 6x + 2 = 0$ mht. x og får at fællespunkternes *x*-koordinater er $x = 0{,}5$ og $x = 2$.

$$\text{solve}\left(-x^3+4.5\cdot x^2-6\cdot x+2=0,x\right) \blacktriangleright x=0.5 \text{ or } x=2.$$

Det søgte areal er altså areal mellem *f*-graf og *x*-akse i intervallet $0 \le x \le 0{,}5$.

Da $f(x) \ge 0$ i dette interval, er

Se 14a

$$\text{areal} = \int_0^{0.5} \left(-x^3+4.5\cdot x^2-6\cdot x+2\right) dx = 0.421875 \qquad \textit{udregnet af Nspire}$$

Venstre grænse skal stå nederst.

Areal af område der i første kvadrant afgrænses af *f*-graf og akser, er $\underline{\underline{0{,}422}}$.

Besvarelse 2 Skal ikke kunnes, men er nyttig for nogen. Samme figur som i besvarelse 1.

$f(x) := -x^3 + 4.5\cdot x^2 - 6\cdot x + 2 \blacktriangleright$ *Udført*

Nspire tegner grafen for *f*. På figuren har vi vist området der i første kvadrant er afgrænset af *f*−graf og koordinatakser. Vi ser at dette område starter ved *y*−aksen, dvs. ved x=0, så integralets nedre grænse er 0. Området slutter ved et fællespunkt for *f*−graf og x−akse, så dette punkts x−koordinat er integralets øvre grænse.

Nspire løser ligningen *f*(x)=0 og får at fællespunkternes x−koordinater er x=0,5 og x=2 .

$$\text{solve}(f(x)=0,x) \blacktriangleright x=0.5 \text{ or } x=2.$$

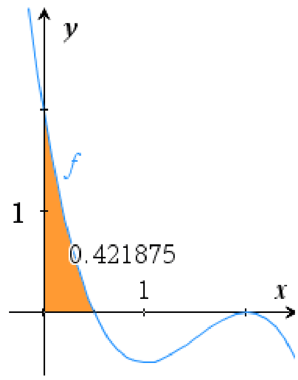
Det søgte areal er altså atrealet mellem *f*−graf og x−akse i intervallet 0≤x≤0,5 .

Da *f*(x)≥0 i dette interval, er

$$\textit{areal} = \int_0^{0.5} f(x)\, dx = 0.421875 \qquad \textit{udregnet af Nspire}$$

Arealet af området der i første kvadrant er afgrænset af *f*−graf og koordinatakser, er 0,422 .

Besvarelse 3 Skal ikke kunnes, men er god kontrol.



Vi taster $f(x) = -x^3 + 4{,}5x^2 - 6x + 2$ og får Nspire til at tegne graf (*se figur*).

For denne får vi Nspire til at udregne integral fra $x = 0$ til første fællespunkt for *f*-graf og *x*-akse. Når der spørges om nedre grænse, taster vi 0 **enter**. Når der spørges om øvre grænse, fører vi markør til skæringspunkt så der står skæringspunkt, og klikker.

areal = 0,421875 ≈ 0,422

Ovenstående er ikke en brugsanvisning til Nspire.
Det er et eksempel på hvordan en besvarelse kan se ud.
Du skal gøre følgende:
Vælg i værktøjsmenu Undersøg grafer / Integral .
Hvis der er flere grafer, spørges først graf? . Klik på den graf det drejer sig om.
Der spørges nedre grænse? . Tast 0 og tryk på Enter.
Der spørges øvre grænse? . Flyt markør til skæringspunkt så der står skæringspunkt og klik.
Så skrives integralet. Området er nu blevet farvet.

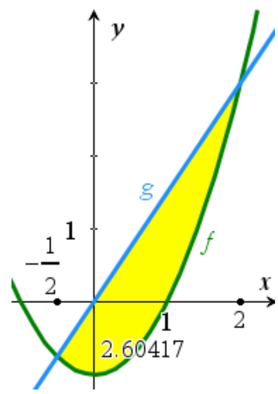
18. Areal mellem grafer. Eksempel 1.

Opgave Bestem arealet af det område der afgrænses af graferne for funktionerne

$$f(x) = x^2 - 1 \quad \text{og} \quad g(x) = \tfrac{3}{2} \cdot x$$

Besvarelse 1 Skal kunnes.

Nspire tegner grafer for $f(x) = x^2 - 1$ og $g(x) = \frac{3}{2} \cdot x$. På figur ser vi at integralets grænser er x-koordinater til grafers skæringspunkter.



Nspire løser ligningen $f(x) = g(x)$, dvs. $x^2 - 1 = \frac{3}{2} \cdot x$ mht. x og får at x-koordinaterne til grafernes skæringspunkter er $-\frac{1}{2}$ og 2.

$\text{solve}\left(x^2-1=\frac{3}{2}\cdot x,x\right) \blacktriangleright x=\frac{-1}{2} \text{ or } x=2$

ADVARSEL: Det er ikke altid at du skal løse denne ligning. Se ramme 19.

Da $g(x) \geq f(x)$ for $-\frac{1}{2} \leq x \leq 2$, er det søgte areal lig

$$\int_{\frac{-1}{2}}^{2} \left(\frac{3}{2}\cdot x-\left(x^2-1\right)\right)dx = \frac{125}{48}$$

udregnet af Nspire

Venstre grænse skal stå nederst.

Besvarelse 2 Skal ikke kunnes, men er nyttig for nogen.

