Differentialregning

Jeppe Revall Frisvad

September 2009

Vækstraten er en differentialkvotient

- Vækstmodeller er vigtige i mange biologiske sammenhænge.
- De beskrives ofte ved et matematisk udtryk for *vækstraten*.
- Den gennemsnitlige vækstrate kan beregnes ved:

$$[\text{gennemsnitlig vækstrate}] = \frac{[\text{ændring i populationsstørrelse}]}{[\text{længde af tidsinterval}]} = \frac{\Delta N}{\Delta t} \ .$$

  hvor $\Delta N = N(t + \Delta t) - N(t)$.
- Den øjeblikkelige vækstrate findes ved at lade $\Delta t \to 0$:

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta N}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{N(t + \Delta t) - N(t)}{\Delta t} = N'(t) \ .$$

- $N'(t_c)$ kaldes *differentialkvotient* for N til tiden $t = t_c$.
- $N'(t_c)$ beskriver hastigheden (raten) hvormed funktion N ændrer sig til tiden $t = t_c$.
- $N'(t)$ eller $\frac{dN}{dt}$ kaldes den *afledte* funktion af N.
- $N'(t)$ beskriver ændringshastigheden for alle t.

Differentialkvotientens geometriske betydning

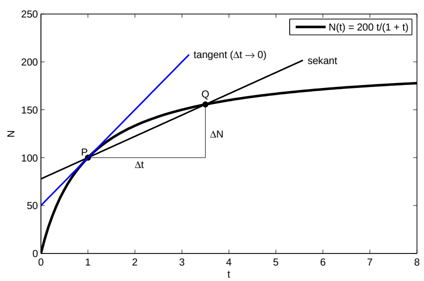
- Den øjeblikkelige vækstrate findes ved at lade $\Delta t \to 0$:

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta N}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{N(t + \Delta t) - N(t)}{\Delta t} = N'(t) \ .$$

- Eksempel på en vækstmodel (Monod vækstfunktionen):

$$N(t) = \frac{200t}{1 + t} \ .$$

- Vi vælger $P = (t_c, N(t_c)) = (1, 100)$ og finder $N'(1) = 50$.



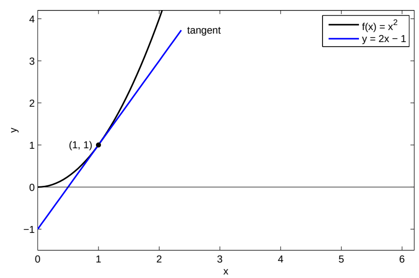
Den afledte funktion

- Den afledte funktion angiver *tangenthældningen* for funktionens graf. Kilde: http://da.wikipedia.org/wiki/Fil:Graph_of_sliding_derivative_line.gif
- Ligningen for tangenten til en funktion f i $x = c$ er

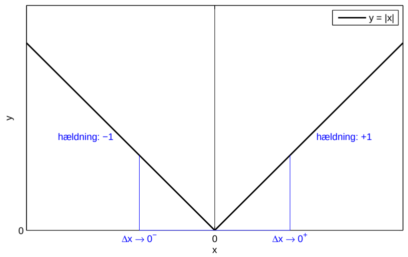
$$y = f'(c)x + f(c) - cf'(c) \ .$$

- Eksempel $f(x) = x^2$, $f'(x) = 2x$, $c = 1$:

$$y = (2 \cdot 1)x + 1^2 - 1 \cdot (2 \cdot 1) = 2x - 1 \ .$$



Findes der altid en entydig tangent?



- Er en funktion altid differentiabel?
- Eksempel: $f(x) = |x|$:

$$f'(x) = \begin{cases} +1 & \text{for } x > 0 \\ -1 & \text{for } x < 0 \end{cases} .$$

- f er *ikke* differentiabel i $x = 0$.

Per capita vækstrate

- Lad $N(t)$ være antallet af individer i en population til tiden t.
- Da er $N'(t) = \frac{dN}{dt}$ vækstraten til tiden t.
- Hvis hver individ i population forøger vækstraten med $1/2$, så må

$$\frac{dN}{dt} = \frac{1}{2}N$$

eller

$$\frac{1}{N}\frac{dN}{dt} = \frac{1}{2} .$$

- Man kalder $\frac{1}{N}\frac{dN}{dt}$ for *per capita vækstrate* eller *vækstrate pr. individ*.
- Ligningen er et simpelt eksempel på en *differentialligning*.

Differentiering af eksponentialfunktionen

- En eksponentialfunktion er givet ved

$$f(x) = a^x \quad , \quad x \in \mathbb{R} .$$

- Hvad er den afledte af f? ($h = \Delta x$)

$$\begin{aligned} f'(x) = \frac{d}{dx}a^x &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{a^{x+h}-a^x}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{a^x(a^h-1)}{h} = a^x \lim_{h\to 0}\frac{a^h-1}{h} . \end{aligned}$$

- Tallet $e \approx 2.71828\ldots$ er defineret ved

$$\lim_{h\to 0}\frac{e^h-1}{h} = 1$$

- Hvad er den afledte af $f(x) = e^x$?

$$\frac{d}{dx}e^x = e^x \lim_{h\to 0}\frac{e^h-1}{h} = e^x .$$

Kædereglen

- Hvordan differentierer man en sammensat funktion $(f \circ g)(x) = f(g(x))$?
- Lad g være differentiabel i x.
- Lad f være differential i $y = g(x)$.
- Da er $f \circ g$ differentiabel i x og differentialkvotienten er:

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x))\, g'(x) .$$

- Hvad er den afledte af $f(x) = e^{g(x)} = \exp(g(x))$?

$$\frac{d}{dx}e^{g(x)} = e^{g(x)}\, g'(x) .$$

Eksponentielt henfald

- Funktionen for eksponentielt henfald angiver mængden W af materiale, der er tilbage til tiden t:

$$W(t) = W_0 e^{-\lambda t} \quad , \quad t \geq 0 \ ,$$

  hvor W_0 er mængden af materiale til tiden 0 og λ er henfaldskonstanten (decay rate).
- Hvor hurtigt falder mængden af materiale til tiden t?

$$\frac{dW}{dt} = W_0 e^{-\lambda t} \cdot (-\lambda) = W(t) \cdot (-\lambda) \ .$$

- Funktionen for eksponentielt henfald opfylder altså differentialligningen:

$$\frac{dW}{dt} = -\lambda W(t) \ .$$

Eksponentiel vækst

- Lad N være antallet af individer i en population.
- Hvis population vokser eksponentielt har vi

$$N(t) = N(0)e^{rt} \ ,$$

  hvor r er en konstant.
- Hvad er vækstraten til tiden t?

$$\frac{dN}{dt} = N(0)e^{rt} \cdot r = rN(t) \ .$$

- Hvad er per capita vækstraten?

$$\frac{1}{N}\frac{dN}{dt} = r \ .$$

- Funktionen for eksponentiel vækst opfylder altså differentialligningen, som beskriver en population med *konstant* per capita vækstrate.