Sinteza lucrării

Cristian Bereanu
Institutul de Matematică "Simion Stoilow" al Academiei Române
Calea Griviţei 21, RO-010702-Bucureşti, Sector 1, România
cristian.bereanu@imar.ro

1 Rezultate ştiinţifice

• **1.1** În articolul [3], împreuna cu *Prof. dr. P. Jebelean* şi *Acad. dr. J. Mawhin*, am studiat existenţa de soluţii radiale pentru probleme Dirichlet în bile şi coroane circulare din $\mathbb{R}^N$, asociate operatorului curburii în spaţiul euclidian

$$\mathcal{E}v = \operatorname{div}\left(\frac{\nabla v}{\sqrt{1+|\nabla v|^2}}\right)$$

şi în spaţiul Minkowski

$$\mathcal{M}v = \operatorname{div}\left(\frac{\nabla v}{\sqrt{1-|\nabla v|^2}}\right).$$

Mai sus şi în ceea ce va urma $|\cdot|$ desemnează norma euclidiană din $\mathbb{R}^N$.

În această primă fază ne-am propus să analizăm probleme Neumann asociate operatorilor $\mathcal{E}$ şi $\mathcal{M}$. Rezultatele obţinute până acum în această direcţie fac obiectul articolului
"**Radial solutions for Neumann problems involving mean curvature operators in Euclidean and Minkowski spaces**".
Lucrarea a fost scrisă în colaborare cu Jebelean şi Mawhin, fiind acceptată spre publicare la revista
Mathematische Nachrichten.

Pentru o prezentare succintă a rezultatelor incluse în articolul mai sus menţionat vom introduce unele notaţii. Fie $R_1, R_2 \in \mathbb{R}$, $0 \le R_1 < R_2$, mulţimea $\mathcal{A} = \{x \in \mathbb{R}^N : R_1 \le |x| \le R_2\}$ şi neliniaritatea continuă $f : [R_1, R_2] \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Am considerat probleme la limită Neumann de tipul

$$\mathcal{M}v = f(|x|, v, \frac{dv}{dr}) \quad \text{în} \quad \mathcal{A}, \quad \frac{\partial v}{\partial \nu} = 0 \quad \text{pe} \quad \partial\mathcal{A} \tag{1}$$

şi

$$\mathcal{E}v = f(|x|, v, \frac{dv}{dr}) \quad \text{în} \quad \mathcal{A}, \quad \frac{\partial v}{\partial \nu} = 0 \quad \text{pe} \quad \partial\mathcal{A}. \tag{2}$$

Ca de obicei, $\dfrac{d}{dr}$ desemnează derivata radială şi $\dfrac{\partial}{\partial \nu}$ derivata în raport cu normala exterioară.

Dacă $r = |x|$ şi $v(x) = u(r)$, problemele (1) şi (2) devin

$$\left(r^{N-1} \frac{u'}{\sqrt{1-|u'|^2}} \right)' = r^{N-1} f(r,u,u'), \quad u'(R_1) = 0 = u'(R_2), \tag{3}$$

respectiv,

$$\left(r^{N-1} \frac{u'}{\sqrt{1+|u'|^2}} \right)' = r^{N-1} f(r,u,u'), \quad u'(R_1) = 0 = u'(R_2). \tag{4}$$

Soluţiile pentru (3) şi (4) sunt soluţii radiale clasice pentru (1), respectiv (2).

Motivaţi de (3) şi (4) am considerat probleme mai generale de tipul

$$(r^{N-1}\phi(u'))' = r^{N-1} f(r,u,u'), \quad u'(R_1) = 0 = u'(R_2), \tag{5}$$

unde ϕ este un homeomorfism astfel încât $\phi(0) = 0$, ce face parte din una din clasele $(0 < a < \infty)$:

$$\begin{aligned} \phi &: (-a,a) \to \mathbb{R} \quad (\textit{singular}), \\ \phi &: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad (\textit{clasic}), \\ \phi &: \mathbb{R} \to (-a,a) \quad (\textit{mărginit}), \end{aligned}$$

şi $f : [R_1, R_2] \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ este continuă. Prin *soluţie* pentru (5) înţelegem o funcţie continuu diferenţiabilă u astfel încât $u' \in \mathrm{dom}(\phi)$, $\phi(u')$ este diferenţiabilă şi (5) este satisfăcută.