Nspire tegner **grafer** for funktionerne (*se figur*)

$f(x):=x^2-1 \blacktriangleright \textit{Udført} \qquad g(x):=\frac{3}{2}\cdot x \blacktriangleright \textit{Udført}$

Nspire løser ligningen $f(x)=g(x)$ mht. x og får at

x-koordinater til grafers **skæringspunkter** er $\frac{-1}{2}$ og 2

$\text{solve}(f(x)=g(x),x) \blacktriangleright x=\frac{-1}{2} \text{ or } x=2$

Da $g(x)\geq f(x)$ for $\frac{-1}{2}\leq x\leq 2$, er det **søgte areal** lig

$$\int_{\frac{-1}{2}}^{2} (g(x)-f(x))dx = \frac{125}{48}$$

udregnet af Nspire

Besvarelse 3 Skal ikke kunnes, men er god kontrol.

Vi taster $f(x)=x^2-1$ og $g(x)=\frac{3}{2}x$

og får Nspire til at tegne grafer (*se figur*).

For disse får vi Nspire til at udregne areal mellem grafer mellem skæringspunkterne. Når der spørges om nedre og øvre grænse, fører vi markør til skæringspunkt så der står skæringspunkt og klikker.

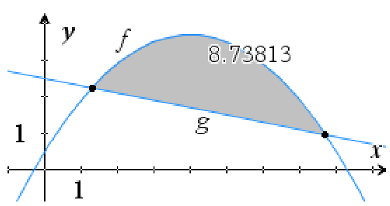
areal = 2,60417 ≈ 2,60

Hvis grænserne ikke er skæringspunkter, men givne tal, kan vi bruge en formulering som:

udregne areal mellem grafer fra x=2 til x=5 . Når der spørges om nedre og øvre grænse taster vi tallene 2 og 5.

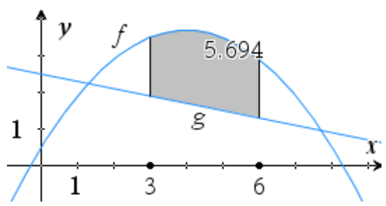
Ovenstående er ikke en brugsanvisning til Nspire. Det er et eksempel på hvordan en besvarelse kan se ud. Du skal gøre følgende: Vælg i værktøjsmenu Undersøg grafer / Areal af område . Hvis der er flere grafer, spørges først graf? og 2. graf?. Klik på grafen. Der spørges nedre grænse? . Flyt markør til venstre skæringspunkt så der står skæringspunkt og klik. Der spørges øvre grænse? . Flyt markør til højre skæringspunkt så der står skæringspunkt og klik. Så skrives arealet. Området er nu blevet farvet. Hvis en grænse ikke er et skæringspunkt, men f.eks. 4, så tast 4 og tryk på enter i stedet for at klikke.

19. Areal mellem grafer. Eksempel 2.



$areal = \int_1^8 (f(x) - g(x))\, dx$

Her er integralets grænser løsninger til ligningen $f(x) = g(x)$.



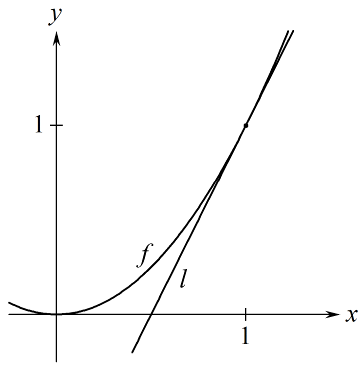
$areal = \int_2^5 (f(x) - g(x))\, dx$

Her er integralets grænser IKKE løsninger til ligningen $f(x) = g(x)$.

20. Areal i tilfælde der ikke er standard.

20a Opgave Figuren viser grafen for funktionen $f(x)=x^2$ og linjen l: $y=2x-1$. l er tangent til grafen for f i punktet $(1,1)$.
I første kvadrant afgrænser grafen for f sammen med linjen l og førsteaksen en punktmængde M der har et areal.

Bestem arealet af M.

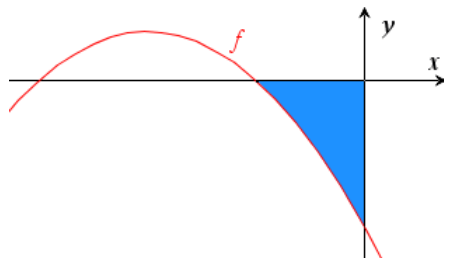


Besvarelse Ligningen $2x-1=0$ har løsningen $x=\frac{1}{2}$, så l skærer x-aksen i punktet $(\frac{1}{2},0)$.

$$\begin{aligned}\text{Areal af } M &= (\text{areal mellem } f\text{-graf og } x\text{-akse i intervallet } 0\le x\le 1) - \\ &\quad\ (\text{areal mellem } l \text{ og } x\text{-akse i intervallet } \tfrac{1}{2}\le x\le 1) \\ &= \int_0^1 x^2dx - \int_{\frac{1}{2}}^1(2x-1)\,dx = \left[\tfrac{1}{3}x^3\right]_0^1 - \left[x^2-x\right]_{\frac{1}{2}}^1 \\ &= (\tfrac{1}{3}\cdot 1^3-\tfrac{1}{3}\cdot 0^3) - \left((1^2-1)-((\tfrac{1}{2})^2-\tfrac{1}{2})\right) = \tfrac{1}{3}-\tfrac{1}{4} = \underline{\underline{\tfrac{1}{12}}}\end{aligned}$$

20b Opgave Funktionen g er en stamfunktion til funktionen f.
Ligningen $f(x)=g(x)$ har netop 2 løsninger.

x	-6	-2	0
$f(x)$	0	0	-3
$g(x)$	0	$\frac{8}{3}$	0



Bestem arealet af det blå område.

Besvarelse Da $f(-6)=0$ og $f(-2)=0$, må -6 og -2 være de to løsninger til ligningen $f(x)=g(x)$, så -6 og -2 er x-koordinater til f-grafens skæringspunkter med x-aksen. Det blå areal er altså

arealet mellem f-graf og x-akse i intervallet $-2\le x\le 0$.

