Využití teorie grafů v šachových úlohách

Application of Graph Theory in Chess Problems (Dual-free Leaper and Hopper tours)

(Václav Kotěšovec, 2009)

Úvod – *Introduction*

Tato publikace se zabývá především **jednoznačnými cestami skokanů na různých šachovnicích** a algoritmy hledání hamiltonovských cest v grafech. Výsledkem je pak série korektních šachových úloh, většinou absolutních rekordů. Druhá část je věnována **cestám přeskakujících kamenů**.

*This booklet examines **Leaper and Hopper tours with unique move order** and algorithms for finding Hamiltonian paths in graphs. A consequence is a series of correct chess problems, the majority being absolute length records.*

The first part of this booklet identifies an equivalence between Hamiltonian tours and chess problems of a certain kind (series-movers in which the aim is to stalemate Black by capturing all his men), discusses the finding of such tours by computer, and presents various numerical results. The second part examines some tours of the same kind using hoppers.

Most of the results are „absolute“ (proven optima), but some are identified as only „probable“ (best found to date and an improvement seems unlikely, but an exhaustive search has not been performed). The text is almost wholly in Czech, but the diagrams are self-explanatory.

Nejprve je třeba vysvětlit, jaká byla motivace hledání jednoznačných cest? Tzv. „jezdcova procházka“ (*Knight's tour*), tedy hledání cesty jezdce na šachovnici 8×8 (takové, aby prošel všechna pole šachovnice a přitom na žádné nevstoupil dvakrát), je jedním z klasických problémů, který jde ale zařadit spíše do kategorie hádanek (nebo matematických úloh) než do šachových úloh. Z hlediska šachových problémů jde totiž o to, že každá úloha musí mít jen jedno řešení, resp. tolik řešení, kolik stanovil autor skladby. Klasická cesta jezdce (ať už otevřená nebo uzavřená) však tuto podmínku nesplňuje. Řešitele může potěšit, že nějakou takovou cestu odpovídající zadání našel, ale v naprosté většině případů tyto cesty nejsou jednoznačné a možných řešení (tedy cest z počátečního na koncové pole) jsou obvykle tisíce. Jako šachová úloha je proto taková skladba nekorektní.

Celá problematika mě však velmi zaujala a přemýšlel jsem o tom, zda by přesto nebylo možné tyto různé cesty (jezdce nebo obecně skokanů) na šachovnicích transformovat na takové typy úloh, které by obstály i jako **korektní** „šachové úlohy“.

Jednou z možných transformací jsou úlohy typu **sd=n**, tj. sériový pat n-tým tahem, kdy má bílý za úkol sérií tahů postupně sebrat všechny černé kameny. Vtip je v tom, že postup, v jakém musí být kameny sebrány, je jediný možný. Celkový **přehled maximálních délek jednoznačných cest skokanů** na různých šachovnicích přináší **tabulka** na straně 23. Podobného charakteru (s braním všech kamenů) jsou i cesty kamenů typu Locust na str. 64.

Druhou možností jsou úlohy typu SerienZug-Ziel (*series-case*), ve kterých je cílem se sérií tahů co nejrychleji dostat na určené pole. Těmi se zabývám v části „Cesty přeskakujících kamenů“, kapitola 3. Na str. 59 najdeme **tabulku** nejdelších cest podle počtu překážek.
Jiná možnost úloh typu „SerienZug-Ziel“ byla popsána v článku Václav Kotěšovec: Longest Shortest Leaper Paths (Games and Puzzles Journal 20/2001).

Když už jsem měl připravený program na hledání jednoznačných cest, prozkoumal jsem pak i cesty nejednoznačné, resp. uzavřené (ty jsou v případě skokanů z principu nejednoznačné, ale pro kameny typu Locust jednoznačné být mohou, protože cesta opačným směrem není možná). Zkoumáním i nejednoznačných cest jsem zejména v případě skokanů ověřil řadu již existujících výsledků (ze kterých však některé nebyly doposud potvrzeny počítačem) a současně jsem i v této oblasti doplnil výsledky nové.
Totéž platí i pro cesty přeskakujících kamenů, kde v případě úloh zkoumaných v podkapitolách 1, 2 a 5 nemá jednoznačnost zásadní význam, naopak v podkapitolách 3 a 4 je jednoznačnost naprosto zásadní.

Celkově bylo na získání všech výsledků, obsažených v této knize, potřeba asi 4000 hodin počítačového času (k výpočtům jsem použil svůj počítač AMD 64 s dvojjádrovým procesorem), z toho bylo přes 3300 hodin na cesty skokanů, zbytek na cesty přeskakujících kamenů.

Pro zobrazení řešení úloh se osvědčily diagramy obsahující čísla určující pořadí tahů. Řešení ve formátu textu je pak již obvykle nadbytečné. Pokud je přesto někde vloženo, názvy kamenů jsou (kvůli lepší srozumitelnosti pro zahraniční čtenáře) v anglické notaci. Figurkovou notaci jsem použil pouze pro ortodoxní kameny, protože pro exokameny je méně přehledná. Kniha obsahuje celkem 280 diagramů (z toho 211 s čísly), 33 grafů a 20 tabulek.

Moje poděkování za pomoc při sestavování této knihy si zaslouží **John Beasley** (který provedl korekturu většiny mých anglických textů a ochotně pro mě vyhledal dva chybějící prameny ze starých anglických časopisů), **Pavel Kameník, Ivan Skoba** a **Ivan Jarolín** (kteří si přečetli celý text ještě před publikováním a přispěli několika cennými připomínkami).

