

Courbes et surfaces

Pierre Lecomte

Table des matières

partie 1. Courbes	7
Chapitre 1. Introduction	9
1. Courbes paramétrées	9
2. Changements de paramètres	10
2.1. Orientation	14
3. Tangente	14
3.1. Auto-intersection	16
3.2. Régularité	18
3.3. Points anguleux et de rebroussement	20
4. Longueur d'arc et abscisse curviligne	23
4.1. Paramétrages naturels	26
Chapitre 2. Les courbes planes	31
1. La courbure	32
1.1. Repère mobile canonique	32
1.2. Courbure algébrique	33
1.3. Calcul dans un paramétrage quelconque	34
1.4. Concavité	36
1.5. Courbure algébrique et direction de la tangente	37
1.6. Rayon de courbure et développée	38
2. Classification des courbes régulières	43
3. Une application : le vélo à roues carrées	46
3.1. Mise en équation	47
3.2. Forme de l'arcade	48
3.3. Vérification	49
4. Enveloppe d'une famille de droites	50
4.1. L'exemple des rayons orthogonaux	54
5. Equations cartésiennes	58
5.1. Gradient	58
5.2. Courbes de niveau	59
5.3. Tangente, normale et courbure	62
Chapitre 3. Les courbes en dimension trois	65
1. La courbure, la torsion et le trièdre de Frenet	65

1.1. Les équations de Frenet	67
1.2. Expression dans un paramétrage quelconque	69
2. Classification des courbes régulières de courbure sans zéro	70
partie 2. Surfaces	73
Chapitre 4. Paramétrages, équations cartésiennes et variétés plongées	75
1. Paramétrages	77
1.1. Paramétrages par des coordonnées	78
1.2. Equivalence	79
2. Equations cartésiennes	80
2.1. Graphes de fonctions	82
3. Variétés plongées	82
4. Un premier exemple	84
4.1. Paramétrages	84
4.2. Equations cartésiennes	85
Chapitre 5. Espace tangent	87
1. Espace tangent	87
2. La règle des multiplicateurs de Lagrange	91
2.1. Distance d'un point à une variété affine	91
2.2. Fonctions homogènes	92
2.3. Les lois de l'optique géométrique	94
3. Les quadriques	96
3.1. Premières propriétés	96
3.2. Classification des quadriques de \mathbf{R}^3	97
3.3. L'hyperboloïde à une nappe et le paraboloid hyperbolique comme surfaces réglées	101
Chapitre 6. La première forme fondamentale des surfaces	105
1. Préambule	105
1.1. Expression locale d'une courbe de V	105
1.2. Orientation et normale	106
2. La première forme fondamentale	107
2.1. Equations de structure - première partie	108
3. Calcul des longueurs d'arc	109
4. Géodésiques	110
5. Calcul des aires	113
5.1. Le théorème d'Archimède	115
Chapitre 7. La seconde forme fondamentale des surfaces	119

1. L'application de Weingarten et la seconde forme fondamentale	119
1.1. L'application de Weingarten	119
1.2. La seconde forme fondamentale	121
1.3. Equation de structure - seconde partie	122
2. Courbures	122
2.1. Le théorème de Meusnier	122
2.2. La courbure normale	124
2.3. Position d'une surface par rapport à son plan tangent et courbure de Gauss	125
Bibliographie	129

Première partie

Courbes

CHAPITRE 1

Introduction

Dans ce chapitre, nous présentons quelques notions générales qui seront spécialisées et détaillées en dimensions deux et trois dans des chapitres ultérieurs.

1. Courbes paramétrées

Une *courbe paramétrée* de \mathbf{R}^n est une application γ de classe C^∞ d'un intervalle ouvert I de nombres réels dans \mathbf{R}^n . Par définition, cela signifie que les coordonnées $\gamma^k : I \rightarrow \mathbf{R}, k = 1, \dots, n$, de γ ont des dérivées de tout ordre.

Comme on s'intéresse davantage aux propriétés géométriques de l'image¹

$$\gamma(I) = \{\gamma(t) | t \in I\}$$

appelée *trace* de γ , qu'à la manière spécifique dont la fonction décrit celle-ci, on est amené à faire quelques hypothèses et à s'autoriser des changements de paramètres. Ceux-ci sont faciles à comprendre mais les hypothèses sont plus subtiles et nous consacrerons un peu de temps à les expliciter. Avant cela, considérons quelques premiers exemples de courbes paramétrées.

a) Soit une application $f :]a, b[\rightarrow \mathbf{R}$ de classe C^∞ . Le graphe de f est la trace de la courbe paramétrée

$$x \in]a, b[\mapsto (x, f(x)) \in \mathbf{R}^2$$

Par abus de langage commode, nous dirons aussi que cette courbe est le graphe de f . Celui de la fonction $x \mapsto e^x \sin x$ dans $] - \pi, \pi[$ est représenté à la figure 1

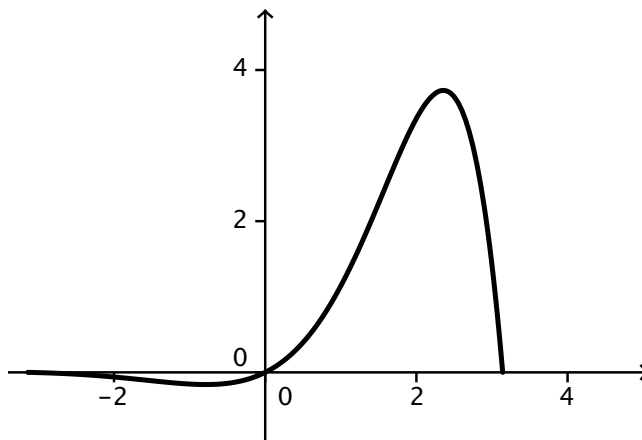
On peut étendre cet exemple de courbes paramétrées à des courbes de \mathbf{R}^n , en considérant des fonctions à valeurs dans \mathbf{R}^{n-1} :

$$x \in]a, b[\mapsto (f^1(x), \dots, f^{n-1}(x)) \in \mathbf{R}^{n-1}$$

la courbe paramétrée associée étant simplement

$$x \in]a, b[\mapsto (x, f^1(x), \dots, f^{n-1}(x)) \in \mathbf{R}^n$$

1. A l'occasion, on dira que γ est un *paramétrage* de celle-ci bien que cela soit quelque peu abusif.

FIGURE 1. $x \mapsto e^x \sin x$ dans $] -\pi, \pi[$

Il est parfois utile de placer le paramètre en une autre position que celle de la première composante. Par exemple, on peut décrire le demi-cercle

$$\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1, x > 0\}$$

par

$$y \mapsto (\sqrt{1 - y^2}, y)$$

où y varie dans $] -1, 1[$.

Dans les deux cas, nous dirons encore que ces courbes paramétrées sont des graphes de fonctions.

b) Les courbes paramétrées de la forme

$$t \in \mathbf{R} \mapsto (r \cos t, r \sin t, ht) \in \mathbf{R}^3$$

où $r > 0$, et celles qu'on en déduit par déplacements euclidiens, sont les *hélices circulaires*. Un aperçu d'une telle courbe est donné à la figure 2.

c) Les courbes paramétrées de la forme

$$t \in \mathbf{R} \mapsto (a \sin(\omega t + \varphi), b \sin t) \in \mathbf{R}^2$$

sont des *figures de Lissajou*. La figure 3 représente la figure de Lissajou pour laquelle $a = b = 1, \omega = 3/4$ et $\varphi = 0$.

2. Changements de paramètres

On dit que deux courbes paramétrées (I, γ) et (J, η) sont *équivalentes* s'il existe une bijection $u : I \rightarrow J$ de classe C^∞ et de réciproque $u^{-1} : J \rightarrow I$ de classe C^∞ telle que $\gamma = \eta \circ u$. Le lecteur est invité

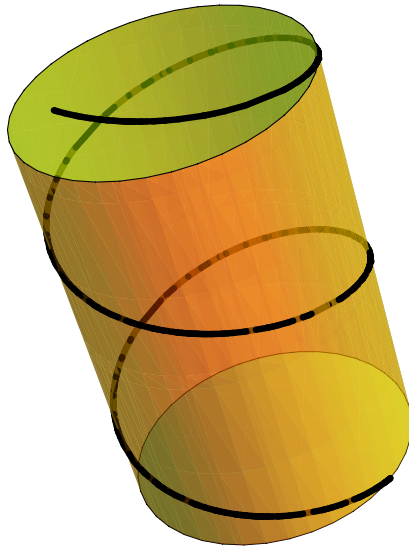


FIGURE 2. Quelques spires d'hélice circulaire

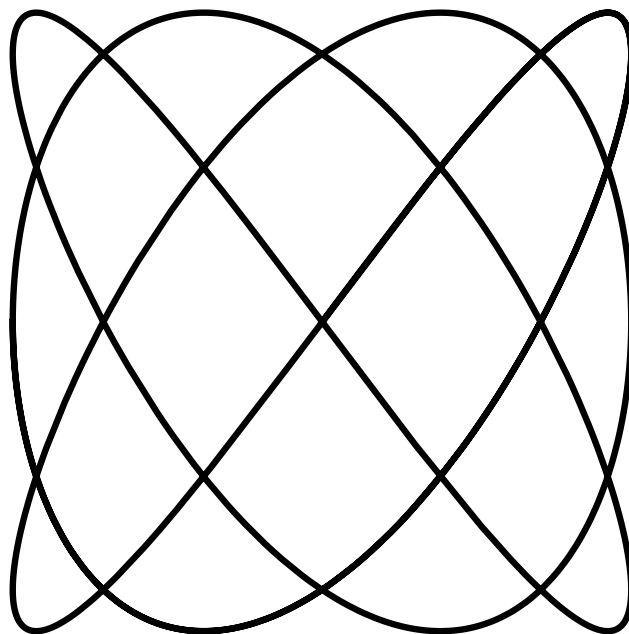


FIGURE 3. Une figure de Lissajou

à vérifier que la relation introduite est bien une relation d'équivalence dans l'ensemble des courbes paramétrées.

Nous dirons de la fonction u que c'est un *changement de paramètres*. Comme il n'est pas toujours aisé de décrire la réciproque d'une bijection donnée, il est utile de disposer d'un critère permettant de vérifier qu'elle est de classe C^∞ sans avoir à la calculer. En voici un, que nous admettons sans preuve.

PROPOSITION 1. *Soit une application $u : I \rightarrow \mathbf{R}$ de classe C^∞ , où I est un intervalle ouvert de \mathbf{R} .*

a) *Si u est une bijection de I sur un intervalle ouvert de \mathbf{R} et si sa réciproque est de classe C^∞ , alors*

$$(1) \quad \forall t \in I, \quad u'(t) \neq 0$$

b) *Inversement, si la condition (1) est vérifiée, alors l'image de u est un intervalle ouvert, u est une bijection de I sur celui-ci et sa réciproque est de classe C^∞ .*

Deux courbes paramétrées équivalentes ont évidemment même trace dont elles fournissent chacune une description mais, naturellement, les propriétés géométriques de cette trace ne dépendent pas de ces descriptions. On pourrait donc définir un arc géométrique de courbe comme étant une classe d'équivalence de courbes paramétrées. C'est dans cette optique que nous introduirons diverses notions mais nous ne formaliserons pas complètement cette idée. Simplement, chaque fois que cela s'avèrera utile, nous ferons remarquer que la propriété étudiée est invariante par changement de paramétrage.

A titre d'exemple, voici trois paramétrages équivalents du demi-cercle

$$S = \{(x, y) \in \mathbf{R} \mid x^2 + y^2 = 1, y > 0\}$$

Il est d'abord le graphe de la fonction

$$f : x \in]-1, 1[\mapsto \sqrt{1 - x^2} \in \mathbf{R}$$

Nous noterons

$$(2) \quad \gamma : x \in]-1, 1[\mapsto (x, \sqrt{1 - x^2}) \in \mathbf{R}^2$$

la courbe paramétrée correspondante.

C'est ensuite la trace de la courbe paramétrée

$$(3) \quad \eta : t \in]0, +\infty[\mapsto \left(\frac{1 - t^2}{1 + t^2}, \frac{2t}{1 + t^2} \right) \in \mathbf{R}^2$$

Comme illustré à la figure 4, η associe à t l'intersection avec S du segment joignant $(-1, 0)$ à $(0, t)$. Quand t varie entre 0 et 1, il décrit

la partie de S située dans le premier quadrant ; avec $t > 1$, c'est celle du second quadrant que l'on obtient.

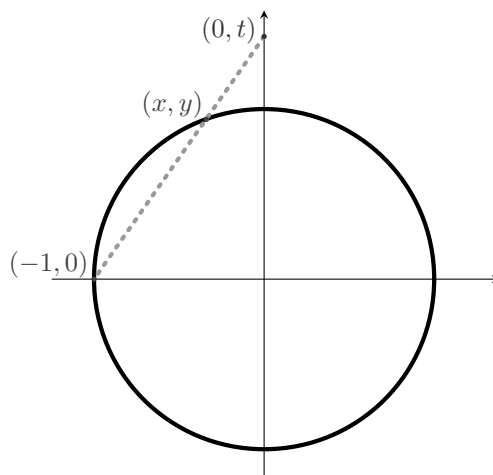


FIGURE 4

Enfin, S est encore décrit par la courbe paramétrée

$$\zeta : \theta \in]0, \pi[\mapsto (\cos \theta, \sin \theta) \in \mathbf{R}^2$$

Les trois paramétrages $(] - 1, 1[, \gamma)$, $(]0, +\infty[, \eta)$ et $(]0, \pi[, \zeta)$ de S sont équivalents.

En effet, on a d'une part $\gamma = \eta \circ u$, où

$$u : t \in] - 1, 1[\mapsto \sqrt{\frac{1-t}{1+t}} \in]0, +\infty[$$

Comme

$$u^{-1} : t \in]0, +\infty[\mapsto \frac{1-t^2}{1+t^2} \in] - 1, 1[$$

u est bien un changement de paramètres de sorte que $(] - 1, 1[, \gamma)$ et $(]0, +\infty[, \eta)$ sont équivalents.

D'autre part, on a $\zeta = \gamma \circ v$, où

$$v : t \in]0, \pi[\mapsto \cos t \in] - 1, 1[$$

car $\sin t > 0$ dans $]0, \pi[$. Vu que v est surjectif et que sa dérivée ne s'annule nulle part, on conclut par la Proposition 1 que c'est aussi un changement de paramètres : $(] - 1, 1[, \gamma)$ et $(]0, \pi[, \zeta)$ sont donc équivalents, ce qui suffit².

². En fait, $v^{-1} = \arccos$.

2.1. Orientation. La trace d'une courbe paramétrée (I, γ) est orientée par celle-ci. On convient en effet de déclarer que $P = \gamma(s)$ est avant $Q = \gamma(t)$ si $s < t$. Naturellement, ceci n'est généralement légitime que si t et s sont assez proches. Dans le cas d'une courbe périodique, par exemple, on pourrait en effet avoir $P = \gamma(s) = \gamma(u)$ avec $s < t < u$. Néanmoins, la donnée de γ donne un sens de parcours de la trace.

Par exemple, le demi-cercle S présenté plus haut est orienté selon le «sens des aiguilles d'une montre» par le paramétrage (2) et selon le sens «trigonométrique» par le paramétrage (3).

Voyons comment expliquer que des paramétrages pourtant équivalents peuvent induire des orientations opposées de leur trace commune. Supposons (I, γ) équivalent à $(J, \eta) : \gamma = \eta \circ u$ où $u : I \rightarrow J$ est un changement de paramètres. Comme la dérivée de u ne s'annule jamais, elle est de signe constant. Si elle est positive, u est strictement croissant et les orientations associées aux deux courbes sont les mêmes. Sinon, u est strictement décroissant et les orientations associées aux deux courbes sont opposées.

A titre d'illustration, pour les paramétrages (2) et (3), la dérivée de u est donnée par

$$-\frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} - \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1-t}{(1+t)^3}}$$

Elle est partout négative, ce qui corrobore le fait que les deux paramétrages induisent des orientations opposées de S .

3. Tangente

Le fait qu'une fonction $f :]a, b[\rightarrow \mathbf{R}$ soit dérivable permet de définir en chaque point $(x_0, f(x_0))$ de son graphe une tangente, à savoir la droite d'équation

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

Celle-ci admet le vecteur directeur $(1, f'(x_0))$ qui n'est autre que la dérivée de la courbe paramétrée³

$$x \mapsto (x, f(x))$$

décrivant le graphe.

Fort de cette constatation, on définit le *vecteur tangent* en $t_0 \in I$ d'une courbe paramétrée (I, γ) de \mathbf{R}^n comme étant la dérivée $\gamma'(t_0)$ et,

3. Quand elle existe, la dérivée d'une fonction à valeurs dans \mathbf{R}^n est le vecteur dont les composantes sont les dérivées des coordonnées de la fonction. On dit, pour s'en souvenir, qu'on dérive une fonction *composantes à composantes*.

si elle n'est pas nulle, on dit que la droite passant par $P = \gamma(t_0)$ et parallèle à $\gamma'(t_0)$ est *tangente* en P à la courbe.

Par définition, la dérivée de γ en t_0 est la limite⁴

$$(4) \quad \gamma'(t_0) = \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h \neq 0}} \frac{1}{h} (\gamma(t_0 + h) - \gamma(t_0))$$

La différence entre parenthèses du membre de droite est le vecteur joignant P au point $Q = \gamma(t_0 + h)$. Pour autant qu'elle ne soit pas nulle, la dérivée $\gamma'(t_0)$ représente donc la limite des directions des vecteurs directeur \overrightarrow{PQ} des cordes $[P, Q]$ lorsque Q se rapproche de P le long de la courbe. La tangente introduite plus haut est ainsi la position limite des droites PQ , comme illustré sur la figure 5.

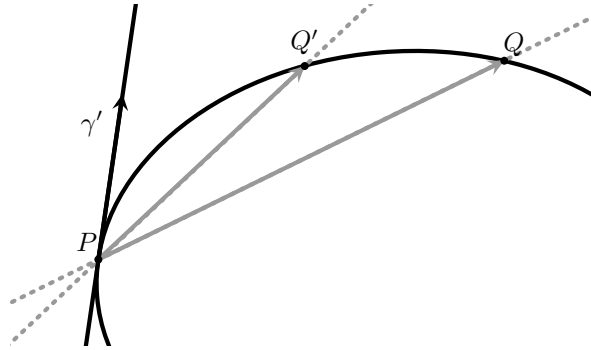


FIGURE 5. Tangente : position limite de sécantes

La formule (4) a un autre intérêt. Elle permet de comprendre intuitivement pourquoi, quand il n'est pas nul, le vecteur tangent $\gamma'(t_0)$ est orienté dans le même sens que la courbe paramétrée γ . En effet, avec les notations du paragraphe précédent, pour des valeurs positives de h , d'une part Q est après P et d'autre part, le quotient différentiel a le même sens que \overrightarrow{PQ} .

Soient (I, γ) et (J, η) des courbes paramétrées équivalentes : $\gamma = \eta \circ u$ où $u : I \rightarrow J$ est un changement de paramètres. En dérivant en $t_0 \in I$ cette dernière relation, nous obtenons

$$(5) \quad \gamma'(t_0) = u'(t_0)\eta'(s_0)$$

où $s_0 = u(t_0)$. Comme $u'(t_0) \neq 0$, on en déduit que les vecteurs tangents $\gamma'(t_0)$ et $\eta'(s_0)$ sont simultanément nuls ou différents de zéro et que,

4. En passant aux coordonnées, on voit que les composantes de la dérivée de *gamma* sont les dérivées de ses coordonnées, comme annoncé dans la note en bas de page précédente.

dans ce dernier cas, ils sont proportionnels. En particulier, les tangentes en $P = \gamma(t_0) = \eta(s_0)$ à γ et à η sont les mêmes : la notion de tangente est invariante par changement de paramétrages.

3.1. Auto-intersection. La définition d'une courbe paramétrée (I, γ) de \mathbf{R}^n ne suppose pas que γ soit injectif. Un point de \mathbf{R}^n peut donc s'écrire $\gamma(t)$ pour plusieurs valeurs de t .

C'est certainement le cas si γ est périodique, auquel cas tous les points de sa trace sont images d'une infinité de valeurs du paramètre. Mais les dérivées de γ sont aussi périodiques, et de même période⁵ que γ . En particulier, les vecteurs tangents en t et en s sont les mêmes lorsque $t - s$ est un multiple entier de la période. Par contre, si $t - s$ n'est pas un multiple entier de la période, ou si la courbe n'est pas périodique, et si $\gamma(t) = \gamma(s)$, alors, en général, les vecteurs tangents en t et en s ne sont pas les mêmes.

C'est pourquoi, suivant la terminologie de [2], nous dirons qu'un point de la trace de γ qui est atteint par plusieurs valeurs du paramètre qui ne diffèrent pas d'un multiple entier d'une période de γ est une *auto-intersection* de (I, γ) .

La *sextique de Cayley* est la courbe de \mathbf{R}^2 définie sur \mathbf{R} par

$$t \mapsto (\cos^3 t \cos(3t), \cos^3 t \sin(3t))$$

Elle est représentée à la figure 6. Le lecteur est invité à vérifier qu'elle est périodique de période π . Elle possède une unique auto-intersection. C'est le point $(-1/8, 0)$ obtenu pour $s = \pi/3$ et $t = 2\pi/3$.

Le lecteur est également invité à vérifier que la figure de Lissajou de la figure 3 est de période 8π et qu'elle possède dix-sept auto-intersections, à savoir les points

$$(0, 0), (\pm \frac{\sqrt{2}}{2}, 0), (0, \pm \frac{\sqrt{3}}{2}), (\pm \frac{\sqrt{2}}{2}, \pm \frac{\sqrt{3}}{2}), (\pm \frac{1}{2} \sqrt{2 \pm \sqrt{2}}, \pm \frac{1}{2})$$

(les signes \pm sont tous indépendants. Par exemple, l'expression la plus à droite donne huit points distincts).

La figure 7 est une projection de la sextique de Cayley sur un cône circulaire droit. Elle fournit un exemple de courbe spatiale (i.e. à valeurs dans \mathbf{R}^3) présentant une auto-intersection.

5. La période d'une fonction f définie sur \mathbf{R} est le plus petit $\tau > 0$ tel que

$$\forall x \in \mathbf{R}, \quad f(x + \tau) = f(x)$$

mais, de temps à autre, j'appellerai période de f l'un des nombres τ vérifiant cette dernière condition.

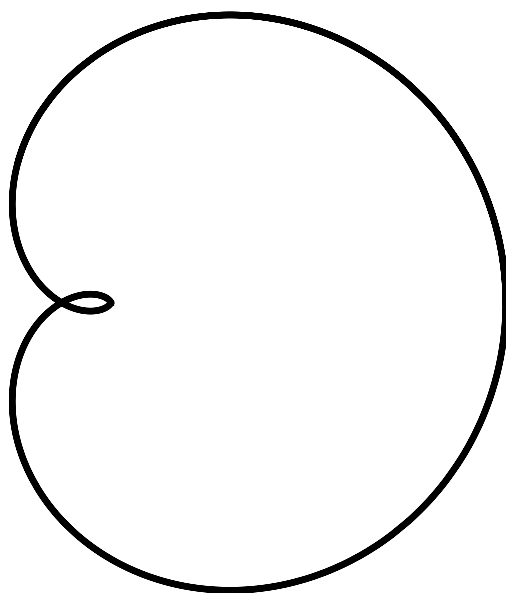


FIGURE 6. La sextique de Cayley

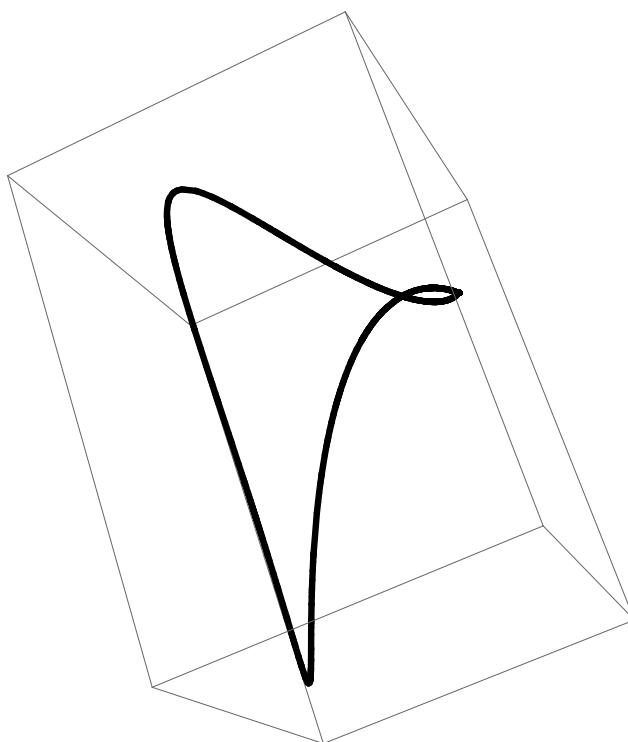


FIGURE 7. Une sextique gauchie

Naturellement, plusieurs droites peuvent être tangentes à une courbe en une de ses auto-intersections. Ceci est illustré à la figure 8 à propos du folium de Descartes décrit par la courbe

$$\gamma : t \in \mathbf{R} \mapsto \left(3 \frac{t(1-t^2)}{1+3t^2}, 3 \frac{1-t^2}{1+3t^2} \right) \in \mathbf{R}^2$$

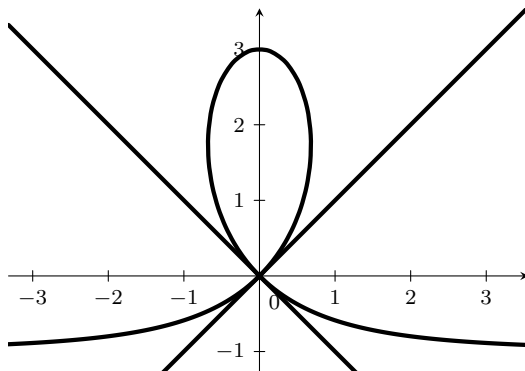


FIGURE 8. Un folium de Descartes

Pour celui-ci, l'origine est une auto-intersection obtenue avec $t = -1$ et $t = 1$. On a

$$\gamma'(-1) = \left(-\frac{3}{2}, \frac{3}{2} \right), \quad \gamma'(1) = \left(-\frac{3}{2}, -\frac{3}{2} \right)$$

Il y a aussi deux tangentes en chaque auto-intersection de la figure de Lissajou représentée plus haut ainsi qu'en celle de la sextique de Cayley.

De façon plus générale, les différentes grandeurs que nous associerons à un point d'une courbe prendrons généralement autant de valeurs en une auto-intersection qu'il y a de valeurs du paramètre qui la décrivent. C'est pourquoi, sauf lorsque le contexte rend la chose inutile, il est préférable quand on considère un point de la trace d'une courbe, de préciser la valeur du paramètre en laquelle on l'étudie.

3.2. Régularité. On dit qu'une courbe paramétrée (I, γ) est *régulière* en $t_0 \in I$, ou encore que $P = \gamma(t_0)$ est *un point régulier* de γ pour autant qu'il n'y ait pas d'ambiguïté sur la valeur du paramètre décrivant P si sa dérivée ne s'annule pas en t_0 . Vu la relation (5) et le commentaire qui la suit, cette notion est invariante par changement de paramétrages.

Une courbe paramétrée dont tous les points sont réguliers est une *courbe régulière*. On a fait observer en début de section que les graphes

de fonctions réelles sont des courbes régulières. Cela vaut bien entendu pour tous les graphes de fonction et il s'avère que, localement, la réciproque est vraie, en vertu du résultat suivant.

PROPOSITION 2. *Si la courbe paramétrée (I, γ) de \mathbf{R}^n est régulière en t_0 , alors $(I_0, \gamma|_{I_0})$ est équivalent à un graphe de fonction, où I_0 est un intervalle ouvert tel que $t_0 \in I_0 \subset I$.*

DÉMONSTRATION. Puisque la dérivée de γ n'est pas nulle en t_0 , une de ses composantes est différente de zéro. Pour simplifier l'écriture, nous supposons que c'est la première ce qui ne nuit pas à la généralité. Par continuité, cette composante ne s'annule en aucun point d'un intervalle ouvert I_0 de I contenant t_0 . D'après la Proposition 1, l'image de I_0 par γ^1 est un intervalle ouvert J et la fonction

$$u := \gamma|_{I_0}^1 : I_0 \rightarrow J$$

est une bijection dont la réciproque — nous la noterons v — est de classe C^∞ . Le graphe (J, η) de la fonction

$$t \in J \mapsto (\gamma^2(v(t)), \dots, \gamma^n(v(t))) \in \mathbf{R}^{n-1}$$

est équivalent à $(I_0, \gamma|_{I_0})$. Il est clair en effet que $\gamma = \eta \circ u$ dans I_0 . \square

Lorsque $\gamma'(t_0) = 0$, on dit que γ est *irrégulier*, ou encore *singulier*, en t_0 , ou encore que $P = \gamma(t_0)$ est un point irrégulier, ou singulier, de γ . Bien entendu, cette notion est également invariante par changement de paramétrages.

Dans la suite, nous nous limiterons aux courbes paramétrées dont l'ensemble des valeurs du paramètre en lesquelles elles sont singulières est discret. Cela signifie que chacune de ces valeurs appartient à un intervalle ouvert dans lequel il n'y a pas d'autres singularités.

Voici un premier exemple de courbes présentant des singularités : les astroïdes dont une est dessinée à la figure 9.

À une similitude près, on peut paramétrer une astroïde par

$$\gamma : t \in \mathbf{R} \mapsto (\cos^3 t, \sin^3 t) \in \mathbf{R}^2$$

La courbe γ est périodique de période 2π . Elle n'a pas d'auto-intersection mais, vu que

$$\gamma'(t) = (-3 \sin t \cos^2 t, 3 \cos t \sin^2 t)$$

elle est singulière en les multiples de $\pi/2$, ce qui se manifeste sur sa trace par la présence de quatre points de rebroussements (les points saillants du tracé de la figure 9).

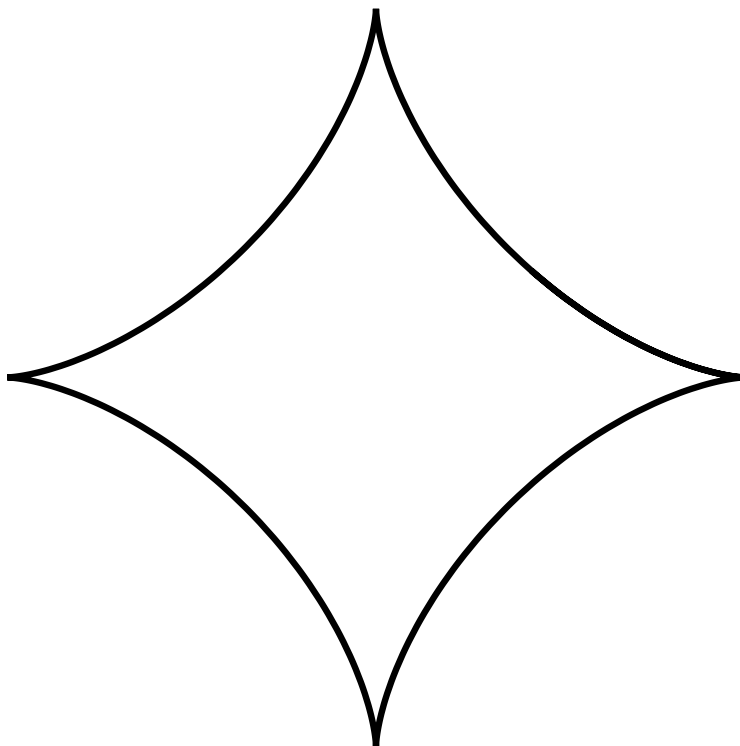


FIGURE 9. Une astroïde

3.3. Points anguleux et de rebroussement. Cette sous-section concerne les courbes planes (i.e. à valeurs dans \mathbf{R}^2) auxquelles est consacré le chapitre suivant. Le but est ici d'illustrer la notion de singularité sur des exemples simples.

Supposons que la courbe plane paramétrée (I, γ) soit singulière en t_0 . La tangente telle que nous l'avons introduite n'existe alors pas en cette valeur du paramètre. Il se pourrait, cependant, que les limites de sa direction à gauche et à droite de cette valeur, à savoir

$$\mathbf{t}_{<}(t_0) := \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{\gamma'(t)}{\|\gamma'(t)\|} \quad \text{et} \quad \mathbf{t}_{>}(t_0) := \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{\gamma'(t)}{\|\gamma'(t)\|}$$

respectivement, existent. Voici alors la nomenclature adoptée.

- a) Si $\mathbf{t}_{<}(t_0) = \mathbf{t}_{>}(t_0)$, nous dirons que la droite passant par $P = \gamma(t_0)$ et dirigée par $\mathbf{t}_{<}(t_0)$ est tangente à la courbe en P .
- b) Si $\mathbf{t}_{<}(t_0) \neq \mathbf{t}_{>}(t_0)$ forment un angle non plat, nous dirons que $P = \gamma(t_0)$ est un *point anguleux* de γ , point en lequel les deux

demi-droites issues de P et dirigées par ces directions sont dites tangentes à γ .

- c) Si $\mathbf{t}_{<}(t_0) + \mathbf{t}_{>}(t_0) = 0$, nous dirons que $P = \gamma(t_0)$ est un *point de rebroussement* de la courbe γ , en lequel la droite issue de P et dirigée par ces directions est également déclarée tangente à γ .

Passons à des exemples illustrant ces situations.

Pour a), on vérifie facilement que la courbe paramétrée $t \mapsto (t^3, t^4)$, représentée à la figure 10, est singulière en $t_0 = 0$ et que $\mathbf{t}_{<}(0) = \mathbf{t}_{>}(0) = (1, 0)$: elle est donc tangente à l'axe des x .



FIGURE 10

Pour b), considérons une fonction $\rho : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, de classe C^∞ et dont les dérivées de tout ordre en 0 sont nulles (mais sont non nulles ailleurs dans un voisinage de 0). Posons, pour $t \in \mathbf{R}$,

$$\gamma_\rho(t) = \begin{cases} \rho(t)(1, -1) & \text{si } t < 0 \\ (0, 0) & \text{si } t = 0 \\ \rho(t)(1, 1) & \text{si } t > 0 \end{cases}$$

On montre facilement que γ_ρ est dérivable et que sa dérivée n'est autre que γ_ρ' . Il est par conséquent de classe C^∞ . De plus,

$$\mathbf{t}_{<}(0) = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1) \quad \text{et} \quad \mathbf{t}_{>}(0) = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1)$$

La courbe γ_ρ possède alors un point anguleux en 0. Cet exemple est relativement artificiel et, en réalité, les points anguleux se présentent plus naturellement en des valeurs du paramètre en lesquelles γ n'est pas dérivable mais possède des dérivées à gauche et à droite, situation que nous avons exclue d'emblée en supposant les courbes paramétrées de classe C^∞ .

Les astroïdes illustrent la troisième situation. En effet, comme le lecteur est invité à le vérifier, leurs singularités sont toutes des points de rebroussement. La figure 11 présente un autre exemple de point de rebroussement (tiré de [2]). Son intérêt réside notamment dans le fait

que, au voisinage de la singularité, la courbe est entièrement d'un même côté de sa tangente.