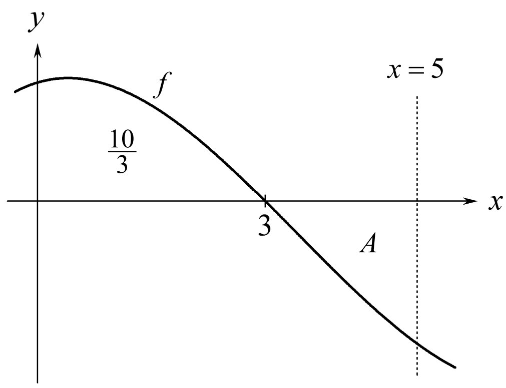
Da $f(x)\le 0$ i dette interval, er arealet lig **minus** integralet:

$$\begin{aligned}\text{areal} &= -\int_{-2}^{0} f(x)\,dx \\ &= -\left[g(x)\right]_{-2}^{0} && \text{da } g \text{ er stamfunktion til } f \\ &= -(g(0)-g(-2)) \\ &= -(0-\tfrac{8}{3}) && \text{ifølge tabel} \\ &= \underline{\underline{\tfrac{8}{3}}}\end{aligned}$$

21. Opgave hvor integral og areal er givet.

Opgave Figuren viser to områder med arealer $\frac{10}{3}$ og A. Bestem A når det er oplyst at

(1) $\int_0^5 f(x)\,dx=\frac{4}{3}$



Besvarelse

(2) $\int_0^3 f(x)\,dx = \frac{10}{3}$ da $f(x)\ge 0$ for $0\le x\le 3$

(3) $\int_3^5 f(x)\,dx = -A$ da $f(x)\le 0$ for $3\le x\le 5$

Ifølge indskudssætningen (se 30.1) er

$$\int_0^5 f(x)\,dx = \int_0^3 f(x)\,dx + \int_3^5 f(x)\,dx$$

Heraf og af (1), (2) og (3) får vi

$$\frac{4}{3} = \frac{10}{3} + (-A) \qquad \text{så} \qquad \underline{\underline{A=2}}$$

22. Opdelt område.

Arealet fra a til b er summen af arealerne:

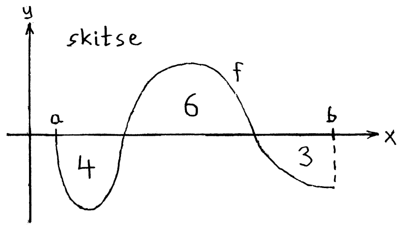
$4+6+3 \;=\; 13$

Integralet fra a til b er summen af integralerne:

$(-4)+6+(-3) \;=\; -1$

Areal mellem f-graf og x-akse i intervallet $a \le x \le b$ er $\underline{\underline{13}}$.

$\int_a^b f(x)\,dx \;=\; \underline{\underline{-1}}$



23. Fortolk integral. Eksempel 1.

Opgave Det er oplyst at $\int_{-1}^{0}(-3x-x^2)\,dx \;=\; \frac{7}{6}$.

Giv en geometrisk fortolkning af dette.

Besvarelse Vi skitserer grafen for funktionen $f(x)=-3x-x^2$.

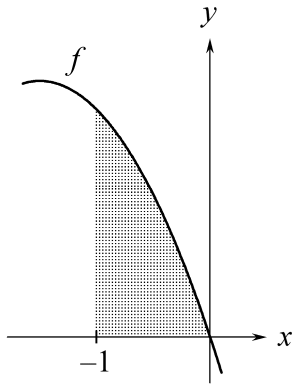
Da $f(x)\ge 0$ for $-1\le x\le 0$, gælder:

$\int_{-1}^{0} f(x)\,dx$ er arealet mellem f-grafen og x-aksen

i intervallet $-1\le x\le 0$

så $\underline{\underline{\frac{7}{6} \text{ er arealet mellem } f\text{-graf og } x\text{-akse i intervallet } -1\le x\le 0}}$

dvs. $\underline{\underline{\frac{7}{6} \text{ er arealet af det grå område}}}$.



24. Fortolk integral. Eksempel 2.

Opgave Det er oplyst at når $f(x)=3x^2-\frac{3}{2}$ er $\int_0^1 f(x)\,dx \;=\; -\frac{1}{2}$.

Giv en geometrisk fortolkning af dette.

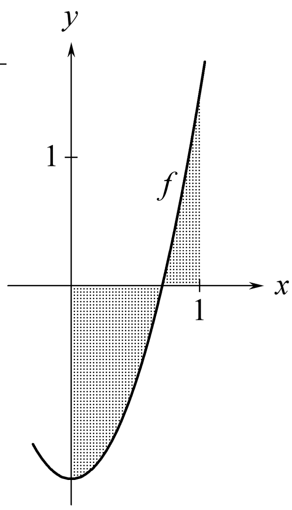
Besvarelse Vi tegner grafen for f .

A = gråt areal under x-akse og B = gråt areal over x-akse

Da (integral fra 0 til 1) $=$ $(-A)+B$

er $-\frac{1}{2} \;=\; (-A)+B$ og dermed $A \;=\; B+\frac{1}{2}$

$\underline{\underline{\text{Det grå areal under } x\text{-aksen er } \tfrac{1}{2} \text{ enhed større end det grå areal over.}}}$

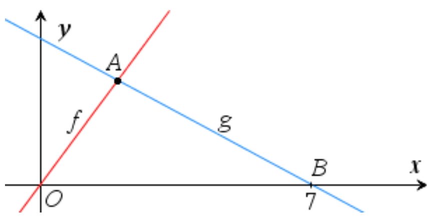


25. Fortolk integral. Eksempel 3.

Opgave På figuren ses graferne for to lineære funktioner f og g som skærer hinanden i et punkt A hvis x-koordinat er 2 .