Praha, zima 2008 – jaro 2009 Václav Kotěšovec

Obsah – *Content*

Úvod	Introduction	1
I. Cesty skokanů	**I. Leaper tours**	4
● Vysvětlení základních pojmů	● Description of basic terms	4
● Základní pojmy z teorie grafů	● Basic terms from Graph theory	5
● Převod šachové pozice na graf	● Transformation of chess position into graph	7
● Řešení šachové úlohy = hledání hamiltonovské cesty v grafu	● Solution of chess problem = searching for Hamiltonian path in graph	8
● Optimalizace odstraňováním hran, kudy už nemůže vést cesta	● Elimination of paths if the degree of some vertex falls below 2	10
● Optimalizace na předčasné koncové pole	● Elimination of paths which reach the final square prematurely	10
● Řešení pomocí dynamického koncového pole	● Solving with an undetermined final square	11
● Porovnání časů řešení úloh různými programy	● Comparison of solving times	12
● Dvě metody probírání všech možných pozic	● Two methods of selecting all possible positions	13
● Přibližování k cíli zleva a zprava	● Reaching the target from above and below	13
● Metoda 1 – Generování všech možných pozic	● Method 1 – Hamiltonian path generation	15
● Warnsdorffův algoritmus	● Warnsdorff‘s rule	17
● Metoda 2 – Kombinatorická, pomocí prázdných polí	● Method 2 – Free squares	15
● Možné optimalizace (jednoúrovňové testy)	● One-level tests for non-Hamiltonian graphs	19
● Kombinace obou metod – výsledky	● Combination of both methods – results	21
● Časy nezbytné k nalezení maximálních jednoznačných cest pro vybrané skokany	● Elapsed time for selected leapers	22
● Maximální délky hamiltonovských cest skokanů podle velikosti šachovnice	● Maximal number of moves for each tour and chessboard	23
● Diagramy a šachové úlohy	● Diagrams and chess problems	24
● Geometricky nejdelší cesta krále	● King tours	51
II. Cesty přeskakujících kamenů	**II. Hopper tours**	52
● Cesta cvrčka přes všechna volná pole šachovnice	● Grasshopper tours	52
● Dostupnost maximálního počtu polí přes nejméně překážek	● Accessibility of maximal number of squares over minimum hurdles	54
● Nejdelší jednoznačná cesta na některé pole	● Longest dual-free path to some square	57
● Locust – sekvence s odstraňováním překážek	● Locust – sequence with capturing of hurdles	64
● Cesta cvrčka s pomocí jezdce (a jiných kamenů)	● Grasshopper tour over Knight	67
Definice použitých exokamenů a exopodmínek	Definitions of fairy pieces and conditions	75
Rejstřík úloh a pozic jiných autorů	Index of problems and positions by other composers	76

I. Cesty skokanů

I. *Leaper tours*

Vysvětlení základních pojmů – *Description of basic terms*

Skokan *(Leaper)* [x,y] – bodový kámen, který se na šachovnici pohybuje na všechny strany tak, že se jeho souřadnice mění o [x,y] (bývá zvykem x a y volit tak, aby $x \leq y$). Jeho možné tahy z pole o souřadnicích $[x_0,y_0]$ jsou v maximálním případě na těchto 8 polí:

$$[x_0+x,y_0+y], [x_0+x,y_0-y], [x_0-x,y_0+y], [x_0-x,y_0-y],$$
$$[x_0+y,y_0+x], [x_0+y,y_0-x], [x_0-y,y_0+x], [x_0-y,y_0-x]$$

Skutečný počet tahů může být menší. V případě, že x=0 nebo y=0, některá pole jsou identická. Ve všech případech koncové pole tahu nesmí překročit okraje šachovnice. Počet možných tahů z daného pole odpovídá stupni příslušného uzlu v grafu.
Nejznámějším případem skokana je jezdec, což je skokan [1,2]. *(Knight is Leaper [1,2])*

Free Leaper – označení takového skokana, kterému jsou na šachovnici dostupná všechna pole *(český termín neexistuje)*. Pro názornost jsem pro zjištění této vlastnosti doplnil do tabulky na str. 23 sloupec „*access from a1*“. V tomto sloupci je pro každého skokana počet polí, která jsou mu na šachovnici 8×8 dostupná z pole a1. Tato hodnota je horním omezením pro délky všech typů cest. Vidíme, že hodnota 63 (tedy všechna možná pole šachovnice 8×8 kromě výchozího) se v tabulce na str. 23 vyskytuje pouze pro 5 typů skokanů:

- [0,1] = vezír *(Wazir)*
- [1,2] = jezdec *(Knight)*
- [1,4] = žirafa *(Giraffe)*
- [2,3] = zebra *(Zebra)*
- [3,4] = antilopa *(Antelope)*

Toto není žádný objev, ale stará známá věc, kterou znal již T. R. Dawson a o které přehledně píše G. P. Jelliss v několika článcích „The Five Free Leapers“ v časopise Chessics, např. v č. 2/1976 nebo 9/1980 nebo v The Games and Puzzles Journal 34/2004. Výrazně to však redukuje „zajímavé“ skokany. Opravdu – těchto 5 skokanů je nejatraktivnějších i při hledání hamiltonovských cest, ostatními skokany jsem se zabýval v podstatě jen pro úplnost.
Z hlediska teorie grafů určení dostupnosti polí z výchozího pole odpovídá hledání nejkratší cesty v grafu ze zvoleného uzlu do ostatních (což je jednoduchá úloha).

Hamiltonovská cesta *(open tour)* – je sekvence tahů skokana po různých polích šachovnice taková, že skokan nevstoupí na žádné pole dvakrát. V teorii grafů se používá spíše termín *Hamiltonian path*. Pro vybranou množinu polí nemusí taková cesta vůbec existovat. Pro určení, zda daný graf je nebo není hamiltonovský, neexistují žádné rozumně použitelné postačující podmínky a v teorii algoritmů je dokázáno, že jde o tzv. NP problém, tedy úlohu, která není řešitelná v polynomiálním čase. Jednoduše řečeno – jde o úlohu velmi těžkou, na vyřešení které nemusí stačit ani desítky hodin počítačového času.

Uzavřená cesta *(closed tour)* – je speciální případ hamiltonovské cesty, na jejímž konci může skokan skočit zpět na počáteční pole (tento poslední skok se obvykle ale do délky cesty již nezapočítává). V teorii grafů se takové cestě říká hamiltonovská kružnice *(Hamiltonian circuit)*.
Tento případ je nejvíce známý a to hlavně díky problému uzavřené cesty jezdce, kterému byly v posledních 200 letech věnovány desítky knih a stovky článků. V této publikaci se jím zabývám jen okrajově. Více viz Chronology of Knight's Tours.
Z tabulky na str. 23 vidíme, že uzavřená cesta vedoucí **přes všechna pole** šachovnice 8×8 je možná právě jen pro jezdce a vezíra. V této oblasti existuje několik vět a hypotéz i pro šachovnice různých rozměrů.