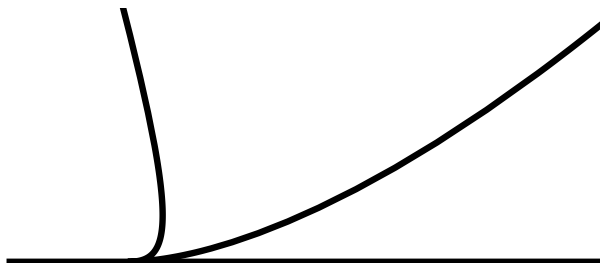


FIGURE 11

Il s'agit de la courbe paramétrée

$$t \in \mathbf{R} \mapsto (t^2 + t^3, t^4) \in \mathbf{R}^2$$

PROPOSITION 3. Soient une courbe paramétrée (I, γ) et $t_0 \in I$. Si les dérivées d'ordre $1, \dots, k-1$ de γ s'annulent en t_0 et si $\gamma^{(k)}(t_0) \neq \mathbf{0}$, alors t_0 est une singularité isolée de γ et

$$\begin{cases} \mathbf{t}_<(t_0) = \mathbf{t}_>(t_0) & \text{si } k \text{ est impair} \\ \mathbf{t}_<(t_0) + \mathbf{t}_>(t_0) = \mathbf{0} & \text{si } k \text{ est pair} \end{cases}$$

DÉMONSTRATION. Supposons que les dérivées d'ordre 1 à $k-1$ de γ s'annulent en t_0 . Il existe alors une fonction de classe C^∞ $\eta : I \rightarrow \mathbf{R}^2$ telle que

$$\forall t \in I, \quad \gamma'(t) = (t - t_0)^{k-1} \eta(t)$$

En particulier,

$$\gamma^{(k)}(t_0) = (k-1)! \eta(t_0)$$

Supposons de plus que $\gamma^{(k)}(t_0) \neq \mathbf{0}$, de sorte que $\eta(t_0) \neq \mathbf{0}$. Dans ces conditions, pour $t \neq t_0$ suffisamment proche de t_0 , $\gamma'(t)$ n'est pas nul. De plus, pour de tels t ,

$$\frac{\gamma'(t)}{\|\gamma'(t)\|} = \frac{(t - t_0)^{k-1}}{|t - t_0|^{k-1}} \frac{\eta(t)}{\|\eta(t)\|}$$

et la conclusion s'en suit aussitôt. \square

Cette propriété est d'application dans les cas des courbes illustrées aux figures 10 et 11. Pour la première, $k = 3$ et pour la seconde, $k = 2$.

4. Longueur d'arc et abscisse curviligne

La restriction d'une courbe paramétrée (I, γ) de \mathbf{R}^n à un intervalle $J \subset I$ est parfois appelée *arc* de γ .

Sa *longueur* est, par définition, le nombre

$$(6) \quad L(\gamma|_J) = \int_J \|\gamma'(t)\| dt$$

pourvu qu'il existe, ce qui est toujours le cas lorsque J est borné car $\|\gamma'\|$ est continu.

On justifie cette définition comme suit. Pour simplifier, on suppose J borné et on note a sa meilleure borne inférieure et b sa meilleure borne supérieure. L'idée intuitive de la notion de longueur sur laquelle repose l'argument est que si deux points de γ sont suffisamment proches, la différence entre la longueur de la corde qui les joints et celle de l'arc qu'ils délimitent est très petite et cela d'autant plus qu'ils sont très proches. On imagine dès lors que si on choisit des points

$$P_0 = \gamma(a), P_1 = \gamma(t_1), \dots, P_{m-1} = \gamma(t_{m-1}), P_m = \gamma(b)$$

avec $t_0 := a < t_1 < \dots < t_{m-1} < t_m := b$, le nombre

$$L_m = \sum_{0 \leq k < m} \|\overrightarrow{P_k P_{k+1}}\|$$

est une approximation de la longueur de l'arc $\gamma|_J$ d'autant meilleure que les différences $t_{k+1} - t_k$ sont petites et qu'en faisant tendre m vers l'infini en s'assurant que ces différences tendent vers 0, L_m va tendre vers la longueur de l'arc. Or sous ces hypothèses, L_m converge vers le second membre de (6), ce qui cautionne notre définition de la longueur d'arc. Plus précisément,

PROPOSITION 4. *Soit une courbe paramétrée (I, γ) de \mathbf{R}^n , un intervalle compact $J = [a, b] \subset I$ et, pour chaque entier positif m , des nombres $t_k(m), k \in \{0, \dots, m\}$, tels que*

$$t_0(m) := a < t_1(m) < \dots < t_{m-1}(m) < t_m(m) := b$$

Si

$$(7) \quad \forall m \in \mathbf{N} \setminus \{0\}, \forall k \in \{0, \dots, m-1\}, \quad |t_{k+1}(m) - t_k(m)| \leq \varepsilon_m$$

où la suite ε tend vers 0, alors

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{0 \leq k < m} \|\overrightarrow{P_{k,m} P_{k+1,m}}\| = \int_J \|\gamma'(t)\| dt$$

où $P_{k,m} := \gamma(t_k(m))$.

DÉMONSTRATION. Nous allons appliquer le théorème de Lebesgue à la suite de fonctions intégrables⁶

$$m \mapsto f_m = \sum_{0 \leq k < m} \left\| \frac{\overrightarrow{P_{k,m} P_{k+1,m}}}{t_{k+1}(m) - t_k(m)} \right\| \chi_{[t_k(m), t_{k+1}(m)]}$$

Vérifions d'abord que la suite f converge presque partout vers $\|\gamma'\| \chi_J$. En dehors de J , les f_m et $\|\gamma'\| \chi_J$ sont nuls. Soit alors $t \in J$. Pour tout m , il existe k tel que $t_k(m) \leq t \leq t_{k+1}(m)$ ⁷. Vu (7), les suites $m \mapsto t_k(m), t_{k+1}(m)$ convergent vers t .

Soit alors un indice $\ell \in \{1, \dots, n\}$. Par le théorème des accroissements finis appliqué à γ^ℓ , il existe $\theta \in]t_k(m), t_{k+1}(m)[$ tel que

$$(8) \quad \gamma^\ell(t_{k+1}(m)) - \gamma^\ell(t_k(m)) = (t_{k+1}(m) - t_k(m)) \gamma'^\ell(\theta)$$

Par conséquent,

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{\gamma^\ell(t_{k+1}(m)) - \gamma^\ell(t_k(m))}{t_{k+1}(m) - t_k(m)} = \gamma'^\ell(t)$$

Comme ceci est vrai pour tout indice,

$$\lim_m \frac{\overrightarrow{P_{k,m} P_{k+1,m}}}{t_{k+1}(m) - t_k(m)} = \gamma'(t)$$

et $\lim_m f_m(t) = \|\gamma'(t)\| \chi_J(t)$.

Il résulte également de (8) que les f_m sont majorés par la fonction intégrable

$$\sqrt{n} \sup_J \|\gamma'\| \chi_J$$

La suite f vérifie donc les hypothèses du théorème de Lebesgue de sorte que

$$\begin{aligned} \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{0 \leq k < m} \left\| \overrightarrow{P_{k,m} P_{k+1,m}} \right\| &= \lim_{m \rightarrow \infty} \int_{\mathbf{R}} f_m \\ &= \int_{\mathbf{R}} \lim_{m \rightarrow \infty} f_m \\ &= \int_J \|\gamma'(t)\| dt \end{aligned}$$

ce que nous voulions. □

A titre d'exemple, calculons la longueur de l'astroïde

$$\gamma : t \in \mathbf{R} \quad \mapsto \quad (\cos^3 t, \sin^3 t) \in \mathbf{R}^2$$

6. De façon très générale, on note χ_e la fonction caractéristique d'un ensemble e . Par définition, $\chi_e(x)$ vaut 1 si $x \in e$ et zéro sinon.

7. Ce k dépend de m . Pour alléger les notations, nous ne l'avons pas indiqué explicitement.

sur une période :

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \|\gamma'(t)\| dt &= 3 \int_0^{2\pi} |\sin t \cos t| dt \\ &= 3 \left(\int_0^{\pi/2} + \int_{\pi}^{3\pi/2} \right) \sin t \cos t dt - 3 \left(\int_{\pi/2}^{\pi} + \int_{3\pi/2}^{2\pi} \right) \sin t \cos t dt \\ &= 6 \end{aligned}$$

La longueur de l'arc de l'hélice

$$t \in \mathbf{R} \quad \mapsto \quad (r \cos t, r \sin t, ht) \in \mathbf{R}^3$$

(où, rappelons-le, $r > 0$) restreinte à $[a, b]$ est

$$(9) \quad \int_a^b \sqrt{r^2 + h^2} dt = \sqrt{r^2 + h^2} (b - a)$$

En particulier, avec $h = 0$ et $a = 0, b = 2\pi$, on retrouve la longueur d'un cercle de rayon r : $2\pi r$.

La formule (9) a une interprétation intuitive très simple. L'hélice est située sur un cylindre (voir la figure 2). Si on le fait «rouler» sur son plan tangent en $A = \gamma(a)$, elle dessine sur celui-ci une droite, qui n'est autre que sa tangente en A . Dans ce roulement, le point $\gamma(b)$ s'applique sur un point B de cette droite et la longueur de l'arc de l'hélice qu'on a calculée est aussi la distance séparant les points A et B . La parallèle à la génératrice en A du cylindre et la perpendiculaire à cette génératrice menée par A se coupent en C . Comme $\|AC\| = r(b - a)$ et $\|CB\| = |h|(b - a)$, l'hypothénuse du triangle rectangle ABC vaut $\|AB\| = \sqrt{r^2 + h^2}(b - a)$.

PROPOSITION 5. *La longueur d'arc est invariante par changement de paramétrages.*

DÉMONSTRATION. Précisons d'abord ce que nous devons établir. Soient (I, γ) et (J, η) des courbes paramétrées équivalentes : $\gamma = \eta \circ u$ où $u : I \rightarrow J$ est un changement de paramètres et un intervalle compact $U \subset I$. Puisque u est strictement monotone, son image $V = u(U)$ est un intervalle inclus à J et ce que nous devons montrer, c'est l'égalité

$$L(\gamma|_U) = L(\eta|_V)$$

Une première façon de faire consiste à utiliser le théorème de changement de variables dans les intégrales. Constatant, en effet, que

$$\|\gamma'\| = |u'| \|\eta' \circ u\|$$

on obtient, avec ce théorème,

$$L(\gamma|_U) = \int_U \|\gamma'(t)\| dt = \int_U |u'(t)| \|\eta'(u(t))\| dt = \int_V \|\eta'(t)\| dt = L(\eta|_V)$$

Une seconde approche consiste à appliquer la Proposition 4. Expliquons cela en supposant u croissant (le cas décroissant n'est guère plus compliqué mais les écritures sont un peu plus lourdes⁸), en conservant les notations de l'énoncé de cette proposition. Aux subdivisions de U

$$(t_0(m), \dots, t_m(m))$$

u fait correspondre des subdivisions de V

$$(s_0(m) = u(t_0(m)), \dots, s_m(m) = u(t_m(m)))$$

La fonction u étant uniformément continue sur U , étant donnée une suite ε' tendant vers 0, on peut trouver une suite ε tendant vers zéro telle que si (7) est vérifié par les $t_k(m)$ alors les $s_k(m)$ vérifient les mêmes inégalités avec ε remplacé par ε' . Cela étant, par construction

$$P_{k,m} = \gamma(t_k(m)) = \eta(s_k(m))$$

Dès lors, vu la Proposition 4,

$$L(\gamma|_U) = \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{0 \leq k < m} \|\overrightarrow{P_{k,m} P_{k+1,m}}\| = L(\eta|_V)$$

comme voulu. □

Il faut noter que, malheureusement, il est généralement très difficile, voir impossible, de calculer explicitement les longueurs d'arc car $\|\gamma'\|$ admet rarement des primitives calculables en termes de fonctions élémentaires.

4.1. Paramétrages naturels. Informellement, on peut songer à paramétrer une courbe à l'aide de la longueur d'arc en procédant comme ceci. On choisit un point P_0 comme origine et une orientation de la courbe. On repère alors la position d'un point P de la courbe en lui assignant un nombre dont la valeur absolue est la longueur de l'arc délimité par P_0 et P et qui est positif si P est après P_0 , négatif sinon. Pour tenir compte de ce signe, on appelle ce nombre *l'abscisse curviligne* de P (relativement à l'orientation et à l'origine P_0 donnés). Plus généralement (et c'est utile en pratique), on peut fixer arbitrairement

8. En réalité, la proposition en question vaut encore pour des subdivisions décroissantes, i. e. telles que, avec les notations de son énoncé,

$$t_m(m) := a < t_{m-1}(m) < \dots < t_1(m) < t_0(m) := b$$

l'abscisse curviligne de P_0 , disons s_0 , et définir l'abscisse curviligne s de P en demandant que $s - s_0$ soit la longueur d'arc séparant P de P_0 , comptée positivement si P est après P_0 et négativement sinon.

Ceci nous amène à dire qu'une courbe paramétrée (I, γ) est *rappor-tée à une abscisse curviligne*, si

$$\forall a, b \in I, \quad b - a = \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt$$

Nous verrons que l'idée esquissée ci-dessus fonctionne très bien pour les courbes paramétrées *régulières* en ce sens que les abscisses curvilignes donnent alors lieu à des paramétrages qui leurs sont équivalents d'ailleurs très utiles sur le plan théorique. En présence de singularités, on tombe sur des obstacles principalement dûs au fait qu'on n'est plus dans les conditions d'application de la Proposition 1. L'abscisse curviligne relative à une orientation et une origine données existent pour de telles courbes puisque la longueur d'arc est définie mais elle ne fournit généralement pas de paramétrage.

Pour clarifier les choses, examinons la question sur un exemple très simple, celui de l'astroïde

$$\gamma : t \mapsto (\cos^3 t, \sin^3 t)$$

Pour celle-ci,

$$\|\gamma'(t)\| = 3|\sin t \cos t|$$

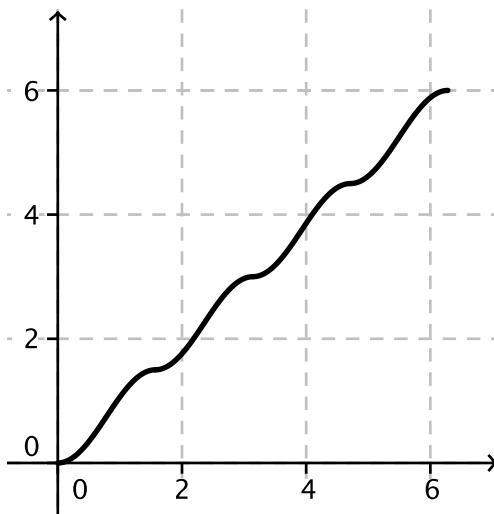


FIGURE 12. Graphe d'une abscisse curviligne d'astroïde

Prenons pour origine $P_0 = \gamma(0) = (1, 0)$ et pour orientation, celle définie par γ . Nous allons étudier l'abscisse curviligne $s(t)$ de $\gamma(t)$ correspondante dans l'intervalle $[0, 2\pi]$, long d'une période de l'astroïde. Pour tenir compte de la valeur absolue dans l'expression de $\|\gamma'\|$, celui-ci doit être découpé en quatre parties. Il est facile de calculer la fonction $s : [0, 2\pi] \rightarrow [0, 6]$. On trouve

$$s(t) = \begin{cases} -\frac{3}{4} \cos(2t) + \frac{3}{4} & \text{si } t \in [0, \pi/2] \\ \frac{3}{4} \cos(2t) + \frac{9}{4} & \text{si } t \in [\pi/2, \pi] \\ -\frac{3}{4} \cos(2t) + \frac{15}{4} & \text{si } t \in [\pi, 3\pi/2] \\ \frac{3}{4} \cos(2t) + \frac{21}{4} & \text{si } t \in [3\pi/2, 2\pi] \end{cases}$$

Son graphe est esquissé à la figure 12. On y détecte des points d'inflexion à tangente horizontale qui attestent du fait que la dérivée de s est nulle en les abscisses correspondantes. De plus, en ces abscisses, s n'a pas de dérivée seconde. En effet, en $\pi/2$ par exemple,

$$\lim_{t \rightarrow \pi/2^-} s''(t) = -3, \quad \lim_{t \rightarrow \pi/2^+} s''(t) = 3$$

Ainsi, alors même que c'est une bijection entre $[0, 2\pi]$ et $[0, 6]$, s n'est pas un changement de paramètres⁹.

La proposition suivante est un critère permettant de reconnaître qu'une courbe paramétrée est rapportée à une abscisse curviligne.

PROPOSITION 6. *Une courbe paramétrée (I, γ) de \mathbf{R}^n est rapportée à une abscisse curviligne si, et seulement si,*

$$(10) \quad \forall t \in I, \quad \|\gamma'(t)\| = 1$$

DÉMONSTRATION. Si une courbe paramétrée (I, γ) est rapportée à une abscisse curviligne alors, étant donné $s_0 \in I$,

$$\forall s \in I, \quad s - s_0 = \int_{s_0}^s \|\gamma'(x)\| dx$$

Cette condition montre que $s - s_0$ est une primitive de $\|\gamma'\|$ dans I , ce qui entraîne $\|\gamma'(s)\| = 1$ partout dans I .

Inversement, si cette dernière condition est vérifiée, alors, pour tous $a, b \in I$,

$$\int_a^b \|\gamma'(t)\| dt = b - a$$

□

9. On peut vérifier que s^{-1} n'est pas dérivable en les multiples de $\pi/2$.

On dit qu'une courbe paramétrée (I, γ) vérifiant la condition (10) est *un paramétrage naturel* : c'est une courbe régulière dont le vecteur tangent en chaque point est normé.

La proposition que nous venons d'établir montre que le fait d'être naturel et celui d'être rapporté à une abscisse curviligne sont équivalents. Ils impliquent que la courbe est régulière. A cet égard, voici une proposition bien utile.

PROPOSITION 7. *Toute courbe paramétrée régulière de \mathbf{R}^n est équivalente à un paramétrage naturel, qu'on peut choisir de même orientation qu'elle.*

DÉMONSTRATION. Soit une courbe paramétrée régulière (I, γ) de \mathbf{R}^n . Soit un changement de paramètres $v : J \rightarrow I$. Notons η la courbe paramétrée $\gamma \circ v$ équivalente à γ et cherchons v pour qu'elle soit un paramétrage naturel. Il revient au même, sauf que c'est plus simple, de chercher la réciproque $u : I \rightarrow J$ de v . En dérivant la relation $\gamma = \eta \circ u$, nous obtenons

$$\forall t \in I : \quad \gamma'(t) = u'(t)\eta'(u(t))$$

de sorte que η est naturel si, et seulement si, $|u'| = \|\gamma'\|$. Etant donné que le signe de u' est constant dans I , ceci revient à $u' = \pm\|\gamma'\|$. Autrement dit, la condition imposée à u est d'être une primitive de $\|\gamma'\|$ ou une primitive de $-\|\gamma'\|$. Sous réserve qu'il existe, avec le premier choix, η aura même orientation que γ et avec le second, il aura l'orientation opposée. La fonction $\|\gamma'\|$ est primitivable car elle est continue et ses primitives sont de classe C^∞ car elle-même est de classe C^∞ . En effet, puisque γ' ne s'annule pas dans I , $\|\gamma'\|$ est la composée de la fonction

$$\sqrt{\cdot} :]0, +\infty[\rightarrow \mathbf{R}$$

qui est de classe C^∞ et de la fonction

$$\sum_{\ell=1}^n (\gamma'^{\ell})^2 : I \rightarrow]0, +\infty[$$

qui est de classe C^∞ tout comme γ . Cela noté, la dérivée d'une primitive de $\pm\|\gamma'\|$ ne s'annule nulle part dans I , il résulte de la Proposition 1 que c'est un changement de paramètres. \square

En fait, la preuve ci-dessus montre que deux paramétrages naturels équivalents diffèrent par leur orientation ou par une translation de leurs arguments : les changements de paramètres entre deux paramétrages naturels équivalents sont de la forme $s \mapsto s_0 \pm s$.

En utilisant par exemple (9), le lecteur vérifiera facilement que le paramétrage donné par

$$\eta(s) = \left(r \cos \frac{s}{\sqrt{r^2 + h^2}}, r \sin \frac{s}{\sqrt{r^2 + h^2}}, \frac{h}{\sqrt{r^2 + h^2}} s \right)$$

est un paramétrage naturel équivalent au paramétrage

$$t \mapsto (r \cos t, r \sin t, ht)$$

de l'hélice circulaire étudiée plus haut.

Nous allons à présent étudier les courbes régulières planes et spatiales, i.e. de \mathbf{R}^2 et \mathbf{R}^3 respectivement. Dans les deux cas, la méthode consiste à associer à chaque point de la courbe un repère orthonormé canonique adapté à celle-ci et à examiner la manière dont ce repère varie lorsque son origine évolue sur la courbe. Pour les courbes planes, ayant orienté \mathbf{R}^2 , le repère est entièrement déterminé par une tangente unitaire et la courbe est essentiellement caractérisée par une fonction, la *courbure*. Dans \mathbf{R}^3 , c'est un peu plus compliqué car il y a des points en lesquels le repère espéré ne peut pas être défini et les courbes sont caractérisées par deux fonctions, la courbure et la *torsion*.

CHAPITRE 2

Les courbes planes

Dans ce chapitre, sauf mention explicite du contraire, \mathbf{R}^2 est muni du produit scalaire canonique donné par

$$(u_1, u_2) \cdot (v_1, v_2) = u_1v_1 + u_2v_2$$

et de l'orientation canonique, celle pour laquelle la base¹ (\vec{e}_1, \vec{e}_2) est positive. Dans les figures, sauf exceptions signalées, l'orientation sera celle définie par le «sens trigonométrique».

Avec ces conventions, étant donné un vecteur normé \mathbf{u} , il existe un seul vecteur normé \mathbf{v} tel que (\mathbf{u}, \mathbf{v}) soit une base positive de \mathbf{R}^2 . Si nécessaire, nous le noterons \mathbf{u}^\perp . C'est l'image de \mathbf{u} par la rotation d'angle $\pi/2$. Pratiquement :

$$\text{Si } \mathbf{u} = (u_1, u_2) \text{ alors } \mathbf{u}^\perp = (-u_2, u_1).$$

En effet, $(-u_2, u_1)$ est normé et orthogonal à \mathbf{u} . De plus

$$\det \begin{pmatrix} u_1 & -u_2 \\ u_2 & u_1 \end{pmatrix} = \|\mathbf{u}\|^2 = 1 > 0$$

montre que la base $((u_1, u_2), (-u_2, u_1))$ est une base positive.

De façon générique la variable d'une courbe paramétrée (I, γ) de \mathbf{R}^2 sera notée t et ses dérivées seront désignées par des apostrophes : γ', γ'', \dots . Cependant, lorsque la courbe sera rapportée à une abscisse curviligne, nous noterons s sa variable et nous désignerons par des points ses dérivées : $\dot{\gamma}, \ddot{\gamma}, \dots$

Le plus souvent, les notions sont introduites pour une courbe rapportée à une abscisse curviligne en raison de la nature très géométrique de celle-ci. Mais, comme la longueur d'arc est très difficile à calculer, on explicitera les choses par des formules valables pour des paramétrages équivalents quelconques, pour autant que les notions considérées soient invariantes par changement de paramétrage — à l'orientation près.

1. Dans \mathbf{R}^n ,

$$\vec{e}_n = (0, \dots, \underbrace{1}_{n}, \dots, 0)$$

1. La courbure

Dans toute cette section, (I, γ) désigne une courbe paramétrée *régulière*.

1.1. Repère mobile canonique. On note $\mathbf{t} : I \rightarrow \mathbf{R}^2$ la fonction qui à $t \in I$ associe le *vecteur tangent unitaire*

$$\frac{\gamma'(t)}{\|\gamma'(t)\|}$$

de la courbe en $\gamma(t)$ et on pose, par définition de \mathbf{n} ,

$$\mathbf{n}(t) = \mathbf{t}(t)^\perp$$

Le vecteur $\mathbf{n}(t)$ est le vecteur *normal* de γ en $\gamma(t)$ et la droite passant par $\gamma(t)$ et dirigée par $\mathbf{n}(t)$ est la *normale* à la courbe en $\gamma(t)$. Nous obtenons ainsi un repère orthonormé positif en chaque point de la courbe :

$$\mathcal{R}_\gamma(t) = (\gamma(t), (\mathbf{t}(t), \mathbf{n}(t)))$$

dont la manière de varier avec $t \in I$ va nous permettre de caractériser (I, γ) à déplacement près. Nous appellerons $t \mapsto \mathcal{R}_\gamma(t)$ le *repère mobile (canonique)* de la courbe γ .

Par exemple, pour le graphe d'une fonction $f : I \rightarrow \mathbf{R}^2$,

$$\mathbf{t} = \frac{1}{\sqrt{1+f'^2}}(1, f') \quad \& \quad \mathbf{n} = \frac{1}{\sqrt{1+f'^2}}(-f', 1)$$

En particulier, \mathbf{n} pointe toujours «vers le haut», sa seconde composante étant positive.

Soit une courbe paramétrée (J, η) équivalente à $\gamma : \gamma = \eta \circ u$ où $u : I \rightarrow J$ est un changement de paramètres. On a

$$\frac{\gamma'(t)}{\|\gamma'(t)\|} = \frac{u'}{|u'|} \frac{\eta'}{\|\eta'\|}$$

Par conséquent, à *équivalence près*, le repère \mathcal{R}_γ ne dépend que de l'*orientation* de γ . Plus précisément, avec $s = u(t)$ alors $\mathcal{R}_\eta(s) = \mathcal{R}_\gamma(t)$ si γ et η ont même orientation et

$$\mathcal{R}_\eta(s) = (\gamma(t), (-\mathbf{t}(t), -\mathbf{n}(t)))$$

sinon. En particulier, la normale à γ en $\gamma(t)$ est invariante par changement de paramétrage.

Dans la suite, s'il est nécessaire de préciser de quelle courbe γ les vecteurs \mathbf{t} et \mathbf{n} sont les vecteurs tangent unitaire et normal, nous les indiquerons par γ .

1.2. Courbure algébrique. La «courbure» d'une courbe — le fait que sa trace ne soit pas un segment de droite — se manifeste par un changement de direction de sa tangente. Autrement dit, dans le cas régulier, par la variation de \mathbf{t} . A cet égard, le fait que \mathbf{t} soit normé a une conséquence importante qui résulte du lemme suivant que nous utiliserons à plusieurs reprises.

LEMME 8. *Soit une fonction de classe C^1 d'un intervalle ouvert $I \subset \mathbf{R}$ dans \mathbf{R}^n . Si $\|f\|$ est constant dans I , alors*

$$\forall t \in I : f'(t) \cdot f(t) = 0$$

DÉMONSTRATION. De fait, on a

$$\|f\|^2 = f \cdot f$$

En dérivant les deux membres en $t \in I$, cela donne

$$2\|f(t)\|f'(t) = f'(t) \cdot f(t) + f(t) \cdot f'(t) = 2f'(t) \cdot f(t)$$

Le résultat en découle aussitôt. □

D'après ce lemme, la dérivée de \mathbf{t} est nulle ou perpendiculaire à \mathbf{t} . Dans les deux cas, c'est un multiple de \mathbf{n} . En supposant (I, γ) rapporté à une abscisse curviligne, nous voyons ainsi qu'il existe une fonction $\kappa^* : I \rightarrow \mathbf{R}$ telle que

$$(11) \quad \forall s \in I, \quad \dot{\mathbf{t}}(s) = \kappa^*(s)\mathbf{n}(s)$$

On appelle $\kappa^*(s)$ la *courbure algébrique* en $\gamma(s)$ de la courbe γ , le nom *courbure* étant réservé à sa valeur absolue² $\kappa(s) = |\kappa^*(s)|$. S'il est nécessaire de préciser la courbe, on ajoutera celle-ci en indice et on écrira κ_γ^* et κ_γ à la place de κ^* et κ .

La courbure algébrique de γ détermine complètement la manière dont varie son repère mobile canonique, ce qu'on comprend facilement puisque le vecteur normal \mathbf{n} est univoquement déterminé par \mathbf{t} . De façon précise,

$$(12) \quad \forall s \in I, \quad \dot{\mathbf{n}}(s) = -\kappa^*(s)\mathbf{t}(s)$$

En effet, d'après le Lemme 8, $\dot{\mathbf{n}}$ est un multiple de \mathbf{t} . De plus, on a

$$\mathbf{t}(s) \cdot \dot{\mathbf{n}}(s) = (\mathbf{t}(s) \cdot \mathbf{n}(s))' - \dot{\mathbf{t}}(s) \cdot \mathbf{n}(s) = -\kappa^*(s)$$

vu la définition de la courbure algébrique, ce qui établit l'assertion.

2. En dimension trois, seule la notion de courbure existe. Comme toute courbe plane peut-être vue comme une courbe de \mathbf{R}^3 , il est raisonnable d'utiliser la même notation pour désigner la courbure dans les deux dimensions et de particulariser cette notation pour désigner la courbure algébrique.

1.3. Calcul dans un paramétrage quelconque. Comment la courbure algébrique se comporte-t-elle lorsqu'on passe d'un paramétrage naturel à un autre qui lui est équivalent ? La réponse n'est pas simple. En effet, comme il s'agit d'une fonction du paramètre, la courbure algébrique va changer avec le paramétrage. A proprement parler, cela ne fait donc pas sens de dire que c'est une notion invariante par changement de paramétrages. Cependant, nous allons voir que si (U, α) et (V, β) , sont des paramétrages naturels équivalents *de même orientation*, et si $a \in U$ et $b \in V$ se correspondent par le changement de paramètres réalisant l'équivalence entre les deux, alors $\kappa_\alpha^*(a) = \kappa_\beta^*(b)$. Autrement dit, cette valeur commune est une grandeur géométrique liée au point $P = \alpha(a) = \beta(b)$ de la trace commune des deux paramétrages : elle ne dépend que de leur classe d'équivalence au sein d'une orientation donnée³. Ceci résulte du fait que l'équivalence de α et β se traduit par une relation de la forme

$$\forall s \in U, \quad \alpha(s) = \beta(s_0 \pm s)$$

où le signe est $+$ si les deux paramétrages ont même orientation et $-$ sinon. On en déduit facilement que

$$\forall s \in U, \quad \kappa_\alpha^*(s) = \pm \kappa_\beta^*(s_0 \pm s)$$

En particulier, si les deux courbes ont même orientation, la courbure algébrique de l'une s'obtient en faisant subir à celle de l'autre le même changement de variables que celui qui permet de passer de celle-ci à celle-là, d'où la conclusion.

Comme il est difficile de déterminer des paramétrages naturels équivalents à une courbe donnée, il est utile de pouvoir calculer cette valeur directement en termes de celle-ci. C'est pourquoi on étend la notion de courbure algébrique aux courbes paramétrées régulières comme ceci. On choisit un paramétrage naturel (J, η) équivalent à (I, γ) et de même orientation : $\gamma = \eta \circ u$ où la dérivée du changement de paramètres $u : I \rightarrow J$ est positive et on pose

$$\kappa_\gamma^* = \kappa_\eta^* \circ u$$

La proposition suivante donne une formule explicite utile en pratique pour calculer les courbures algébriques. Elle montre, au passage, que la notion est bien définie, i.e. qu'elle ne dépend pas du paramétrage naturel auxiliaire choisi.

3. A l'occasion, on dira que c'est la courbure algébrique de la courbe en P . Il peut y en avoir plusieurs si P est une auto-intersection, à raison d'une par valeur du paramètre permettant de décrire P .

PROPOSITION 9. Soit une courbe paramétrée régulière (I, γ) de composantes $\gamma^1(t) = x(t)$ et $\gamma^2(t) = y(t)$. La courbure algébrique de γ en $\gamma(t)$ vaut

$$(13) \quad \kappa_\gamma^*(t) = \frac{\det \begin{pmatrix} x' & x'' \\ y' & y'' \end{pmatrix}}{\left(\sqrt{x'^2 + y'^2}\right)^3} = \frac{x'y'' - x''y'}{(x'^2 + y'^2)^{3/2}}$$

où toutes les dérivées sont évaluées en t .

DÉMONSTRATION. Considérons un paramétrage naturel (J, η) équivalent à (I, γ) et de même orientation. On a $\gamma = \eta \circ u$ et la dérivée du changement de paramètres $u : I \rightarrow J$ est $\|\gamma'\|$. Comme on l'a déjà observé à plusieurs reprises, il vient

$$\dot{\eta} \circ u = \frac{\gamma'}{\|\gamma'\|}$$

La dérivée du membre de gauche de cette relation est $\kappa_\gamma^*(t)\mathbf{n}(t)\|\gamma'\|$. Après calcul, celle du membre de droite est

$$\frac{x'y'' - x''y'}{(x'^2 + y'^2)^{3/2}}(-y', x')$$

où les dérivées sont calculées en t . Il suffit pour conclure de noter que

$$\mathbf{n}(t) = \frac{1}{\sqrt{x'^2 + y'^2}}(-y', x')$$

□

En conséquence de la proposition précédente, la courbure algébrique d'une courbe paramétrée régulière est une fonction de classe C^∞ .

L'astroïde décrite par

$$t \mapsto (\cos^3 t, \sin^3 t)$$

est singulière en les multiples de $\pi/2$. Pour l'arc obtenu en la restreignant à l'intervalle compris entre deux singularités successives, on trouve, à l'aide de la formule (13),

$$\kappa^*(t) = -\frac{1}{3|\sin t \cos t|}$$

et, pour le graphe d'une fonction $f : I \rightarrow \mathbf{R}$,

$$(14) \quad \kappa^*(t) = \frac{f''(t)}{(1 + f'(t)^2)^{3/2}}$$

PROPOSITION 10. *Pour toute courbe paramétrée régulière (I, γ) , on a*

$$(15) \quad \mathbf{t}' = \|\gamma'\| \kappa_\gamma^* \mathbf{n} \quad \& \quad \mathbf{n}' = -\|\gamma'\| \kappa_\gamma^* \mathbf{t}$$

DÉMONSTRATION. La première formule a été démontrée lors de la preuve de la Proposition 9. La seconde s'en déduit aisément en dérivant la relation $\mathbf{t} \cdot \mathbf{n} = 0$ comme on a déduit (12) de (11), page 33. \square

On peut naturellement développer des considérations analogues pour la courbure. Celle-ci ne dépend pas de l'orientation et les formules l'exprimant dans divers paramétrages s'obtiennent en prenant les valeurs absolues des expressions décrivant la courbure algébrique.

1.4. Concavité. Intuitivement $\dot{\mathbf{t}}$ pointe vers la *concavité* de la courbe. Comme l'orientation de \mathbf{n} est conventionnelle, \mathbf{n} ne pointe pas nécessairement vers la concavité de γ . Lorsqu'il le fait, κ^* est positif ou nul. Dans le cas contraire, il est négatif ou nul afin de donner à $\dot{\mathbf{t}}$ le bon sens.