Det oplyses at $\int_0^2 f(x)\,dx+\int_2^7 g(x)\,dx = 10{,}5$.

Fortolk tallet $10{,}5$.



Besvarelse

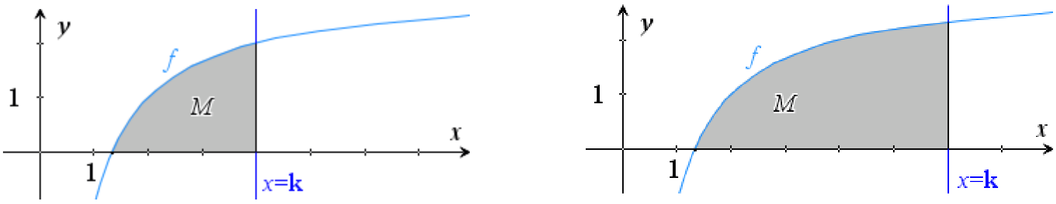
Venstre integral er areal mellem f-graf og x-akse i intervallet $0\le x\le 2$.

Højre integral er areal mellem g-graf og x-akse i intervallet $2\le x\le 7$.

I alt: $\underline{\underline{10{,}5 \text{ er arealet af trekant } ABO}}$.

26. Bestem k så areal er lig et oplyst tal.

26a Eksempel k er et tal større end 2. Grafen for $f(x)=3-\frac{4}{x}$ og linjen med ligningen $x=k$ afgrænser sammen med x-aksen en punktmængde M der har et areal. Vi vil bestemme k så arealet af M er 5.
For at få overblik over opgaven tegner vi M for to værdier af k:



På figurerne ser vi at vi får brug for x-koordinaten til grafens skæringspunkt med x-aksen.

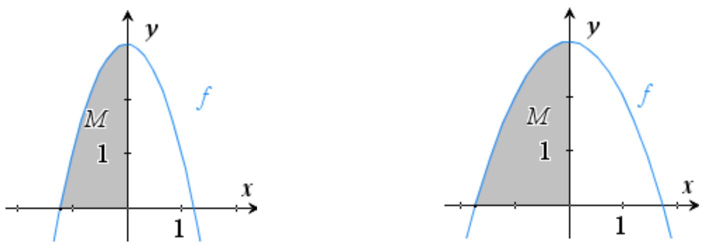
I skæringspunktet er $y=0$, så vi løser ligningen $3-\frac{4}{x}=0$. Vi får at grafen skærer x-aksen ved $x=\frac{4}{3}$.

På figurerne ser vi at arealet af M er $\int_{\frac{4}{3}}^{k}\left(3-\frac{4}{x}\right)dx$.

Når vi løser ligningen $\int_{\frac{4}{3}}^{k}\left(3-\frac{4}{x}\right)dx = 5$, får vi $k=4{,}67182\approx 4{,}67$ som er svaret på opgaven.

26b Eksempel k er et positivt tal. I anden kvadrant afgrænser grafen for $f(x)=3-k\cdot x^2$ sammen med koordinataksene en punktmængde M som har et areal. Vi vil bestemme k så arealet af M er 3.

For at få overblik over opgaven tegner vi M for to værdier af k:



På figurerne ser vi at vi får brug for x-koordinaten til det venstre af grafens skæringspunkter med x-aksen.

I skæringspunktet er $y=0$, så vi løser ligningen $3-k\cdot x^2=0$. Vi får at grafen skærer x-aksen ved $x=\pm\sqrt{\frac{3}{k}}$.

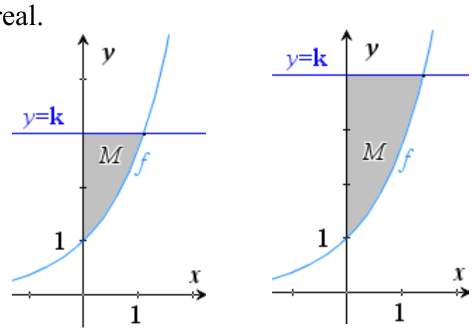
På figurerne ser vi at arealet af M er $\int_{-\sqrt{\frac{3}{k}}}^{0}\left(3-k\cdot x^2\right)dx$.

Når vi løser ligningen $\int_{-\sqrt{\frac{3}{k}}}^{0}\left(3-k\cdot x^2\right)dx=3$, får vi $k=\frac{4}{3}$ som er svaret på opgaven.

26c Eksempel k er et tal der er større end 1. Grafen for $f(x)=\mathrm{e}^x$ og linjen med ligningen $y=k$ afgrænser sammen med y-aksen en punktmængde M som har et areal.

Vi vil bestemme k så arealet af M er 2.

For at få overblik over opgaven tegner vi M for to værdier af k:



På figurerne ser vi at vi får brug for x-koordinaten til skæringspunktet mellem grafen og linjen med ligningen $y=k$.

I skæringspunktet er $y=k$, så vi løser ligningen $\mathrm{e}^x=k$. Vi får at i skæringspunktet er $x=\ln(k)$.

På figurerne ser vi at arealet af M er $\int_{0}^{\ln(k)}\left(k-\mathrm{e}^x\right)dx$.

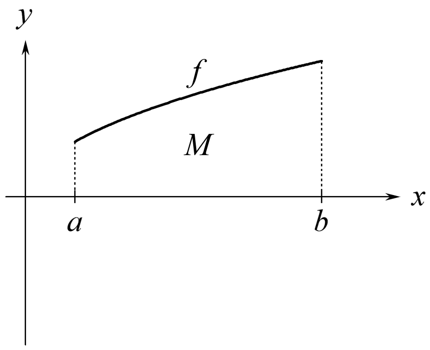
Når vi løser ligningen $\int_{0}^{\ln(k)}\left(k-\mathrm{e}^x\right)dx = 2$, får vi $k=3{,}59112\approx 3{,}59$ som er svaret på opgaven.