Jednoznačná cesta *(dual-free tour, sequence with unique move order)* – je speciální (ale nejzajímavější!) případ obecné hamiltonovské cesty s jednoznačným pořadím tahů.
Právě jednoznačné cesty mě motivovaly k napsání této publikace a byly prostředkem k vytvoření **korektních** šachových úloh (tj. úloh s právě jedním řešením).

Program se ale pak ukázal jako použitelný i pro hledání nejednoznačných cest (otevřených i uzavřených) a nedalo mi to, abych neověřil do té doby publikované výsledky v této oblasti. Řadu z nich jsem potvrdil, v případě Zebry jsem dokonce našel nové.
Nejednoznačné cesty (uzavřené i otevřené) se podařilo prozkoumat pro všech 35 možných typů skokanů (nejsložitější byla v tomto Zebra). V případě jednoznačných cest se to podařilo téměř také (s vyjímkou několika případů, speciálně jezdce na 8×8, kde je však velmi pravděpodobné, že jde též o hodnoty maximální).

sériovotahový pat (sériový pat, *series direct stalemate*) - bílý vykoná bezprostředně za sebou určený počet tahů tak, aby posledním tahem dal pat druhé straně. Označuje se **sd=n**, kde **n** je počet tahů.

In a series direct stalemate (sd=n) White plays ***n*** *moves to reach a position where Black is in stalemate.*

Základní pojmy z teorie grafů – *Basic terms from Graph theory*

graf *(graph)* – je struktura, skládající se z uzlů, z nichž některé dvojice uzlů jsou spojeny hranami.

uzel *(vertex)* – je bod, ze kterého mohou vést hrany, které jej spojují s jinými uzly. Z hlediska šachové pozice odpovídá každý uzel jednomu poli na šachovnici. Celkový počet uzlů grafu odpovídá počtu polí na šachovnici, v případě šachovnice 8×8 dostáváme graf se 64 uzly. *V textu občas používám termíny uzel nebo pole (podle kontextu) pro jedno a to samé.*

hrana *(edge)* – je spojnice mezi dvěma uzly. Z hlediska šachového určují hrany možné tahy kamenů z daného pole.

stupeň uzlu *(degree of a vertex)* – je počet hran, které vedou z tohoto uzlu. Může být roven nule, maximální hodnota je počet zbývajících uzlů grafu (= celkový počet uzlů - 1).

2	3	4	4	4	4	3	2
3	4	6	6	6	6	4	3
4	6	8	8	8	8	6	4
4	6	8	8	8	8	6	4
4	6	8	8	8	8	6	4
4	6	8	8	8	8	6	4
3	4	6	6	6	6	4	3
2	3	4	4	4	4	3	2

V šachové terminologii odpovídá stupeň uzlu počtu možných tahů kamene z tohoto pole. Příklad ukazuje stupně uzlů pro jezdce na jednotlivých polích (uzlech) šachovnice. Vidíme, že v tomto případě se hodnoty stupňů pohybují mezi 2 až 8.

Cesta v grafu *(path in graph)* – je sekvence na sebe navazujících hran. Z hlediska šachového cesta odpovídá možným sekvencím tahů, speciálně jednou z cest je i řešení úlohy. Nejčastější typy cest v grafech jsou tyto tři:
Nejkratší cesta v grafu *(shortest path)* je nejkratší spojnice vedoucí mezi danými uzly. Cesta nemusí procházet všemi uzly grafu. Nalezení takové cesty je velmi jednoduché, z hlediska šachového odpovídá dostupnosti daného pole (tj. nejmenšímu počtu tahů, ve kterých se kámen může dostat z počátečního na koncové pole). V případě tzv. řídkých grafů (což je případ i těchto šachových grafů, kde stupeň uzlů nikdy nepřesahuje hodnotu 8) má algoritmus hledání nejkratší cesty v grafu **lineární složitost**. Podrobnější popis algoritmu uvádím také v části II.

13	2	9	6	7	4	11	2
2	11	6	5	8	9	4	11
9	6	7	10	3	10	9	4
6	5	10	1	12	3	8	7
7	8	3	12	1	10	5	6
4	9	10	3	10	7	6	9
11	4	9	8	5	6	11	2
0	11	4	7	6	9	2	13

Tabulky určují nejkratší cestu kamenů z pole a1 na všechna ostatní pole šachovnice. Tabulka vlevo je pro antilopu (skokana [3,4]), tabulka vpravo pro jezdce. Vidíme, že oběma kamenům jsou dostupná všechna pole šachovnice.

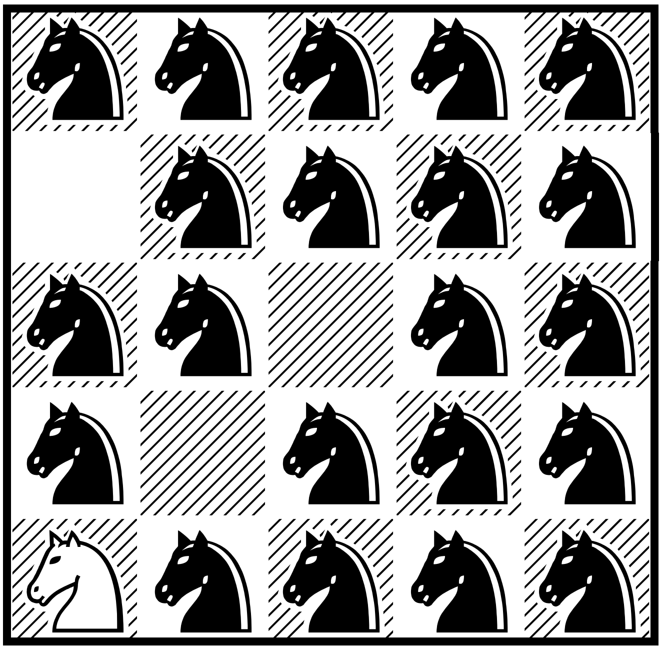
5	4	5	4	5	4	5	6
4	3	4	3	4	5	4	5
3	4	3	4	3	4	5	4
2	3	2	3	4	3	4	5
3	2	3	2	3	4	3	4
2	1	4	3	2	3	4	5
3	4	1	2	3	4	3	4
0	3	2	3	2	3	4	5

Eulerovská cesta v grafu *(Eulerian path)* musí projít všemi **hranami** grafu, přičemž každou hranu je možno použít pouze jednou (uzly je ale možno procházet i vícekrát). Odpovídá to nakreslení obrazce jedním tahem. Jednoduchou podmínkou na okamžité určení, zda graf je či není eulerovský, je, že stupně všech uzlů (s vyjímkou počátečního a koncového) musí být sudé. Pokud má navíc cesta končit v počátečním bodě, jde o eulerovskou kružnici *(Eulerian circuit)* a ta existuje v grafu právě tehdy, pokud stupně všech jeho uzlů jsou sudé (Euler, 1736). Nalezení eulerovské cesty je pro počítač snadná úloha. Z hlediska šachového jsou ale tyto typy cest poměrně nezajímavé, mohou se však uplatnit v různých hádankách.