Rezultatul principal al secţiunii 2 din articol este

Teorema 1 *Presupunem că ϕ este singular şi că există $\varepsilon \in \{-1, 1\}$ şi $\rho > 0$ astfel încât*

$$\varepsilon\, (sgn\ u) QN_f(u) \geq 0$$

pentru orice $u \in C^1_\dagger$ satisfăcând $|u|_L \geq \rho$ şi $||u'||_\infty < a$. Atunci (5) are cel puţin o soluţie.

O consecinţă interesantă ce va fi utilizată în secţiunea 4 în studiul sub şi supra soluţiilor este

Corolarul 1 *Presupunem că ϕ este singular şi fie $h : [R_1, R_2] \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $g : [R_1, R_2] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funcţii continue, cu h mărginită pe $[R_1, R_2] \times \mathbb{R} \times (-a, a)$, şi g astfel încât*

$$\begin{aligned} \lim_{u \to -\infty} g(r,u) &= +\infty, \quad \lim_{u \to +\infty} g(r,u) = -\infty \\ \textit{(resp.} \quad \lim_{u \to -\infty} g(r,u) &= -\infty, \quad \lim_{u \to +\infty} g(r,u) = +\infty) \end{aligned}$$

uniform în $r \in [R_1, R_2]$. Atunci problema

$$(r^{N-1}\phi(u'))' + r^{N-1}g(r,u) = r^{N-1}h(r,u,u'), \quad u'(R_1) = 0 = u'(R_2)$$

are cel puţin o soluţie.

În particular, problema

$$(r^{N-1}\phi(u'))' + \mu r^{N-1}u = r^{N-1}h(r,u,u'), \quad u'(R_1) = 0 = u'(R_2)$$

are cel puţin o soluţie pentru orice $\mu \neq 0$.

Utilizând teorema de mai sus şi o tehnică de "decupare" a lui ϕ introdusă în [5] am obţinut rezultate analoage şi pentru cazurile în care ϕ este mărginit sau clasic.

În secţiunea 3 am transpus la problemele iniţiale rezultatele din secţiunea 2. Spre exemplu, utilizând Teorema 1 se obţine

Teorema 2 *Presupunem că există $\varepsilon \in \{-1,1\}$ şi $\rho > 0$ astfel încât*

$$\varepsilon(sgn\ u)\int_{R_1}^{R_2} r^{N-1}f(r,u(r),u'(r))dr \geq 0$$

pentru orice $u \in C^1_\dagger$ astfel încât $|u|_L \geq \rho$ şi $\|u'\|_\infty < 1$. Atunci (1) are cel puţin o soluţie radială clasică.

Utilizând această teoremă am arătat următorul rezultat de tip Landesman-Lazer.

Corolarul 2 *Fie $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continuă şi $l \in C$. Dacă*

$$\limsup_{v\to-\infty} g(v) < \frac{N}{R_2^N - R_1^N}\int_{R_1}^{R_2} r^{N-1}l(r)dr < \liminf_{v\to+\infty} g(v)$$

sau

$$\limsup_{v\to+\infty} g(v) < \frac{N}{R_2^N - R_1^N}\int_{R_1}^{R_2} r^{N-1}l(r)dr < \liminf_{v\to-\infty} g(v),$$

atunci problema

$$\mathcal{M}v + g(v) = l(|x|) \quad \text{în} \quad \mathcal{A}, \quad \frac{\partial v}{\partial \nu} = 0 \quad \text{pe} \quad \partial\mathcal{A}$$

are cel puţin o soluţie clasică radială.

În secţiunea 4 am dezvoltat o metodă de sub şi supra soluţii pentru problema (5) în cazul în care ϕ este singular şi $\mathcal{A}$ este o coroană circulară. Iată două aplicaţii ale acestei metode.

Corolarul 3 *Fie $R_1 > 0$. Problema (1) are cel puţin o soluţie radială clasică dacă există A, B astfel încât*

$$f(r, A, 0) \cdot f(r, B, 0) \leq 0$$

pentru orice $r \in [R_1, R_2]$.