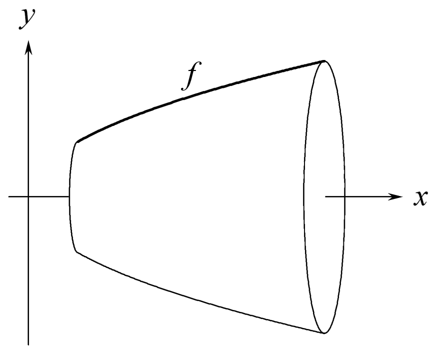
Rumfang af omdrejningslegeme

27. Rumfang af omdrejningslegeme.

Punktmængden M på venstre figur drejer vi $360°$ om x-aksen.
Så får vi <u>omdrejningslegemet</u> på højre figur.

27a Formel for rumfang V af omdrejningslegeme: $V = \pi \int_a^b (f(x))^2 \, dx$.





27b Opgave

Venstre figur ovenfor viser grafen for funktionen

$$f(x) = \tfrac{4}{5}\sqrt{x} \ , \quad \tfrac{1}{2} \le x \le 3 \ .$$

Området M mellem f-grafen og x-aksen drejer vi $360°$ om x-aksen. Så får vi omdrejningslegemet som vi har tegnet ovenfor til højre.

Bestem rumfanget V af dette omdrejningslegeme.

Besvarelse

Husk ! Husk !

$$V = \pi \cdot \int_{\frac{1}{2}}^{3} \left(\frac{4}{5} \cdot \sqrt{x}\right)^2 dx = \frac{14 \cdot \pi}{5}$$ *udregnet af Nspire*

<u>Venstre</u> grænse skal stå <u>nederst</u>.

28. Rumfang af skål.

Opgave

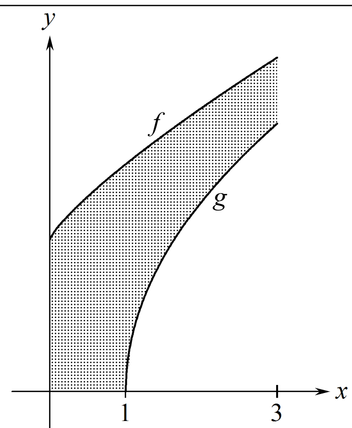
To funktioner f og g er givet ved

$$f(x) = x^{0,8} + 2 \ , \quad 0 \le x \le 3$$

$$g(x) = 2{,}5 \cdot (x-1)^{0,5} \ , \quad 1 \le x \le 3$$

Det grå område på figuren drejer vi $360°$ om x-aksen.
Så får vi en glasskål.

Bestem rumfanget af glasset.



Besvarelse

Området mellem f-grafen og x-aksen drejer vi $360°$ om x-aksen.
Så får vi et omdrejningslegeme der ikke er en skål. For at gøre det til en skål skal vi fjerne noget. Det vi fjerner, er omdrejningslegemet som vi får ved at dreje området mellem g-grafen og x-aksen $360°$ om x-aksen. Rumfanget af glasset er

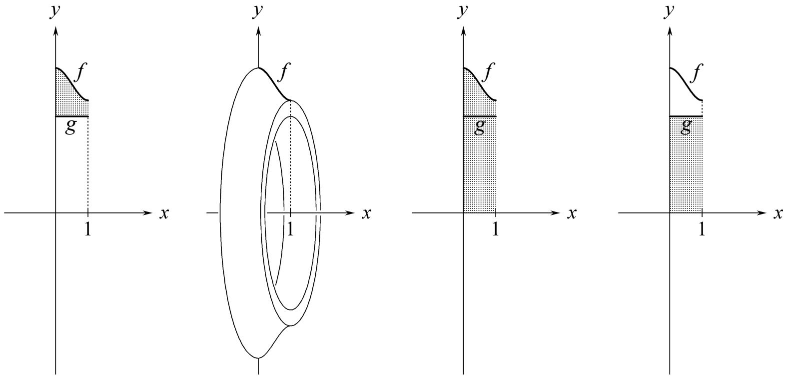
$$\pi \cdot \int_0^3 (x^{0,8}+2)^2 \, dx \; - \; \pi \cdot \int_1^3 (2{,}5 \cdot (x-1)^{0,5})^2 \, dx \; = \; 69{,}8898 \; \approx \; \underline{\underline{69{,}9}}$$ *udregnet af Nspire*

29. Rumfang af ring.

Opgave To funktioner f og g har forskrifterne

$f(x) = 2x^3 - 3x^2 + \frac{9}{2}$ og $g(x) = 3$.

Det grå område på figur 1 drejer vi $360°$ om x-aksen. Så får vi det ringformede omdrejningslegeme på figur 2.
Bestem rumfanget af denne ring.



Figur 1 Figur 2 Figur 3 Figur 4

Udregning Det grå område på figur 3 drejer vi $360°$ om x-aksen. Så får vi en skive hvis rumfang er

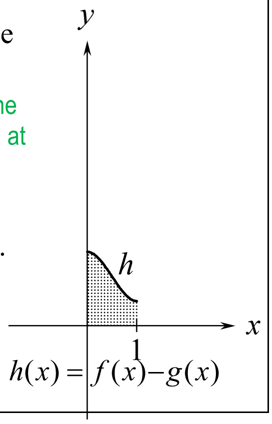
$$\pi \int_0^1 \left(f(x)\right)^2 dx \;=\; \frac{2257}{140}\pi \qquad \textit{udregnet af Nspire}$$

Herfra skal vi trække hullets rumfang. Hullet er den skive vi får ved at dreje det grå område på figur 4 $360°$ om x-aksen. Hullets rumfang er altså

$$\pi \int_0^1 \left(g(x)\right)^2 dx \;=\; 9\pi \qquad \textit{udregnet af Nspire}$$

Hullets rumfang kunne vi have udregnet ved at bruge formlen for rumfang af cylinder.