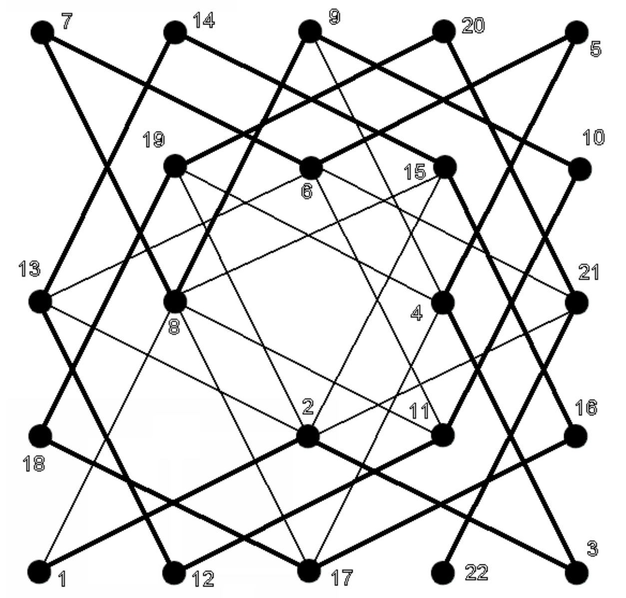
Hamiltonovská cesta v grafu *(Hamiltonian path)* musí projít všechny **uzly** grafu, přičemž každým uzlem je možno projít pouze jednou (některé hrany mohou přitom zůstat nevyužity). Žádná prakticky využitelná podmínka na snadné určení, zda graf je či není hamiltonovský, neexistuje. Nalezení hamiltonovské cesty je i pro počítač velmi obtížná úloha. Z hlediska šachového odpovídá **řešení šachové úlohy**, proto je pro nás tento typ cesty nejzajímavější. Samozřejmě, řada grafů není hamiltonovských, to odpovídá **neřešitelné** šachové úloze.

Více o grafech viz např. Wikipedie Teorie grafů, Graph theory.

Převod šachové pozice na graf – *Transformation of chess position into graph*

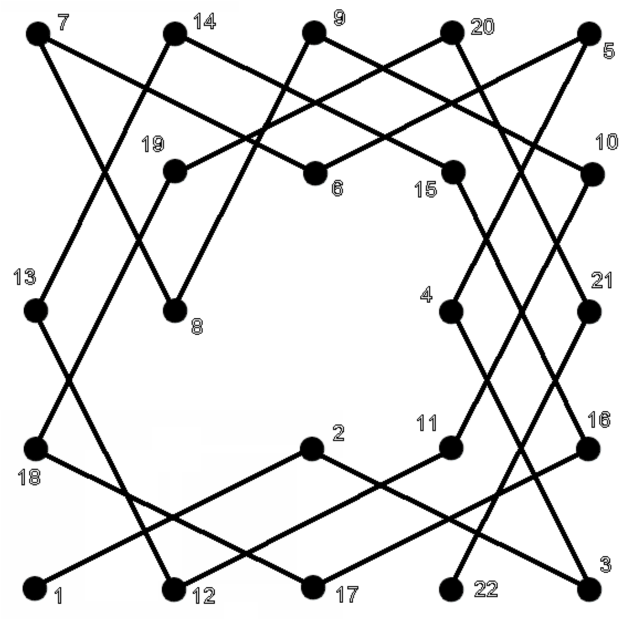


šachová pozice
(chess position)



odpovídající graf
(tučnějšími čarami je označena jednoznačná cesta)

Hamiltonovská cesta



Reprezentace horního grafu v počítači vypadá takto:

pole square	uzel vertex	stupeň degree	dostupné uzly sorted adjacency list					
a1	1	2	2	8				
c2	2	6	1	3	13	15	19	21
e1	3	2	2	4				
d3	4	5	3	5	9	17	19	
e5	5	2	4	6				
c4	6	5	5	7	11	13	21	
a5	7	2	6	8				
b3	8	6	7	1	9	11	15	17
c5	9	3	4	8	10			
e4	10	2	9	11				
d2	11	4	10	6	8	12		
b1	12	2	11	13				
a3	13	4	12	6	2	14		
b5	14	2	13	15				
d4	15	4	2	14	8	16		
e2	16	2	15	17				
c1	17	4	4	8	16	18		
a2	18	2	17	19				
b4	19	4	2	18	4	20		
d5	20	2	19	21				
e3	21	4	20	6	2	22		
d1	22	1	21					

Je dobré si ještě všimnout toho, že dostupné uzly jsou setříděné podle svých stupňů směrem od nejmenšího, což je princip tzv. metody Warnsdorff. V tomto pořadí budou pak i probírány během řešení, což výrazně urychlí nalezení první nejdelší cesty.

Řešení šachové úlohy = hledání hamiltonovské cesty v grafu
Solution of chess problem = searching for Hamiltonian path in graph

Nalezení nějaké hamiltonovské cesty znamená, že úloha má řešení, které ale může být duálové (když je postup nejednoznačný s možným přehozením tahů). Nalezení nějaké hamiltonovské cesty nevylučuje existenci jiné hamiltonovské cesty ze stejného počátečního pole, končící na libovolném jiném (příp. i shodném) poli. Po nalezení nějakého nejednoznačného řešení jsou obvykle ostatní řešení už nezajímavá, řešení může skončit.