Lorsque $\kappa^*(t)$ n'est pas nul, la courbe, restreinte à un voisinage de t , ne traverse pas sa tangente en s . En détails,

PROPOSITION 11. *Soient une courbe paramétrée régulière (I, γ) et $t_0 \in I$. Si $\kappa^*(t_0) \neq 0$, il existe un intervalle ouvert I_0 tel que $t_0 \in I_0 \subset I$ et tel que $\gamma(I_0)$ soit tout entier dans un des demi-plans délimités par la tangente à γ en $P_0 = \gamma(t_0)$.*

DÉMONSTRATION. Quitte à le remplacer par un paramétrage naturel équivalent, on peut supposer que (I, γ) est rapporté à une abscisse curviligne.

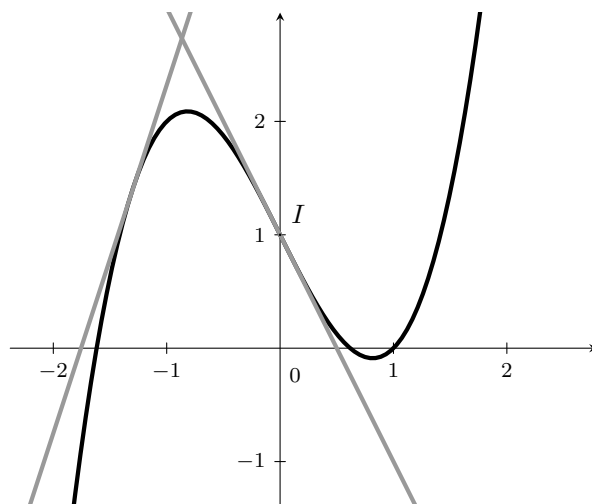
Pour alléger les notations, posons $P = \gamma(s)$. A l'aide du développement de Taylor de $\overrightarrow{P_0P}$ au voisinage de s_0 , on vérifie facilement que

$$\lim_{\substack{s \rightarrow s_0 \\ \neq}} \frac{\overrightarrow{P_0P} \cdot \mathbf{n}(s_0)}{(s - s_0)^2} = \frac{1}{2} \kappa^*(s_0)$$

Comme $\kappa^*(s_0)$ n'est pas nul, il en résulte que le signe de $\overrightarrow{P_0P} \cdot \mathbf{n}(s_0)$ est constant dans un voisinage de s_0 dans I . \square

Par continuité, si κ^* prend des valeurs opposées, il s'annule en changeant de signe. Si c'est le cas en t_0 , la courbe traverse sa tangente⁴ en $P_0 = \gamma(t_0)$ et on dit que ce dernier est un *point d'inflexion* de γ .

4. Cela se vérifie en détails en adaptant la preuve de la Proposition 11, mais nous ne le ferons pas.

FIGURE 13. Graphe de $x^3 - 2x + 1$

La figure 13 présente une partie du graphe de la fonction

$$x \rightarrow x^3 - 2x + 1$$

On y voit un point d'inflexion, noté I , en lequel il traverse sa tangente. En les points d'abscisse négative, la courbure algébrique est négative tandis qu'en les points d'abscisse positive, elle est positive. En effet, comme on l'a signalé plus haut, la normale \mathbf{n} d'un graphe pointe toujours vers le haut, i.e. vers les ordonnées positives. Or, avant I , la concavité est orientée vers le bas et après, vers le haut.

Ceci n'est pas propre à la fonction considérée ici : de manière générale, la courbure algébrique du graphe d'une fonction est négative ou nulle en les points en lesquels la concavité est orientée vers le bas et positive ou nulle en ceux où elle est orientée vers le haut. Vu (14), on retrouve la règle apprise à l'école secondaire selon laquelle le signe de la dérivée seconde d'une fonction détermine le sens de sa concavité, les points d'inflexion arrivant lorsqu'elle s'annule en changeant de signe.

1.5. Courbure algébrique et direction de la tangente. Intuitivement, lorsque la courbe est rapportée à une abscisse curviligne, κ^* mesure l'intensité avec laquelle la tangente change de direction. Ceci est formalisé par la propriété suivante dans laquelle on utilise le fait que si $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbf{R}^2$ sont normés, alors $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ et $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ ⁵ sont respectivement le cosinus et le sinus d'un angle appartenant à $[0, 2\pi[$. C'est l'angle orienté

⁵ Pour rappel, le produit scalaire et l'orientation de \mathbf{R}^2 permettent de définir un *produit mixte*, noté $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbf{R}^2 \mapsto [\mathbf{a}, \mathbf{b}] \in \mathbf{R}$. Par définition, dans toute base

entre \mathbf{a} et \mathbf{b} , c'est-à-dire l'angle de la rotation qu'il faut appliquer à \mathbf{a} pour obtenir \mathbf{b} .

PROPOSITION 12. *Soient une courbe paramétrée régulière (I, γ) rapportée à une abscisse curviligne et un élément normé \mathbf{u} de \mathbf{R}^2 .*

Il existe une fonction de classe C^∞ $\alpha : I \rightarrow \mathbf{R}$ telle que

$$\cos \alpha = \mathbf{u} \cdot \mathbf{t} \quad \& \quad \sin \alpha = [\mathbf{u}, \mathbf{t}]$$

Cette fonction est unique à des multiples entiers de 2π près. De plus,

$$\dot{\alpha} = \kappa_\gamma^*$$

DÉMONSTRATION. Choisissons une primitive β de κ_γ^* dans I telle que

$$\cos(\beta(s_0)) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{t}(s_0) \quad \& \quad \sin(\beta(s_0)) = [\mathbf{u}, \mathbf{t}(s_0)]$$

pour un certain $s_0 \in I$ fixé arbitrairement. On a

$$(\cos \beta)' = -\sin \beta \kappa_\gamma^* \quad \& \quad (\sin \beta)' = \cos \beta \kappa_\gamma^*$$

mais aussi

$$(\mathbf{u} \cdot \mathbf{t})' = \kappa_\gamma^* \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = -[\mathbf{u}, \mathbf{t}] \kappa_\gamma^*$$

et

$$[\mathbf{u}, \mathbf{t}]' = \kappa_\gamma^* [\mathbf{u}, \mathbf{n}] = \mathbf{u} \cdot \mathbf{t} \kappa_\gamma^*$$

Ainsi, $(\cos \beta, \sin \beta)$ et $(\mathbf{u} \cdot \mathbf{t}, [\mathbf{u}, \mathbf{t}])$ sont des solutions du système d'équations différentielles

$$\dot{x} = -y \kappa_\gamma^* \quad \& \quad \dot{y} = x \kappa_\gamma^*$$

Comme elles coïncident en s_0 , elles sont donc égales et nous pouvons prendre $\alpha = \beta$.

Supposons que des fonctions de classe C^∞ $\alpha_1 : I \rightarrow \mathbf{R}$ et $\alpha_2 : I \rightarrow \mathbf{R}$ aient même sinus et cosinus. Alors, pour tout $s \in I$, $\alpha_1(s) - \alpha_2(s)$ est un multiple entier de 2π . Comme $\alpha_1 - \alpha_2$ est continu, il résulte du théorème des valeurs intermédiaires que ce multiple est indépendant de s . \square

1.6. Rayon de courbure et développée. Avec la formule (13), on voit que la courbure du cercle paramétré par

$$t \mapsto (r \cos t, r \sin t)$$

où $r > 0$, est constante et vaut $1/r$.

orthonormée positive,

$$[\mathbf{a}, \mathbf{b}] = \det \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}$$

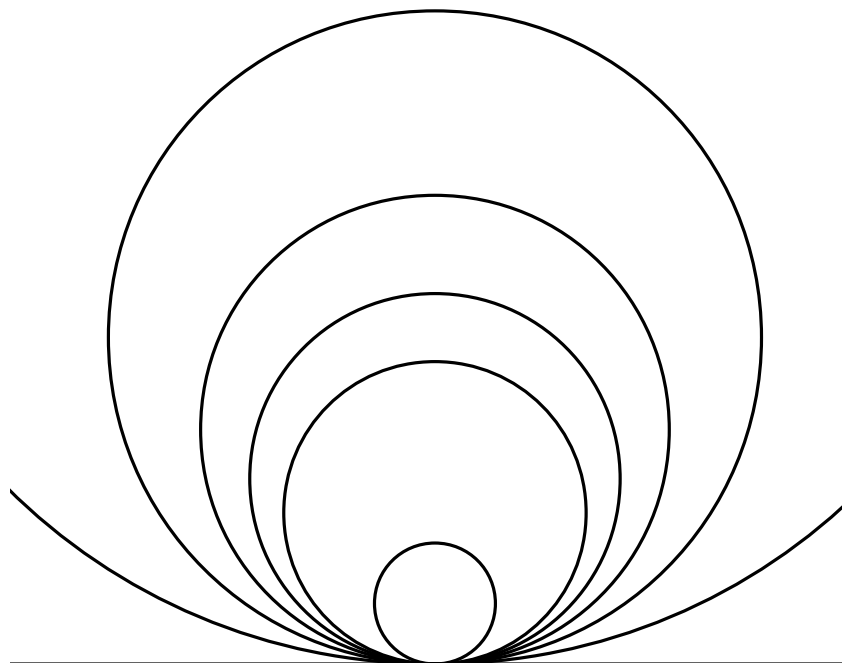


FIGURE 14

D'un certain point de vue, le fait que la courbure soit l'inverse du rayon est conforme à l'intuition : un cercle tangent à une droite en un point et dont le centre s'éloigne le long de la perpendiculaire en ce point à la droite, se «rapproche» de celle-ci à mesure que son rayon croît, c'est-à-dire que sa courbure diminue. Ceci est illustré à la figure 14.

En raison de cet exemple, l'inverse

$$R_\gamma(t) = \frac{1}{|\kappa_\gamma^*(t)|}$$

de la courbure d'une courbe paramétrée régulière (I, γ) est le *rayon de courbure* de cette courbe en $P = \gamma(t)$. Il n'est défini que si $\kappa_\gamma(t)$ n'est pas nul. Dans ce cas, le *centre de courbure* de γ en P est le point

$$C_\gamma(t) = P + \frac{1}{\kappa_\gamma^*(t)} \mathbf{n}(t)$$

et le cercle de centre $C_\gamma(t)$ et de rayon $R_\gamma(t)$ est le cercle *osculateur* de γ en P . C'est le cercle qui possède en P mêmes tangente unitaire, normale et courbure que γ .

On vérifie facilement que les notions de centre de courbure et de cercle osculateur sont invariantes par changement de paramétrages.

Cas des points de rebroussement du premier ordre. Le centre de courbure en une singularité de γ n'est en principe pas défini. Cependant, en un point de rebroussement $\gamma(t_0)$, la courbe possède une tangente et si, en plus, le rayon de courbure possède une limite en t_0 , on peut encore définir un centre de courbure. C'est ce qui se passe notamment en ce qu'on appelle un point de rebroussement *du premier ordre*, c'est-à-dire tel que $\gamma''(t_0)$ et $\gamma'''(t_0)$ sont linéairement indépendants, conformément à la propriété suivante.

PROPOSITION 13. *Soient une courbe paramétrée (I, γ) et $t_0 \in I$ tels que $\gamma'(t_0) = \mathbf{0}$ et $\gamma''(t_0)$ et $\gamma'''(t_0)$ soient linéairement indépendants. Le point $\gamma(t_0)$ est un point de rebroussement de γ . De plus, il existe $\varepsilon > 0$ tel que la courbe γ soit régulière dans $]t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon[\setminus \{t_0\}$ et*

$$\lim_{\substack{t \rightarrow t_0 \\ \neq}} R_\gamma(t) = 0$$

DÉMONSTRATION. On sait déjà, par la Propriété 3, page 22, que $\gamma(t_0)$ est un point de rebroussement et que c'est une singularité isolée. Cependant, comme nous devons calculer le rayon de courbure, nous allons retrouver ces faits dans les développements qui suivent. Notons x et y les composantes de γ . Du fait que $\gamma'(t_0) = \mathbf{0}$, il existe des fonctions α et β de classe C^∞ dans I telles que

$$\forall t \in I, \quad x'(t) = (t - t_0)\alpha(t) \quad \& \quad y'(t) = (t - t_0)\beta(t)$$

En conséquence,

$$\forall t \in I, \quad x''(t) = \alpha(t) + (t - t_0)\alpha'(t) \quad \& \quad y''(t) = \beta(t) + (t - t_0)\beta'(t)$$

et

$$\forall t \in I, \quad x'''(t) = 2\alpha'(t) + (t - t_0)\alpha''(t) \quad \& \quad y'''(t) = 2\beta'(t) + (t - t_0)\beta''(t)$$

En particulier, puisque $\gamma''(t_0) \neq \mathbf{0}$, $(\alpha(t_0), \beta(t_0)) \neq (0, 0)$ de sorte que $\gamma'(t)$ n'est pas nul si $t \neq t_0$ est assez voisin de t_0 .

De plus, vu (13), page 35, en omettant parfois de préciser t afin d'alléger l'écriture,

$$\kappa_\gamma^*(t) = \frac{1}{|t - t_0|} \frac{\alpha\beta' - \alpha'\beta}{(\alpha^2 + \beta^2)^{3/2}}$$

Or

$$\alpha(t_0)\beta'(t_0) - \alpha'(t_0)\beta(t_0) \neq 0$$

car $\gamma''(t_0)$ et $\gamma'''(t_0)$ sont linéairement indépendants. D'où

$$\lim_{\substack{t \rightarrow t_0 \\ \neq}} |\kappa_\gamma^*(t)| = +\infty$$

□

Le lecteur vérifiera sans difficulté que les points de rebroussement des astroïdes sont du premier ordre.

La développée. La courbe $t \mapsto C_\gamma(t)$ est, en principe, la *développée* de (I, γ) . Mais, en réalité, ce n'est pas toujours une courbe paramétrée puisqu'elle n'est pas définie en un point où la courbure est nulle ni en une singularité de γ . De plus, même en dehors de ces cas particuliers, elle peut ne pas satisfaire notre hypothèse concernant les singularités d'une courbe paramétrée, à savoir que celles-ci soient isolées. Par exemple, pour un cercle, tous les centres de courbures coïncident avec le centre du cercle et donc sa développée est singulière partout. Nous n'allons pas discuter dans le détail de ces problèmes en général mais, au coup par coup, on veillera à bien repérer les zéros de la courbure et les singularités de γ afin de présenter la développée comme une unions de courbes paramétrées, éventuellement prolongées en les points de rebroussement du premier ordre en convenant que le rayon de courbure y est nul.

La parabole paramétrée par

$$t \mapsto (t, t^2)$$

ne présente ni singularité ni point d'inflexion. Sa développée est définie

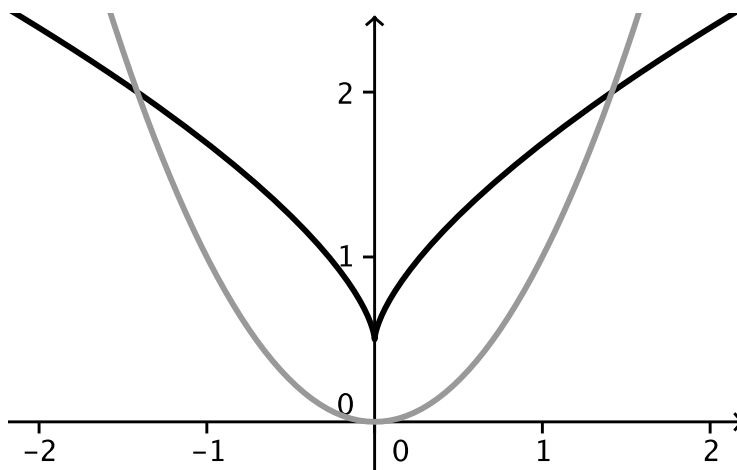


FIGURE 15

sur \mathbf{R} tout entier où elle est donnée par

$$t \mapsto \left(-4t^3, \frac{1}{2} + 3t^2\right)$$

Elle est représentée à la figure 15.

L'astroïde de paramétrage

$$t \mapsto (\cos^3 t, \sin^3 t)$$

est singulière en les multiples de $\pi/2$ en lesquels elle présente des points de rebroussement du premier ordre. En ajoutant ceux-ci aux développées des parties régulières, on obtient la courbe paramétrée

$$t \mapsto (\cos^3 t + 3 \sin^2 t \cos t, \sin^3 t + 3 \sin t \cos^2 t)$$

C'est encore une astroïde, comme illustré à la figure 16. Le lecteur

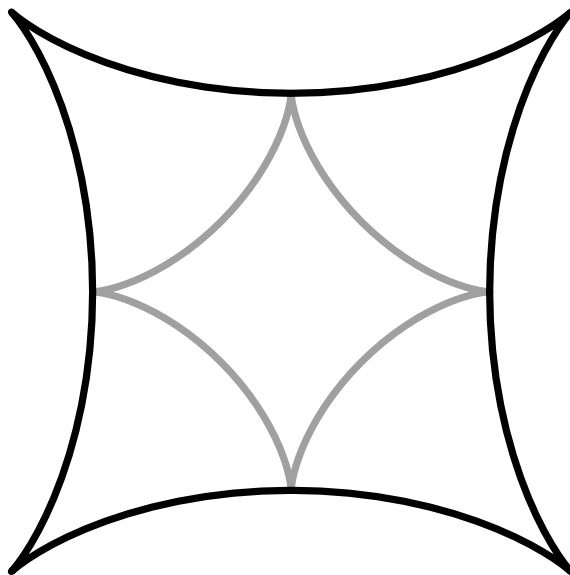


FIGURE 16

vérifiera qu'on l'obtient en dilatant la première d'un facteur 2 puis en lui faisant subir la rotation d'angle $\pi/4$.

PROPOSITION 14. *Soient une courbe paramétrée régulière (I, γ) dont la courbure est sans zéro et*

$$C_\gamma = \gamma + \frac{1}{\kappa_\gamma^*} \mathbf{n}_\gamma$$

sa développée, définie dans I . On a

$$C'_\gamma = -\frac{(\kappa_\gamma^*)'}{(\kappa_\gamma^*)^2} \mathbf{n}_\gamma$$

En conséquence, la tangente à C_γ en un point régulier $C_\gamma(t)$ est la normale à γ en $\gamma(t)$ et C_γ est singulier en les points stationnaires de la courbure algébrique de γ .

DÉMONSTRATION. C'est un simple calcul : en dérivant C_γ et en utilisant la Propriété 10, on obtient

$$\begin{aligned} C'_\gamma &= \gamma' + \left(\frac{1}{\kappa_\gamma^*}\right)' \mathbf{n}_\gamma + \frac{1}{\kappa_\gamma^*} \mathbf{n}'_\gamma \\ &= \|\gamma'\| \mathbf{t}_\gamma - \frac{(\kappa_\gamma^*)'}{(\kappa_\gamma^*)^2} \mathbf{n}_\gamma - \|\gamma'\| \mathbf{t}_\gamma \\ &= -\frac{(\kappa_\gamma^*)'}{(\kappa_\gamma^*)^2} \mathbf{n}_\gamma \end{aligned}$$

Les conséquences sont immédiates. \square

Les points stationnaires de la courbure d'une courbe régulière sont les *sommets* de la courbe.

Développantes. Une *développante* d'une courbe paramétrée régulière (I, γ) est une courbe paramétrée de la forme

$$\bar{\gamma} : t \in I \mapsto \gamma(t) - \left(\int_{t_0}^t \|\gamma'(u)\| du \right) \mathbf{t}_\gamma \in \mathbf{R}^2$$

où $t_0 \in I$ est fixé arbitrairement.

L'interprétation est la suivante : on imagine que la tangente à γ en $P_0 = \gamma(t_0)$ «roule» sans glisser sur γ . La trace de $\bar{\gamma}$ est alors le lieu du point de la tangente qui occupe la position P_0 en t_0 .

On peut montrer que si $\bar{\gamma}$ est régulier dans un intervalle ouvert $J \subset I$, alors sa développée restreinte à J coïncide avec $\gamma|_J$ mais nous ne le ferons pas et n'aborderons pas davantage l'étude des développantes.

2. Classification des courbes régulières

Rappelons qu'un déplacement $T : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$ est la composée d'une translation et d'une rotation. Celle-ci est la «partie linéaire» de T et est traditionnellement notée \vec{T} . Ainsi, T est de la forme

$$T : \mathbf{x} \mapsto \vec{T}(\mathbf{x}) + \mathbf{a}$$

PROPOSITION 15. Soient un déplacement T de \mathbf{R}^2 , une courbe paramétrée régulière (I, γ) et $\eta = T \circ \gamma$. Le déplacement T transforme le repère mobile canonique $\mathcal{R}_\gamma(t)$ en $\mathcal{R}_\eta(t)$. De plus,

$$\|\eta'\| = \|\gamma'\| \quad \& \quad \kappa_\eta^* = \kappa_\gamma^*$$

DÉMONSTRATION. On a

$$\eta' = \vec{T}(\gamma')$$

Par conséquent, $\|\eta'\| = \|\gamma'\|$ car \vec{T} est une isométrie. Dès lors,

$$\mathbf{t}_\eta = \frac{\eta'}{\|\eta'\|} = \vec{T}\left(\frac{\gamma'}{\|\gamma'\|}\right) = \vec{T}(\mathbf{t}_\gamma)$$

Puisque \vec{T} est une rotation, il commute avec \perp de sorte que

$$\mathbf{n}_\eta = \mathbf{t}_\eta^\perp = \vec{T}(\mathbf{t}_\gamma^\perp) = \vec{T}(\mathbf{n}_\gamma)$$

Ainsi, T applique $\mathcal{R}_\gamma(t)$ sur $\mathcal{R}_\eta(t)$.

Cela étant, vu les relations (15), page 36,

$$\|\eta'\|\kappa_\eta^*\mathbf{n}_\eta = \mathbf{t}'_\eta = \vec{T}(\mathbf{t}'_\gamma) = \vec{T}(\|\gamma'\|\kappa_\gamma^*\mathbf{n}_\gamma) = \|\gamma'\|\kappa_\gamma^*\mathbf{n}_\eta$$

Par suite, les courbures algébriques des deux courbes sont égales. \square

La proposition précédente admet une réciproque. La preuve que nous en donnons repose sur un «truc» classique amusant.

PROPOSITION 16. *Soient des courbes paramétrées régulières (I, γ) et (I, η) pour lesquelles*

$$\|\eta'\| = \|\gamma'\| \quad \& \quad \kappa_\eta^* = \kappa_\gamma^*$$

Il existe un déplacement T de \mathbf{R}^2 tel que $\eta = T \circ \gamma$.

DÉMONSTRATION. Choisissons arbitrairement une valeur $t_0 \in I$. Il existe un déplacement T qui transforme le repère mobile canonique $\mathcal{R}_\gamma(t_0)$ en $\mathcal{R}_\eta(t_0)$. En remplaçant γ par $T \circ \gamma$, rebaptisé γ pour simplifier, nous obtenons $\mathcal{R}_\gamma(t_0) = \mathcal{R}_\eta(t_0)$ et nous sommes ramenés à montrer que $\gamma = \eta$.

Le subterfuge annoncé consiste alors à utiliser la fonction

$$e := \mathbf{t}_\gamma \cdot \mathbf{t}_\eta + \mathbf{n}_\gamma \cdot \mathbf{n}_\eta$$

D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, $e(t) \leq 2$, l'égalité ayant lieu si, et seulement si

$$(16) \quad \mathbf{t}_\gamma(t) = \mathbf{t}_\eta(t) \quad \& \quad \mathbf{n}_\gamma(t) = \mathbf{n}_\eta(t)$$

Cela posé, il est immédiat de vérifier, à l'aide des équations (15), page 36, que $e' = 0$, autrement dit que e est constant. Comme $e(t_0) = 2$, il vaut 2 partout et les égalités (16) sont vraies pour tout $t \in I$. De $\mathbf{t}_\gamma = \mathbf{t}_\eta$, nous déduisons que $\gamma - \eta$ est constant et, comme il est nul en t_0 , qu'il l'est partout. \square

Ce qui précède montre que, à déplacement près, une courbe paramétrée régulière (I, γ) est caractérisée par les deux fonctions $\|\gamma'\|$ et κ_γ^* .

L'information géométrique est encodée dans la courbure. D'ailleurs, la plupart du temps, la classification des courbes régulières est énoncée uniquement pour les courbes rapportées à une abscisse curviligne⁶.

La fonction $\|\gamma'\|$ apporte un complément d'information sur la manière dont la trace est décrite par la fonction γ . Par exemple, si γ décrit le mouvement d'un point matériel conformément aux équations de la mécanique classique, alors $\|\gamma'\|$ est interprété comme la «vitesse linéaire» instantanée du point matériel.

Pour compléter notre classification des courbes paramétrées régulières, il faut encore déterminer quelles fonctions sont susceptibles d'être les fonctions $\|\gamma'\|$ et κ_γ^* relatives à une telle courbe γ . Voici la réponse.

PROPOSITION 17. *Soient des fonctions de classe C^∞ $\kappa, v : I \rightarrow \mathbf{R}$. Si les valeurs de v sont strictement positives, alors il existe une courbe paramétrée régulière (I, γ) telle que $\|\gamma'\| = v$ et $\kappa_\gamma^* = \kappa$.*

DÉMONSTRATION. Notons u une primitive de v dans I . L'image $J = u(I)$ est un intervalle ouvert et $u : I \rightarrow J$ est une bijection dont la réciproque est de classe C^∞ . Cela résulte du fait que v ne s'annule pas dans I et de la Proposition 1, page 12.

Notons α une primitive de $\bar{\kappa} := \kappa \circ u^{-1}$ dans J et posons

$$\eta = (x, y)$$

où x est une primitive de $\cos \alpha$ et y une primitive de $\sin \alpha$. On a, dans J ,

$$\dot{\eta} = (\cos \alpha, \sin \alpha)$$

En particulier, $\|\dot{\eta}\| = 1$ et (J, η) est un paramétrage naturel. De plus, vu que

$$\dot{\mathbf{t}}_\eta = \bar{\kappa}(-\sin \alpha, \cos \alpha) = \bar{\kappa} \mathbf{n}_\eta$$

sa courbure algébrique est $\bar{\kappa}$.

La courbe $(I, \gamma := \eta \circ u)$ répond à la question. En effet, d'une part, sa courbure algébrique est $\bar{\kappa} \circ u = \kappa$. D'autre part,

$$\gamma' = v \dot{\eta} \circ u$$

de sorte que $\|\gamma'\| = v$ puisque les valeurs de v sont positives. □

⁶. Ce n'est que dans la référence [2] que je l'ai vue formulée comme nous le faisons ici.

3. Une application : le vélo à roues carrées

Nous allons illustrer le dernier résultat de la section précédente en montrant qu'il est possible de rouler avec un vélo à roues carrées, et même, polygonales régulières à au moins quatre côtés.

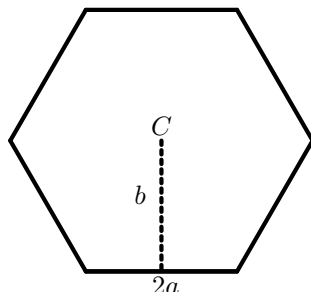


FIGURE 17. Un exemple de roue polygonale

La figure 17 fixe les notations : $2a$ est la longueur d'un côté, b est l'apothème et C le centre de la roue.

L'idée est de profiler la route au moyen d'une succession d'arcades, comme suggéré à la figure 18.



FIGURE 18. Profil de la route

Le côté de la roue roule sans glisser sur une arcade, dont la longueur est égale à celle du côté de la roue (cf. figure 19). A la fin de l'arcade, un sommet de la roue coïncide avec le point de jonction avec l'arcade suivante et les deux côtés qui en sont issus sont tangents aux arcades (voir la figure 20 qui ne respecte pas la condition de longueur).

La condition imposée est que, lors du déplacement, la trajectoire du centre de la roue soit horizontale. Nous allons voir que cela fixe la courbure algébrique de l'arcade, supposée rapportée à une abscisse curviligne. D'après ce qui précède, cela détermine univoquement la forme de cette arcade. Il restera à l'identifier et à vérifier qu'elle remplit toutes les conditions.

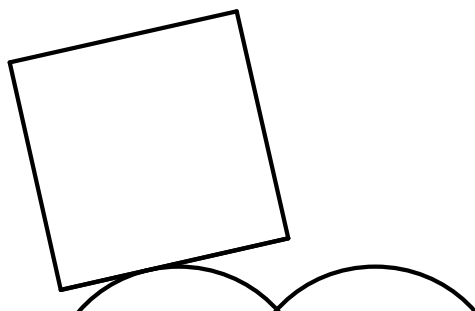


FIGURE 19

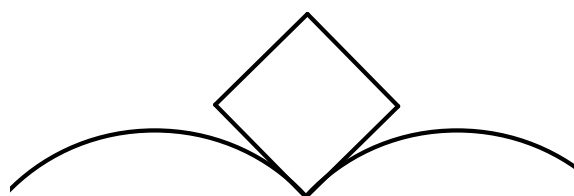


FIGURE 20

3.1. Mise en équation. Sur la figure 21, on a représenté une partie de la roue, supposée carrée, le repère canonique de l'arcade en le point de contact P , le centre C de la roue et le milieu M du côté en contact avec l'arcade⁷.

En rapportant l'arcade à une abscisse curviligne s mesurée à partir de son extrémité gauche, on voit que

$$C = P + \overrightarrow{PM} + \overrightarrow{MC} = P + (a - s)\mathbf{t} - b\mathbf{n}$$

De là,

$$\dot{C} = \kappa^*[(a - s)\mathbf{n} + b\mathbf{t}]$$

Comme \mathbf{n} pointe vers la concavité, κ^* est positif de sorte que la courbe décrite par C admet le vecteur tangent unitaire

$$\mathbf{u} = \frac{(a - s)\mathbf{n} + b\mathbf{t}}{\sqrt{(a - s)^2 + b^2}}$$

⁷. Exceptionnellement, sur la figure, l'orientation est celle du sens des aiguilles d'une montre.

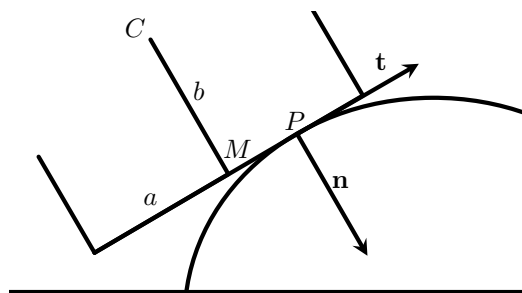


FIGURE 21

La trajectoire de C est horizontale si, et seulement si, $\dot{\mathbf{u}} = \mathbf{0}$. Or

$$\dot{\mathbf{u}} = ([(a-s)^2 + b^2]\kappa^* - b) \frac{(s-a)\mathbf{t} + b\mathbf{n}}{[(a-s)^2 + b^2]^{3/2}}$$

La condition imposée équivaut donc à

$$(17) \quad \kappa^* = \frac{b}{(a-s)^2 + b^2}$$

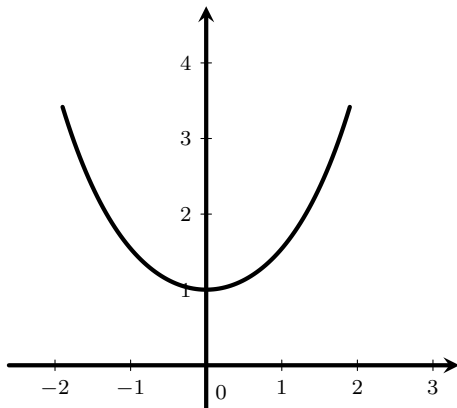


FIGURE 22. Une chaînette

3.2. Forme de l'arcade. Nous allons chercher la forme de l'arcade comme graphe d'une *chaînette*

$$\gamma : x \in \mathbf{R} \mapsto p \cosh \frac{x}{p}$$

restreint à un intervalle $[-\ell, \ell]$ et rapporté à l'abscisse curviligne s mesurée à partir du point d'abscisse $-\ell$, où $p, \ell > 0$. Autrement dit,

$$(18) \quad s(x) = \int_{-\ell}^x \sqrt{1 + \sinh^2 \frac{t}{p}} dt = p \sinh \frac{x}{p} + p \sinh \frac{\ell}{p}$$

D'après la formule (14), page 35, la courbure algébrique du graphe vaut

$$\kappa_{\gamma}^* = \frac{\frac{1}{p} \cosh \frac{x}{p}}{\left(1 + \sinh^2 \frac{x}{p}\right)^{3/2}} = \frac{p}{p^2 + p^2 \sinh^2 \frac{x}{p}}$$

En l'exprimant au moyen de l'abscisse curviligne à l'aide de la formule précédente, on obtient

$$\kappa^*(s) = \frac{p}{p^2 + \left(s - p \sinh \frac{\ell}{p}\right)^2}$$

Pour que cette formule coïncide avec (17), il suffit de poser

$$\begin{cases} p = b \\ a = p \sinh \frac{\ell}{p} \end{cases}$$

c'est-à-dire⁸

$$\begin{cases} p = b \\ \ell = b \ln \left(\frac{a}{b} + \sqrt{\frac{a^2}{b^2} + 1} \right) \end{cases}$$

3.3. Vérification. Il faut à présent s'assurer que ces choix sont bons c'est-à-dire que la longueur de l'arcade trouvée vaut $2a$ et que l'angle entre deux arcades consécutives est bien l'angle au sommet de la roue.

On a, vu (18),

$$L(\gamma|_{[-\ell, \ell]}) = s(\ell) = 2a$$

Par ailleurs, la moitié θ de l'angle entre deux arcades consécutives est l'angle que font la tangente de la chaînette au point d'abscisse ℓ et la verticale passant par ce point. Autrement dit,

$$\tan \theta = \frac{1}{\sinh \frac{\ell}{p}} = \frac{b}{a}$$

On constate sur la figure 17 que $\frac{b}{a}$ est aussi la tangente de la moitié de l'angle au sommet de la roue. Notre chaînette répond bien aux spécifications imposées.

8. On a $y = \sinh x$ si, et seulement si $x = \ln(y + \sqrt{y^2 + 1})$.

On trouve facilement sur le net des petits films présentant des vélos, tricycles, etc. à roues carrées soit virtuels soit bien réels.

4. Enveloppe d'une famille de droites

Une courbe paramétrée régulière donne lieu à une famille privilégiée de droites de \mathbf{R}^2 , à savoir l'ensemble de ses tangentes. La question abordée dans cette section consiste à se demander si une famille de droites donnée d'avance est l'ensemble des tangentes à une courbe régulière et, le cas échéant, à voir comment on peut essayer de déterminer celle-ci.

Pour bien percevoir la nature de cette question, j'emprunte à [1] son excellente idée d'introduction aux enveloppes de droites qui consiste à tracer quelques tangentes à une courbe classique et à observer qu'alors même que celle-ci n'est pas tracée, on la voit néanmoins parfaitement sur la figure où elle apparaît comme le lieu des points où la concentration d'encre est la plus intense. Je reproduis ci-dessous deux figures de [1] particulièrement frappantes à cet égard (dans la seconde, le phénomène apparaît très bien lorsqu'on la regarde en clignant légèrement des yeux).

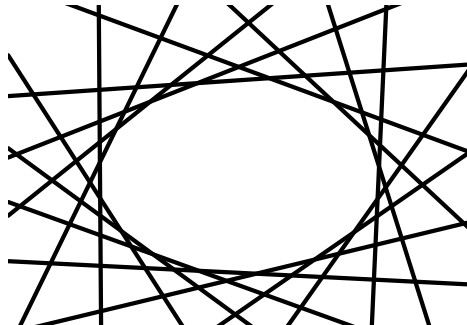


FIGURE 23. Quelques tangentes à une ellipse

A la figure 23, la courbe qui apparaît est une ellipse. Celle esquissée à la figure 24 est une partie de *néphroïde*. La famille de droites qui la dessinent a une interprétation physique intéressante.