Altså er ringens rumfang $\frac{2257}{140}\pi - 9\pi = \underline{\underline{\frac{997}{140}\pi}}$



Advarsel Vi kan IKKE slå udregningerne sammen i ét integral som vi kan med areal.

$$\pi \int_0^1 \left(f(x) - g(x)\right)^2 dx \;=\; \underline{\underline{\frac{157}{140}\pi}} \qquad \text{er IKKE ringens rumfang!}$$

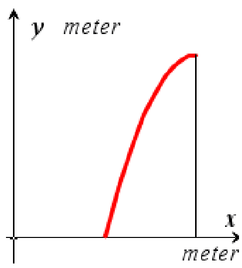
Det vi har udregnet her, er rumfanget af det omdrejningslegeme vi får når det grå område på figuren til højre drejes $360°$ om x-aksen.

Andre anvendelser

30. Andre anvendelser.

Hvis I i en eksamensopgave skal bruge integral til at udregne andet end graf-afgrænset areal og rumfang af omdrejningslegeme, så vil der i opgaven stå den integralformel I skal bruge. I skal så finde ud af at sætte tal ind i integralformlen. Måske skal I først udregne disse tal. Det I skal udregne med et integral kan både være geometriske størrelser og størrelser fra f.eks. naturvidenskab.

30a Opgave: Figuren viser en gavl. Langs den buede kant er et rødt lysstofrør der har form som en del af grafen for $f(x) = -x^2 + 8x - 12$. Gavlens bredde er 2 m. Det oplyses at buelængden af grafen for en funktion f i et interval $a \le x \le b$ er $\int_a^b \sqrt{f'(x)^2 + 1}\, dx$.
Bestem længden af lysstofrøret.



Overvejelser: $f(x) = 0$ har løsningerne 2 og 6 så $a = 2$. Hertil lægger vi gavlens bredde og får $b = 4$. Da $f'(x) = -2x + 8$, skal der under rodtegnet stå $(-2x+8)^2 + 1$.

30b Opgave: Et punkt på en skærm bevæger sig sådan at $h(t) = 2 + 0{,}3t$ hvor $h(t)$ er hastigheden (mm pr. sekund) t sekunder efter at punktets bevægelse startede. Længden l af det stykke punktet bevæger sig i de første p sekunder, kan beregnes ved hjælp af formlen $l = \int_0^p h(t)\, dt$.
Hvor langt bevæger punktet sig i tidsrummet fra 3 til 8 sekunder efter start?

Overvejelser: Længden af det stykke punktet bevæger sig de første 3 sekunder, må være $\int_0^3 (2 + 0{,}3t)\, dt$.
På tilsvarende måde udregner vi længden af det stykke punktet bevæger sig de første 8 sekunder. Forskellen på de to længder må være svaret på spørgsmålet.

Beviser

31. Formler for bestemt integral.

31a Sætning (Indskudssætningen for integraler)

Når f har en stamfunktion i et interval, og a, b og c er tal i dette interval, så er

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

31b Sætning (Regneregler for bestemt integral)

Når f og g har stamfunktioner i et interval, og a og b er tal i dette interval, og k er et tal, så er

$$\int_a^b \big(f(x)+g(x)\big)dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$$

$$\int_a^b \big(f(x)-g(x)\big)dx = \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx$$

$$\int_a^b k\cdot f(x)\,dx = k\cdot\int_a^b f(x)\,dx$$

31c Bevis (Indskudssætningen for integraler)

Lad F være en stamfunktion til f.

$$\int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

$= F(c)-F(a) + F(b)-F(c)$ Ifølge definitionen på bestemt integral.

$= F(b)-F(a)$

$= \int_a^b f(x)\,dx$ Ifølge definitionen på bestemt integral.

Hermed er sætningen bevist.

31d Bevis (Regneregler for bestemt integral)

De tre formler kan bevises på næsten samme måde. Vi beviser nummer to.

$f(x)$ har en stamfunktion $F(x)$, og $g(x)$ har en stamfunktion $G(x)$.

Funktionen $H(x)=F(x)-G(x)$ er en stamfunktion til $h(x)=f(x)-g(x)$ da

$$H'(x) = \big(F(x)-G(x)\big)' = F'(x)-G'(x) = f(x)-g(x) = h(x)$$

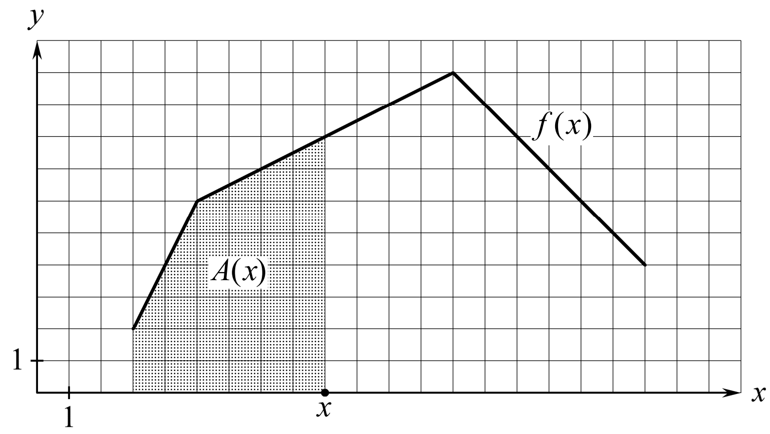
hvor reglen for at differentiere en differens er begrundelsen for andet lighedstegn. Nu er

$$\int_a^b \big(f(x)-g(x)\big)dx = \int_a^b h(x)\,dx = H(b)-H(a) = \big(F(b)-G(b)\big)-\big(F(a)-G(a)\big) =$$

$$F(b)-F(a) - (G(b)-G(a)) = \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx$$

Hermed er formlen bevist.