Corolarul 4 *Fie $R_1 > 0$. Dacă $f : [R_1, R_2] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este continuă şi $f(r, \cdot)$ este descrescătoare (sau crescătoare) pentru orice $r \in [R_1, R_2]$, atunci problema*

$$\mathcal{M}v = f(|x|, v) \quad \text{în} \quad \mathcal{A}, \quad \frac{\partial v}{\partial \nu} = 0 \quad \text{pe} \quad \partial \mathcal{A}$$

are o soluţie radială clasică dacă şi numai dacă există $c \in \mathbb{R}$ astfel încât

$$\int_{R_1}^{R_2} r^{N-1} f(r, c)\, dr = 0.$$

Rezultatul principal al ultimei secţiuni este

Teorema 3 *Fie $b > 0$ şi $l \in C$. Dacă*

$$\int_{R_1}^{R_2} r^{N-1} l(r) dr = 0$$

şi

$$2(R_2 - R_1) \leq 1,$$

atunci problema

$$\mathcal{M}v + b \sin v = l(|x|) \quad \text{în} \quad \mathcal{A}, \quad \frac{\partial v}{\partial \nu} = 0 \quad \text{pe} \quad \partial \mathcal{A},$$

admite cel puţin o soluţie radială clasică.

• **1.2** În cel de-al doilea articol elaborat în această primă fază a proiectului am studiat, împreuna cu *Prof. dr. P. Jebelean* şi *Acad. dr. J. Mawhin*, existenţa şi multiplicitatea soluţiilor periodice pentru pendulul relativist. Rezultatele obţinute fac obiectul articolului
"Periodic solutions of pendulum-like perturbations of singular and bounded ϕ-Laplacians"
trimis spre publicare la revista
Journal of Dynamics and Differential Equations.

În articolul de mai sus, după cum am menţionat, am studiat probleme de tipul

$$\Big(\frac{u'}{\sqrt{1 \pm u'^2}}\Big)' + \mu \sin u = h(t), \quad u(0) - u(T) = 0 = u'(0) - u'(T), \tag{6}$$

unde $\mu > 0$ şi h este continuă pe $[0, T]$. Notăm prin $\overline{h}$ media lui h pe $[0, T]$.

Considerăm întâi cazul în care avem semnul minus în ecuaţia de mai sus. Arătăm în acest caz, utilizând gradul Leray-Schauder, că problema (6) are cel puţin două soluţii ce nu diferă printr-un multiplu de 2π dacă

$$T < \pi\sqrt{3}, \quad |\overline{h}| < \mu \cos\left(\frac{T}{2\sqrt{3}}\right).$$

În plus, dacă

$$T = \pi\sqrt{3},$$

atunci problema (6) are cel puţin o soluţie, pentru orice h cu $\overline{h} = 0$. Acest rezultat generalizează unele rezultate foarte recente din [6, 7].

Pe de altă parte, utilizând gradul Leray-Schauder şi metoda sub şi supra soluţiilor dezvoltată în [4], arătăm că problema (6) are cel puţin două soluţii ce nu diferă printr-un multiplu de 2π dacă $||h||_\infty < \mu$, şi are cel puţin o soluţie dacă $||h||_\infty = \mu$. În final demonstrăm un rezultat analog cu acesta şi pentru cazul în care este luat semnul minus în ecuaţia iniţiala, însă în acest caz impunem mai multe condiţii asupra lui μ.

2 Vizite ştiinţifice

În cele două vizite ştiinţifice făcute la Timişoara (colaborare cu P. Jebelean) şi Louvain-la-Neuve (colaborare cu J. Mawhin) am elaborat articolul din 1.2.

3 Expuneri

În cele două expuneri (Timişoara şi Louvain-la-Neuve) am prezentat rezultatele obţinute în articolele [1, 2].

References

[1] C. Bereanu, An Ambrosetti-Prodi-type result for periodic solutions of the telegraph equation, Proc. Roy. Soc. Edinburgh: Section A. 138 (2008) 719-724.

[2] C. Bereanu., Periodic solutions of the nonlinear telegraph equations with bounded nonlinearities, J. Math. Anal. Appl. 343 (2008) 758-762.

[3] C. Bereanu, P. Jebelean, J.Mawhin, Radial solutions for some nonlinear problems involving mean curvature operators in Euclidean and Minkowski spaces, Proc. Amer. Math. Soc. 137 (2009) 171-178.

[4] C. Bereanu, J.Mawhin, Existence and multiplicity results for some nonlinear problems with singular ϕ-Laplacian., J. Differential Equations 243 (2007) 536-557.

[5] C. Bereanu, J.Mawhin, Periodic solutions of nonlinear perturbations of ϕ-Laplacians with possibly bounded ϕ, Nonlinear Analysis T.M.A. 68 (2008) 1668-1681.

[6] P.J. Torres, Periodic oscillations of the relativistic pendulum with friction, Physics Letters A. 372 (2008) 6386-6387.

[7] P.J. Torres, Nondegeneracy of the periodically forced Liénard differential equation with ϕ-Laplacian, Communications Contemporary Math. (acceptat).