Korektní úloha = hamiltonovská cesta existuje a je jediná možná. Tím je určeno, že koncové pole je jediné možné a cesta na ně je jednoznačná. Po nalezení nějakého řešení je třeba pokračovat v hledání. K ověření korektnosti je potřeba probrat všechny možné cesty. Proto je obecně hledání „*dual-free tours*“ obtížnější (časově náročnější) než v případě „*open tours*“, resp. „*closed tours*“.

Můj program na hledání hamiltonovské cesty v grafu používá backtracking, což je obecná metoda (tzv. metoda pokusů a omylů), kdy program postupně hledá všechny možné cesty v grafu počínaje počátečním uzlem a zkouší kam až se dostane. Pokud je pokus neúspěšný, nastává tzv. zpětný běh, kdy se vrátí o jednu úroveň zpátky a pokračuje další možností atd. Pokud se tímto způsobem dostane nějakou cestou až do úrovně odpovídající počtu uzlů (tj. projde všemi uzly tak, aby žádným neprošel dvakrát), našel řešení. V tomto případě je uloží do výstupního souboru a buď skončí (pokud je řešení duálové) nebo pokračuje dále a hledá další řešení. Pokud takto probere všechny možnosti, má úloha 1 řešení a je korektní. Pokud najde druhé řešení, je úloha nekorektní (a může skončit). Posledním případem je stav, kdy žádné řešení nenašel, pak je úloha neřešitelná (hamiltonovská cesta neexistuje).

Rozlišíme teď několik případů podle toho, jaký graf je vstupem tohoto programu.

Tato tabulka může být pro někoho, kdo se ještě neseznámil s odkazovanými pojmy, možná trochu méně srozumitelná, doporučuji se k ní vrátit po přečtení dalších kapitol. Hlavně je třeba pochopit postup, který jsem nazval optimalizace N (když v grafu neexistuje žádný uzel stupně 1) a jaký je rozdíl v jejím použití při hledání jednoznačných a při hledání nejednoznačných cest v grafu.

typ vstupního grafu	**hledáme cesty**	**postup**		**koncové pole**	**směr procházení**
výstup z generování (víme, že je hamiltonovský)	jednoznačné	–	optimalizovaný	známe	od konce
	nejednoznačné		neřešíme	známe	–
obecný graf (nemusí být hamiltonovský)	jednoznačné	jednoúrovňové testy	optimalizovaný	známe	od konce
	nejednoznačné		dynamické koncové pole	nemusíme znát	od začátku

1) Pokud je vstupem graf vytvořený metodou generování všech možných cest, víme, že je hamiltonovský a tedy že má určitě aspoň 1 řešení (to, kterým byl vytvořen).

1a) Když hledáme jednoznačné cesty, můžeme použít optimalizaci odstraňováním hran a optimalizaci na předčasné koncové pole. Graf procházíme směrem od koncového pole.

1b) Když hledáme nejednoznačné cesty, úlohu vůbec neřešíme, víme, že řešení má a jednoznačnost nás v tomto případě nezajímá.

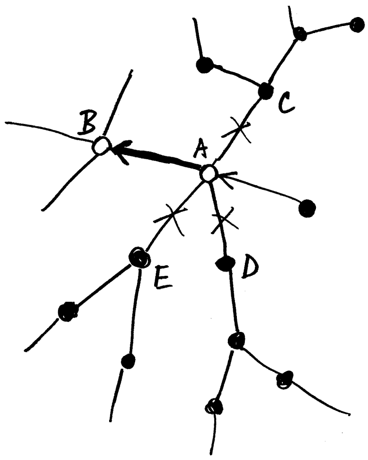
2) Pokud je vstupem **obecný graf** (zde vytvořený metodou prázdných polí, který nemusí být hamiltonovský), provedeme (před hledáním cesty backtrackingem) nejprve sérii jednoúrovňových testů, které mohou o tom, že graf hamiltonovský není, rozhodnout okamžitě. Pokud graf těmito podmínkami projde, postupujeme takto:

2a) Když hledáme jednoznačné cesty, můžeme použít optimalizaci odstraňováním hran a optimalizaci na předčasné koncové pole. Jelikož jde použít optimalizaci „N“, koncové pole vždy známe (grafy, které by neměly žádný uzel stupně 1, byly optimalizací „N“ vyloučeny). Graf procházíme směrem od koncového pole.

2b) Když hledáme nejednoznačné cesty, použijeme modifikovanou optimalizaci odstraňováním hran s dynamickým určováním koncového pole. Úlohu musíme v tomto případě řešit, protože (na rozdíl případu 1b) nevíme, zda má řešení nebo zda je neřešitelná, protože nebylo možné použít optimalizaci „N“ (a grafy bez uzlů stupně 1 prošly). V případě, že koncové pole na začátku neznáme (graf nemá kromě počátečního žádný uzel stupně 1), musíme graf procházet směrem od počátečního pole.

Optimalizace odstraňováním hran, kudy už nemůže vést cesta
Elimination of paths if the degree of some vertex falls below 2

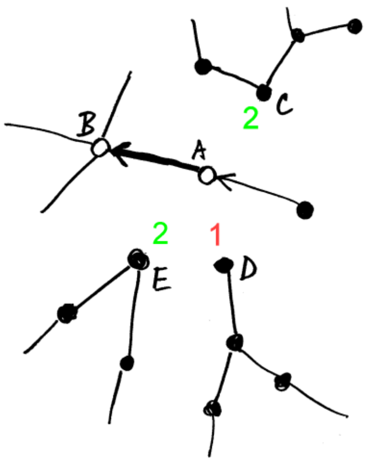
Tuto optimalizaci (kterou bych nazval „Dynamické snižování stupňů uzlů“) použijeme při hledání **jednoznačných** cest. Hlavní myšlenka je v tom, že **pokud by nějakým tahem zůstal v grafu uzel, který by se stal nedostupným**, mohu tuto cestu vyloučit a výrazně tak zredukovat počet probíraných možností. *Tato metoda je mým objevem (při důkladném hledání v knihách i na internetu jsem nic podobného nenašel) a urychluje průchod grafem řádově 10–30×!*



Pokud provádím tah z uzlu A do uzlu B, odpojím všechny ostatní hrany vedoucí z uzlu A s vyjímkou té, odkud jsem přišel. Na obrázku jsou to hrany A-C, A-D, A-E *(zde většina podobných programů končí a zbytečně probírá do hloubky návazné možnosti, které nevedou k cíli)*.