32. Hvad er en arealfunktion?



Den viste graf er på en skærm.
Når vi trækker x-prikken mod højre, bliver det grå område større.
$A(x)$ er arealet af det grå område.
$A(x)$ kaldes arealfunktionen for f .

På billedet ser vi at $A(9) = 36$ og $A(11) = 53$.

33. Vigtig regel om arealfunktioner.

33a Sætning

Betyder at grafen ligger på eller over x-aksen.

Når

$A(x)$ er arealfunktionen for en ikke-negativ funktion $f(x)$, $a \leq x \leq b$

så gælder at

$A(x)$ er en stamfunktion til $f(x)$

dvs.

$$A'(x) = f(x)$$

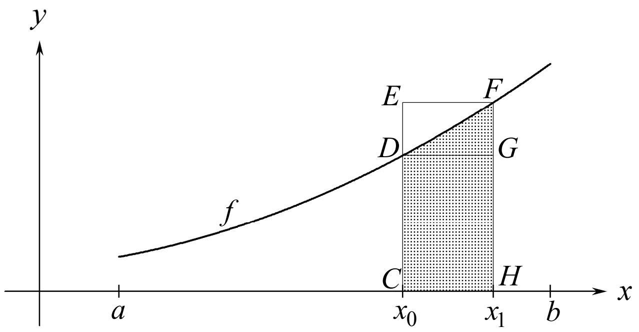
34. Bevis for at $A'(x) = f(x)$.

34a Sætning (Se ramme 32 og 33)

Når $A(x)$ er arealfunktionen for en ikke-negativ funktion $f(x)$, $a \le x \le b$

er $A'(x) = f(x)$

Bevis



Vi beviser kun påstanden for voksende funktioner, men den gælder også for funktioner der ikke er voksende.

$f(x)$ er ikke-negativ og voksende i intervallet $a \le x \le b$.
x_0 og x_1 er to tal i intervallet $a \le x \le b$, og $x_0 < x_1$.

Af figuren ser vi at

areal af rektangel *CDGH* < areal af grå område < areal af rektangel *CEFH*

Dette kan vi også skrive sådan:

$$f(x_0) \cdot (x_1 - x_0) \quad < \quad A(x_1) - A(x_0) \quad < \quad f(x_1) \cdot (x_1 - x_0)$$

Ulighedstegnene gælder stadig når vi dividerer de tre udtryk med $x_1 - x_0$
da $x_1 - x_0$ er positiv:

(1) $$f(x_0) \quad < \quad \frac{A(x_1) - A(x_0)}{x_1 - x_0} \quad < \quad f(x_1)$$

På tilsvarende måde kan vi vise at (1) også gælder når $x_1 < x_0$.

Vi giver x_1 værdier der ligger tættere og tættere på x_0
så $f(x_1)$ kommer vilkårlig tæt på $f(x_0)$.

Så kommer brøken i (1) vilkårlig tæt på $f(x_0)$ (da den ifølge (1) er tættere på $f(x_0)$ end $f(x_1)$ er).

Med symboler kan vi skrive dette sådan:

(2) $$f(x_0) = \lim_{x_1 \to x_0} \frac{A(x_1) - A(x_0)}{x_1 - x_0}$$

Fra differentialregningen ved vi at differentialkvotienten kan udregnes som en grænseværdi på følgende måde:

(3) $$A'(x_0) = \lim_{x_1 \to x_0} \frac{A(x_1) - A(x_0)}{x_1 - x_0}$$

Af (2) og (3) følger at $A'(x_0) = f(x_0)$, og dette er det vi ville bevise.

35. Areal når graf ligger over x-akse.

35a Sætning om areal mellem f-graf og x-akse når $f(x) \geq 0$

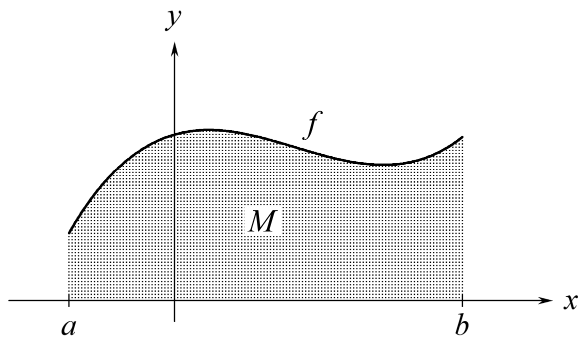
Hvis

$f(x) \geq 0$ for $a \leq x \leq b$ og

M er området mellem f-grafen og x-aksen
i intervallet $a \leq x \leq b$

så gælder

$$\int_a^b f(x)\,dx \;=\; \text{arealet af } M$$



Bevis

$A(x)$ er arealfunktionen for $f(x)$.
$F(x)$ er en stamfunktion til $f(x)$.

Ifølge sætning 33a er $A(x)$ en stamfunktion til $f(x)$.

Da $A(x)$ og $F(x)$ er stamfunktion til samme funktion, findes en konstant c så

$(*)\qquad A(x) = F(x) + c$.