On considère que le cercle est un miroir et on l'éclaire avec des rayons parallèles (à la direction de la droite représentée en noir et passant par le centre). Les droites dessinées en gris sont les rayons réfléchis et leur enveloppe est ce qu'on appelle une *caustique*.

Passons à des considérations plus formelles. Considérons des droites

$$\mathcal{D}_t \equiv a(t)x + b(t)y + c(t) = 0$$

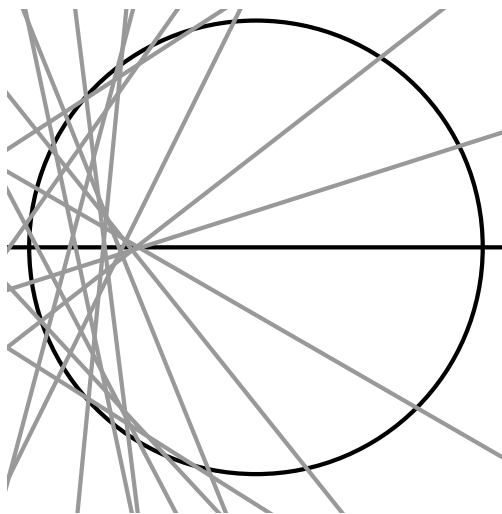


FIGURE 24. Une caustique

où $a, b, c : I \rightarrow \mathbf{R}$ sont des fonctions de classe C^∞ telles que $a^2 + b^2$ soit sans zéro dans l'intervalle ouvert I de \mathbf{R} . Nous dirons qu'une courbe paramétrée régulière (I_0, γ) , où I_0 est un intervalle ouvert inclus dans I , est une *enveloppe* de la famille \mathcal{D} si, pour tout $t \in I_0$, la tangente de la courbe en $\gamma(t)$ est \mathcal{D}_t .

Notons x et y les composantes d'une courbe paramétrée régulière (I, γ) . Sa tangente en $\gamma(t)$ coïncide avec \mathcal{D}_t si, et seulement si,

$$\forall t \in I, \begin{cases} a(t)x(t) + b(t)y(t) + c(t) = 0 \\ a(t)x'(t) + b(t)y'(t) = 0 \end{cases}$$

La première de ces équations signifie en effet que $\gamma(t) \in \mathcal{D}_t$ et la seconde que $\gamma'(t)$ est un vecteur directeur de \mathcal{D}_t .

En dérivant la première et en reportant le résultat dans la seconde, nous obtenons le système, équivalent au précédent,

$$(19) \quad \forall t \in I, \begin{cases} a(t)x(t) + b(t)y(t) + c(t) = 0 \\ a'(t)x(t) + b'(t)y(t) + c'(t) = 0 \end{cases}$$

Il s'agit d'un système dont, pour chaque $t \in I$, la solution $(x(t), y(t))$ donne le point de contact de γ avec \mathcal{D}_t . Cette solution est assurée d'exister au voisinage de chaque t_0 pour lequel le système est de Cramer, i.e. si

$$a(t_0)b'(t_0) - a'(t_0)b(t_0) \neq 0$$

ce qu'il reste au voisinage de t_0 , par continuité.

A ce stade, on a le choix⁹ entre *résoudre* le système, ce qui donne un paramétrage de l'enveloppe ou *éliminer le paramètre t* , ce qui donne une équation cartésienne¹⁰ de celle-ci. Cela dit, il est difficile d'énoncer des généralités quant à l'existence et l'unicité des enveloppes. Dans ces notes, on se contentera d'étudier les choses au coup par coup, en examinant dans chaque cas la compatibilité du système ci-dessus. De plus, en général, nous parlerons *de* l'enveloppe alors que, selon la définition, il y en a plusieurs. Mais c'est pour désigner celle qui, passant par un point donné, a le plus grand domaine de définition possible.

Un exemple simple. Voici un exemple où l'élimination s'impose, du fait de sa simplicité.

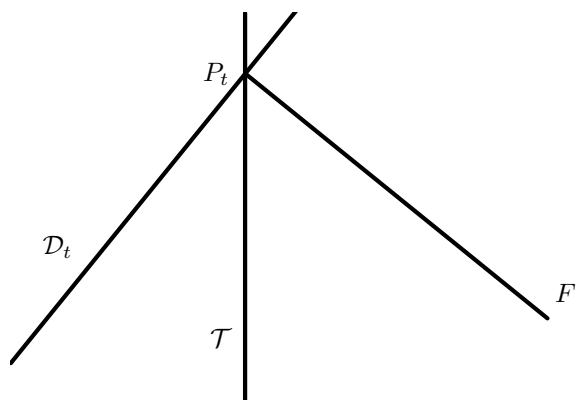


FIGURE 25. La droite \mathcal{D}_t est perpendiculaire à FP

On se donne une droite \mathcal{T} et un point F ne lui appartenant pas. A chaque point P_t de \mathcal{T} , où t est un paramètre décrivant celle-ci, on associe la perpendiculaire \mathcal{D}_t à FP_t (voir la figure 25) et il s'agit de déterminer l'enveloppe de cette famille de droites.

Pour cela, faisons un changement de repère¹¹ consistant à prendre la perpendiculaire à \mathcal{T} menée par F comme axe des abscisses, en l'orientant de \mathcal{T} vers F , et à prendre \mathcal{T} comme axe des ordonnées, orienté comme on le souhaite (ce qui n'a aucune incidence, le problème étant manifestement symétrique par rapport à l'axe des abscisses). Avec un tel choix, les coordonnées de F sont $(\ell, 0)$ où $\ell > 0$, et, en prenant pour

9. En théorie du moins car, en pratique, l'élimination n'est pas toujours praticable.

10. Nous dirons ce que c'est précisément plus loin.

11. Nous nous sommes placés d'emblée dans \mathbf{R}^2 , ce que ne reflète pas particulièrement la figure 25.

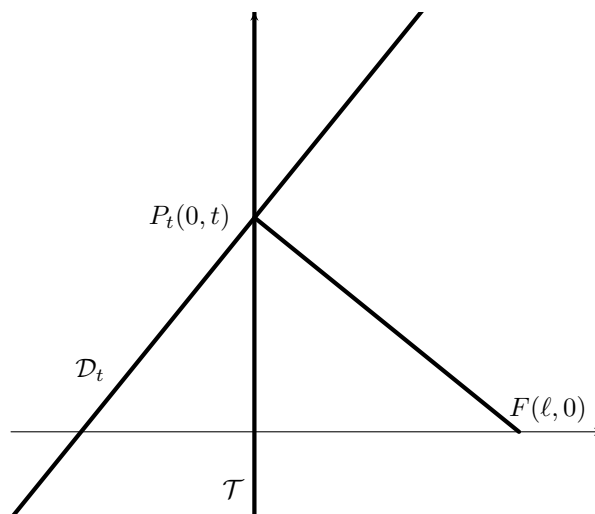


FIGURE 26. Choix d'un repère et fixation des données

paramètre l'ordonnée de P_t , ses coordonnées sont $(0, t)$. Ceci est illustré sur la figure 26.

Cela posé,

$$\overrightarrow{FP} = (-\ell, t)$$

étant normal à \mathcal{D}_t , ce dernier admet l'équation

$$-\ell x + t(y - t) = 0$$

Dérivée par rapport à t , celle-ci donne $y - 2t = 0$. Ainsi, en le point de contact de l'enveloppe cherchée, $t = y/2$. En reportant cette valeur dans l'équation de \mathcal{D}_t , nous obtenons une équation de l'enveloppe, à savoir

$$y^2 = 4\ell x$$

L'enveloppe est donc la parabole de foyer F dont \mathcal{T} est la tangente au sommet.

Pour en revenir aux généralités, une façon de paraphraser la Propriété 14 consiste à dire que *les parties régulières de la développée d'une courbe régulière sont des enveloppes de la famille de ses normales*.

On peut également observer que la notion d'enveloppe est géométrique en ce sens que si des familles de droites $\mathcal{D}^{(1)}$ et $\mathcal{D}^{(2)}$ diffèrent par un changement de paramètres u , i.e. $\mathcal{D}^{(1)} = \mathcal{D}^{(2)} \circ u$, alors les enveloppes de $\mathcal{D}^{(1)}$ se déduisent de celles de $\mathcal{D}^{(2)}$ par le même changement de paramètres et sont donc équivalentes. Cela se vérifie facilement avec les équations (19) mais nous ne le ferons pas.

4.1. L'exemple des rayons orthogonaux. Voici un exemple assez général d'enveloppes dont on peut tracer «à la main» autant de points que l'on veut et qui va nous permettre de retrouver les propriétés optiques des coniques. Il généralise l'exemple précédent.

Considérons un point $P = \gamma(t)$ d'une courbe paramétrée régulière (I, γ) et un point O non situé sur sa trace. Nous dirons que la droite perpendiculaire à OP passant par P est le *rayon orthogonal* (en P) de γ (par rapport à l'origine O choisie)¹². Lorsque P décrit la trace de γ , le rayon orthogonal décrit une famille de droites dont l'enveloppe, si elle existe, sera appelée *l'enveloppe des rayons orthogonaux* de γ (par rapport à O).

Voici alors la propriété clé permettant de la construire le cas échéant. Elle est illustrée à la figure 27.

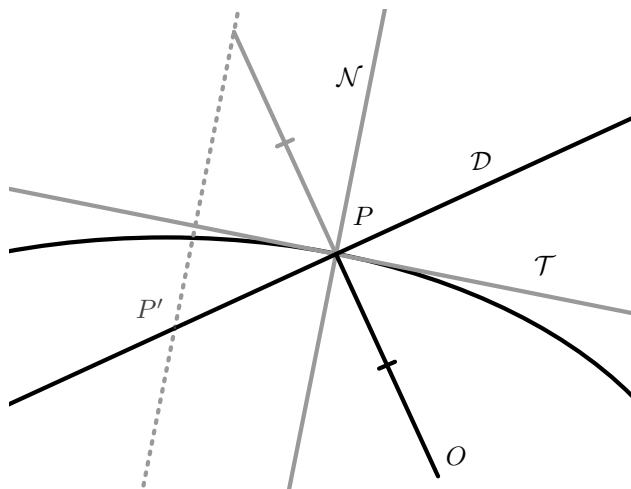


FIGURE 27

PROPOSITION 18. *Soient une courbe paramétrée régulière (I, γ) , un point O et un point P de γ . Le point de contact P' du rayon orthogonal en P avec l'enveloppe des rayons orthogonaux est situé sur la parallèle à la normale à γ en P issue du symétrique de O par rapport à P .*

DÉMONSTRATION. Quitte à changer de repère, nous pouvons supposer que $O = (0, 0)$ de sorte que $\overrightarrow{OP} = \gamma$. Le rayon orthogonal à γ en $P = \gamma(t)$ admet l'équation

$$\gamma^1(t)x + \gamma^2(t)y - \|\gamma\|^2 = 0$$

12. Cette dénomination n'a rien d'officiel ; je l'introduis ici par commodité.

En dérivant celle-ci, on obtient l'équation d'une droite qui le recoupe en son point de contact avec l'enveloppe des rayons orthogonaux :

$$\gamma^1(t)x + \gamma^2(t)y - 2\gamma(t) \cdot \gamma'(t) = 0$$

Il s'agit de la droite qui passe par le point $2\gamma(t)$ et dirigée par

$$(-\gamma^2(t), \gamma^1(t))$$

Le premier est le symétrique de O par rapport à P et le second est un vecteur directeur de la normale à γ en P . \square

La droite dont il est question en fin de démonstration est parallèle au rayon orthogonal en $P = \gamma(t)$ si OP est tangent à γ en P , circonstance qui pourrait faire en sorte que l'enveloppe ne soit pas définie en t .

Parabole. On a vu plus haut qu'une parabole est l'enveloppe des rayons orthogonaux de sa tangente au sommet par rapport à son foyer. Outre que cela donne un moyen de construire point par point la parabole, cela a le corollaire bien connu suivant.

PROPOSITION 19. *La normale en un point d'une parabole est la bissectrice de l'angle formé par la parallèle à son axe de symétrie issue de ce point et par la droite joignant celui-ci au foyer.*

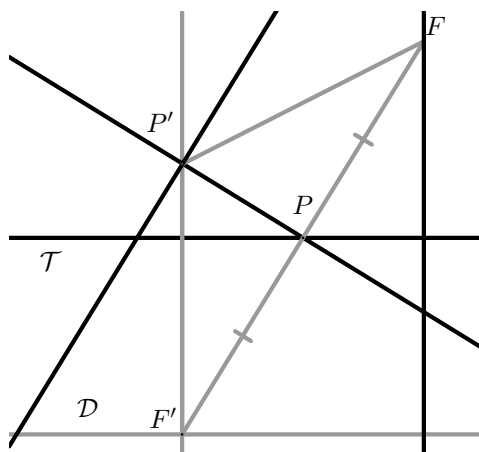


FIGURE 28

DÉMONSTRATION. Soient F le foyer de la parabole, \mathcal{T} sa tangente au sommet et $P \in \mathcal{T}$ (voir à la figure 28). Le symétrique F' de F par rapport à P se trouve sur la directrice \mathcal{D} de la parabole et la perpendiculaire à \mathcal{T} passant par F' recoupe le rayon orthogonal en P

de \mathcal{T} par rapport à F en P' . D'après la Proposition 18, la parabole est tangente en P' à PP' . Le triangle $FP'F'$ est isocèle en P' . Par conséquent, la perpendiculaire en P' à PP' est bissectrice de l'angle que font $P'F$ et $F'P'$. \square

Notons qu'on aurait pu démontrer directement à l'aide de la Proposition 18 que la parabole est l'enveloppe des rayons orthogonaux de sa tangente au sommet par rapport à son foyer. En effet, avec les notations de la démonstration ci-dessus, comme le triangle $FP'F'$ est isocèle en P' , P' est équidistant de F et de D .

Ellipse. Lorsque, à la place d'une droite, on prend pour courbe un cercle, l'enveloppe des rayons orthogonaux par rapport à un point est une ellipse ou une hyperbole selon que le point est intérieur ou extérieur au cercle.

PROPOSITION 20. Soient un cercle \mathcal{C} de centre C et un point F intérieur à \mathcal{C} . L'enveloppe des rayons orthogonaux de \mathcal{C} par rapport à F est l'ellipse dont F est un foyer et dont C est le cercle principal.

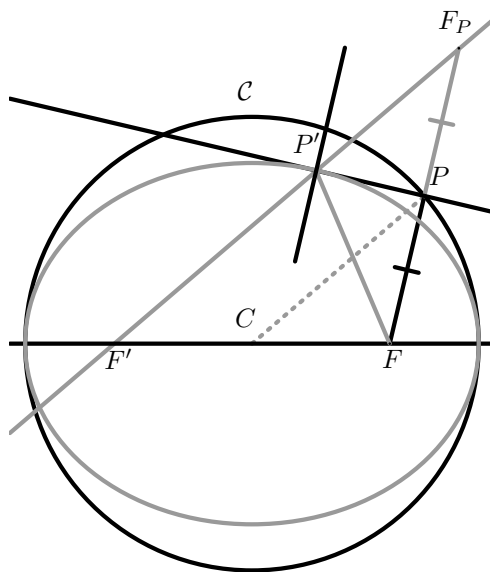


FIGURE 29. L'ellipse comme enveloppe des rayons orthogonaux

DÉMONSTRATION. Soit P un point du cercle et F_P le symétrique de F par rapport à P (voir à la figure 29). La normale à \mathcal{C} en P est la droite CP . D'après la Proposition 18, le point de contact de

l'enveloppe des rayons orthogonaux avec le rayon en P se trouve donc à l'intersection P' de la parallèle à CP menée par F_P , dont nous noterons F' l'intersection avec CF , et de la perpendiculaire à CP menée par P . Les triangles $FF_P F'$ et FPC sont semblables et dans un rapport 2. En particulier, $\|F'F_P\|$ est le double du rayon r du cercle. De plus, le triangle $F'P'F_P$ est isocèle en P' . Par suite

$$\|P'F\| + \|P'F'\| = \|P'F_P\| + \|P'F'\| = 2r$$

et P' appartient à l'ellipse annoncée. Il est facile de voir que les points de cette ellipse sont tous obtenus de cete façon. \square

Avec les notation de la preuve ci-dessus, le triangle $F'P'F_P$ étant isocèle en P' , la perpendiculaire à PP' menée par P' est la bissectrice de l'angle $\widehat{F'P'F}$. D'où

PROPOSITION 21. *La tangente et la normale à une ellipse en un point sont les bissectrices des l'angles formés par les droites issues de ce point et passant par les foyers.*

Hyperbole. Voici les énoncés relatifs aux hyperboles qu'on peut établir à l'aide de la Proposition 18. Ils sont illustrés à la figure 30. Les preuves sont analogues à celles relatives aux ellipses. Nous ne les détaillerons pas mais le lecteur est invité à les détailler pour son propre compte.

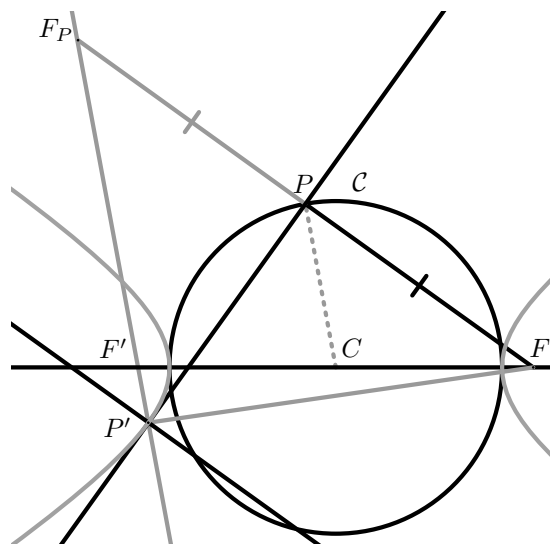


FIGURE 30. L'hyperbole comme enveloppe des rayons orthogonaux

PROPOSITION 22. *Soient un cercle \mathcal{C} de centre C et un point F extérieur à \mathcal{C} . L'enveloppe des rayons orthogonaux de \mathcal{C} par rapport à F est l'hyperbole dont F est un foyer et dont \mathcal{C} est le cercle principal.*

PROPOSITION 23. *La tangente et la normale à une hyperbole en un point sont les bissectrices des l'angles formés par les droites issues de ce point et passant par les foyers.*

Remarquons que les rayons orthogonaux d'un cercle par rapport à un de ses points passent tous par le point diamétralement oppsé. Par conséquent, dans ce cas, leur enveloppe dégénère en celui-ci.

5. Equations cartésiennes

Nous avons décrit paramétriquement des portions de cercles mais, d'après la définition même du cercle de centre (p, q) et de rayon r , celui-ci est le lieu des points dont les coordonnées vérifient l'équation

$$(x - p)^2 + (y - q)^2 = r^2$$

Plus généralement, les coniques ont été étudiées dans l'enseignement secondaire par le biais de leur équations canoniques :

$$\frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad y^2 = 2px$$

En géométrie analytique plane, on a caractérisé les droites par des équations du premier degré

$$ax + by + c = 0$$

Le graphe d'une fonction $f :]a, b[\rightarrow \mathbf{R}$ peut également être décrit comme l'ensemble des solutions d'une équation, à savoir

$$y - f(x) = 0$$

Au vu de ces exemples, on perçoit une autre manière de décrire des courbes consistant à les présenter comme lieux de points dont les coordonnées vérifient une équation.

Nous allons préciser ici cette idée et présenter les relations existant entre les courbes paramétrées et celles décrites par une équation.

5.1. Gradient. Avant d'entrer dans le vif du sujet, il est utile de préciser quelques notations.

Soient un ouvert ω de \mathbf{R}^n et une fonction de classe $C^\infty F : \omega \rightarrow \mathbf{R}$. La dérivée partielle par rapport à x^i sera notée indifféremment

$$F'_i, \quad \frac{\partial F}{\partial x^i}, \quad \partial_i F$$

Dans le cas particulier de $n = 2$ ou $n = 3$, les coordonnées sont généralement notées x, y ou x, y, z et on utilisera

$$F'_x, \quad F'_y, \quad F'_z$$

ou

$$\partial_x F, \quad \partial_y F, \quad \partial_z F$$

pour représenter les dérivées partielles par rapport à x, y, z .

Pour des dérivées d'ordre supérieur, on utilisera des notations telles que

$$F''_{xy}, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}, \quad \partial_{xy} F, \dots$$

Soient alors $\mathbf{h} \in \mathbf{R}^n$ et $a \in \omega$. La *dérivée* $F_{*a}\mathbf{h}$ de F en a dans la *direction* de \mathbf{h} est, par définition, celle de

$$t \mapsto F(a + t\mathbf{h})$$

en $t = 0$. D'après le théorème de dérivation des fonctions composées, c'est donc

$$\sum_{i=1}^n h^i \partial_i F(a)$$

Ceci montre en particulier que l'application $\mathbf{h} \rightarrow F_{*a}\mathbf{h}$ est linéaire. Cela montre aussi que

$$F_{*a}\mathbf{h} = \mathbf{h} \cdot \text{grad}_a F$$

où $\text{grad}_a F$, la *gradient* de F en a , est le vecteur dont les composantes dans la base canonique de \mathbf{R}^n sont les dérivées partielles de F évaluées en a :

$$\text{grad}_a F = (\partial_1 F(a), \dots, \partial_n F(a))$$

5.2. Courbes de niveau. Revenons-en aux courbes planes définies par des équations. On conserve les notations ci-dessus.

On dit que la fonction $F : \omega \rightarrow \mathbf{R}$ est une *équation cartésienne* si

$$F(a) = 0 \quad \Longrightarrow \quad \text{grad}_a F \neq \mathbf{0}$$

L'ensemble des zéros d'une fonction (que nous supposerons de classe C^∞) est une *courbe de niveau* ; elle est *régulière* si la fonction est une équation cartésienne sinon, on dit qu'elle est *singulière* en les zéros du gradient de la fonction.

Pour illustrer ces notions, cherchons le lieu des points $P(x, y)$ dont le produit des distances à $A(a, 0)$ et $B(-a, 0)$ est une constante ℓ^2 donnée, où $a, \ell > 0$, lieu qu'on appelle un *ovale de Cassini*.

Comme

$$\|AP\|^2 = (x - a)^2 + y^2 \quad \& \quad \|BP\|^2 = (x + a)^2 + y^2$$

le lieu cherché est celui des points dont les coordonnées vérifient l'équation

$$[(x - a)^2 + y^2][(x + a)^2 + y^2] - \ell^4 = 0$$

soit, après calculs,

$$F \equiv x^4 + 2x^2y^2 + y^4 - 2a^2x^2 + 2a^2y^2 + a^4 - \ell^4 = 0$$

On vérifie facilement que les solutions du système

$$\begin{cases} \frac{1}{4}F'_x = x(x^2 + y^2 - a^2) = 0 \\ \frac{1}{4}F'_y = y(x^2 + y^2 + a^2) = 0 \end{cases}$$

sont $(0, 0)$ et $(\pm a, 0)$. Les points $(\pm a, 0)$ ne font pas partie du lieu. Par contre, $(0, 0)$ fait partie du lieu si, et seulement si, $a = \ell$. Dès lors, lorsque $a \neq \ell$, F est une équation cartésienne et l'ovale de Cassini correspondant est une courbe de niveau régulière. Par contre, lorsque $a = \ell$, le gradient de F s'annule à l'origine qui est une singularité de l'ovale qu'on appelle alors une *lemniscate de Bernouilli*.

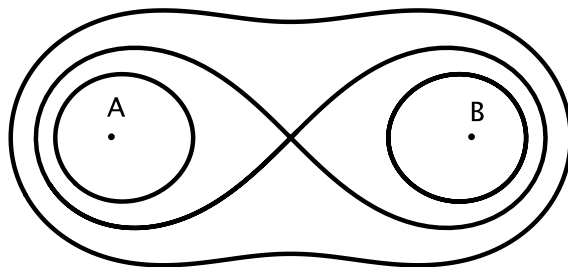


FIGURE 31. Ovals de Cassini, dont une lemniscate de Bernoulli

La figure 31 montre trois ovales de Cassini. Pour la courbe externe, celle qui présente deux légers creux, $\ell > a$. La «figure en huit» est une lemniscate de Bernouilli ; on perçoit bien sa singularité qui est aussi une auto-intersection. Pour le troisième ovale, qui est fait de deux branches entourées par la lemniscate, $\ell < a$.

A la différence d'une courbe paramétrée, une courbe de niveau est une partie de \mathbf{R}^2 . Il y a cependant des relations étroites qui lient les deux notions, du moins dans le cas régulier. On pourrait les résumer, de façon un peu caricaturale, en disant que, *localement*, les courbes de niveau régulières et les traces des courbes paramétrées régulières coïncident.

Notons d'abord ceci.

LEMME 24. *La trace d'un graphe de fonction est une courbe de niveau régulière.*

DÉMONSTRATION. Pour simplifier les écritures, je justifie la chose dans le cas du graphe d'une fonction $f : I \rightarrow \mathbf{R}$ à valeurs réelles, et c'est très simple : sa trace

$$\{(x, f(x)) | x \in I\}$$

est aussi le lieu des zéros de la fonction

$$F_f : (x, y) \in I \times \mathbf{R} \mapsto y - f(x) \in \mathbf{R}$$

dont le gradient

$$(-f'(x), 1)$$

ne s'annule en aucun point. C'est donc bien une courbe de niveau régulière. \square

Cela étant,

PROPOSITION 25. *Soient une courbe paramétrée régulière (I, γ) et $t_0 \in I$. Il existe un intervalle ouvert $I_0 \subset I$ contenant t_0 tel que $\gamma(I_0)$ soit une courbe de niveau régulière.*

DÉMONSTRATION. A cause de la Proposition 2, page 19, la restriction de γ à un intervalle ouvert convenable I_0 contenant t_0 est équivalente à un graphe de fonction. Vu le Lemme 24, la trace $\gamma(I_0)$ de celle-ci est dès lors une courbe de niveau régulière. \square

Considérons de nouveau l'astroïde

$$t \mapsto (\cos^3 t, \sin^3 t)$$

Un peu de calcul montre que sa trace est le lieu des zéros de la fonction

$$(x, y) \mapsto x^{2/3} + y^{2/3} - 1$$

Or cette fonction est de classe C^∞ dans \mathbf{R}^2 privé des points dont une des coordonnées est nulle, points en lesquels elle n'est pas dérivable et parmi lesquels figurent les singularités de l'astroïde. Ainsi, la trace de l'astroïde privée de ses points de rebroussement est une courbe de niveau.

Notons que la trace de l'astroïde est aussi l'ensemble des zéro de la fonction¹³

$$(x, y) \mapsto (x^2 + y^2 - 1)^3 + 27x^2y^2$$

qui, elle, est de classe C^∞ dans \mathbf{R}^2 . Son gradient

$$6((x^2 + y^2 - 1)^2x + 9xy^2, (x^2 + y^2 - 1)^2y + 9x^2y)$$

13. Le lecteur est invité à le vérifier. C'est un exercice intéressant.

s'annule à l'origine, qui n'est pas sur la trace de l'astroïde, et en les points de rebroussement de celle-ci.

La dernière proposition admet une sorte de réciproque en ce sens que, localement, une courbe de niveau est la trace d'une courbe paramétrée régulière. Nous la formulons ci-dessous mais nous ne la démontrerons pas¹⁴.

PROPOSITION 26. *Soient une équation cartésienne $F : \omega \rightarrow \mathbf{R}$ et un de ses zéros a . Il existe un ouvert $\alpha \subset \omega$ de \mathbf{R}^2 contenant a tel que*

$$\alpha \cap \{(x, y) \in \omega \mid F(x, y) = 0\}$$

soit la trace d'une courbe paramétrée régulière (I, γ) .

Nous acceptons aussi la proposition suivante sans preuve.

PROPOSITION 27. *Deux courbes paramétrées régulières dont les traces coïncident avec une courbe de niveau régulière sont équivalentes.*

A noter que cette propriété explique *a posteriori* l'équivalence des paramétrages du demi-cercle S dont nous avons parlé à la page 12.

5.3. Tangente, normale et courbure. Soit une équation cartésienne $F : \omega \rightarrow \mathbf{R}$ et un point P_0 de sa courbe de niveau Γ . Vu la Proposition 26, il existe une courbe paramétrée régulière (I, γ) telle que $\gamma(I) \subset \Gamma$, i.e.

$$\forall t \in I, \quad F(\gamma(t)) = 0$$

et $P_0 = \gamma(t_0)$ pour un certain $t_0 \in I$. Il vient, d'après le théorème de dérivation des fonctions composées,

$$\gamma'(t_0) \cdot \text{grad}_{P_0} F = \sum_{i=1}^2 \gamma^i(t_0) F'_i(\gamma(t_0)) = \frac{d}{dt} (F \circ \gamma)|_{t_0} = 0$$

Par conséquent, le gradient de F en P_0 est perpendiculaire au vecteur tangent à γ en t_0 . De plus, à cause de la Proposition 27, la direction de ce dernier est indépendante de γ . Nous dirons donc que $\text{grad}_{P_0} F$ est *normal* à Γ en P_0 et nous noterons \mathbf{n} (ou \mathbf{n}_Γ si nécessaire) le vecteur unitaire associé

$$\mathbf{n}_\Gamma = \frac{\text{grad}_{P_0} F}{\|\text{grad}_{P_0} F\|} = \frac{1}{\sqrt{F_x'^2 + F_y'^2}} (F_x', F_y')$$

14. Pour ceux que cela intéresse, c'est essentiellement une reformulation du théorème des fonctions implicites.

où les dérivées partielles sont évaluées en les coordonnées de P_0 . Dans la foulée, le vecteur tangent unitaire \mathbf{t}_Γ à Γ en P_0 est défini de manière telle que la base $(\mathbf{t}_\Gamma, \mathbf{n}_\Gamma)$ soit positive :

$$\mathbf{t}_\Gamma = -\mathbf{n}_\Gamma^\perp = \frac{1}{\sqrt{F_x'^2 + F_y'^2}}(F_y', -F_x')$$

Naturellement, si on remplace F par $-F$, \mathbf{t} et \mathbf{n} sont remplacés par leurs opposés. Autrement dit, F et ses multiples positifs définissent une orientation de Γ et les autres multiples (non nuls) de F définissent l'orientation opposée de Γ .

La tangente et la normale de Γ en P_0 sont les droites passant par P_0 et dirigées par \mathbf{t} et \mathbf{n} respectivement. Elles ne dépendent pas de l'orientation de Γ . D'après ce qui précède, la tangente de Γ en P_0 admet l'équation

$$\frac{\partial F}{\partial x}(P_0)(x - x_0) + \frac{\partial F}{\partial y}(P_0)(y - y_0) = 0$$

où x_0, y_0 sont les coordonnées de P_0 .

La courbure algébrique $\kappa_\Gamma^*(P_0)$ de Γ en P_0 est celle de γ en t_0 pour autant que celui-ci ait la même orientation que F ¹⁵. Vu la Proposition 27, cette notion est bien définie mais, comme en général, il est difficile de déterminer un paramétrage local de Γ , il nous faut une formule permettant de calculer cette courbure à l'aide de F . J'ai vu pour la première fois celle qui suit dans [4].

PROPOSITION 28. Soient une équation cartésienne $F : \omega \rightarrow \mathbf{R}$ et un point P_0 de sa courbe de niveau Γ . On a

$$\kappa_\Gamma^*(P_0) = -\frac{F_{xx}''F_y'^2 - 2F_{xy}''F_x'F_y' + F_{yy}''F_x'^2}{(\sqrt{F_x'^2 + F_y'^2})^3}$$

DÉMONSTRATION. Soit une courbe paramétrée régulière (I, γ) dont la trace soit contenue dans Γ et contienne $P_0 = \gamma(t_0)$. Nous pouvons supposer que l'orientation de γ est la même que celle de Γ et, pour simplifier les notations, nous noterons $x(t), y(t)$ les coordonnées de $\gamma(t)$. En dérivant la relation $F \circ \gamma = 0$, nous obtenons

$$x'F_x' + y'F_y' = 0$$

Nous continuons les calculs en supposant que F_y' n'est pas nul au voisinage de t_0 , le cas où c'est F_x' qui ne s'annule pas au voisinage de t_0

15. Ce qu'on peut toujours supposer être le cas, quitte à remplacer γ par un paramétrage équivalent mais d'orientation opposée.

se traitant de façon similaire. En particulier, nous avons

$$y' = -\frac{F'_x}{F'_y}x'$$

En dérivant une fois de plus, il vient

$$x''F'_x + x'^2F''_{xx} + 2x'y'F''_{xy} + y'^2F''_{yy} + y''F'_y = 0$$

Cette relation permet d'exprimer y'' à l'aide des dérivées partielles de F et de x', x'' . En utilisant ces expressions et en utilisant la formule (13), page 35, on trouve, après calculs

$$\kappa_{\Gamma}^*(P_0) = -\text{sign}\left(\frac{x'}{F'_y}\right) \frac{F''_{xx}F_y'^2 - 2F''_{xy}F'_xF'_y + F''_{yy}F_x'^2}{(\sqrt{F_x'^2 + F_y'^2})^3}$$

(où tout est évalué en t_0). Or, (x', y') est un multiple positif de $(F'_y, -F'_x)$ puisque γ et F donnent la même orientation à Γ , donc x' et F'_y ont même signe. \square

En appliquant la formule que nous venons de prouver au cercle d'équation

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 - r^2 = 0$$

on trouve que sa courbure algébrique est égale à $-1/r$. Le fait qu'elle soit négative résulte de ce que l'orientation du cercle induite par cette équation est celle du «sens des aiguilles d'une montre» puisque le gradient de l'équation est

$$2(x - a, y - b)$$

CHAPITRE 3

Les courbes en dimension trois

Ce chapitre est consacré aux premiers éléments de la théorie des courbes de \mathbf{R}^3 . Nous nous limiterons aux courbes régulières et notre objectif principal sera d'obtenir pour celles-ci l'analogue du théorème de classification des courbes régulières planes. Naturellement, les concepts et résultats du chapitre 1 seront librement utilisés dans ce chapitre.

Sauf mention explicite du contraire, \mathbf{R}^3 est muni du produit scalaire canonique donné par

$$(u_1, u_2, u_3) \cdot (v_1, v_2, v_3) = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3$$

et de l'orientation canonique, celle pour laquelle $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ est une base positive.

Avec ces données, \mathbf{R}^3 est muni d'un produit vectoriel

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \mapsto \mathbf{u} \wedge \mathbf{v}$$

et d'un produit mixte

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) \mapsto [\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}] = (\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w}$$

1. La courbure, la torsion et le trièdre de Frenet

Soit une courbe paramétrée régulière (I, γ) de \mathbf{R}^3 rapportée à une abscisse curviligne. D'après la Proposition 6, page 28, le vecteur tangent $\mathbf{t}_\gamma = \dot{\gamma}$ est unitaire¹ et, d'après le Lemme 8, page 33, sa dérivée est nulle ou lui est orthogonale. Par définition, la *courbure* κ_γ de γ en $P_0 = \gamma(s_0)$ est le nombre

$$\kappa_\gamma(s_0) = \|\dot{\mathbf{t}}_\gamma(s_0)\|$$

De plus, pour autant que $\kappa_\gamma(s_0)$ ne soit pas nul, on pose

$$\mathbf{n}_\gamma(s_0) = \frac{1}{\kappa_\gamma(s_0)} \dot{\mathbf{t}}$$

Ce vecteur est la *normale principale* de γ en P_0 . Enfin, toujours sous l'hypothèse $\kappa_\gamma(s_0) \neq 0$, on définit la *binormale* de γ en P_0 par

$$\mathbf{b}_\gamma(s_0) = \mathbf{t}_\gamma(s_0) \wedge \mathbf{n}_\gamma(s_0)$$

1. S'il n'y a pas d'ambiguïté sur γ , on laissera tomber l'indice γ dans l'écriture. Cela sera d'application pour les autres notions introduites plus bas.