Můj algoritmus dále testuje, zda by po tomto tahu **neklesl stupeň některého z těchto uzlů pod 2** (s vyjímkou případu, kdy jde o koncový uzel, protože ten může mít stupeň 1). Pokud by se tak stalo, cesta A→B není možná!

Best optimalization during solving: ***If a move from A to B would cause the degree of some other vertex to fall below 2, that move is impossible.***



Na obrázku vidíme, že uzly C a E zůstávají dostupnými, ale do uzlu D po rozpojení hrany A-D vede už jen jedna cesta. Pokud pole D není koncové, **stává se uzel D nedostupným** (pokud má být graf hamiltonovský).

Tato optimalizace umožňuje výrazně zredukovat možné cesty v grafu a zrychlení programu (pro velikosti grafů odpovídající šachovnici 8×8) bylo až 30-násobné! Navíc i dynamické snížení stupňů uzlů C a E může mít podobný efekt v dalším průběhu řešení, kdy se některý z těchto uzlů může dostat do podobné situace, v jaké byl uzel D. Jde tedy o jakési řetězové snižování stupňů uzlů.

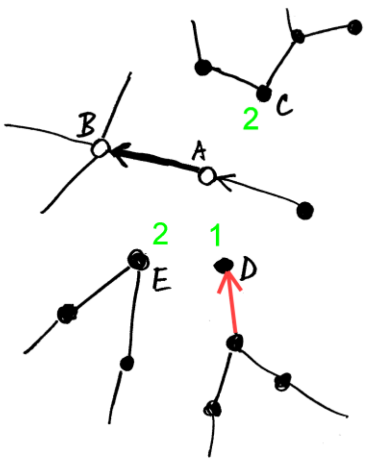
Optimalizace na předčasné koncové pole
Elimination of paths which reach the final square prematurely

Další optimalizace, kterou jsem použil, je následující – když během procházení grafu narazím na uzel, který má být **koncovým** ještě před koncem cesty (tedy v úrovni, která je menší než je celkový počet uzlů grafu), takovou cestu vyloučím. Postup lze použít jen v případě hledání jednoznačných cest. Při hledání nejednoznačných cest lze použít jen částečně – nelze použít ve fázi, kdy neznáme koncové pole – viz další odstavec. Testy ukazují, že tato optimalizace zrychlí řešení asi 3×.

Řešení pomocí dynamického koncového pole
Solving with an undetermined final square

Tento postup použijeme při hledání **nejednoznačných** cest (pokud koncové pole neznáme). Případ neznámého koncového pole (který vyplývá z nemožnosti použít optimalizaci „N“ v případě hledání nejednoznačných cest) lze řešit jeho **dynamickým určováním** během procházení grafu. Pokud se totiž dostanu do situace, kdy bych při známém koncovém poli cestu eliminoval z důvodu, že by se následným tahem nějaké pole stalo nedostupné, mohu zde, v případě, že by tento uzel nabyl stupně 1, jej prohlásit za pole koncové. V tuto chvíli (směrem od této úrovně dále) lze pak použít všechny optimalizace uvedené v předchozím odstavci s tím, že se vztahují k **aktuálnímu** koncovému poli. V případě, že by se ale tímto tahem dostalo do stejné situace více uzlů než jeden, cesta není možná. Pokud (při zpětném běhu backtrackingu) tah vrátím, musím vrátit v příslušné úrovni zpět i příznak koncového pole (na příznak, že není známo).

Pokud již byl dynamicky nějaký koncový uzel určen, nemůže být žádný druhý. Proto ve chvíli, kdy koncové pole znám, mohu postupovat (efektivnější) metodou popsanou v předchozí kapitole.



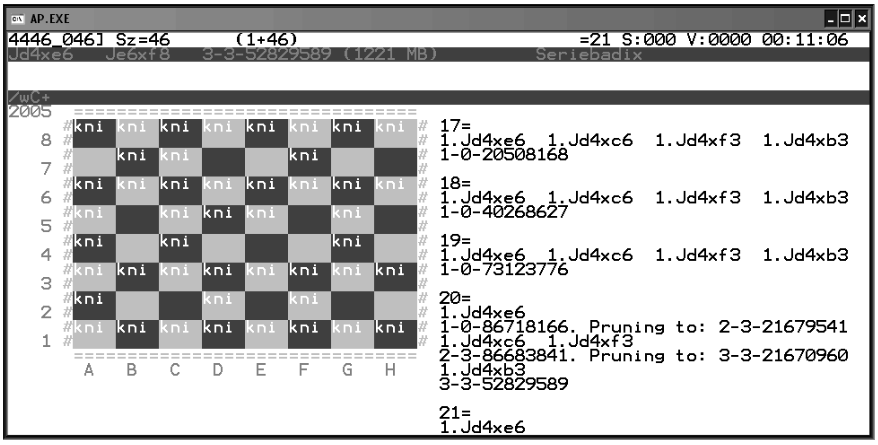
Pokud koncový uzel ještě nebyl určen, mohu si ho **jednou** „**vypůjčit**“ *(borrow a vertex once)* z potenciálně nedostupných uzlů. Např. v grafu výše by byl tah A→B možný s tím, že uzel D je od této chvíle koncovým.

Testy ukazují, že vzhledem k tomu, že musíme při tomto postupu probírat více možností, je hledání cesty asi 6–7× pomalejší než v předchozím případě hledání jednoznačných cest. Přesto je to metoda mnohem efektivnější než případný cyklus přes všechna koncová pole.