Nu fås

areal af M $= A(b)$		Ifølge definitionen på arealfunktion.
$= A(b) - A(a)$		Da $A(a) = 0$.
$= \big(F(b)+c\big) - \big(F(a)+c\big)$		Ifølge $(*)$.
$= F(b) - F(a)$		
$= \int_a^b f(x)\,dx$		Ifølge definitionen på bestemt integral.

Hermed er sætning 35a bevist.

36. Areal mellem grafer.

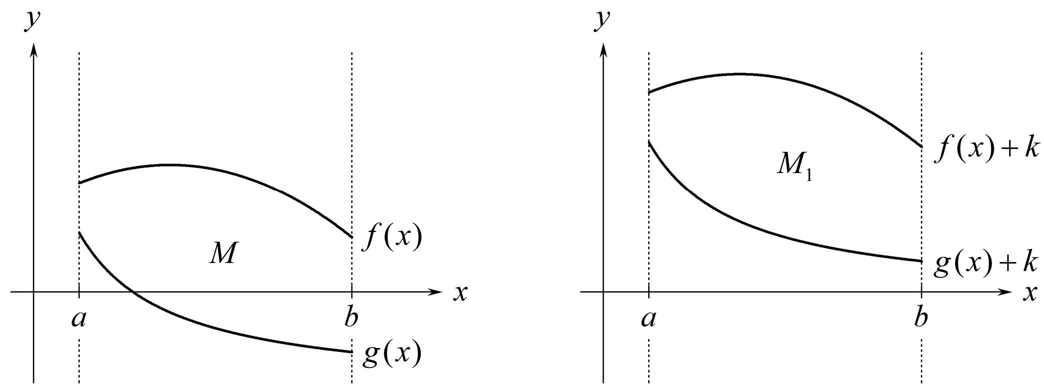
36a Sætning om areal mellem grafer

Hvis der i et interval $a \le x \le b$ gælder om to funktioner f og g at

$$f(x) \ge g(x)$$

og M er området mellem f-grafen og g-grafen i dette interval (se venstre figur), så er

$$\text{areal af } M = \int_a^b \big(f(x) - g(x)\big)dx$$



Bevis

Vi vælger et tal k så graferne for $f(x)+k$ og $g(x)+k$ ligger over x-aksen. Se højre figur.
Nu får vi

$$\text{Areal af } M = \text{areal af } M_1$$

$$= \begin{pmatrix}\text{areal mellem } x\text{-akse}\\ \text{og graf for } f(x)+k\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}\text{areal mellem } x\text{-akse}\\ \text{og graf for } g(x)+k\end{pmatrix}$$

$$= \int_a^b \big(f(x)+k\big)dx - \int_a^b \big(g(x)+k\big)dx$$ ifølge sætning om areal mellem f-graf og x-akse når $f(x) \ge 0$.

$$= \int_a^b \Big(\big(f(x)+k\big) - \big(g(x)+k\big)\Big)dx$$ ifølge formel for integral af differens.

$$= \int_a^b \big(f(x) - g(x)\big)dx$$

Hermed er sætningen bevist.

37. Areal når graf ligger under x-akse.

37a Sætning om areal mellem f-graf og x-akse når $f(x) \leq 0$

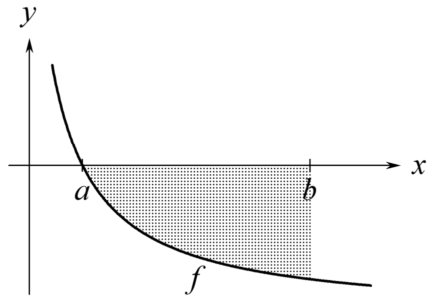
A er arealet mellem f-graf og x-akse
i intervallet $a \leq x \leq b$.

Hvis

$f(x) \leq 0$ for $a \leq x \leq b$

så er

$$\int_a^b f(x)\,dx = -A$$



Bevis

Grafen for funktionen $g(x) = 0$ er sammenfaldende med x-aksen,
så A er arealet mellem f-graf og g-graf i intervallet $a \leq x \leq b$.

$$A = \int_a^b \big(g(x) - f(x)\big)dx$$ ifølge sætning om areal mellem grafer

$$= \int_a^b \big(0 - f(x)\big)dx$$

$$= -\int_a^b f(x)\,dx$$ $k = -1$ i regel om integral af $k \cdot f(x)$

Hermed er sætningen bevist.

Stikordsregister

A
Andre anvendelser 15
areal 7, 8, 10, 11, 12, 13
areal mellem graf og x-akse, med hjælpemidler ... 8
areal mellem graf og x-akse, uden hjælpemidler .. 8
areal mellem grafer 7, 10
areal mellem grafer, bevis 20
areal over x-akse 7
areal under x-akse 7
areal under x-akse, bevis 21
areal, bestem k 13
areal, bevis 19
arealfunktion 17, 19
arealfunktion, bevis 18
B
bestemt integral 6
bestemt integral af sammensat funktion 6
bestemt integral med Nspire 6
bestemt integral uden hjælpemidler 6
buelængde 15
F
fortolk integral 12
I
indskudssætningen for integraler 16
integral, indskudssætning 16
integral, regneregler 16
integrere 2
K
kvadrant 7
N
Nspire 2, 6, 9, 10, 14
O
omdrejningslegeme 14, 15
opdelt område 12
R
regneregler for integraler 16
rumfang 14
rumfang af omdrejningslegeme 14
rumfang af ring 15
rumfang af skål 14
S
stamfunktion 1, 2, 3, 5, 17
stamfunktion med Nspire 2
stamfunktion til sammensat funktion 4
stamfunktion uden hjælpemidler 3
stamfunktion, grafpunkt givet 5
stamfunktion, tangent givet 5
U
ubestemt integral 2, 4, 6
ubestemt integral af sammensat funktion 4
ubestemt integral uden hjælpemidler 3