Le repère $\mathcal{R}_\gamma(s_0) = (P_0, (\mathbf{t}_\gamma(s_0), \mathbf{n}_\gamma(s_0), \mathbf{b}_\gamma(s_0)))$ est le *trièdre de Frenet* de γ en P_0 .

Si on remplace γ par un paramétrage naturel équivalent de même orientation, le changement de paramètres est de la forme $s \mapsto s + s_0$ de sorte qu'en des valeurs correspondantes des paramètres, les deux courbes ont même courbure et, lorsqu'elle n'est pas nulle, même trièdre de Frenet.

On pourrait donner une définition de celui-ci pour une courbe paramétrée quelconque mais nous ne le ferons pas, ou plutôt si, mais indirectement, en montrant comment calculer le trièdre de Frenet d'un paramétrage naturel à l'aide d'une courbe régulière équivalente et de même orientation.

L'hélice circulaire

$$\gamma : s \in \mathbf{R} \mapsto \left(r \cos \frac{s}{\sqrt{r^2 + h^2}}, r \sin \frac{s}{\sqrt{r^2 + h^2}}, \frac{h}{\sqrt{r^2 + h^2}} s \right) \in \mathbf{R}^3$$

est rapportée à une abscisse curviligne. En effet sa dérivée

$$\mathbf{t} = \left(-\frac{r}{\sqrt{r^2 + h^2}} \sin \frac{s}{\sqrt{r^2 + h^2}}, \frac{r}{\sqrt{r^2 + h^2}} \cos \frac{s}{\sqrt{r^2 + h^2}}, \frac{h}{\sqrt{r^2 + h^2}} \right)$$

est de longueur 1. Comme

$$\dot{\mathbf{t}} = \frac{r}{r^2 + h^2} \left(-\cos \frac{s}{\sqrt{r^2 + h^2}}, -\sin \frac{s}{\sqrt{r^2 + h^2}}, 0 \right)$$

on voit que

$$\kappa = \frac{r}{r^2 + h^2}$$

est constant et que

$$\mathbf{n} = \left(-\cos \frac{s}{\sqrt{r^2 + h^2}}, -\sin \frac{s}{\sqrt{r^2 + h^2}}, 0 \right)$$

Quant à la binormale, elle vaut

$$\mathbf{b} = \left(\frac{h}{\sqrt{r^2 + h^2}} \sin \frac{s}{\sqrt{r^2 + h^2}}, -\frac{h}{\sqrt{r^2 + h^2}} \cos \frac{s}{\sqrt{r^2 + h^2}}, \frac{r}{\sqrt{r^2 + h^2}} \right)$$

À la différence des courbes planes, comme il n'y a pas de direction privilégiée perpendiculaire à une direction donnée de l'espace, la normale unitaire n'est pas définie en certains points, i. e. les zéros de la courbure, et il n'y a pas de courbure algébrique.

Lorsque $\kappa > 0$ en P_0 , on introduit, comme dans le cas plan, un rayon de courbure

$$R_\gamma(s_0) = \frac{1}{\kappa_\gamma(s_0)}$$

et un *centre de courbure*

$$C_\gamma(s_0) = P_0 + R_\gamma(s_0)\mathbf{n}_\gamma(s_0)$$

Le cercle de centre $C_\gamma(s_0)$ et de rayon $R_\gamma(s_0)$ s'appelle encore le cercle *osculateur* et le plan de ce cercle est le plan *osculateur*. C'est le plan passant par P_0 et perpendiculaire à $\mathbf{b}_\gamma(s_0)$.

Intuitivement, si la courbe ne faisait que modifier la direction de \mathbf{t} dans le sens de sa concavité, elle resterait dans ce plan mais il arrive qu'elle se torde en pivotant autour de sa tangente, ce qui fait varier la direction du plan. Ce phénomène est mesuré par une fonction que nous découvrirons bientôt et qui, avec la courbure, détermine la courbe à déplacement près.

1.1. Les équations de Frenet. Les équations de Frenet précisent comment varie le trièdre de Frenet lorsqu'on se déplace le long de la courbe².

PROPOSITION 29. *Soit un paramétrage naturel (I, γ) de \mathbf{R}^3 dont la courbure n'a pas de zéro. Il existe une fonction de classe C^∞ $\tau_\gamma : I \rightarrow \mathbf{R}$ telle que, partout dans I ,*

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{t}}_\gamma = \kappa_\gamma \mathbf{n}_\gamma \\ \dot{\mathbf{n}}_\gamma = -\kappa_\gamma \mathbf{t}_\gamma + \tau_\gamma \mathbf{b}_\gamma \\ \dot{\mathbf{b}}_\gamma = -\tau_\gamma \mathbf{n}_\gamma \end{cases}$$

DÉMONSTRATION. La première équation traduit les définitions de la courbure et de la normale principale.

Notons p, q, r les composantes de $\dot{\mathbf{n}}_\gamma$ dans la base $(\mathbf{t}_\gamma, \mathbf{n}_\gamma, \mathbf{b}_\gamma)$. Comme elle est orthonormée, nous avons

$$p = \dot{\mathbf{n}}_\gamma \cdot \mathbf{t}_\gamma, \quad q = \dot{\mathbf{n}}_\gamma \cdot \mathbf{n}_\gamma, \quad r = \dot{\mathbf{n}}_\gamma \cdot \mathbf{b}_\gamma$$

La fonction r ne *peut pas* s'exprimer³ à l'aide de la courbure et de grandeurs universelles indépendantes de γ . On la rebaptise τ_γ .

La fonction q est nulle car \mathbf{n}_γ est de longueur constante (voir le Lemme 8, page 33).

Enfin, vu la première équation,

$$p = (\mathbf{n}_\gamma \cdot \mathbf{t}_\gamma)' - \mathbf{n}_\gamma \cdot \dot{\mathbf{t}}_\gamma = -\kappa_\gamma \|\mathbf{n}_\gamma\|^2 = -\kappa_\gamma$$

2. Nous acceptons momentanément que les fonctions \mathbf{n} et \mathbf{b} sont de classe C^∞ dans le complémentaire des zéros de la courbure. Cela résultera des formules les exprimant dans un paramétrage quelconque, formules que nous donnons plus bas.

3. Cela sera formellement justifié plus loin.

Ceci étant, en utilisant les deux premières équations, nous allons pouvoir dériver \mathbf{b}_γ :

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{b}}_\gamma &= (\mathbf{t}_\gamma \wedge \mathbf{n}_\gamma)' \\ &= \dot{\mathbf{t}}_\gamma \wedge \mathbf{n}_\gamma + \mathbf{t}_\gamma \wedge \dot{\mathbf{n}}_\gamma \\ &= (\kappa_\gamma \mathbf{n}_\gamma) \wedge \mathbf{n}_\gamma + \mathbf{t}_\gamma \wedge (-\kappa_\gamma \mathbf{t}_\gamma + \tau_\gamma \mathbf{b}_\gamma) \\ &= -\tau_\gamma \mathbf{n}_\gamma\end{aligned}$$

car la base du trièdre de Frenet est orthonormée positive. \square

La dernière équation de Frenet montre que \mathbf{b}_γ a tendance à varier dans le plan normal à la courbe avec une intensité mesurée par τ_γ . On appelle celui-ci la *torsion* de la courbe. C'est la fonction à laquelle nous faisons allusion juste avant le début de cette sous-section.

Continuons l'exemple de l'hélice circulaire entamé un peu plus haut. On a

$$\dot{\mathbf{b}} = \frac{h}{r^2 + h^2} \left(\cos \frac{s}{\sqrt{r^2 + h^2}}, \sin \frac{s}{\sqrt{r^2 + h^2}}, 0 \right) = -\frac{h}{r^2 + h^2} \mathbf{n}$$

Ainsi, la torsion de l'hélice est constante et vaut

$$\tau = \frac{h}{r^2 + h^2}$$

PROPOSITION 30. *Soit un paramétrage naturel (I, γ) de \mathbf{R}^3 dont la courbure est sans zéro. La trace de γ est contenue dans un plan si, et seulement si, sa torsion est nulle.*

DÉMONSTRATION. Supposons que la trace de γ soit contenue dans un plan perpendiculaire à un vecteur unitaire \mathbf{u} . La fonction $\gamma \cdot \mathbf{u}$ est alors constante et, en la dérivant deux fois, on obtient successivement $\mathbf{t} \cdot \mathbf{u} = 0$ et $\kappa \mathbf{n} \cdot \mathbf{u} = 0$. Puisque la courbure est sans zéro, cela nous montre que le plan est parallèle à \mathbf{t} et à \mathbf{n} . Il est donc perpendiculaire à \mathbf{b} lequel est donc égal à $\pm \mathbf{u}$. Par continuité, \mathbf{b} est donc constant. Donc $\tau = 0$, d'après la troisième équation de Frenet.

Inversement, si la torsion de γ est nulle, \mathbf{b} est constant de sorte que

$$(\gamma \cdot \mathbf{b})' = \mathbf{t} \cdot \mathbf{b} = 0$$

Ainsi, $\gamma \cdot \mathbf{b}$ est constant et la trace de γ est contenue dans un plan. \square

1.2. Expression dans un paramétrage quelconque. Soient une courbe paramétrée régulière (I, γ) et un paramétrage naturel équivalent et de même orientation $(J, \eta) : \gamma = \eta \circ u$, où $u' = \|\gamma'\|$. Nous allons exprimer le trièdre de Frenet de η , sa courbure et sa torsion, à l'aide de γ .

Ainsi que nous l'avons observé à plusieurs reprises,

$$\mathbf{t}_\eta \circ u = \frac{\gamma'}{\|\gamma'\|}$$

de sorte que, après calculs,

$$(\mathbf{t}_\eta \circ u)' = (\kappa_\eta \circ u)(\mathbf{n}_\eta \circ u)\|\gamma'\| = \frac{1}{\|\gamma'\|^3}(\gamma' \wedge \gamma'') \wedge \gamma'$$

D'où

$$\kappa_\eta \circ u = \frac{\|\gamma' \wedge \gamma''\|}{\|\gamma'\|^3}$$

et

$$\mathbf{n}_\eta \circ u = \frac{(\gamma' \wedge \gamma'') \wedge \gamma'}{\|\gamma' \wedge \gamma''\|\|\gamma'\|}$$

Nous allons à présent calculer la torsion et la binormale de η . En dérivant l'égalité

$$\gamma' = \|\gamma'\|\mathbf{t}_\eta \circ u$$

nous obtenons

$$(20) \quad \gamma'' = \|\gamma'\|'\mathbf{t}_\eta \circ u + \|\gamma'\|^2(\kappa_\eta \circ u)\mathbf{n}_\eta \circ u$$

puis

$$\gamma' \wedge \gamma'' = \|\gamma'\|^3(\kappa_\eta \circ u)\mathbf{b}_\eta \circ u$$

En dérivant cette relation, il vient

$$\gamma' \wedge \gamma''' = (\|\gamma'\|^3(\kappa_\eta \circ u))'\mathbf{b}_\eta \circ u - \|\gamma'\|^4(\kappa_\eta \circ u)'(\tau_\eta \circ u)\mathbf{n}_\eta \circ u$$

En prenant le produit scalaire de cette égalité avec γ'' , on obtient successivement

$$\tau_\eta \circ u = \frac{[\gamma', \gamma'', \gamma''']}{\|\gamma' \wedge \gamma''\|^2}$$

puis

$$\mathbf{b}_\eta \circ u = \frac{\gamma' \wedge \gamma''}{\|\gamma' \wedge \gamma''\|}$$

Les formules que nous venons d'établir nous conduisent à définir le trièdre de Frenet de (I, γ) en $P_0 = \gamma(s_0)$ comme étant le repère $\mathcal{R}_\gamma = (P_0, (\mathbf{t}_\eta \circ u, \mathbf{n}_\eta \circ u, \mathbf{b}_\eta \circ u))$. Elles montrent en effet qu'il est indépendant du paramétrage naturel (J, η) équivalent à γ et de même

orientation que γ . Semblablement, nous dirons que $\kappa_\gamma = \kappa_\eta \circ u$ et $\tau_\gamma = \tau_\eta \circ u$ sont respectivement la courbure et la torsion de γ .

En physique, si γ décrit le mouvement d'un point matériel, la formule (1.2) donne une décomposition utile de son accélération

$$\gamma'' = \|\gamma'\|' \mathbf{t}_\gamma + \|\gamma'\|^2 \kappa_\gamma \mathbf{n}_\gamma$$

en la somme de sa composante *tangentielle*

$$\|\gamma'\|' \mathbf{t}_\gamma$$

où $\|\gamma'\|'$ est l'accélération linéaire, et d'une composante *centripète*, i.e. dirigée vers le centre de courbure,

$$\|\gamma'\|^2 \kappa_\gamma \mathbf{n}_\gamma$$

dont on notera qu'elle est proportionnelle au carré de la vitesse linéaire $\|\gamma'\|$ et à la courbure.

Corollaire important des formules ci-dessus, admis jusqu'ici, *les éléments du trièdre de Frenet d'une courbe paramétrée régulière (I, γ) ainsi que sa courbure et sa torsion sont des fonctions de classe C^∞ dans le complémentaire de l'ensemble des zéros de la courbure.*

PROPOSITION 31. *Soit une courbe paramétrée régulière (I, γ) de \mathbf{R}^3 . La trace de γ est contenue dans un plan si, et seulement si*

$$[\gamma', \gamma'', \gamma'''] = 0$$

DÉMONSTRATION. C'est une conséquence immédiate de la Proposition 30 et de l'expression de la torsion donnée ci-dessus. \square

2. Classification des courbes régulières de courbure sans zéro

Comme pour \mathbf{R}^2 , un déplacement $T : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$ est composé d'une translation et d'une rotation. Celle-ci, sa «partie linéaire», est traditionnellement notée \vec{T} . Ainsi, T est de la forme

$$T : \mathbf{x} \mapsto \vec{T}(\mathbf{x}) + \mathbf{a}$$

PROPOSITION 32. *Soient un déplacement T de \mathbf{R}^3 , une courbe paramétrée régulière (I, γ) dont la courbure est sans zéro et $\eta = T \circ \gamma$. Le déplacement T transforme le trièdre de Frenet de γ en celui η . De plus,*

$$\|\eta'\| = \|\gamma'\|, \quad \kappa_\eta = \kappa_\gamma \quad \& \quad \tau_\eta = \tau_\gamma$$

2. CLASSIFICATION DES COURBES RÉGULIÈRES DE COURBURE SANS ZÉRO

DÉMONSTRATION. Cela découle immédiatement des formules exprimant le trièdre de Frenet, la courbure et la torsion d'une courbe en terme de ses dérivées première, seconde et troisième données à la sous-section 1.2, page 69, et du fait qu'un déplacement conserve les produits scalaire, vectoriel et mixte. \square

Comme son analogue du cas plan, la proposition précédente admet une forme de réciproque.

PROPOSITION 33. *Soient des courbes paramétrées régulières (I, γ) et (I, η) dont les courbures sont sans zéro. Si*

$$\|\eta'\| = \|\gamma'\|, \quad \kappa_\eta = \kappa_\gamma \quad \& \quad \tau_\eta = \tau_\gamma$$

alors il existe un déplacement T de \mathbf{R}^3 tel que $\eta = T \circ \gamma$.

DÉMONSTRATION. L'idée est d'appliquer un «truc» analogue à celui utilisé pour démontrer la Proposition 16, page 44, à savoir montrer que, après un déplacement convenable, la fonction

$$e := \mathbf{t}_\gamma \cdot \mathbf{t}_\eta + \mathbf{n}_\gamma \cdot \mathbf{n}_\eta + \mathbf{b}_\gamma \cdot \mathbf{b}_\eta$$

est constante et vaut 3 puis exploiter l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour conclure.

Nous n'allons pas faire tout dans le détail car la plupart des adaptations nécessaires sont évidentes⁴. Nous allons juste expliquer ici pourquoi et comment nous ramener au cas de paramétrages naturels.

On se ramène à des paramétrages naturels pour calculer la dérivée de e grâce aux équations de Frenet qui permettent de vérifier aisément qu'elle est nulle.

Voici pourquoi on peut se ramener à de tels paramétrages. Soit un changement de paramètres $u : I \rightarrow J$ tel que $u' = \|\gamma'\|$. Puisque $\|\eta'\| = \|\gamma'\|$, les paramétrages $(J, \gamma \circ u^{-1})$ et $(J, \eta \circ u^{-1})$ sont naturels. Ils sont équivalents respectivement à γ et à η et de même orientation. Par conséquent ils ont mêmes traces qu'eux et vérifient les hypothèses de la proposition. Pour établir celle-ci, il suffit donc de montrer qu'ils sont image l'un de l'autre par un déplacement. \square

Une courbe régulière dont la courbure n'est pas nulle est donc caractérisée à déplacement près par trois fonctions : $\|\gamma'\|$, sa courbure et sa torsion. Aux restrictions évidentes près, celle-ci sont largement arbitraires, comme le montre la propriété suivante. Cette proposition et les deux résultats précédents représentent le plus que nous puissions faire concernant la classification des courbes de \mathbf{R}^3 . La classification générale de ces courbes relève de la *théorie des noeuds*. C'est un domaine

4. A titre d'exercice, le lecteur est invité à produire une démonstration complète.

de recherche très actif mais qui sort du cadre que nous nous sommes imposé ici.

PROPOSITION 34. *Soient des fonctions de classe C^∞ $v, \kappa, \tau : I \rightarrow \mathbf{R}$. Si les valeurs de v et de κ sont strictement positives, il existe une courbe paramétrée régulière (I, γ) de \mathbf{R}^3 telle que $\|\gamma'\| = v, \kappa_\gamma = \kappa$ et $\tau_\gamma = \tau$.*

DÉMONSTRATION. Nous ne détaillerons pas cette preuve. L'idée est, en se ramenant à des paramétrages naturels comme dans celle de la Proposition 17, page 45, d'utiliser les équations de Frenet : elles montrent que $\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b}$ forment une solution d'un système d'équations différentielles ordinaires, linéaire, de classe C^∞ sur I et caractérisé par la courbure et la torsion. D'après un théorème de la théorie des équations différentielles, un tel système possède des solutions définies sur I tout entier. Il faut alors primitiver la composante \mathbf{t} de l'une d'elles pour trouver une courbe répondant à la question. Le lecteur intéressé pourra consulter [3] pour une preuve complète. \square

Cette propriété nous explique pourquoi nous n'aurions pu, en établissant les formules de Frenet, exprimer la torsion à l'aide de la courbure et de grandeurs universelles indépendantes de la courbe : en effet, dans l'énoncé ci-dessus, au fait près qu'elle doit être de classe C^∞ , la fonction τ est arbitraire.

Deuxième partie

Surfaces

CHAPITRE 4

Paramétrages, équations cartésiennes et variétés plongées

La notion de surface est fort générale et on la rencontre dans de nombreuses parties des mathématiques. Nous nous limiterons aux surfaces contenues dans \mathbf{R}^3 et, principalement, à celles qui en sont des variétés plongées. Nous commencerons par développer quelques considérations à propos des variétés plongées de \mathbf{R}^n : introduire les premières notions les concernant ne coûte pas beaucoup plus cher en dimension quelconque qu'en dimension trois. Comme pour les courbes, nous nous placerons d'emblée dans le cadre C^∞ .

Voici quelques rappels utiles pour la suite. Ils généralisent ce que nous avons dit à propos des fonctions réelles dans la sous-section 5.1 du premier chapitre, page 58.

Considérons un ouvert $\omega \subset \mathbf{R}^p$ et une fonction $f : \omega \rightarrow \mathbf{R}^q$, de classe C^∞ , c'est-à-dire dont chaque composante $f^i : \omega \rightarrow \mathbf{R}$ est de classe C^∞ . Soient alors $a \in \omega$ et $\mathbf{h} \in \mathbf{R}^p$. La dérivée $f_{*a}\mathbf{h}$ de f dans la direction de \mathbf{h} en a est la dérivée

$$\frac{d}{dt}f(a + t\mathbf{h})|_{t=0}$$

Naturellement,

$$f_{*a}\mathbf{h} = (f_{*a}^1\mathbf{h}, \dots, f_{*a}^q\mathbf{h})$$

En particulier, $f_{*a}\mathbf{h}$ est linéaire en \mathbf{h} et, en posant¹

$$\partial f = \begin{pmatrix} \partial_1 f^1 & \dots & \partial_p f^1 \\ \vdots & & \vdots \\ \partial_1 f^q & \dots & \partial_p f^q \end{pmatrix}$$

on obtient son expression matricielle dans les bases canoniques de \mathbf{R}^p et \mathbf{R}^q :

$$f_{*a}\mathbf{h} = \partial f(a)\mathbf{h}$$

L'application f_{*a} est la *différentielle* de f en a , ou encore son *application linéaire tangente*.

1. Bien observer que les lignes de cette matrice sont les gradients des composantes de f .

Voici une remarque utile pour la suite. Si f est de classe C^1 et si \mathbf{h} est le vecteur tangent en t_0 à une courbe paramétrée (I, γ) passant par a en t_0 , alors

$$f_{*a} \mathbf{h} = \frac{d(f \circ \gamma)}{dt} \Big|_{t=t_0}$$

En effet, d'après le théorème de dérivation des fonctions composées, pour tout indice i ,

$$\frac{d(f^i \circ \gamma)}{dt} \Big|_{t=t_0} = \sum_{k=1}^n \partial_k f^i(a) \frac{d\gamma^k}{dt} \Big|_{t=t_0} = \sum_{k=1}^n \partial_k f^i(a) h^k = f_{*a}^i \mathbf{h}$$

Nous dirons que le *rang* de f en a est le rang de l'application f_{*a} . C'est encore celui de la matrice $\partial f(a)$. S'il vaut p , alors f_{*a} est injectif et s'il vaut q , il est surjectif.

Voici alors une reformulation du théorème de dérivation des fonctions composées.

PROPOSITION 35. *Soient des ouverts $\alpha \subset \mathbf{R}^p$ et $\beta \subset \mathbf{R}^q$ et des applications de classe C^∞ $g : \alpha \rightarrow \beta$ et $f : \beta \rightarrow \mathbf{R}^r$. L'application $f \circ g$ est de classe C^∞ et, pour tout $a \in \alpha$,*

$$(f \circ g)_{*a} = f_{*g(a)} \circ g_{*a}$$

Dans la suite, toute partie de \mathbf{R}^n sera munie de la *topologie induite*. Cela signifie que ses ouverts sont, par définition, ses intersections avec les ouverts de \mathbf{R}^n . On peut alors montrer qu'une application $f : V \subset \mathbf{R}^p \rightarrow W \subset \mathbf{R}^q$ est continue si, et seulement si, pour tout $a \in V$ et toute suite $(x_k, k \in \mathbf{N})$ de points de V qui converge vers a , la suite $(f(x_k), k \in \mathbf{N})$ converge vers $f(a)$.

La propriété suivante est utile dans la pratique.

PROPOSITION 36. *Une application $f : V \subset \mathbf{R}^p \rightarrow W \subset \mathbf{R}^q$ est continue si, pour tout $a \in V$, il existe un ouvert ω de \mathbf{R}^p contenant a et une application continue $g : \omega \rightarrow \mathbf{R}^q$ tels que*

$$\forall x \in \omega \cap V, \quad f(x) = g(x)$$

DÉMONSTRATION. Soit en effet $a \in V$ et une suite $(x_k, k \in \mathbf{N})$ de points de V qui converge vers a . Avec les notations de l'énoncé, dès que k est assez grand, $x_k \in \omega$ et par suite, vu que g est continu,

$$\lim_k f(x_k) = \lim_k g(x_k) = g(a) = f(a)$$

ce qui montre que f est continu. □

1. Paramétrages

Un *paramétrage* d'une partie $V \subset \mathbf{R}^n$ est une bijection φ de classe C^∞ d'un ouvert U de \mathbf{R}^p sur V , de rang p partout dans U et dont la réciproque $\varphi^{-1} : V \rightarrow U$ soit continue.

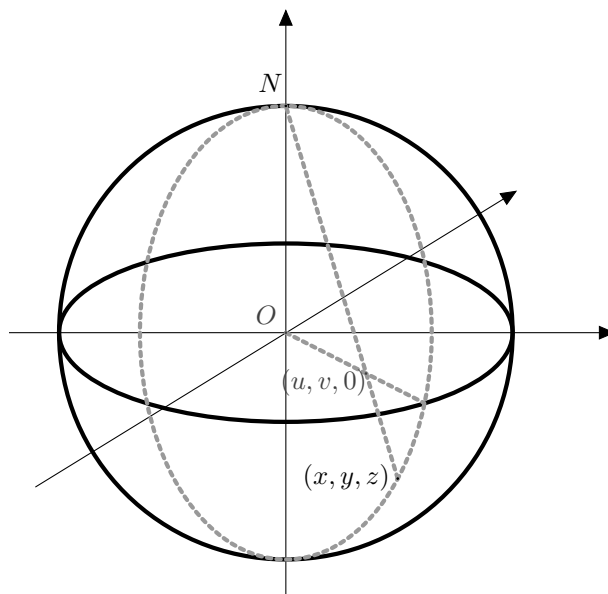


FIGURE 32. La projection stéréographique de (x, y, z) est $(u, v, 0)$

Voici un premier exemple. C'est un paramétrage du complémentaire V du pôle nord $N = (0, 0, 1)$ de la sphère

$$S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$$

Il associe à tout point $(u, v) \in U = \mathbf{R}^2$ le point, différent de N , en lequel la droite joignant $(u, v, 0)$ à N coupe S^2 . On obtient facilement ses coordonnées² $\varphi(u, v)$:

$$(21) \quad \varphi(u, v) = \left(\frac{2u}{u^2 + v^2 + 1}, \frac{2v}{u^2 + v^2 + 1}, \frac{u^2 + v^2 - 1}{u^2 + v^2 + 1} \right).$$

Ainsi, φ est de classe C^∞ . Posons, pour $z \neq 1$,

$$\psi(x, y, z) = \left(\frac{x}{1-z}, \frac{y}{1-z} \right).$$

² L'application réciproque φ^{-1} est la *projection stéréographique de pôle N*.

L'application $\psi \circ \varphi$ est l'identité dans \mathbf{R}^2 . En particulier, d'après la Proposition 36, φ^{-1} est continu. De plus, puisque $\psi_* \circ \varphi_*$ est injectif, φ_* l'est aussi. Au total, (U, φ) est un paramétrage.

Nous venons d'utiliser une remarque très simple mais également très efficace. La voici formulée en termes généraux. Soient des applications f, g .

- Si $f \circ g$ est injectif, alors g est injectif
- Si $f \circ g$ est surjectif, alors f est surjectif

La vérification est facile. Ce serait une bonne idée de garder ces observations en mémoire.

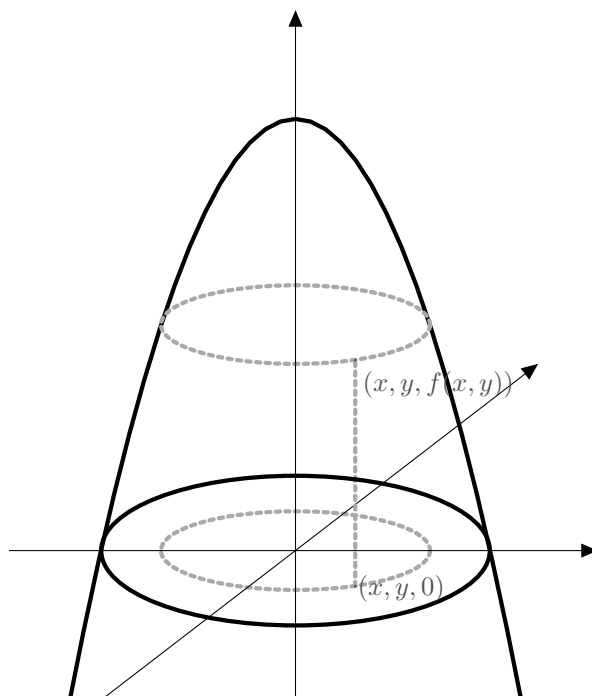


FIGURE 33. Un paraboloid elliptique, graphe d'une fonction de la forme $f(x, y) = \alpha - \beta x^2 - \gamma y^2$, $\alpha, \beta, \gamma > 0$

1.1. Paramétrages par des coordonnées. On obtient une famille importante de paramétrages en considérant des fonctions et leurs graphes. Si $f : U \subset \mathbf{R}^p \rightarrow \mathbf{R}^q$ est de classe C^∞ , alors

$$\varphi : U \rightarrow \mathbf{R}^{p+q} : u \mapsto (u, f(u))$$

est un paramétrage du graphe $\mathcal{G}_f = \{(u, f(u)) : u \in U\}$ de f . Il est évident que c'est une bijection de U sur \mathcal{G}_f et qu'elle est de classe C^∞ .

L'application réciproque

$$\varphi^{-1} : x \in \mathcal{G}_f \mapsto (x^1, \dots, x^p) \in U$$

est continue comme on le voit directement en appliquant la Proposition 36. C'est en effet la restriction de l'application différentiable

$$\psi : x \in \mathbf{R}^{p+q} \mapsto (x^1, \dots, x^p) \in \mathbf{R}^p.$$

Comme $\psi_* \circ \varphi_*$ est donc injectif, φ est de rang p . Cela se voit aussi sur la matrice $\partial\varphi$, à savoir

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \\ \partial_1 f^1 & & \cdots & \partial_p f^1 \\ \vdots & & & \vdots \\ \partial_1 f^q & & \cdots & \partial_p f^q \end{pmatrix}$$

dont les p premières lignes forment un mineur non nul. Le paramétrage φ est un *paramétrage par des coordonnées*. Ce sont en effet certaines coordonnées qui servent de paramètres. Dans l'exemple qui vient d'être détaillé, il s'agit des p premières. Mais il peut s'agir de n'importe lesquelles.

1.2. Equivalence. Considérons des ouverts $U \subset \mathbf{R}^p$ et $U' \subset \mathbf{R}^{p'}$ ainsi qu'un changement de variables de classe C^∞ $\theta : U' \rightarrow U$. Pour rappel, c'est une bijection de classe C^∞ dont la réciproque est de classe C^∞ . En particulier, $\theta_* : \mathbf{R}^{p'} \rightarrow \mathbf{R}^p$ est bijectif partout dans U' et $p' = p$. En effet, en dérivant les relations

$$\theta \circ \theta^{-1} = \text{id}_U \quad \& \quad \theta^{-1} \circ \theta = \text{id}_{U'}$$

on voit que θ_* et θ_*^{-1} sont inverses l'un de l'autre. Cela acquis, il résulte du théorème du rang que $p' = p$.

Notons que la réciproque est vraie : *une bijection de classe C^∞ entre ouverts d'espaces euclidiens dont la différentielle est partout non singulière est un changement de variables entre ces ouverts* mais nous ne le prouverons pas.

Vu ce qui précède, si on compose un paramétrage $\varphi : U \rightarrow V$ avec le changement de variables θ , on obtient encore un paramétrage $\varphi \circ \theta$, du même ensemble V . On dit que les paramétrages $\varphi \circ \theta$ et φ sont *équivalents*³.

3. Le lecteur est invité à vérifier qu'il s'agit bien d'une relation d'équivalence dans l'ensemble des paramétrages de V .

Voici un exemple. L'hémisphère «sud» de S^2 , privé de l'équateur, admet le paramétrage par des coordonnées (U', ψ) où U' est le disque

$$\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1\}$$

et où

$$\psi : (x, y) \mapsto \left(x, y, -\sqrt{1 - x^2 - y^2} \right)$$

Le même hémisphère admet également le paramétrage (U', φ) , où φ est l'application définie par la formule (21). Ces deux paramétrages sont équivalents. On a en effet $\psi = \varphi \circ \theta$ où

$$\theta : (x, y) \in U' \mapsto \left(\frac{x}{1 + \sqrt{1 - x^2 - y^2}}, \frac{y}{1 + \sqrt{1 - x^2 - y^2}} \right) \in U'$$

et cette application est bien un changement de variables de classe C^∞ puisque

$$\theta^{-1} : (x, y) \mapsto \left(\frac{2x}{x^2 + y^2 + 1}, \frac{2y}{x^2 + y^2 + 1} \right)$$

Nous acceptons la propriété suivante sans démonstration.

THÉORÈME 37. *Soit une partie V de \mathbf{R}^n admettant un paramétrage $\varphi : U \subset \mathbf{R}^p \rightarrow V$.*

a) Tout paramétrage $\varphi' : U' \subset \mathbf{R}^{p'} \rightarrow V$ est équivalent à φ . En particulier, $p' = p$.

b) Soient $u \in U$ et $a = \varphi(u)$. Si le mineur $\det(\partial_k \varphi^{i_i}(u))$ de $\partial \varphi(u)$ correspondant aux composantes d'indices i_1, \dots, i_p de φ n'est pas nul, alors il existe un ouvert ω de V contenant a et admettant un paramétrage par les coordonnées $(x^{i_1}, \dots, x^{i_p})$.

2. Equations cartésiennes

Nous allons étendre la notion d'équation cartésienne introduite à la sous-section 5.2, page 59, pour définir les courbes de niveau.

Soit un paramétrage $\varphi : U \subset \mathbf{R}^p \rightarrow V \subset \mathbf{R}^n$. La relation

$$\exists u \in U : x = \varphi(u)$$

caractérise les points de V . L'élimination de u consiste à exprimer les conditions nécessaires et suffisantes que les coordonnées de x doivent satisfaire pour qu'il vérifie cette relation, c'est-à-dire pour qu'il appartienne à V . On s'attend à ce qu'elles prennent la forme d'équations $F^i(x) = 0, i = 1, \dots, q$, éventuellement assorties de conditions précisant les domaines de définitions des fonctions F^i . Inversement, la résolution de ces équations consiste à fournir une description explicite de leurs solutions. Lorsqu'il y a moins d'équations que d'inconnues, on peut

présumer que celles-ci dépendent d'un certain nombre de paramètres. L'expérience des systèmes d'équations du premier degré et le théorème du rang nous indiquent que le nombre p de paramètres et le nombre q d'équations sont liés par la relation $p + q = n$. L'idée intuitive qui justifie cette relation est que chaque équation permet d'exprimer une inconnue à l'aide des autres. Par conséquent, q équations vont déterminer q inconnues en fonction des $n - q$ restantes lesquelles peuvent prendre des valeurs arbitraires dans le domaine de définition des équations : elles jouent ainsi le rôle de paramètres dans la description des solutions du système d'équations.