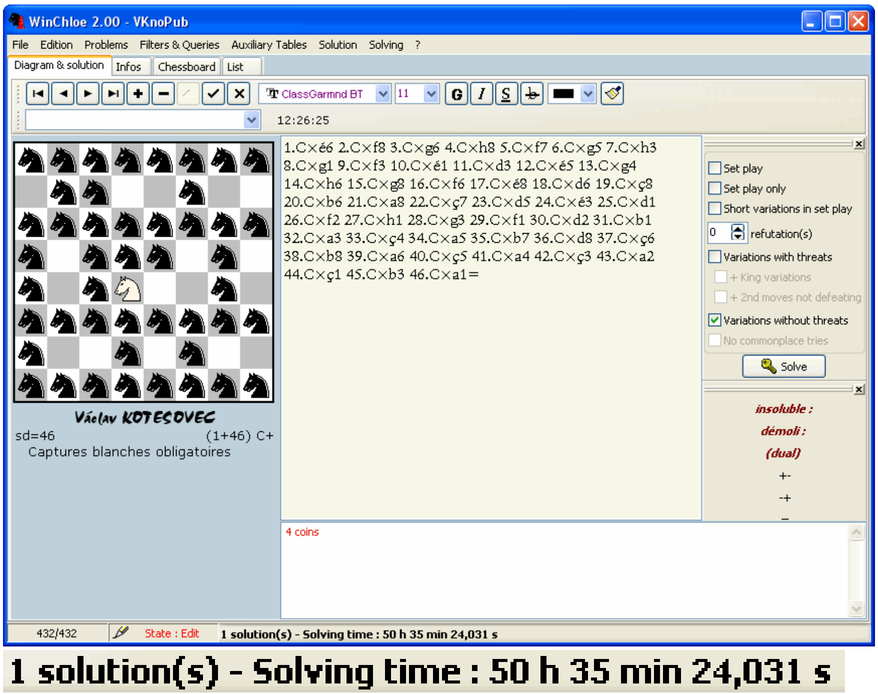
Porovnání časů řešení úloh různými programy – *Comparison of solving times*

Program	*version*	*options*	sd=21	sd=41	sd=44	sd=46
Alybadix	2005	wC+	0 s	1 m 19 s	∞^{*}	∞^{**}
Popeye	4.47	WeisserSchlagzwang	7 s	∞	∞	∞^{***}
WinChloe	2.0	Captures blanches obligatoires	2 s	36 s	23 h 4 m	50 h 35 m
VKsol	1.0	-	0 s	< 1 s	< 1 s	< 1 s

**Solved 14 minutes as sd=20, estimated time for sd=44 is 330 000 hours (= 37 years)! VKsol is (for this type of chess problem) more than 10^9 times faster than Alybadix and 10^5 times faster than WinChloe!*



***Solved 11 minutes as sd=20, estimated time for sd=46 is 1 035 000 hours (=118 years)!* Alybadix se při řešení tohoto sd=46 „zadrhl“ po 11 minutách kolem 20-tého tahu. Odhadovaný čas pro 46 tahů by byl přes 100 let… *(původní obrázek s černým pozadím je kvůli případnému tisku v negaci)*



Program WinChloe, který je na většinu skladeb výrazně pomalejší než Alybadix, je překvapivě na tento typ skladeb s narůstajícím počtem tahů rychlejší než Alybadix i než Popeye. Viz obrázek vlevo.

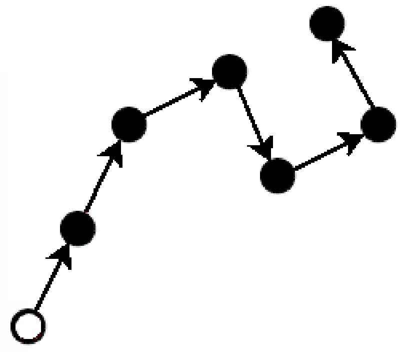
***Popeye jsou na tento typ úloh nejslabší. Jako sd=20 řeší tuto skladbu 1 hodinu 22 minut, čas pro sd=46 je neodhadnutelný.

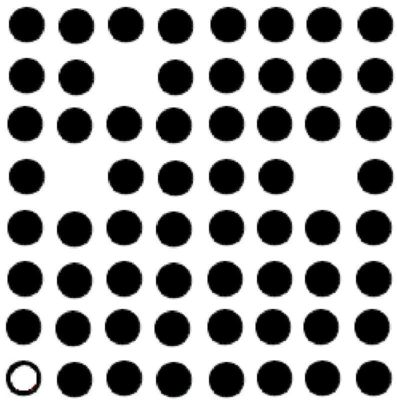
VKsol (můj speciální program vycházející z teorie grafů, popsaný v předchozí kapitole, který je bez uživatelského rozhraní) je ale víc jak miliardkrát rychlejší než Alybadix a víc jak 100000× rychlejší než WinChloe (všechny tyto úlohy řeší v čase pod jednu vteřinu)! Samozřejmě, jde o specializovaný program na pouze jeden typ skladeb, který z principu musí být rychlejší než univerzální řešící program, přesto až tak velký rozdíl jsem neočekával… Hlavní zásluhu má na tom samotný převod na graf a nová metoda dynamického snižování stupňů uzlů, použitá při procházení grafem.

Dvě metody probírání všech možných pozic
Two methods of selecting all possible positions

Method 1

Path Generation





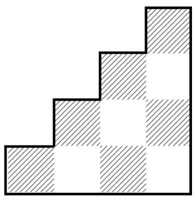
Method 2

Free Squares

Generování možných pozic — Kombinatorická metoda volných polí

Abychom našli rekordní pozice s nejdelšími možnými sekvencemi tahů (hamiltonovskými cestami), je třeba nejprve stanovit postup, jakým budeme možné pozice probírat. Je třeba si uvědomit, že probrat všechny možnosti rozmístění braných černých kamenů (uzlů grafu) na šachovnici je možné jen na velmi malých šachovnicích a obecně to vzhledem k astronomickému počtu možností není možné.

V obou metodách probírání, které budou dále popsány, jsem použil tzv. **symetrizaci**, která vychází z toho, že pozice zrcadlové a různě otočené jsou v podstatě identické, není třeba je zbytečně probírat vícekrát. Snadno zjistíme, že počáteční pole na šachovnici $\mathbf{n}\times\mathbf{n}$ stačí volit jen v rozsahu trojúhelníku se stranou $\left[\frac{n+1}{2}\right]$ *(výraz v hranatých závorkách označuje celou část)*. Např. na šachovnici 8×8 stačí uvažovat pouze těchto 10 ze 64 polí: a1, b1, b2, c1, c2, c3, d1, d2, d3, d4. Ostatní pozice je možné na nějakou takovou pozici snadno transformovat jejich otočením kolem osy **x** nebo **y**, případně otočením kolem hlavní diagonály.