Une *équation cartésienne* d'une partie $V \subset \mathbf{R}^m$ est une fonction F de classe C^∞ d'un ouvert $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ dans \mathbf{R}^q telle que $V = \{x \in \Omega : F(x) = 0\}$ et dont le rang soit q en chaque point de V : F_{*a} est de rang q chaque fois que $F(a) = 0$, $a \in \Omega$. On dit aussi des composantes F^i d'une équation cartésienne F de V qu'elles constituent *des équations cartésiennes* de V .

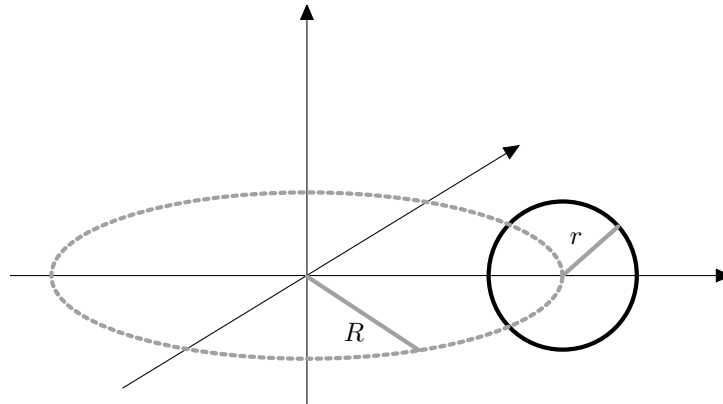


FIGURE 34

Un tore est engendré par la rotation d'un cercle autour d'une droite de son plan. La figure 34 présente un cercle de rayon r du plan d'équation $y = 0$ et centré en $(R, 0, 0)$, avec $R > r$. Le lecteur est invité à vérifier que le tore engendré par la rotation de ce cercle autour de l'axe des z admet l'équation cartésienne ⁴

$$(x^2 + y^2 + z^2 + R^2 - r^2)^2 - 4R^2(x^2 + y^2)$$

4. Pour $R \leq r$, le tore est encore l'ensemble des zéros de cette fonction mais la différentielle de celle-ci peut s'annuler en certains de ses points.

2.1. Graphes de fonctions. Les graphes de fonction admettent des équations cartésiennes faciles à construire. Si $f : U \subset \mathbf{R}^p \rightarrow \mathbf{R}^q$ est de classe C^∞ , alors les fonctions

$$\begin{cases} F^1(x) = x^{p+1} - f^1(x^1, \dots, x^p) \\ \vdots \\ F^q(x) = x^{p+q} - f^q(x^1, \dots, x^p) \end{cases}$$

de $x \in U \times \mathbf{R}^q \subset \mathbf{R}^{p+q}$ sont des équations cartésiennes de \mathcal{G}_f . En effet, il est évident que

$$\mathcal{G}_f = \{x \in U \times \mathbf{R}^q \mid F(x) = 0\}$$

De plus,

$$\partial F = \begin{pmatrix} -\partial_1 f^1 & \cdots & -\partial_p f^1 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -\partial_1 f^q & \cdots & -\partial_p f^q & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

est partout de rang q .

3. Variétés plongées

Voici alors le résultat clef conduisant à la notion de variété plongée :

THÉORÈME 38. *Soit une partie V de \mathbf{R}^n . Les assertions suivantes sont équivalentes.*

a) *Pour tout point a de V , il existe un ouvert ω de V contenant a et admettant un paramétrage $\varphi : U \subset \mathbf{R}^p \rightarrow \omega$.*

b) *Pour tout point a de V , il existe un ouvert ω de V contenant a et admettant une équation cartésienne $F : \Omega \rightarrow \mathbf{R}^{n-p}$.*

Nous n'allons pas le prouver en détails mais voici les idées de sa preuve. D'après le Théorème 37, s'il existe un ouvert de V contenant a et admettant un paramétrage, quitte à restreindre cet ouvert, on peut remplacer le paramétrage par un paramétrage par des coordonnées. L'ouvert est alors un graphe de fonction et il admet des équations cartésiennes (voir à la sous-section 2.1). Inversement, si un ouvert de V contenant a admet une équation cartésienne $F : \Omega \rightarrow \mathbf{R}^q$, alors la matrice $\partial F(a)$ possède un mineur de dimension q qui n'est pas nul, disons celui obtenu en retenant les colonnes de numéros i_1, \dots, i_q . Un théorème d'analyse, le théorème des fonctions implicites, nous apprend alors qu'on peut résoudre l'équation $F = 0$ au voisinage de a par rapport aux inconnues x^{i_1}, \dots, x^{i_q} en les exprimant comme des fonctions de classe C^∞ des autres variables : un voisinage de a dans V est donc décrit par un paramétrage par des coordonnées.

Une partie V de \mathbf{R}^n qui vérifie les propriétés a) et b) du Théorème 38 est une *variété plongée* dans \mathbf{R}^n .

Une variété plongée V est donc recouverte par des ouverts qui sont paramétrés et par des ouverts qui sont les ensembles de zéros d'équations cartésiennes.

Si les ouverts ω et ω' de V sont les images des paramétrages (U, φ) et (U', φ') respectivement, et si $\omega'' := \omega \cap \omega' \neq \emptyset$, alors cette intersection est paramétrée à la fois par la restriction de φ à $\varphi^{-1}(\omega'')$ et par celle de φ' à $\varphi'^{-1}(\omega'')$. D'après la Propriété 37, ces deux paramétrages sont équivalents.

Il est plus difficile de comparer des équations cartésiennes définissant une même partie de \mathbf{R}^n et nous ne nous appesantirons pas sur cette question⁵.

Dimension. Les notations étant celles du Théorème 38, le Théorème 37 montre que le nombre p ne dépend pas du paramétrage choisi pour décrire V au voisinage de a . On appelle ce nombre la *dimension* de V en a . On le note $\dim_a V$. Il est localement constant. En particulier, il est constant lorsque V est connexe et on le note alors $\dim V$.

Un espace topologique X est *connexe* s'il est "d'un seul tenant", ce qui, techniquement, se traduit par le fait que X n'admet pas de partition en deux ouverts. L'image continue d'un connexe est connexe : si $f : X \rightarrow Y$ est continu et si X est connexe, alors $f(X)$ est connexe pour la topologie induite par celle de Y . Cette propriété, facile à vérifier, est la version générale du théorème des valeurs intermédiaires. Les connexes de \mathbf{R} sont en effet les intervalles⁶. Dès lors, si $f : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ est continu, $f([a, b])$ est un intervalle. Comme il contient $f(a)$ et $f(b)$, il contient aussi l'intervalle dont ils sont les extrémités.

Pour voir que $\dim_a V$ est constant lorsque V est connexe, on observe que les ensembles

$$\{a \in V \mid \dim_a V = p\}, p \in \mathbf{N},$$

sont des ouverts disjoints dont l'union est V . Il faut donc bien que l'un d'eux coïncide avec V qui, sinon, ne serait pas connexe.

Le nombre $n - \dim_a V$ s'appelle la *codimension* (en a) de V .

5. En fait, si une fonction de classe C^∞ s'annule sur l'ensemble des zéros d'une équation cartésienne, alors, *localement*, elle peut s'écrire comme combinaison linéaire des composantes de l'équation, avec des coefficients de classe C^∞ .

6. Ceci n'est pas tout à fait immédiat.

La dimension de V en a est le nombre de paramètres nécessaires pour décrire V au voisinage de a tandis que sa codimension est le nombre d'équations cartésiennes qu'il faut imposer à un point de \mathbf{R}^n pour qu'il appartienne à un voisinage de a dans V .

Une *hypersurface* est une variété plongée de codimension 1 et une *surface* est une variété de dimension 2. Une variété plongée de dimension 1 est une union de traces de courbes paramétrées.

4. Un premier exemple

L'ensemble $M(p, q, r)$ des matrices réelles ayant p lignes, q colonnes et de rang r est une variété plongée dans l'espace des matrices réelles à p lignes et q colonnes, qu'on confond avec \mathbf{R}^{pq} . C'est une variété de dimension $r(p + q - r)$.

Nous ne le vérifierons pas en général mais nous allons détailler le cas particulier de $M(2, 3, 1)$ que, pour simplifier l'écriture, nous noterons M dans cette section. Nous considérons que $M \subset \mathbf{R}^6$, la matrice

$$\begin{pmatrix} x^1 & x^2 & x^3 \\ x^4 & x^5 & x^6 \end{pmatrix}$$

étant confondue avec le point

$$(x^1, x^2, x^3, x^4, x^5, x^6)$$

4.1. Paramétrages. L'ensemble M est recouvert par deux ouverts paramétrés. Le premier est l'intersection de M avec

$$\Omega_1 = \{(x^1, x^2, x^3, x^4, x^5, x^6) \in \mathbf{R}^6 \mid (x^1, x^2, x^3) \neq \mathbf{0}\}$$

Il s'agit donc de l'ensemble des matrices de M dont la première ligne n'est pas nulle. Son paramétrage

$$\varphi_1 : \mathbf{R}^3 \setminus \{\mathbf{0}\} \times \mathbf{R} \rightarrow M \cap \Omega_1$$

est donné par

$$\varphi_1(x, y, z, t) = (x, y, z, tx, ty, tz)$$

C'est bien un paramétrage. Cette application est effectivement une bijection de classe C^∞ . De plus, elle est partout de rang 4 et sa réciproque est continue. Pour le vérifier, nous allons localement en construire un inverse à droite ψ de classe C^∞ dans un ouvert de \mathbf{R}^6 : comme $\psi \circ \varphi_1$ est l'identité, ψ prolonge la réciproque de φ_1 à un ouvert de \mathbf{R}^6 de sorte que cette réciproque est continue (par la Proposition 36, page 76) et, comme $\psi_* \circ \varphi_{1*}$ est aussi l'identité, φ_{1*} est injectif.

Soit donc $(a, b, c, d, e, f) \in M \cap \Omega_1$. Un des nombres a, b, c n'est pas nul. Supposons, par exemple, que ce soit a . Alors

$$\psi : (x^1, x^2, x^3, x^4, x^5, x^6) \mapsto \left(x^1, x^2, x^3, \frac{x^4}{x^1} \right)$$

qui est défini dans l'ensemble des points de \mathbf{R}^6 dont la première composante n'est pas nulle, convient⁷.

Le second ouvert paramétré de M est celui formé des éléments dont la seconde ligne n'est pas nulle. Avec des notations évidentes, il s'écrit $M \cap \Omega_2$ et il est paramétré par

$$\varphi_2 : (x, y, z, t) \mapsto (tx, ty, tz, x, y, z)$$

qui est défini dans le même ensemble que φ_1 .

L'intersection $M \cap \Omega_1 \cap \Omega_2$ est paramétrée par les restrictions de φ_1 et φ_2 à $\mathbf{R}^3 \setminus \{0\} \times \mathbf{R} \setminus \{0\}$. Dans cet ouvert, on a $\varphi_2 = \varphi_1 \circ \theta$ où

$$\theta : (x, y, z, t) \mapsto \left(tx, ty, tz, \frac{1}{t} \right)$$

est son propre inverse.

4.2. Equations cartésiennes. Nous allons donner trois équations cartésiennes à l'aide desquelles on peut décrire la totalité de M . Cette fois, ce sont les colonnes non nulles qui vont déterminer les ouverts décrits par ces équations. Nous noterons ainsi Ω'_i l'ouvert de \mathbf{R}^6 formé des points correspondants aux matrices dont la i -ème colonne n'est pas nulle. Désignons alors par f_1, f_2, f_3 les composantes du produit vectoriel

$$(x^1, x^2, x^3) \wedge (x^4, x^5, x^6)$$

à savoir

$$f_1 = x^2x^6 - x^3x^5, \quad f_2 = x^3x^4 - x^1x^6, \quad f_3 = x^1x^5 - x^2x^4$$

Comme le produit vectoriel est orthogonal à ses facteurs, nous avons⁸

$$\begin{cases} x^1f_1 + x^2f_2 + x^3f_3 = 0 \\ x^4f_1 + x^5f_2 + x^6f_3 = 0 \end{cases}$$

En conséquence, dans Ω'_1 , si $f_2 = f_3 = 0$ alors $f_1 = 0$ car x^1 ou x^4 n'est pas nul. Autrement dit, $M \cap \Omega'_1$ est l'ensemble des zéros de

$$F_1 := (f_2, f_3)$$

7. Pour $b \neq 0$, il faut remplacer x^1 par x^2 et x^4 par x^5 dans l'expression de ψ , et pour $c \neq 0$, x^1 par x^3 et x^4 par x^6 . Le lecteur voit-il pourquoi ?

8. On vérifie directement ces identités très facilement mais, entre autre, c'est pour expliquer leur origine que j'invoque le produit vectoriel.

Or

$$\partial F_1 = \begin{pmatrix} -x^6 & 0 & x^4 & x^3 & 0 & -x^1 \\ x^5 & -x^4 & 0 & -x^2 & x^1 & 0 \end{pmatrix}$$

est de rang 2 dans Ω'_1 . Au total, (Ω'_1, F_1) est une équation cartésienne de $M \cap \Omega'_1$. On vérifie de façon analogue que (Ω'_2, F_2) et (Ω'_3, F_3) , où

$$F_2 = (f_3, f_1) \quad \& \quad F_3 = (f_1, f_2)$$

sont des équations cartésiennes de $M \cap \Omega'_2$ et $M \cap \Omega'_3$ respectivement.

CHAPITRE 5

Espace tangent

1. Espace tangent

Un *vecteur tangent* à une partie $V \subset \mathbf{R}^n$ en $a \in V$ est le vecteur tangent en s d'une courbe paramétrée (I, γ) de \mathbf{R}^n telle que $\gamma(I) \subset V$ et telle que $\gamma(s) = a$ ¹.

L'ensemble des vecteurs tangent à V en a est noté $\overrightarrow{T_a V}$. L'*espace tangent* à V en a est l'ensemble $a + \overrightarrow{T_a V}$.

PROPOSITION 39. Soient une variété plongée $V \subset \mathbf{R}^n$, un paramétrage (U, φ) , $u \in U$ et une équation cartésienne (Ω, F) d'un voisinage ouvert de $a = \varphi(u)$ dans V . On a

$$\overrightarrow{T_a V} = \text{im} \varphi_{*u} = \ker F_{*a}.$$

En particulier, $T_a V$ est une sous-variété affine de \mathbf{R}^n , de dimension $p = \dim_a V$.

DÉMONSTRATION. Soit $v \in \mathbf{R}^p$. Pour t assez petit, $u + tv \in U$ et $t \mapsto \varphi(u + tv)$ est une courbe définie au voisinage de 0, tracée sur V et passant par a en $t = 0$. Par conséquent

$$\varphi_{*u} v = \frac{d}{dt} \varphi(u + tv)|_{t=0} \in \overrightarrow{T_a V}$$

Soit alors $\mathbf{h} \in \overrightarrow{T_a V}$ tangent à une courbe (I, γ) de V passant par a en $t = s$. Pour t assez voisin de s , $\gamma(t) \in \Omega$. De là, $F \circ \gamma = 0$ dans un voisinage de s . En dérivant cette relation par rapport à t en $t = s$, il vient $F_{*a} \mathbf{h} = 0$. Au total

$$\text{im} \varphi_{*u} \subset \overrightarrow{T_a V} \subset \ker F_{*a}.$$

Les deux membres extrêmes de ces inclusions sont des sous-espaces vectoriels de dimensions p de \mathbf{R}^n . Il sont donc égaux. \square

Le paramétrage (U, φ) fournit donc une base de $\overrightarrow{T_a V}$, à savoir

$$(\partial_1 \varphi(u), \dots, \partial_p \varphi(u)) \quad (u = \varphi^{-1}(a))$$

1. On dit alors que γ est une courbe *de* ou *tracée sur* V et *passant par* a en $t = s$.

Considérons par exemple l'application

$$(22) \quad \varphi : (\lambda, \mu) \in]0, \pi[\times]0, 2\pi[\mapsto (\sin \lambda \cos \mu, \sin \lambda \sin \mu, \cos \lambda) \in \mathbf{R}^3$$

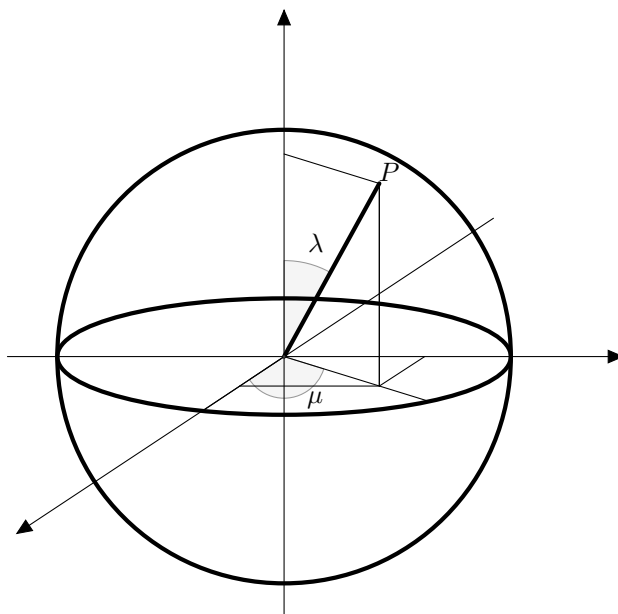


FIGURE 35. Longitude (μ) et colatitude (λ)

Son image est l'ouvert de la sphère

$$S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$$

obtenu en la privant du méridien passant par les points $(1, 0, 0)$ et $(0, 0, \pm 1)$. On peut vérifier que φ est un paramétrage de cet ouvert². En tout point $P = \varphi(\lambda, \mu)$, les dérivées partielles

$$\begin{cases} \partial_\lambda \varphi = (\cos \lambda \cos \mu, \cos \lambda \sin \mu, -\sin \lambda) \\ \partial_\mu \varphi = \sin \lambda (-\sin \mu, \cos \mu, 0) \end{cases}$$

forment une base de l'espace tangent à S^2 en P . On observe que ces vecteurs sont perpendiculaires. De plus, $\partial_\lambda \varphi$ est normé et tangent au méridien passant par P . Quant à $\partial_\mu \varphi$, il est tangent au parallèle passant par P , parallèle le long duquel il est de longueur constante $\sin \lambda$.

². Le lecteur est invité à le faire.

L'équation cartésienne (Ω, F) donne quant à elle une base du complément orthogonal $\overrightarrow{T_a V}^\perp$ du sous vectoriel directeur de $T_a V$,

$$(\text{grad}_a F^1, \dots, \text{grad}_a F^{n-p})$$

La variété affine $a + \overrightarrow{T_a V}^\perp$ s'appelle *espace normal* à V en a .

Pour une hypersurface, l'hyperplan tangent en a admet ainsi l'équation cartésienne

$$\sum_i (x^i - a^i) \partial_i F(a) = 0.$$

Par exemple, la surface de \mathbf{R}^3 d'équation

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad (a, b, c > 0)$$

est un *hyperboloïde à une nappe*. Le gradient de son équation en un de ses points P_0 , de coordonnées (x_0, y_0, z_0) , est

$$2 \left(\frac{x_0}{a^2}, \frac{y_0}{b^2}, -\frac{z_0}{c^2} \right)$$

Par conséquent, son plan tangent en P admet l'équation

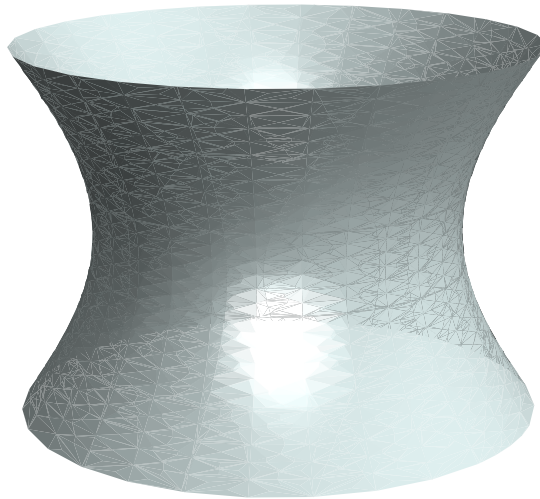


FIGURE 36. Un hyperboloïde à une nappe

$$\frac{x_0 x}{a^2} + \frac{y_0 y}{b^2} - \frac{z_0 z}{c^2} = 1$$

Beaucoup de sortes de surfaces contiennent des droites. C'est en particulier le cas des *cylindres* qui, par définition, sont des unions de

droites parallèles et des cônes, union de droites passant par un même point, appelé *sommet* du cône.

On montrera plus loin que par tout point d'un hyperboloïde à une nappe, il passe exactement deux droites qui sont contenues dans l'hyperboloïde. Il en va de même pour un paraboloidé hyperbolique. Il s'agit d'une surface à laquelle on peut donner une équation de la forme

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2pz \quad (a, b, p > 0)$$

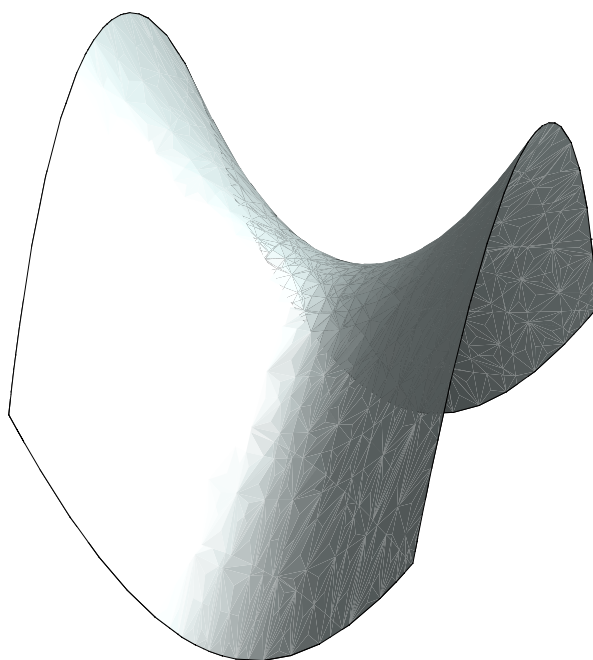


FIGURE 37. Paraboloidé hyperbolique

Voici alors une remarque intéressante qu'on peut faire à propos des droites contenues dans une variété plongée.

PROPOSITION 40. *Si une variété plongée V contient une droite \mathcal{D} alors le plan tangent à V en chaque point $a \in \mathcal{D}$ contient \mathcal{D} .*

DÉMONSTRATION. La droite est l'image d'une courbe tracée sur V . Les vecteurs directeurs de \mathcal{D} sont donc tangents à V en chaque point \mathcal{D} . Par conséquent, si $a \in \mathcal{D}$, alors $\mathcal{D} \subset T_a V$ car \mathcal{D} est parallèle à $T_a V$ et le rencontre en a . \square

Il résulte par exemple de cette propriété que le plan tangent en un point d'un hyperboloïde à une nappe ou d'un paraboloidé hyperbolique

est le plan déterminé par les deux droites contenues dans la surface et qui passent par ce point.

2. La règle des multiplicateurs de Lagrange

PROPOSITION 41. *Soient une variété plongée V dans \mathbf{R}^n , $a \in V$, des équations cartésiennes $F : \Omega \rightarrow \mathbf{R}^q$ de V au voisinage de a et une fonction $f : \Omega \rightarrow \mathbf{R}$, de classe C^1 dans Ω . Si $f|_V$ admet un extremum local en a , alors il existe des nombres λ_i tels que*

$$\text{grad}_a f = \sum_{i=1}^q \lambda_i \text{grad}_a F^i$$

DÉMONSTRATION. Supposons que $f|_V$ admette un extremum local en a . Nous allons voir que $\text{grad}_a f$ est alors orthogonal à $\overrightarrow{T_a V}$ ce qui nous permettra de conclure puisque les $\text{grad}_a F^i$ forment une base de $\overrightarrow{T_a V}^\perp$. Soient $\mathbf{h} \in \overrightarrow{T_a V}$ et une courbe (I, γ) tracée sur V , passant par a et tangente à \mathbf{h} en $t = t_0$. La fonction $t \mapsto f \circ \gamma(t)$ admet un extremum local en $t = t_0$. Par conséquent, sa dérivée en $t = t_0$ est nulle. Donc

$$\text{grad}_a f \cdot \mathbf{h} = f_{*a} h = \left. \frac{df \circ \gamma}{dt} \right|_{t=t_0} = 0$$

□

Voici quelques exemples d'utilisation de ce résultat appelé *règle des multiplicateurs de Lagrange*.

2.1. Distance d'un point à une variété affine. Pour rappel, une variété affine $V \subset \mathbf{R}^n$ de dimension p est l'ensemble des solutions d'un système d'équation du premier degré $Ax + b = 0$, où $b \in \mathbf{R}^{n-p}$ et où A est une matrice à $(n-p)$ lignes et n colonnes, de rang $n-p$. L'application $x \mapsto Ax + b$ est alors une équation cartésienne de V au sens de ce texte. En particulier, les gradients de ses composantes, à savoir les lignes de A , constituent une base de l'espace des vecteurs orthogonaux à V .

PROPOSITION 42. *Soient une variété affine $V \subset \mathbf{R}^n$ de dimension p d'équation $Ax + b = 0$, et un point $u \in \mathbf{R}^n$. La distance de u à V est réalisée en un seul point, la projection orthogonale*

$$a = u - \tilde{A}(A\tilde{A})^{-1}(Au + b)$$

de u sur V . En particulier

$$d(u, V) = \|\tilde{A}(A\tilde{A})^{-1}(Au + b)\|$$

DÉMONSTRATION. La distance d'un point à un fermé est toujours réalisée en un point au moins de celui-ci. Pour détecter un tel point, appliquons la règle des multiplicateurs de Lagrange à la fonction

$$f : x \mapsto d(u, x)^2 = \|x\|^2 - 2u \cdot x + \|u\|^2$$

Si x est un point stationnaire de la restriction de f à V , il existe $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_{n-p})$ tel que

$$x - u = \frac{1}{2} \text{grad}_x f = \tilde{A} \tilde{\lambda}$$

Comme $x \in V$, il faut avoir $Ax + b = 0$. Cela donne³

$$\tilde{\lambda} = -(A\tilde{A})^{-1}(Au + b)$$

Par conséquent, il n'y a qu'un point stationnaire qui est donc nécessairement le point en lequel f est minimum sur V . C'est le point a décrit dans l'énoncé. Comme $u - a$ est une combinaison linéaire des colonnes de \tilde{A} , c'est la projection orthogonale de u sur V car celles-ci constituent une base du complément orthogonal du sous-espace vectoriel directeur de V . \square

Quand V est un hyperplan, il n'y a qu'une équation cartésienne du premier degré et A se réduit à une ligne (a_1, \dots, a_n) . On retrouve alors l'expression familière de la distance d'un point u à un hyperplan :

$$d(u, V) = \frac{|a_1 u_1 + \dots + a_n u_n + b|}{\sqrt{a_1^2 + \dots + a_n^2}}$$

et l'on obtient une expression vectorielle de la projection orthogonale sur V :

$$u \mapsto u - \frac{a_1 u_1 + \dots + a_n u_n + b}{a_1^2 + \dots + a_n^2} (a_1, \dots, a_n)^\sim$$

2.2. Fonctions homogènes. Soit une fonction f homogène de poids s^4 . Si elle est continue, il existe des nombre K et L tels que

$$\forall x \in \mathbf{R}^n \setminus \{0\} : K \|x\|^s \leq f(x) \leq L \|x\|^s$$

En effet, f est alors borné sur S^{n-1} , disons par K et L . Par homogénéité, si $x \neq 0$, on peut donc écrire

$$K \|x\|^s \leq f(x) = \|x\|^s f\left(\frac{x}{\|x\|}\right) \leq L \|x\|^s$$

3. La matrice $A\tilde{A}$ est non singulière car A est de rang $n - p$.

4. Cela signifie que $f(tx) = t^s f(x)$ pour tout $t > 0$ et tout x appartenant au domaine de f , que nous supposons être $\mathbf{R}^m \setminus \{0\}$.

Inégalité entre moyennes géométrique et arithmétique. Considérons par exemple la fonction $f : (x^1, \dots, x^n) \mapsto x^1 \cdots x^n$, homogène de poids n . Si a est un point stationnaire de f sur S^{n-1} , il existe λ tel que

$$\partial_i f(a) = a^1 \cdots \hat{a}^i \cdots a^n = \lambda a^i, \quad i = 1, \dots, n$$

(l'accent circonflexe indique l'omission.) Il est facile de vérifier que les points stationnaires dont aucune composante n'est nulle (les autres sont sans importance en l'occurrence car f s'y annule) sont les points

$$\frac{1}{\sqrt{n}}(\pm 1, \dots, \pm 1)$$

où les signes sont choisis arbitrairement pour chaque composante. Le minimum et le maximum absolus de f sont donc $\pm n^{-n/2}$. Ainsi,

$$-n^{-n/2} \left(\sum (x^i)^2 \right)^{n/2} \leq x^1 \cdots x^n \leq n^{-n/2} \left(\sum (x^i)^2 \right)^{n/2}$$

Les $(x^i)^2$ représentant des nombres non négatifs u_i arbitraires, il vient en élevant au carré et en extrayant la racine n -ième

$$\sqrt[n]{u_1 \cdots u_n} \leq \frac{u_1 + \cdots + u_n}{n}.$$

En pistant les calculs, on voit en outre que l'égalité est réalisée si et seulement si les u_i sont égaux⁵.

Le quotient de Rayleigh. Soit un produit scalaire $g : \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$. Une application bilinéaire symétrique $\varpi : \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ s'écrit toujours à l'aide de g , de façon unique, sous la forme

$$(x, y) \mapsto \varpi(x, y) = g(Ax, y)$$

où A est une application linéaire symétrique (i.e. $g(Ax, y) = g(x, Ay)$). Nous la noterons A_ϖ . La proposition suivante est exploitée pour calculer numériquement les valeurs propres des matrices symétriques. Le quotient $\varpi(x, x)/g(x, x)$ s'appelle le *quotient de Rayleigh* de ϖ et de g .

PROPOSITION 43. *Le quotient*

$$x \mapsto \frac{\varpi(x, x)}{g(x, x)}$$

admet sur $\mathbf{R}^n \setminus \{0\}$ un maximum et un minimum absolus. Ce sont respectivement la plus petite et la plus grande des valeurs propres de A_ϖ et sont atteints en les vecteurs propres correspondants.

5. Cette inégalité classique est plus simple à démontrer grâce aux fonctions convexes.

DÉMONSTRATION. Quitte à changer de base, nous pouvons supposer que g est le produit scalaire usuel de \mathbf{R}^n . La fonction $x \mapsto \varpi(x, x)/g(x, x)$ étant homogène de degré 0, nous pouvons la restreindre à la sphère S^{n-1} . Tout revient donc à étudier les extrema éventuels de $f : x \mapsto \varpi(x, x)$ sur celle-ci. La sphère étant compacte et f y étant continu, nous sommes certains qu'il y atteint ses valeurs extrêmes. D'après la règle des multiplicateurs de Lagrange, si $a \in S^{n-1}$ est un des points stationnaires de f , il existe $\lambda \in \mathbf{R}$ tel que

$$A_{\varpi}a = \frac{1}{2}\text{grad}_a f = \frac{1}{2}\lambda\text{grad}_a(\|x\|^2 - 1) = \lambda a.$$

Les extrema de f sont donc atteints en des vecteurs propres a de A_{ϖ} . En un tel point, relatif à la valeur propre λ ,

$$f(a) = g(A_{\varpi}a, a) = \lambda\|a\|^2 = \lambda$$

□

2.3. Les lois de l'optique géométrique. Nous supposons que la lumière se déplace en minimisant le temps de parcours et que, de plus, dans un milieu homogène, sa vitesse est constante. Dans un tel milieu, ses trajectoires sont donc des segments de droite⁶. La question est de savoir comment est modifiée sa trajectoire lorsqu'elle traverse la surface Σ séparant deux milieux dans lesquels elle circule à des vitesses différentes (lois de la réfraction) ou lorsqu'elle se réfléchit en un point de Σ (lois de la réflexion). Dans le premier cas, un rayon lumineux issu d'une source ponctuelle s placée dans le premier milieu traverse Σ en a et poursuit sa trajectoire jusqu'en un point cible c du second. Dans le second, a est le point en lequel le rayon se réfléchit vers la cible et celle-ci est dans le même milieu que la source. Nous supposons que Σ est une variété plongée (dans \mathbf{R}^3) et nous notons F une équation cartésienne la définissant dans un voisinage du *point d'incidence* a .

Dans l'un et l'autre des cas, le temps mis pour joindre s et c via un point $x \in \Sigma$ est

$$t(x) = \frac{1}{v_1}\|sx\| + \frac{1}{v_2}\|xc\|$$

où v_1 est la vitesse de la lumière avant l'incidence et v_2 après (on a donc $v_1 = v_2$ en cas de réflexion). Par hypothèse, $t|_{\Sigma}$ est stationnaire en a . Par conséquent, d'après la règle des multiplicateurs de Lagrange, il existe un nombre λ tels que

$$\text{grad}_a t = \lambda \text{grad}_a F$$

6. En admettant que dans un espace euclidien la droite minimise la distance entre deux points quelconques, ce que nous n'avons pas établi ici.

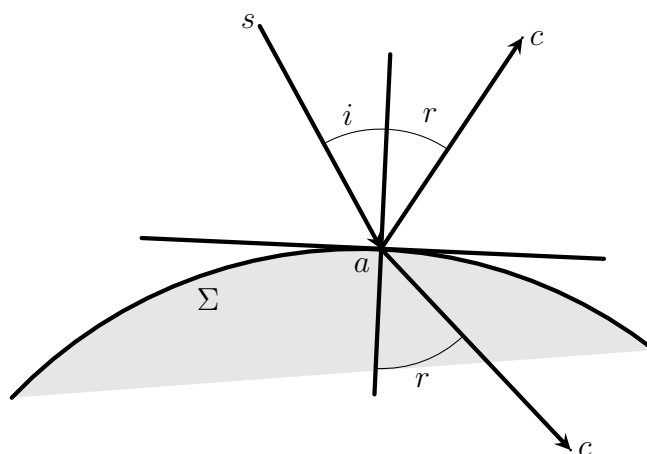


FIGURE 38

Ceci s'écrit

$$\frac{1}{v_1} \frac{\vec{s}\vec{a}}{\|s\vec{a}\|} - \frac{1}{v_2} \frac{\vec{a}\vec{c}}{\|ac\|} - \lambda \text{grad}_a F = 0$$

Comme $\text{grad}_a F$ est la direction normale au plan tangent de Σ en a , nous en déduisons la première loi :

Le rayon incident, sa , le rayon réfracté (ou réfléchi), ac , et la normale au point d'incidence à la surface de séparation (au miroir), Σ , sont dans un même plan.

Ce plan coupe le plan tangent à la surface Σ selon une droite. En projetant scalairement l'égalité précédente sur le vecteur unité normé \mathbf{u} de celle-ci orienté dans le sens de déplacement de la lumière, on obtient la seconde loi :

Les angles d'incidence et de réflexion⁷ sont égaux tandis que les sinus des angles de réfraction et d'incidence sont dans le rapport des vitesses de propagation dans les milieux successivement traversés :

$$\frac{\sin r}{\sin i} = \frac{v_2}{v_1}$$

⁷. Les angles d'incidence, etc. sont ceux que font les rayons correspondants avec la normale de Σ au point d'incidence.

3. Les quadriques

3.1. Premières propriétés. Une *quadrique* de \mathbf{R}^n est l'ensemble des points de \mathbf{R}^n annulant un polynôme du second degré. Un tel polynôme s'écrit toujours sous la forme $F(x) = Ax.x + 2b.x + c$, où A est une application linéaire symétrique (c'est-à-dire telle que $Ax.y = x.Ay$ pour tous $x, y \in \mathbf{R}^m$), non nulle, $b \in \mathbf{R}^n$ et $c \in \mathbf{R}$. On a $\text{grad}_x F = 2(Ax + b)$.

PROPOSITION 44. *Les points a vérifiant $Aa + b = 0$ sont des centres de symétrie de la quadrique $Q = \{x \in \mathbf{R}^n \mid Ax.x + 2b.x + c = 0\}$.*

DÉMONSTRATION. Soit $x \in Q$. Son symétrique par rapport à a est $2a - x$. On a

$$\begin{aligned} F(2a - x) &= A(2a - x).(2a - x) + 2b.(2a - x) + c \\ &= 4(Aa + b).(a - x) + F(x) \\ &= 0. \quad \square \end{aligned}$$

En raison de cette propriété, on dit que les solutions de $Aa + b = 0$ sont des *centres* de la quadrique Q . Il en existe si $\text{rang}(A) = \text{rang}((A \ b))$.

Les ellipses, les hyperboles ont exactement un centre chacune. Les paraboles en sont dépourvues. Les ellipsoïdes et les hyperboloïdes ont également un centre chacun, les paraboloides en sont dépourvus. Les cylindres elliptiques ou hyperboliques ont une droite de centre, etc.⁸

Une quadrique dont on retire les centres éventuels est donc une variété plongée de codimension 1.

LEMME 45. *Une droite qui rencontre une quadrique en trois points distincts est tout entière contenue dans celle-ci.*

DÉMONSTRATION. Les points d'intersection de la droite passant par $a \in \mathbf{R}^n$ et parallèle à u , avec la quadrique $Q = \{x \in \mathbf{R}^n \mid Ax.x + 2b.x + c = 0\}$ sont les points $a + tu$, où t décrit les solutions de l'équation

$$A(a + tu).(a + tu) + 2b.(a + tu) + c = 0,$$

c'est-à-dire

$$(Au.u)t^2 + [2(Aa + b).u]t + Aa.a + 2b.a + c = 0.$$

Si elle n'est pas identiquement nulle, celle-ci admet au plus deux solutions. \square

Une quadrique qui contient un de ses centres est un cône dont celui-ci est un sommet.

8. Ces surfaces sont présentées plus bas.

Un *cône* est une union de droites ayant un point commun, appelé *sommet* du cône. Ces droites sont les *génératrices* du cône. L'ensemble des solutions d'un système d'équations homogènes $F : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^q$ est un cône de \mathbf{R}^n dont l'origine est un sommet. En effet, s'il contient a , il contient aussi les multiples de a , en raison de l'homogénéité des équations. Un cône peut avoir plusieurs sommets. Par exemple, l'union de deux plans sécants de \mathbf{R}^3 est un cône dont les sommets sont les points de l'intersection des plans.

PROPOSITION 46. *Soit un centre a d'une quadrique Q . Si $a \in Q$, alors toute droite qui passe par a et qui rencontre Q en un autre point est tout entière contenue dans Q .*

DÉMONSTRATION. En effet, a étant un centre de symétrie de Q , une droite passant par a et rencontrant Q en un autre point passe aussi par un troisième point de Q , son symétrique par rapport à a . \square

A cause de cette propriété, les centres d'une quadrique qui lui appartiennent sont appelés *points doubles*.

Pour la quadrique $Q = \{x \in \mathbf{R}^n \mid Ax.x + 2b.x + c = 0\}$ ce sont les solutions du système d'équations

$$\begin{aligned} Ax + b &= 0 \\ b.x + c &= 0 \end{aligned}$$

S'il en existe, le déterminant Δ de

$$\begin{pmatrix} A & b \\ \tilde{b} & c \end{pmatrix}$$

est nul. Les coniques pour lesquelles ceci est vérifié sont des couples de droites. Lorsqu'elles sont sécantes, elles se coupent en un point double. Lorsqu'elles sont confondues, tous leurs points sont doubles. Dans \mathbf{R}^3 , deux plans sécants ont une droites de points doubles, etc.

Il peut arriver que Δ soit nul sans que Q ait des points doubles. C'est le cas par exemple de deux droites parallèles.

3.2. Classification des quadriques de \mathbf{R}^3 . Nous n'aborderons que très succinctement la classification des quadriques⁽⁹⁾. L'application A étant symétrique, on peut trouver une base dans laquelle elle est

9. Par exemple, nous nous limiterons à une classification affine.

représentée par une matrice diagonale. Ainsi, un changement linéaire de coordonnées donne à Q une équation de la forme

$$(23) \quad \sum_{i=1}^m \alpha_i (x^i)^2 + 2 \sum_{i=1}^m \beta_i x^i + \gamma = 0$$

que des changements de coordonnées affines supplémentaires permettent de simplifier jusqu'à l'obtention d'une *forme canonique* caractéristique de la quadrique.

Si, dans (23), α_i est non nul, alors on peut supposer que le coefficient $\beta_i = 0$.

En effet, les termes de (23) où figure x^i s'écrivent

$$\alpha_i (x^i)^2 + 2\beta_i x^i = \alpha_i \left(x^i + \frac{\beta_i}{\alpha_i}\right)^2 - \frac{\beta_i^2}{\alpha_i}$$

Le changement de coordonnées dans lequel x^i est remplacé par $x^i + \frac{\beta_i}{\alpha_i}$, une translation, annule β_i , modifie γ mais ne change aucun autre coefficient de (23).

Ceci nous ramène à une équation du type

$$(24) \quad \sum_{i \in I} \alpha_i (x^i)^2 + 2 \sum_{j \in J} \beta_j x^j + \gamma = 0$$

dans laquelle aucun des α_i, β_j n'est nul et les ensembles d'indices $I, J \subset \{1, \dots, n\}$ sont disjoints.

Le premier n'est pas vide car $A \neq 0$. Quitte à permuter les x^i ¹⁰, on peut donc supposer que $I = \{1, \dots, p\}$. Le nombre p est le rang de A . Si $J \neq \emptyset$, alors on peut faire en sorte que $J = \{p+1\}$ et $\gamma = 0$.

De fait, si $\beta_k \neq 0$, le changement de coordonnées dans lequel x^k est remplacé par

$$2 \sum_{j \in J} \beta_j x^j + \gamma$$

substitue x^k à ces termes dans (24). Au prix d'une permutation des coordonnées, on peut de plus supposer que $k = p+1$.

En fin de compte, on est ramené à trois sortes d'équations. Elles décrivent trois familles disjointes de quadriques. La première correspond à $J = \emptyset$ et $\gamma \neq 0$ et contient les quadriques ayant un centre et pas de point double. La deuxième correspond à $J = \{p+1\}$ et contient les quadriques n'ayant pas de centre. La dernière contient les quadriques ayant un point double. Elle est caractérisée par $J = \emptyset$ et $\gamma = 0$.

¹⁰ C'est un changement de coordonnées supplémentaire...

Un *cylindre* est une union de droites parallèles à une direction donnée, ses *génératrices*. Les solutions d'un système d'équations $F : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^q$ ne dépendant pas de variables $x^i, i \in K$, forment un cylindre admettant des génératrices parallèles à toute combinaison linéaire \mathbf{u} des $\vec{e}_i, i \in K$, car, si $F(a) = 0$ alors $F(a + t\mathbf{u}) = 0$ pour tout t .

Une quadrique Q pour laquelle $p < n$ et $J = \emptyset$, ou $p < n - 1$ et $J \neq \emptyset$ est donc un cylindre. Le nombre $n - p$, ou $n - p - 1$ selon les cas est la dimension de l'espace des *directions cylindriques* de Q . Ce sont les directions auxquelles sont parallèles des génératrices de Q .

Dans \mathbf{R}^3 , si on s'en tient aux quadriques non vides qui ne sont ni des cônes ni des cylindres, alors il reste cinq sortes de quadriques (dont deux ont été rencontrées plus haut).

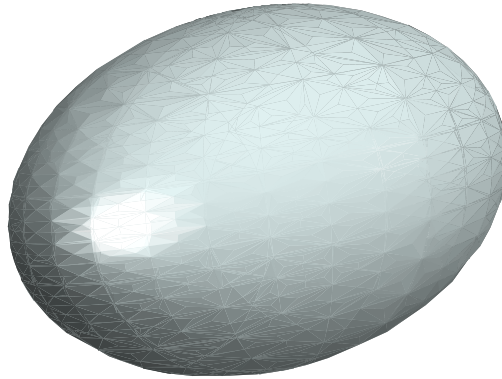


FIGURE 39. Ellipsoïde

Les trois premières sont des quadriques à centre : ellipsoïde, hyperboloïde à une nappe et hyperboloïde à deux nappes. Elles admettent les équations canoniques respectives

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \\ \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \end{cases}$$

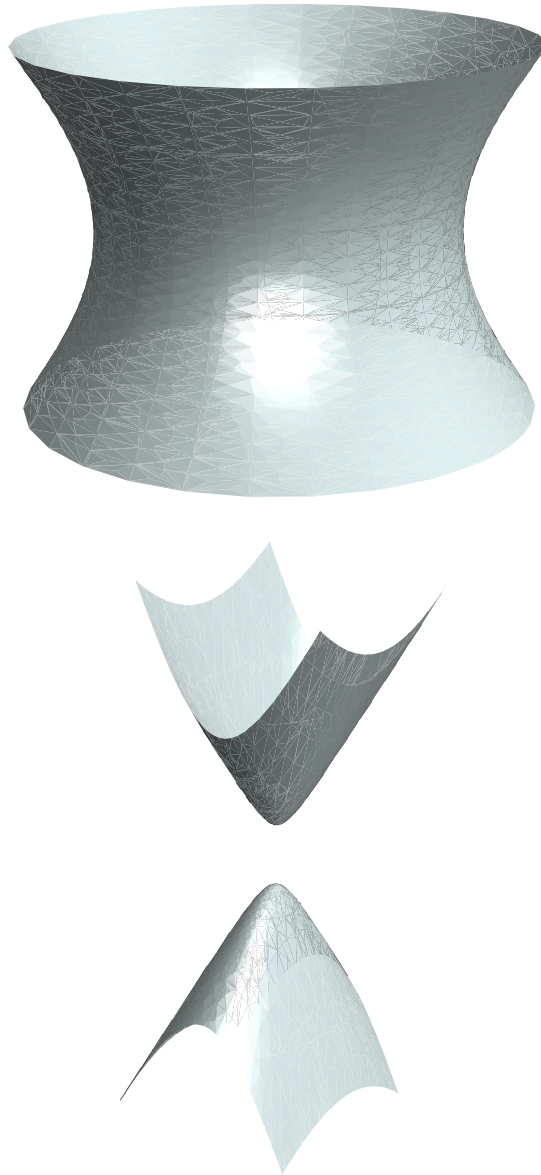


FIGURE 40. Hyperboloïdes à une et deux nappes

Les deux autres sont des quadriques sans centre : parabolôïde elliptique et parabolôïde hyperbolique dont les équations canoniques sont

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2pz \\ \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2pz \end{cases}$$

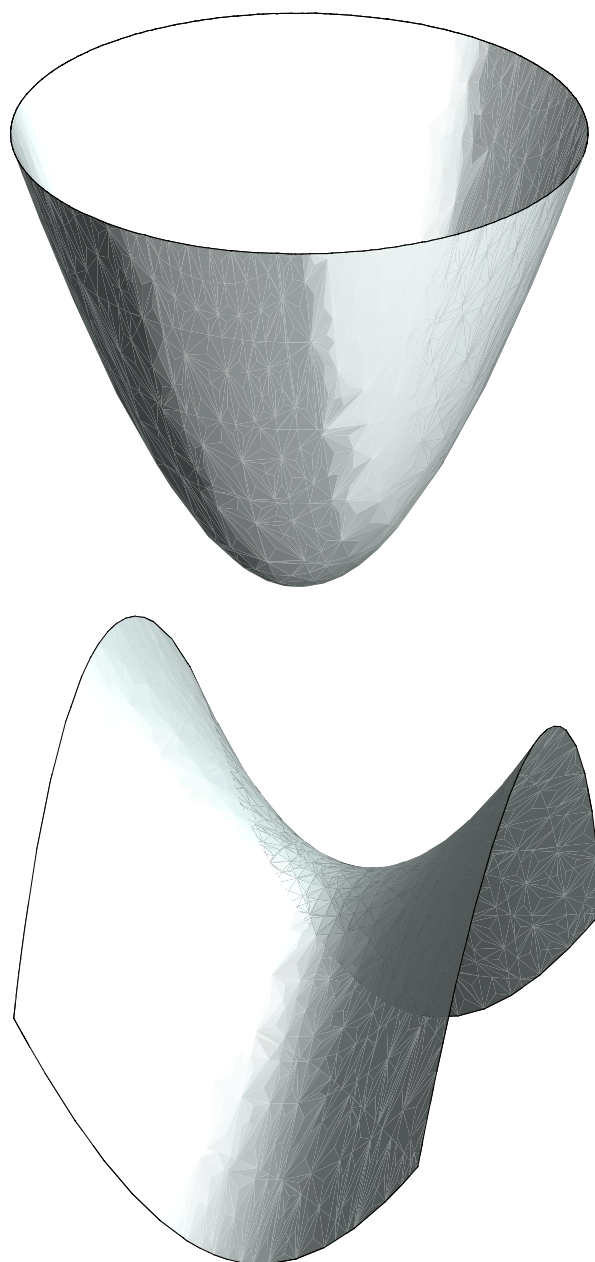


FIGURE 41. Paraboloïdes elliptique et hyperbolique

respectivement. Dans ces expressions, a, b, c, p sont des nombres positifs.

3.3. L'hyperboloïde à une nappe et le paraboloïde hyperbolique comme surfaces réglées. Une surface est *règlée* si elle est

union de droites, telle un plan, un cône ou un cylindre. Comme annoncé plus haut, un hyperboloïde à une nappe et un parabolôïde hyperbolique sont également des surfaces réglées, ce que nous allons vérifier à présent.

L'hyperboloïde à une nappe. L'intersection de l'hyperboloïde H_1 d'équation

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

avec le plan d'équation $z = 0$, appelée *ellipse de gorge*, admet la description paramétrique

$$\gamma(t) = (a \cos t, b \sin t, 0)$$

Une droite contenue dans l'hyperboloïde la coupe nécessairement en un point. En effet, une telle droite ne saurait être parallèle au plan d'équation $z = 0$ car un plan parallèle à ce dernier coupe H_1 selon une ellipse. Comme on le voit facilement, la droite passant par $\gamma(t)$ et parallèle à la direction (u, v, w) est contenue dans H_1 si, et seulement si,

$$\begin{cases} \frac{u^2}{a^2} + \frac{v^2}{b^2} - \frac{w^2}{c^2} = 0 \\ \frac{u}{a} \cos t + \frac{v}{b} \sin t = 0 \end{cases}$$

ce qui, à des multiples près, nous donne deux directions indépendantes : $(a \sin t, -b \cos t, \pm c)$, et donc deux familles de droites

$$\lambda \mapsto (a(\cos t + \lambda \sin t), b(\sin t - \lambda \cos t), \pm \lambda c)$$

contenues dans l'hyperboloïde. J'affirme en outre que *par chaque point* (x_0, y_0, z_0) *de* H_1 *passent une et une seule droite de chaque famille.* Autrement dit, il existe un seul t (à des multiples de 2π près) et un seul λ tels que

$$\begin{cases} a(\cos t + \lambda \sin t) = x_0 \\ b(\sin t - \lambda \cos t) = y_0 \\ \pm \lambda c = z_0 \end{cases}$$

Après calculs, on obtient

$$\begin{cases} \cos t = \frac{1}{1+\lambda^2} \frac{x_0}{a} - \frac{\lambda}{1+\lambda^2} \frac{y_0}{b} \\ \sin t = \frac{\lambda}{1+\lambda^2} \frac{x_0}{a} + \frac{1}{1+\lambda^2} \frac{y_0}{b} \\ \lambda = \pm \frac{z_0}{c} \end{cases}$$

La seule condition de compatibilité de ce système se résume au fait que la somme des carrés des membres de droites des deux premières équations vaut 1. C'est bien le cas car, après calculs, on constate que cette

condition signifie que (x_0, y_0, z_0) vérifie l'équation de l'hyperboloïde, ce qui permet de conclure.

Le parabolöide hyperbolique. L'intersection du parabolöide hyperbolique PH d'équation

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2pz$$

avec le plan d'équation $y = 0$ est une parabole admettant le paramétrage

$$\gamma(t) = \left(at, 0, \frac{t^2}{2p} \right)$$

Une droite contenue dans le parabolöide coupe nécessairement cette parabole car les plans parallèles au plan d'équation $y = 0$ coupent PH selon des paraboles. En procédant comme plus haut à propos de l'hyperboloïde, on voit que, cette fois, une droite passant par $\gamma(t)$ et parallèle à une direction (u, v, w) est incluse à PH si, et seulement si, celle-ci est proportionnelle à l'une des directions

$$\left(a, \pm b, \frac{t}{p} \right)$$

Il y a donc de nouveau deux familles de droites incluses à PH :

$$\lambda \mapsto \left(a(t + \lambda), \pm \lambda b, \frac{t}{2p}(t + 2\lambda) \right)$$

et, en procédant comme plus haut avec l'hyperboloïde, le lecteur vérifiera facilement que par chaque point de PH , il passe exactement une droite de chaque famille.

CHAPITRE 6

La première forme fondamentale des surfaces

1. Préambule

Nous allons à présent étudier quelques propriétés des hypersurfaces de \mathbf{R}^3 , c'est-à-dire ses variétés plongées de dimension 2, plus communément appelées *surfaces*.

Soit une surface V et un de ses points a .

Il existe un ouvert ω de V contenant a admettant un paramétrage $\varphi : U \subset \mathbf{R}^2 \rightarrow \omega$. Si $V = \omega$, on dit que V est une *portion régulière de surface*¹. Ici, nous étudions des surfaces un peu plus générales puisque ce sont des unions de portions régulières de surfaces. Nous noterons usuellement u, v les arguments de φ ². Les dérivées partielles $\partial_u \varphi$ et $\partial_v \varphi$ forment une base du sous-espace vectoriel directeur de l'espace tangent à V en $\varphi(u, v)$:

$$\overrightarrow{T_{\varphi(u,v)}V} = \langle \partial_u \varphi, \partial_v \varphi \rangle$$

Quitte à restreindre ω , on peut aussi supposer qu'il est défini par une équation cartésienne $F : \Omega \rightarrow \mathbf{R}$:

$$\omega = \{x \in \Omega \mid F(x) = 0\}$$

En tout point $x \in \omega$, le gradient de celle-ci est une base de l'espace normal à la surface en x , qui est une droite :

$$\overrightarrow{T_x V}^\perp = \mathbf{R} \operatorname{grad}_x F$$

1.1. Expression locale d'une courbe de V . Considérons une courbe (I, γ) de V passant par a en $t = s$. Par continuité, il existe un intervalle ouvert J contenant s tel que $\gamma(J) \subset \omega$. On a alors

$$\gamma|_J = \varphi \circ \xi$$

où

$$\forall t \in J, \quad \xi(t) = \varphi^{-1}(\gamma(t))$$

1. En anglais, on utilise les mots «surface patch», nom que l'on réserve aussi au paramétrage décrivant la portion régulière de surface.

2. Parfois nous les noterons u^1, u^2 afin de pouvoir utiliser le signe de sommation Σ . Dans ce cas, les dérivées partielles par rapport à ces variables seront notées ∂_1, ∂_2 .

Il est important pour la suite de comprendre que $\xi : J \rightarrow \mathbf{R}^2$ est de classe C^∞ . On vérifie cela en deux temps. On suppose d'abord que φ est un paramétrage par des coordonnées : il est donc de la forme

$$(u, v) \mapsto (u, v, f(u, v))$$

où f est de classe C^∞ de U dans \mathbf{R} . Dans ce cas,

$$\varphi^{-1}(\gamma(t)) = (\gamma^1(t), \gamma^2(t))$$

de sorte que ξ est de classe C^∞ . On traite ensuite le cas où φ n'est pas un paramétrage par des coordonnées. D'après le Théorème 37, il est localement équivalent à un tel paramétrage. Pour vérifier que ξ est de classe C^∞ au voisinage de $t_0 \in J$, on choisit alors un ouvert U_0 de \mathbf{R}^2 contenant $\xi(t_0)$ dans lequel φ est équivalent à un paramétrage $\eta : U' \rightarrow \varphi(U_0)$ par des coordonnées : il existe un changement de variables de classe C^∞ $\theta : U' \rightarrow U_0$ tel que $\eta = \varphi \circ \theta$. Il existe par ailleurs un intervalle ouvert J_0 contenant t_0 tel que $\xi(J_0) \subset U_0$. En effet, puisque φ^{-1} et γ sont continus, ξ l'est aussi. Il vient alors

$$\forall t \in J_0, \quad \xi(t) = \theta((\eta^{-1} \circ \gamma)(t))$$

de sorte que ξ est de classe C^∞ dans J_0 comme composé de θ , qui l'est par hypothèse, et de $\eta^{-1} \circ \gamma$ qui l'est vu la première partie de la vérification.

1.2. Orientation et normale. Pour orienter le plan tangent $T_x V$, il suffit de choisir une de ses normales unitaires, N_x , c'est-à-dire un vecteur unitaire qui lui est perpendiculaire. Les bases positives $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ de $\overrightarrow{T_x V}$ sont alors celles pour lesquelles $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, N_x)$ est une base positive de l'orientation canonique de \mathbf{R}^3 .

Le paramétrage φ permet d'orienter le plan tangent en $\varphi(u, v)$ grâce à la normale

$$(25) \quad \frac{\partial_u \varphi \wedge \partial_v \varphi}{\|\partial_u \varphi \wedge \partial_v \varphi\|}$$

De même, l'équation cartésienne F donne une normale unitaire privilégiée

$$\frac{\text{grad}_x F}{\|\text{grad}_x F\|}$$

On dit que la surface V est *orientée* lorsqu'on a choisi une normale unitaire *continue* $N : V \rightarrow \mathbf{R}^3$. Pour une telle normale, $N \circ \varphi$ est continu. Comme il n'y a que deux normales unitaires en chaque point, $N \circ \varphi$ coïncide forcément avec (25) ou son opposé, pourvu que U soit connexe. C'est en particulier une fonction de classe C^∞ dans le domaine du paramétrage. Dans la suite, nous désignerons par $\partial_u N, \partial_v N, \dots$ les

dérivées de $N \circ \varphi$ par rapport aux paramètres u, v . Bien entendu, on peut aussi orienter localement V avec la normale associée à une équation cartésienne.

Une surface n'est pas toujours orientable. Le *Ruban de Moebius* est sans doute un exemple de surface non orientable des plus célèbres.

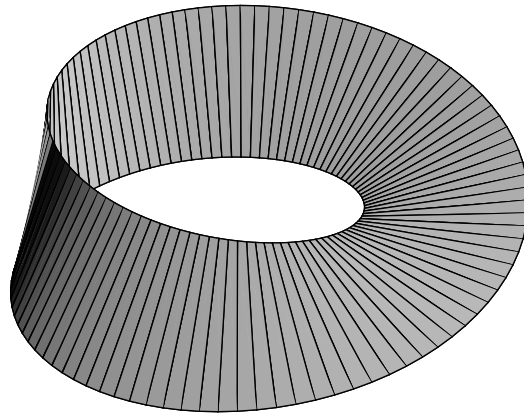


FIGURE 42. Un ruban de Moebius

Une *forme bilinéaire* sur un espace vectoriel (réel) E est une application bilinéaire $E \times E \rightarrow \mathbf{R}$. Les formes fondamentales de V associent à chaque point x de la surface une forme bilinéaire sur $\overrightarrow{T_x V}$ ³. Elles servent à étudier localement la surface. La première permet d'introduire les notions métriques sur la surface et la seconde d'évaluer sa courbure.

2. La première forme fondamentale

La *première forme fondamentale* de V en a est la restriction g_a du produit scalaire de \mathbf{R}^3 à $\overrightarrow{T_a V}$:

$$g_a : \mathbf{h}, \mathbf{k} \in \overrightarrow{T_a V} \mapsto g_a(\mathbf{h}, \mathbf{k}) = \mathbf{h} \cdot \mathbf{k}$$

³ On devrait d'ailleurs les appeler plutôt *champs* de formes mais ce n'est pas l'usage.

Traditionnellement, la matrice qui représente g_a dans la base $(\partial_u\varphi, \partial_v\varphi)$ est notée

$$\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}$$

Ses éléments sont des fonctions de classe C^∞ dans le domaine U du paramétrage. Explicitement,

$$E = \partial_u\varphi \cdot \partial_u\varphi, \quad F = \partial_u\varphi \cdot \partial_v\varphi, \quad G = \partial_v\varphi \cdot \partial_v\varphi$$

A l'occasion, nous l'écrivons également

$$\begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix}$$

afin de pouvoir utiliser le symbole de sommation Σ pour raccourcir les écritures.

On peut se demander jusqu'à quel point le choix d'un paramétrage convenable permet de simplifier les coefficients g_{ij} de la première forme fondamentale. En particulier, existe-t-il un paramétrage dans lequel ils sont constants? En général, un tel paramétrage n'existe pas et la détermination des formes locales canoniques que l'on peut donner à g est une question difficile. Nous nous contenterons d'énoncer un théorème important que nous accepterons sans preuve. Il est spécifique à la dimension trois.

THÉORÈME 47. *Tout point d'une surface de \mathbf{R}^3 admet un voisinage qui est l'image d'un paramétrage dans lequel $g_{11} = g_{22}$ et $g_{12} = g_{21} = 0$.*

Comme le lecteur pourra le vérifier, de tels paramétrages conservent les angles. Pour cette raison, ils sont dits *conformes*.

2.1. Equations de structure - première partie. La préoccupation est ici la même que celle qui a conduit aux formules de Frenet pour les courbes. Il s'agit de dériver les éléments de la base $(\partial_u\varphi, \partial_v\varphi, N)$. Nous nous intéressons d'abord aux dérivées secondes de φ . Elles se décomposent selon la base en question. Elles ont une composante tangentielle, i.e. parallèle à l'espace tangent, et une composante normale, proportionnelle à N . Dans cette section, nous déterminons la composante tangentielle. Nous adoptons les notations indicielles afin de ne pas alourdir les formules et de les rendre plus faciles à retenir et à établir⁴. Dans la proposition suivante, les indices de sommations varient de 1 à 2.

4. En réalité, les calculs s'écrivent de la même façon en toute dimension.

PROPOSITION 48. Il existe des fonctions $a_{ij} : U \rightarrow \mathbf{R}$ telles que

$$\partial_{ij}\varphi = \sum_k \Gamma_{ij}^k \partial_k \varphi + a_{ij} N$$

pour tous $i, j \in \{1, 2\}$, où les coefficients Γ_{ij}^k sont déterminés par

$$\sum_l g_{kl} \Gamma_{ij}^l = \frac{1}{2} (\partial_i g_{jk} + \partial_j g_{ik} - \partial_k g_{ij})$$

DÉMONSTRATION. Comme déjà mentionné, nous pouvons de fait décomposer $\partial_{ij}\varphi$ selon la base $(\partial_1\varphi, \partial_2\varphi, \varphi, N)$ de \mathbf{R}^3 . Nous laissons de côté les coefficients a_{ij} de N . Pour calculer le coefficient Γ_{ij}^k de $\partial_k\varphi$, on évalue

$$\partial_{ij}\varphi \cdot \partial_k\varphi = \sum_l g_{kl} \Gamma_{ij}^l$$

Remarquons préalablement que

$$\partial_k g_{ij} = \partial_{ki}\varphi \cdot \partial_j\varphi + \partial_i\varphi \cdot \partial_{kj}\varphi$$

En permutant circulairement les indices i, j, k puis en additionnant les égalités obtenues membre à membre, il vient

$$2(\partial_{ij}\varphi \cdot \partial_k\varphi + \partial_{jk}\varphi \cdot \partial_i\varphi + \partial_{ki}\varphi \cdot \partial_j\varphi) = \partial_k g_{ij} + \partial_i g_{jk} + \partial_j g_{ki}$$

La proposition en résulte immédiatement. \square

Les coefficients Γ_{ij}^k sont les *symboles de Christoffel* de V dans le paramétrage φ .

Les symboles de Christoffel d'un cylindre circulaire droit paramétré par $(u, v) \mapsto (r \cos u, r \sin u, v)$ sont nuls. A titre d'exercice, le lecteur déterminera les coefficients de Christoffel pour la sphère paramétrée par $(u, v) \mapsto (r \sin u \cos v, r \sin u \sin v, r \cos u)$.

3. Calcul des longueurs d'arc

Considérons une courbe (I, γ) de V . Pour tout intervalle $J \subset I$, on a

$$L(\gamma|_J) = \int_J \|\gamma'(t)\| dt = \int_J \sqrt{g_\gamma(\gamma', \gamma')} dt$$

Si $\gamma(J) \subset U$, alors $\gamma = \varphi \circ \xi$, où $\xi : J \rightarrow U$ est de classe C^∞ (voir page 105). Il vient alors

$$(26) \quad \gamma' = \xi'^1 \partial_1 \varphi + \xi'^2 \partial_2 \varphi$$

puis

$$L(\gamma|_J) = \int_J \sqrt{\sum_{ij} g_{ij}(\gamma(t)) \xi'^i \xi'^j} dt$$

Si s désigne une abscisse curviligne de γ calculée à partir d'une origine quelconque, alors, pour tous $t_0, t_1 \in J$,

$$s(t_1) - s(t_0) = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{\sum_{ij} g_{ij}(\gamma(t)) \xi^i \xi^j} dt$$

Cette formule est souvent présentée sous la forme

$$ds^2 = \sum_{ij} g_{ij} du^i du^j$$

A notre niveau, ceci est plutôt une mnémonique de la formule car nous ne savons pas quel sens attribuer aux symboles ds, du^1, du^2 , sens qui est du ressort du calcul tensoriel.

4. Géodésiques

Les géodésiques sont aux variétés courbes ce que les droites sont aux espaces euclidiens. Pour les définir dans le cas d'une surface, nous allons adopter un point de vue "mécaniste", la mécanique à laquelle nous nous référons étant la mécanique classique. D'après le principe d'inertie, un point matériel qui n'est soumis à aucune force est animé d'un mouvement *rectiligne* et *uniforme*. Selon la seconde loi de Newton, l'accélération est proportionnelle à la résultante des forces qui s'exercent sur le point matériel, son accélération est alors nulle. Si ce point est astreint à se déplacer sur une surface, cela revient à supposer que cette accélération est normale à celle-ci en tout point. En effet, d'après le principe d'action/réaction, la force qui pourrait résulter de cette composante de l'accélération est neutralisée par une réaction opposée maintenant le point sur la surface. Forts de cette image, nous appelons *géodésique* de Σ toute courbe (I, γ) tracée sur Σ dont «l'accélération» γ'' est constamment normale à Σ :

$$\forall t \in I, \quad \gamma''(t) \perp T_{\gamma(t)}V$$

Dans la proposition suivante, les notations sont celles adoptées au paragraphe précédent.

PROPOSITION 49. *Une courbe $(I, \gamma = \varphi \circ \xi)$ de V est une géodésique si et seulement si ξ est une solution du système d'équations différentielles*

$$\xi''^k + \sum_{ij} (\Gamma_{ij}^k \circ \xi) \xi^i \xi^j = 0, k = 1, 2.$$

DÉMONSTRATION. Dérivons la relation (26). Il vient

$$(27) \quad \gamma'' = \sum_{ij} (\partial_{ij} \varphi \circ \xi) \xi^i \xi'^j + \sum_k (\partial_k \varphi \circ \xi) \xi''^k.$$

D'après les équations de structure, la composante parallèle à $T_\gamma \Sigma$ de cette expression est

$$\sum_k \left[\xi''^k + \sum_{ij} (\Gamma_{ij}^k \circ \xi) \xi^i \xi'^j \right] \partial_k \varphi \circ \xi.$$

D'où la proposition. \square

En posant $\eta^i = \xi'^i$, on transforme le système d'équations ci-dessus en un système du premier ordre en les fonctions ξ^i et η^i . Une solution de ces équations est déterminée par ses conditions initiales. Cela revient à imposer les valeurs de $\gamma(t)$ et de $\dot{\gamma}(t)$ en un point $t = t_0$. On peut alors établir la proposition suivante, dont nous ne détaillerons pas la démonstration.

COROLLAIRE 50. Soient $a \in \Sigma$ et $\mathbf{h} \in \overrightarrow{T_a \Sigma}$. Il existe une seule⁵ géodésique γ telle que $\gamma(0) = a$ et $\gamma'(0) = \mathbf{h}$.

Assez curieusement, on retrouve une forme de principe d'inertie pour les géodésiques, à savoir

PROPOSITION 51. Si (I, γ) est une géodésique de Σ , alors $\|\gamma'\|$ est constant.

DÉMONSTRATION. En effet, la dérivée de $\|\gamma'\|^2$ est $2\gamma' \cdot \gamma''$. Elle est donc nulle puisque γ'' est normal à V en γ et γ' lui est tangent en ce point. \square

Le «mouvement» le long d'une géodésique est donc «uniforme» puisque sa vitesse linéaire est constante. De plus, cette propriété signifie que le paramètre t dont dépend une géodésique est un multiple constant d'une abscisse curviligne. D'ailleurs, il est clair que, r étant un nombre non nul, $\gamma(t)$ est une géodésique si et seulement si $\gamma(rt)$ en est une.

Sur un cylindre circulaire droit, les géodésiques dessinent des hélices circulaires. Cela résulte du fait que dans le paramétrage rappelé plus haut, les symboles de Christoffel sont nuls. En particulier les génératrices et les cercles contenus dans les plans perpendiculaires aux génératrices sont des géodésiques. En déroulant le cylindre sur un de ses plans tangents, on voit que ses géodésiques tracent des droites du

5. L'unicité n'est garantie que pour les géodésiques *maximales*, c'est-à-dire définies sur un intervalle I maximal.

plan. On aurait pu, inversement, déterminer les géodésiques du cylindre en utilisant le fait qu'il est développable.

Sur une sphère de \mathbf{R}^3 , ce sont les arcs de grand cercle, rapportés aux multiples constants de l'abscisse curviligne, qui sont les géodésiques. En effet, «l'accélération» de toute courbe (I, γ) sans inflexion se décompose en ses parties tangentielle et normale (voir page 70)

$$\gamma'' = v' \mathbf{t} + v^2 \kappa \mathbf{n}$$

où $v = \|\gamma'\|$, κ est la courbure de γ et \mathbf{t} , \mathbf{n} sont sa tangente unitaire et sa normale principale respectivement. Par conséquent, si v est constant, γ'' est parallèle à \mathbf{n} . Or il se fait que la normale principale à un grand cercle est toujours normale à la sphère puisqu'il est contenu dans un plan diamétral. Par conséquent, les grand cercles sont des géodésiques pourvu qu'ils soient paramétrés par un multiple de l'abscisse curviligne. Comme par un point, il passe toujours un grand cercle tangent à une direction quelconque de la sphère en ce point, il n'y a pas d'autres géodésiques.

Revenons à une surface V quelconque. On peut montrer que *s'ils sont assez voisins, deux points x, y de V sont les extrémités d'un seul arc de géodésique dont la longueur est la plus petite des longueurs des arcs qu'ils délimitent sur des courbes tracées sur V* . On définit alors la *distance* séparant x et y comme étant la longueur de cet arc de géodésique.

La première forme fondamentale d'une variété V plongée dans \mathbf{R}^n est définie comme dans le cas des surfaces : en chaque point, c'est aussi la restriction du produit scalaire de \mathbf{R}^n au sous-vecteuriel directeur de l'espace tangent à V en ce point. La longueur d'un arc de courbe de V est semblablement donnée par la même formule que pour un arc de courbe d'une surface. Pour tous points $x, y \in V$, on note alors $d_V(x, y)$ la meilleure borne inférieure des longueurs des arcs que ces points délimitent sur des courbes tracées sur V . On peut montrer que

$$d_V : (x, y) \in V \times V \mapsto d_V(x, y) \in \mathbf{R}$$

est une distance sur V et que la topologie d'espace métrique⁶ de (V, d_V) est la topologie induite par \mathbf{R}^n sur V .

6. La topologie d'espace métrique d'un ensemble muni d'une distance d est celle dont les ouverts sont les unions de boules ouvertes de d .

5. Calcul des aires

La première forme fondamentale permet également d'introduire la notion d'aire sur les surfaces. Voici comment.

Soient $I = [u, u + s] \times [v, v + t] \subset U$ et les points de V

$$\begin{cases} A = \varphi(u, v) \\ B = \varphi(u + s, v) \\ C = \varphi(u + s, v + t) \\ D = \varphi(u, v + t) \end{cases}$$

Ils sont représentés sur la figure 43 ainsi que les arcs de courbes de V

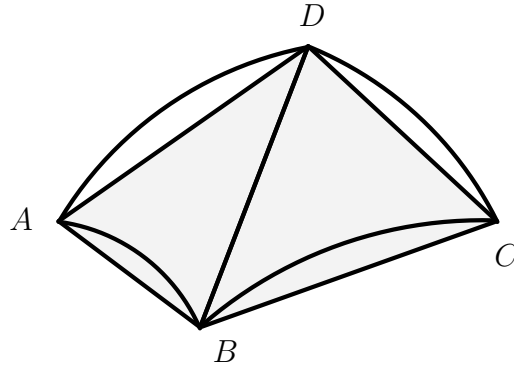


FIGURE 43

qui les joignent et qui sont obtenus en laissant varier un des arguments de φ . Par exemple, l'arc joignant A et B est la trace de

$$\lambda \in [u, u + s] \mapsto \varphi(\lambda, v) \in V$$

Ces arcs délimitent comme une «maille» sur V . La figure montre aussi les triangles ABD et BCD . La somme σ_I des aires de ceux-ci est une approximation de celle de la maille, d'autant meilleure que celle-ci est «petite» (disons que t, s sont petits).

La propriété suivante est à la notion d'aire ce que la Proposition 4, page 23, est à celle de longueur d'arc et va nous fournir un argument à l'appui de la définition de la notion d'aire sur les surfaces.

PROPOSITION 52. *Soient une partie compacte K de U et, pour chaque entier positif m , un réseau \mathcal{R}_m de \mathbf{R}^2 dont le diamètre des*

mailles est majoré par ε_m , où la suite ε tend vers 0. On a

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{I \in \mathcal{R}_m, I \subset K} \sigma_I = \int_K \|\partial_u \varphi \wedge \partial_v \varphi\| dudv$$

La démonstration de ce résultat est analogue à celle de la Proposition 4 et est omise.

Le résultat précédent incite à dire que l'aire d'une partie $\omega \subset \varphi(U)$ de V est donnée par

$$(28) \quad \mathcal{A}(\omega) = \int_{\varphi^{-1}(\omega)} \|\partial_u \varphi \wedge \partial_v \varphi\| dudv$$

pour autant que cette intégrale existe. Voici un argument supplémentaire en faveur de cette position : cette expression est invariante par changement de variables. En effet, si $\theta : U' \rightarrow U$ est un changement de variables et $\psi = \varphi \circ \theta$ est le paramétrage équivalent à φ correspondant, alors

$$\begin{aligned} \partial_\lambda \psi \wedge \partial_\mu \psi &= (\partial_u \varphi \partial_\lambda \theta^1 + \partial_v \varphi \partial_\lambda \theta^2) \wedge (\partial_u \varphi \partial_\mu \theta^1 + \partial_v \varphi \partial_\mu \theta^2) \\ &= (\partial_\lambda \theta^1 \partial_\mu \theta^2 - \partial_\lambda \theta^2 \partial_\mu \theta^1) \partial_u \varphi \wedge \partial_v \varphi \end{aligned}$$

de sorte que

$$\|\partial_\lambda \psi \wedge \partial_\mu \psi\| = |\det \partial \theta| \|\partial_u \varphi \wedge \partial_v \varphi\| \circ \theta$$

De là

$$\begin{aligned} \int_{\psi^{-1}(\omega)} \|\partial_\lambda \psi \wedge \partial_\mu \psi\| d\lambda d\mu &= \int_{\psi^{-1}(\omega)} |\det \partial \theta| \|\partial_u \varphi \wedge \partial_v \varphi\| \circ \theta d\lambda d\mu \\ &= \int_{\varphi^{-1}(\omega)} \|\partial_u \varphi \wedge \partial_v \varphi\| dudv \end{aligned}$$

en vertu du théorème de changement de variables dans les intégrales multiples.

Nous adopterons donc la formule (28) comme définition de l'aire de ω ⁷ et nous appellerons *élément de surface* de V relatif au paramétrage φ l'expression

$$d\sigma = \|\partial_u \varphi \wedge \partial_v \varphi\| dudv$$

PROPOSITION 53. *L'élément de surface est donné par*

$$d\sigma = \sqrt{EG - F^2} dudv$$

7. Si ω n'est pas contenu dans une partie paramétrée de V , il faut utiliser une partition de l'unité subordonnée à un recouvrement de V par des parties paramétrées et pondérer chaque élément de volume par la fonction correspondante de la partition. Nous ne le ferons pas ici et nous ne calculerons des aires que pour des parties contenues dans une portion régulière de surface, à des ensembles négligeables près.

DÉMONSTRATION. En effet, en notant α l'angle non orienté entre $\partial_u\varphi$ et $\partial_v\varphi$, on a

$$\begin{aligned}\|\partial_u\varphi \wedge \partial_v\varphi\|^2 &= \|\partial_u\varphi\|^2\|\partial_v\varphi\|^2 \sin^2 \alpha \\ &= \|\partial_u\varphi\|^2\|\partial_v\varphi\|^2 (1 - \cos^2 \alpha) \\ &= \|\partial_u\varphi\|^2\|\partial_v\varphi\|^2 - (\partial_u\varphi \cdot \partial_v\varphi)^2\end{aligned}$$

D'où le résultat vu l'expression de g dans la base $(\partial_u\varphi, \partial_v\varphi)$. \square

5.1. Le théorème d'Archimède. Pour illustrer la notion d'aire, nous allons établir un théorème dû à Archimède.

THÉORÈME 54. *La projection d'une sphère sur un cylindre circulaire droit tangent à la sphère le long d'un grand cercle, orthogonalement à l'axe du cylindre conserve les aires.*

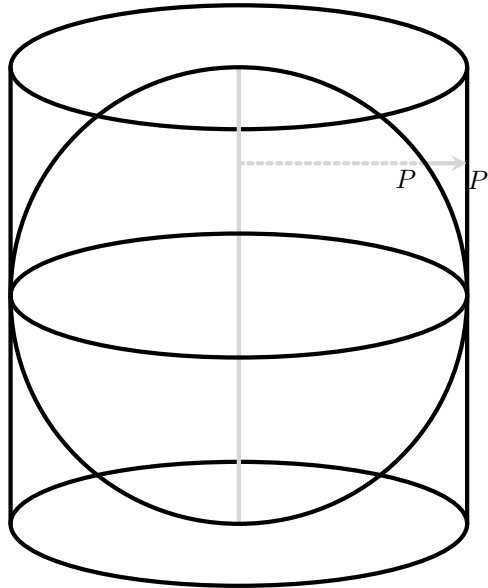


FIGURE 44. Illustration de la projection d'Archimède

DÉMONSTRATION. Utilisons le paramétrage

$$\varphi : (\lambda, \mu) \in]0, \pi[\times]0, 2\pi[\mapsto (r \sin \lambda \cos \mu, r \sin \lambda \sin \mu, r \cos \lambda) \in \mathbf{R}^3$$

de la sphère (privée d'un méridien, voir (22), page 88) et le paramétrage

$$\psi : (u, v) \in]0, 2\pi[\times \mathbf{R} \mapsto (r \cos u, r \sin u, v)$$

du cylindre (privé d'une génératrice). Dans ces paramétrages, l'élément de surface de la sphère est $r^2 \sin \lambda d\lambda d\mu$ et celui du cylindre est $rdudv$. De plus, l'expression de la projection considérée est

$$(r \sin \lambda \cos \mu, r \sin \lambda \sin \mu, r \cos \lambda) \mapsto (r \cos \mu, r \sin \mu, r \cos \lambda)$$

Elle fait donc correspondre le point de paramètres $(u, v) = (\mu, r \cos \lambda)$ du cylindre au point de paramètres (λ, μ) de la sphère. Le jacobien du changement de variables $\theta : (\lambda, \mu) \mapsto (\mu, r \cos \lambda)$ est

$$\det \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -r \sin \lambda & 0 \end{pmatrix} = r \sin \lambda$$

Soient alors une partie ω de la sphère, contenue dans l'image de φ , et son image ω' par la projection d'Archimède. Elle est contenue dans l'image de ψ . De plus, l'aire dans le cylindre de ω' vaut

$$\begin{aligned} \int_{\psi^{-1}(\omega')} rdudv &= \int_{\varphi^{-1}(\omega)} r |\partial\theta| d\lambda d\mu \\ &= \int_{\varphi^{-1}(\omega)} r^2 \sin \lambda d\lambda d\mu \end{aligned}$$

d'après le théorème de changement de variables dans les intégrales multiples. C'est donc bien l'aire de ω sur la sphère. \square

Pour appliquer ce résultat, il suffit de «dérouler» le cylindre sur son plan tangent en un point, opération qui conserve également les aires (ce que le lecteur est invité à vérifier en s'inspirant de ce que nous venons de faire) et qui donne un rectangle de dimension $2\pi r$ par $2r$.

En particulier, l'aire de la sphère est celle de ce rectangle et vaut donc $4\pi r^2$. Plus généralement l'aire d'une «lune» délimitée par deux méridiens dont les plans forment un angle α (voir la figure 45 ci-dessous) est celle d'un rectangle de dimensions αr par $2r$ et vaut donc $2\alpha r^2$.

Il est proposé au lecteur de déterminer l'aire de la portion de sphère comprise entre deux plans parallèles (voir la figure 46 ci-dessous).

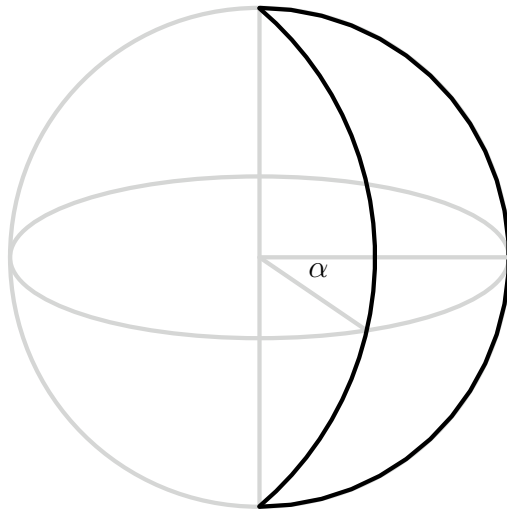


FIGURE 45

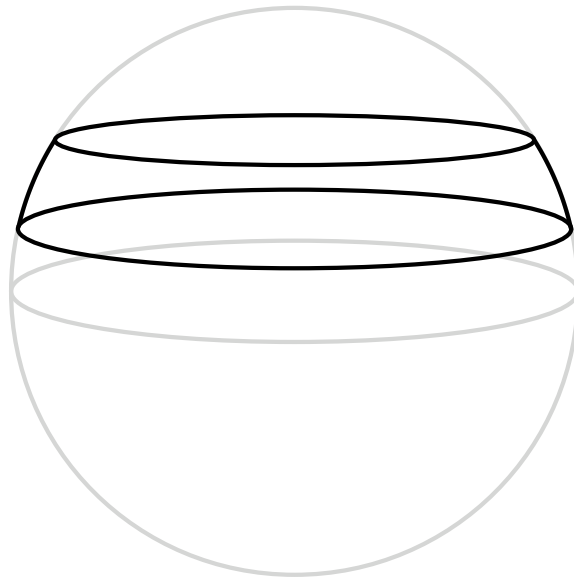


FIGURE 46

La seconde forme fondamentale des surfaces

1. L'application de Weingarten et la seconde forme fondamentale

1.1. L'application de Weingarten. Les hypothèses et notations sont celles du préambule du chapitre précédent, page 105.

La courbure d'une surface au voisinage d'un point se manifeste par le fait que la direction de son plan tangent varie lorsqu'on s'écarte de celui-ci. Or cette direction est déterminée par une normale unitaire définie au voisinage du point. On est donc naturellement amené à dériver cette normale dans les directions tangentes à la surface.

Dans ce qui suit, nous prendrons pour normale unitaire N celle donnée par le paramétrage φ via la formule (25).

Soit $\mathbf{h} \in \overrightarrow{T_a V}$ tangent en t_0 à une courbe (I, γ) tracée sur V . Par définition, la dérivée de N dans la direction de \mathbf{h} est

$$\mathbf{h} \cdot N = \frac{d}{dt} N \circ \gamma|_{t=t_0}$$

Pour calculer cette dérivée, notons $\xi : t \mapsto (u(t), v(t))$ la courbe $\varphi^{-1} \circ \gamma$ de U (elle est définie dans un voisinage de t_0) de sorte que $N \circ \gamma = (N \circ \varphi) \circ \xi$. Il vient alors

$$(29) \quad \mathbf{h} \cdot N = \partial_u N u'(t_0) + \partial_v N v'(t_0)$$

Mais, cf. (26), $(u'(t_0), v'(t_0))$ sont les composantes de \mathbf{h} dans la base $(\partial_u \varphi, \partial_v \varphi)$ de $\overrightarrow{T_a V}$. En particulier, $\mathbf{h} \cdot N$ dépend seulement de \mathbf{h} et non de la courbe γ : il est bien défini. De plus, *il est tangent à V en a* . cela résulte du fait que N est unitaire et du Lemme 8, page 33.

L'application

$$W_a : \mathbf{h} \in \overrightarrow{T_a V} \mapsto \mathbf{h} \cdot N \in \overrightarrow{T_a V}$$

est l'application de Weingarten de V en a . D'après (29), elle est linéaire.

Pour une sphère de rayon r orientée par une normale pointant vers le centre, l'application de Weingarten est, en tout point, l'application

$$\mathbf{h} \mapsto -\frac{1}{r} \mathbf{h}$$

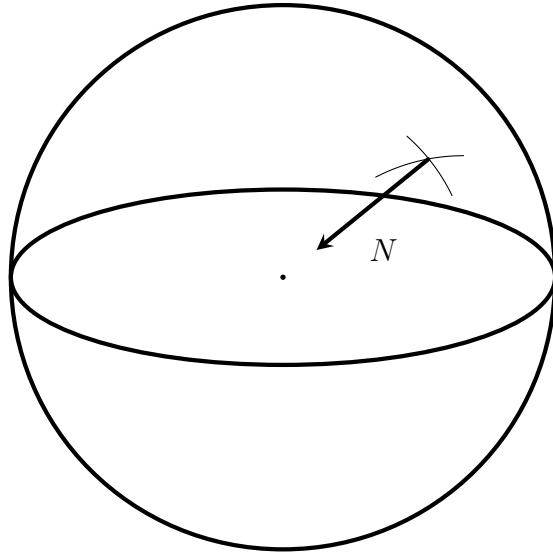


FIGURE 47

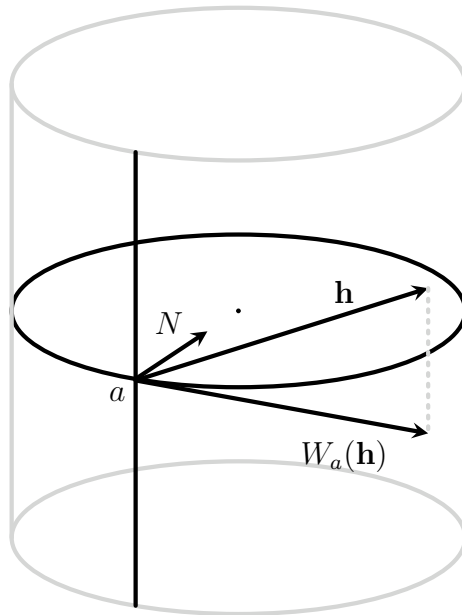


FIGURE 48

Pour un cylindre circulaire droit, orienté avec une normale pointant vers l'axe, $W_a(\mathbf{h})$ est la projection orthogonale de \mathbf{h} sur la perpendiculaire en a à la génératrice passant par a , multipliée par l'inverse du rayon. La figure 48 illustre le cas d'un cylindre de rayon 1.

1.2. La seconde forme fondamentale. Par définition, la *seconde forme fondamentale* de V en a est la forme bilinéaire

$$\varpi_a : \mathbf{h}, \mathbf{k} \in \overrightarrow{T_a V} \mapsto -g_a(W_a(\mathbf{h}), \mathbf{k})$$

Comme g est non dégénéré, sa donnée équivaut à celle de W_a .

PROPOSITION 55. Dans la base $(\partial_u\varphi, \partial_v\varphi)$ de $\overrightarrow{T_a V}$, la forme ϖ_a est représentée par la matrice

$$\begin{pmatrix} K & L \\ L & M \end{pmatrix}$$

où

$$K = \frac{[\partial_u\varphi, \partial_v\varphi, \partial_{uu}\varphi]}{\|\partial_u\varphi \wedge \partial_v\varphi\|}, L = \frac{[\partial_u\varphi, \partial_v\varphi, \partial_{uv}\varphi]}{\|\partial_u\varphi \wedge \partial_v\varphi\|}, M = \frac{[\partial_u\varphi, \partial_v\varphi, \partial_{vv}\varphi]}{\|\partial_u\varphi \wedge \partial_v\varphi\|}$$

DÉMONSTRATION. Notons (p, q) et (r, s) les composantes de \mathbf{h} et \mathbf{k} selon la base $(\partial_u\varphi, \partial_v\varphi)$. On a alors, cf. (29),

$$\begin{aligned} -\varpi(\mathbf{h}, \mathbf{k}) &= (p\partial_u N + q\partial_v N) \cdot (r\partial_u\varphi + s\partial_v\varphi) \\ &= pr\partial_u N \cdot \partial_u\varphi + ps\partial_u N \cdot \partial_v\varphi + qr\partial_v N \cdot \partial_u\varphi + qs\partial_v N \cdot \partial_v\varphi \end{aligned}$$

Mais N est perpendiculaire à $\partial_u\varphi$ et à $\partial_v\varphi$ de sorte que

$$\partial_u N \cdot \partial_v\varphi = \partial_u(N \cdot \partial_v\varphi) - N \cdot \partial_{uv}\varphi = -N \cdot \partial_{uv}\varphi = \partial_v N \cdot \partial_u\varphi$$

En conséquence, ϖ_a est représenté par la matrice indiquée où

$$K = -\partial_u N \cdot \partial_u\varphi, L = N \cdot \partial_{uv}\varphi, M = -\partial_v N \cdot \partial_v\varphi$$

Rappelons que N est donné par la formule (25). En particulier,

$$L = N \cdot \partial_{uv}\varphi = \frac{[\partial_u\varphi, \partial_v\varphi, \partial_{uv}\varphi]}{\|\partial_u\varphi \wedge \partial_v\varphi\|}$$

Pour K , nous obtenons ensuite

$$K = -\partial_u \underbrace{(N \cdot \partial_u\varphi)}_{=0} + N \cdot \partial_{uu}\varphi = \frac{[\partial_u\varphi, \partial_v\varphi, \partial_{uu}\varphi]}{\|\partial_u\varphi \wedge \partial_v\varphi\|}$$

Semblablement,

$$M = -\partial_v \underbrace{(N \cdot \partial_v\varphi)}_{=0} + N \cdot \partial_{vv}\varphi = \frac{[\partial_u\varphi, \partial_v\varphi, \partial_{vv}\varphi]}{\|\partial_u\varphi \wedge \partial_v\varphi\|}$$

□

Une conséquence immédiate de la propriété précédente est que ϖ_a est symétrique.

1.3. Equation de structure - seconde partie. Nous pouvons à présent achever la décomposition des dérivées $\partial_{ij}\varphi$ en composantes tangentielle et normale entamée lors de la Proposition 48.

PROPOSITION 56. *Avec les notations de la Proposition 48, on a*

$$a_{ij} = \varpi_{ij} = \frac{[\partial_u\varphi, \partial_v\varphi, \partial_{ij}\varphi]}{|\partial_u\varphi \wedge \partial_v\varphi|}$$

DÉMONSTRATION. Nous sommes momentanément revenus aux notations indicielles. Pour préciser l'énoncé,

$$\varpi_{ij} = \varpi(\partial_i\varphi, \partial_j\varphi)$$

Quant à la vérification, elle a été virtuellement faite à la fin de la preuve précédente. Reprenons les calculs :

$$\begin{aligned} \varpi_{ij} &= -W_a(\partial_i\varphi) \cdot \partial_j\varphi \\ &= -\partial_i N \cdot \partial_j\varphi \\ &= -\partial_i(N \cdot \partial_j\varphi) + N \cdot \partial_{ij}\varphi \\ &= N \cdot \partial_{ij}\varphi \end{aligned}$$

□

2. Courbures

Nous allons essayer d'appréhender la forme locale d'une surface à l'aide des courbures de certaines courbes tracées sur elle. Voici un premier théorème qui nous guidera vers la notion de courbure normale puis, finalement, vers la courbure de Gauss.

Nous continuons d'utiliser les notations de la section précédente.

2.1. Le théorème de Meusnier. La normale \mathbf{n} en a d'un arc de courbe tracé sur V forme avec N_a un angle non orienté θ que l'on peut calculer avec les formes fondamentales.

THÉORÈME 57. *Si $\mathbf{h} \in \overrightarrow{T_a V} \setminus \{\mathbf{0}\}$ est tangent en t_0 à une courbe régulière (I, γ) tracée sur V dont la normale principale fait un angle non orienté θ avec N_a , alors*

$$\kappa_\gamma(t_0) \cos \theta = \frac{\varpi_a(\mathbf{h}, \mathbf{h})}{g_a(\mathbf{h}, \mathbf{h})}$$

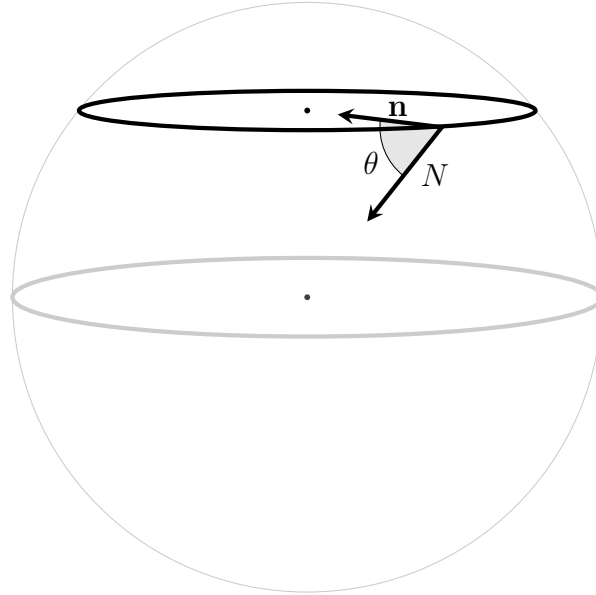


FIGURE 49

DÉMONSTRATION. Supposons d'abord γ rapporté à une abscisse curviligne comptée, par exemple, à partir de a . Quitte à restreindre I , on peut supposer le paramétrage de la forme $\gamma = \varphi \circ \xi$, où $\xi = (u, v)$ est de classe C^∞ au voisinage de 0. On a alors

$$\mathbf{t} = \dot{\gamma} = \partial_u \varphi \dot{u} + \partial_v \varphi \dot{v}$$

puis

$$\kappa_\gamma \mathbf{n} = \dot{\mathbf{t}} = \partial_{uu} \varphi \dot{u}^2 + 2\partial_{uv} \varphi \dot{u}\dot{v} + \partial_{vv} \varphi \dot{v}^2 + \partial_u \varphi \ddot{u} + \partial_v \varphi \ddot{v}$$

En se plaçant en 0 et prenant le produit scalaire des deux membres avec N_a , il vient, vu la Proposition 56,

$$\kappa_\gamma(0) \cos \theta = (\partial_{uu} \varphi \dot{u}^2 + 2\partial_{uv} \varphi \dot{u}\dot{v} + \partial_{vv} \varphi \dot{v}^2) \cdot N_a = \varpi_a(\mathbf{t}, \mathbf{t})$$

Dans le cas général, γ est équivalent à un paramétrage naturel et

$$\mathbf{t} = \frac{\gamma'}{\|\gamma'\|} = \frac{\mathbf{h}}{\|\mathbf{h}\|}$$

Mais alors

$$\varpi_a(\mathbf{t}, \mathbf{t}) = \frac{\varpi_a(\mathbf{h}, \mathbf{h})}{\|\mathbf{h}\|^2} = \frac{\varpi_a(\mathbf{h}, \mathbf{h})}{g_a(\mathbf{h}, \mathbf{h})}$$

□

Considérons par exemple une sphère de rayon R orientée par une normale pointant vers l'intérieur et prenons pour courbe tracée dessus un parallèle de rayon r (voir la figure 49). On a dit plus haut que $W_a(\mathbf{h}) = -\mathbf{h}/R$. Par conséquent,

$$\varpi_a = \frac{1}{R}g_a$$

Par ailleurs, la courbure du parallèle est $1/r$. De là

$$\cos \theta = \frac{r}{R}$$

ce qu'on peut vérifier immédiatement sur la figure.

2.2. La courbure normale. Le lemme suivant montre que les sections d'une surface par des plans normaux sont, localement, des courbes de niveau de ces plans.

LEMME 58. *L'intersection de la surface V avec un plan π contenant la normale $a + \mathbf{R}N_a$ est, au voisinage de a , une courbe de niveau dans π .*

DÉMONSTRATION. Notons \mathcal{F} la restriction à π d'une équation cartésienne F de V au voisinage de a . Si $\mathbf{h} \in \overrightarrow{T_a V} \cap \overrightarrow{\pi}$ est normé, alors $(a, (N_a, \mathbf{h}))$ est un repère orthonormé de π et l'expression de \mathcal{F} dans les coordonnées (α, β) correspondantes est

$$\mathcal{F}(\alpha, \beta) = F(a + \alpha N_a + \beta \mathbf{h})$$

Les dérivées partielles de cette fonction en $(0, 0)$ sont donc

$$\begin{cases} \partial_\alpha \mathcal{F} = \text{grad}_a F \cdot N_a = \pm \|\text{grad}_a F\| \\ \partial_\beta \mathcal{F} = \text{grad}_a F \cdot \mathbf{h} = 0 \end{cases}$$

Elles ne sont pas nulles toutes les deux. Par conséquent, \mathcal{F} est une équation cartésienne au voisinage de a dans π . \square

Soit un plan π *normal* à V en a , c'est-à-dire contenant $a + \mathbf{R}N_a$. D'après la Proposition 26, page 62, il existe une courbe paramétrée régulière (I, γ) passant par a en s dont la trace soit contenue dans $V \cap \pi$. Soit alors $\mathbf{h} \in \overrightarrow{T_a V} \cap \overrightarrow{\pi}$, non nul. Le rapport

$$(30) \quad \frac{\varpi_a(\mathbf{h}, \mathbf{h})}{g_a(\mathbf{h}, \mathbf{h})}$$

ne change pas lorsqu'on remplace \mathbf{h} par un quelconque de ses multiples non nuls, par exemple par une tangente unitaire à γ . D'après le théorème de Meusnier, c'est donc la courbure de γ en a si N_a est orienté vers la concavité de γ et son opposé sinon. On le note κ_π . On l'appelle la *courbure normale* de V en a associée à π .

THÉORÈME 59. *Lorsque π décrit les plans normaux à V en a , κ_π atteint un minimum κ_1 et un maximum κ_2 . Si $\kappa_1 < \kappa_2$, ils sont associés à des plans orthogonaux. Les valeurs extrêmes κ_1 et κ_2 sont les racines de l'équation en λ*

$$\det \begin{pmatrix} K - \lambda E & L - \lambda F \\ L - \lambda F & M - \lambda G \end{pmatrix} = 0.$$

DÉMONSTRATION. D'après la Proposition 43, page 93, κ_π prend des valeurs extrêmes κ_1 et κ_2 qui sont la plus petite et la plus grande des valeurs propres de l'application $-W_a$ qui est symétrique. En particulier, si $\kappa_1 < \kappa_2$, alors leurs vecteurs propres sont orthogonaux et ils sont associés à des plans perpendiculaires.

Comme on le voit facilement, dans la base $(\partial_u\varphi, \partial_v\varphi)$, l'application $-W_a$ est représentée par la matrice

$$(31) \quad \begin{pmatrix} K & L \\ L & M \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1}$$

En multipliant l'équation caractéristique de cette matrice par le déterminant de la matrice

$$\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}$$

on voit que ses valeurs propres sont les solutions de l'équation indiquée dans l'énoncé. \square

Les nombres κ_1 et κ_2 sont les *courbures principales* de V en a . Quand ils sont distincts, ils sont associés à des plans normaux perpendiculaires qui coupent le plan T_aV selon deux tangentes à V dont les directions sont les *directions principales* de V en a . Lorsque $\kappa_1 = \kappa_2$, toutes les courbures normales de V en a sont égales. Le point a s'appelle alors un *ombilic*. Il est *plat* si $\kappa_1 = \kappa_2 = 0$. Les points d'une sphère sont tous des ombilics, non plats.

2.3. Position d'une surface par rapport à son plan tangent et courbure de Gauss. Soit un plan π normal à V en a . Au voisinage de a , $V \cap \pi$ est la trace d'une courbe paramétrée régulière de π dont la courbure est, au signe près, κ_π . D'après la Proposition 11, page 36, si $\kappa_\pi \neq 0$, alors, au voisinage de a , cette courbe est située d'un même côté de sa tangente en a , autrement dit, dans un des demi-espaces délimités par T_aV .

Si, lorsqu'on fait pivoter π , le signe de κ_π ne change pas, alors, au voisinage de a , $V \cap \pi$ reste dans le même demi-espace délimité par T_aV : au voisinage de a , V ne traverse pas le plan tangent en a . Par contre, si κ_π change de signe, alors au voisinage de a , V traverse son plan tangent

en a . Dans le premier cas, κ_1 et κ_2 sont de même signe alors que dans le second, ils sont de signe opposés. Autrement dit, le premier cas est caractérisé par la condition $\kappa_1\kappa_2 > 0$ et le second par $\kappa_1\kappa_2 < 0$.

Il se peut que le produit $\kappa_1\kappa_2$ soit nul sans que les deux courbures principales le soient. En pareil cas, $V \cap \pi$ reste localement d'un même côté de son plan tangent en a sauf peut-être dans une direction pour laquelle on ne sait rien dire de général.

Le produit $\mathbf{K}_a = \kappa_1\kappa_2$ est la *courbure de Gauss* de V en a et, lorsque $\kappa_1 \neq 0$ ou $\kappa_2 \neq 0$, a est dit *elliptique*, *parabolique* ou *hyperbolique* selon que, respectivement, $\mathbf{K}_a > 0$, $\mathbf{K}_a = 0$ ou $\mathbf{K}_a < 0$.

Pour une sphère de rayon r , la courbure de Gauss est constante et vaut r^{-2} . En particulier, les points d'une sphère sont tous elliptiques.

Les points d'un cylindre circulaire droit sont tous paraboliques. Si α est l'angle non orienté que fait en a la tangente de vecteur-directeur \mathbf{h} avec la tangente orthogonale aux génératrices, on a

$$\varpi(\mathbf{h}, \mathbf{h}) = -\frac{1}{r}|\mathbf{h}|^2 \cos^2 \alpha.$$

Par conséquent, la courbure normale associée à un plan normal π faisant un angle ω avec les génératrices vaut

$$\kappa_\pi = -\frac{1}{r} \sin^2 \omega.$$

Elle atteint son minimum $-\frac{1}{r}$ lorsque π est orthogonal aux génératrices et son maximum 0 lorsqu'il leur est parallèle. Les directions principales en un point sont donc celles de la génératrice passant par ce point et de la tangente qui lui est perpendiculaire.

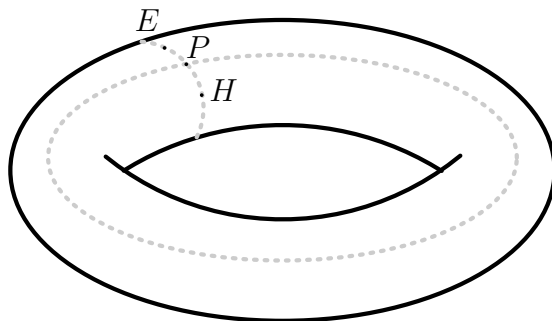


FIGURE 50. Nature des points d'un tore

Considérons un tore. Il admet deux plans tangents perpendiculaires à l'axe de rotation et qui le coupent selon deux cercles. Sur la figure 50, on a reproduit un de ces cercles, en pointillé. Le long de ces cercles, une normale unitaire est localement constante. Par suite, sa dérivée dans la direction d'un vecteur tangent au cercle est nulle. Les points des cercles en question sont donc paraboliques. Le complémentaire des deux cercles dans le tore se décompose en deux parties connexes. Une «extérieure», à laquelle appartient le point E de la figure, dont les points sont manifestement elliptiques et l'autre, «intérieure», à laquelle appartient le point noté H , et dont les points sont tous hyperboliques.

PROPOSITION 60. *La courbure de Gauss est donnée par*

$$\mathbf{K}_a = \det W_a = \frac{KM - L^2}{EG - F^2}.$$

DÉMONSTRATION. Par définition, \mathbf{K}_a est le produit des valeurs propres de $-W_a$. C'est donc son déterminant, qui est également celui de W_a . C'est aussi celui de la matrice (31). \square

L'application de Weingarten et la seconde forme fondamentale dépendent de l'orientation de S . Quand on remplace N par $-N$, elles sont remplacées par leurs opposés. Les courbures normales sont également remplacées par leurs opposés. La courbure de Gauss $\det W_a$ est par contre indépendante de l'orientation.

Bibliographie

- [1] M. Audin, *Géométrie*, EDP sciences, 2006.
- [2] C. G. Gibson, *Elementary Geometry of Differentiable Curves*, Cambridge University Press, 2001.
- [3] A. Pressley, *Elementary Differential Geometry*, Springer Undergraduate Mathematics Series, 2001.
- [4] L. Rade, B. Westergren, *Mathematics Handbook for Science and Engineering*, 5th ed., Springer, 2004.