Přibližování k cíli zleva a zprava – *Reaching the target from above and below*

K nalezení maximální cesty je třeba obecně probrat všechny možnosti, takže by se zdálo, že s výjimkou případu, kdy cesta zahrnuje všechna pole na šachovnici (a kdy tedy evidentně už nemůže být delší), bude obtížné takové maximum nalézt. Vymyslel jsem však postup, jak toho lze ve většině případů přeci jen dosáhnout. Pomohou k tomu 2 programy, které se k tomuto maximu budou přibližovat ze dvou stran, jeden zleva, druhý zprava. Pokud vygenerujeme aspoň jednu cestu délky **d** (vtip je v tom, že v tu chvíli už nemusíme hledat další cesty délky **d**, stačí jedna) a pokud dokážeme, že neexistuje cesta délky **d+1**, pak je **d** maximální možná cesta. Omezení z pravé strany prozkoumáme programem, který použije kombinatorický postup a bude probírat všechny možnosti rozmístění prázdných polí (tj. takových polí, které nebudou uzly grafu).

f	počet kombinací
1	63
2	1 953
3	39 711
4	595 665
5	7 028 847
6	67 945 521
7	553 270 671
8	3 872 894 697
9	23 667 689 815
10	127 805 525 001

Pro **f** volných polí je počet kombinací pro všechna možná počáteční pole na šachovnici **n** × **n** dán hodnotou $\binom{n^2-1}{f} \cdot \left[\frac{n+1}{2}\right]$

V tabulce jsou hodnoty kombinací pro 63 možných polí a pro **f** volných polí v rozsahu 1 až 10. Na současných počítačích lze reálně takto prozkoumat možnosti do 8–9 volných polí, např. pro n=8 dostáváme celkem skoro 4 miliardy možných pozic, tuto hodnotu však ještě musíme vynásobit počtem možných počátečních polí (zredukovaných pomocí symetrizace), který je v případě šachovnice 8×8 roven počtu polí v trojúhelníku nahoře =10.

Pokud prozkoumáme všechny možnosti **f** volných polí a **nenajde se žádné řešení**, pak platí pro hledanou maximální délku **m** nerovnost

$$m < n^2 - f - 1$$

Celkově tedy dostáváme oboustranné omezení

$$d <= m <= n^2 - f - 2$$

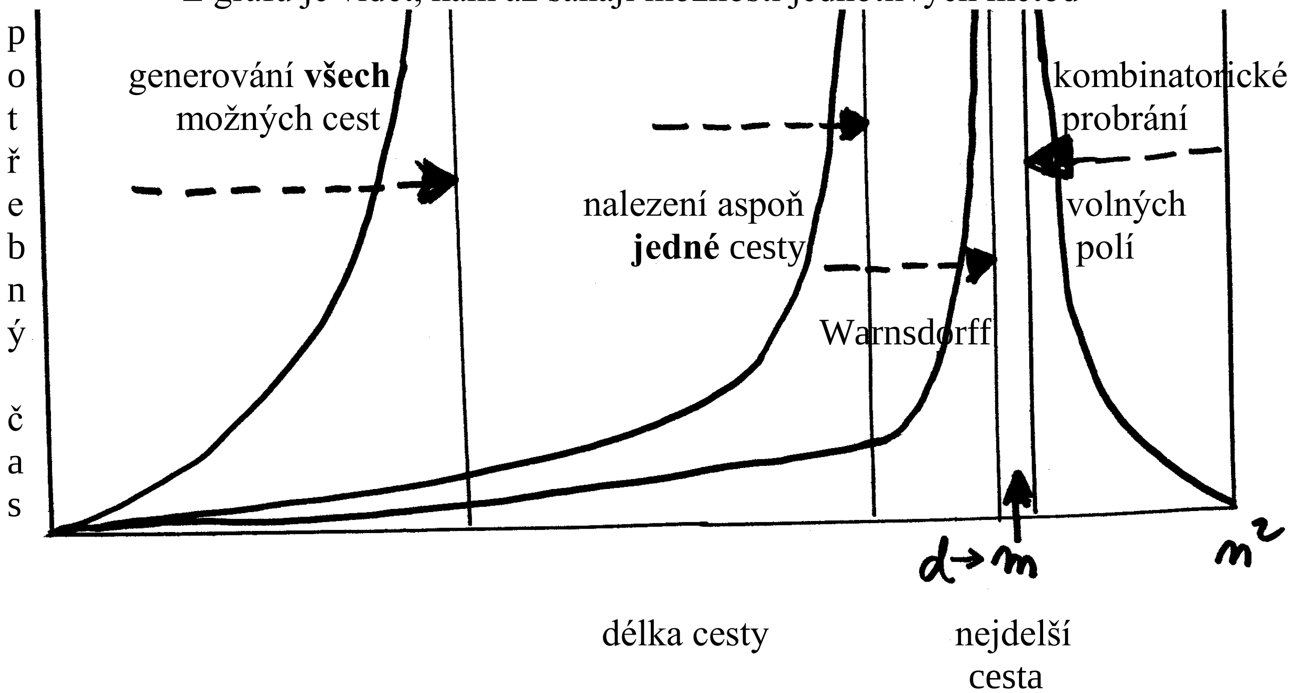
Např. pro žirafu (*Giraffe*) na šachovnici 8×8 jsem nejprve našel jednoznačné řešení 57. tahem a pak jsem dokázal, že neexistuje pozice s 5 (nebo méně) volnými poli, která by měla řešení. Odtud vyplývá, že

$$57 <= m <= 64 - 5 - 2$$

tedy musí být

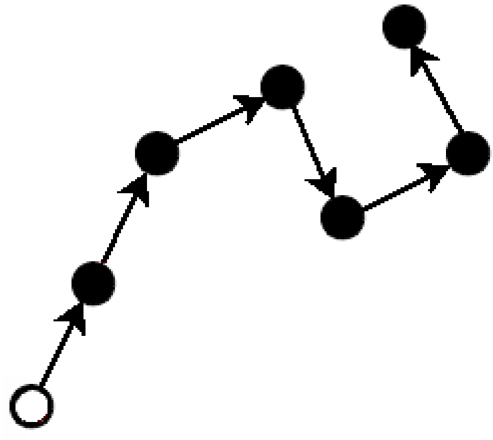
$$\mathbf{m = 57}$$

Z grafu je vidět, kam až sahají možnosti jednotlivých metod



Je vidět, že zleva se dostaneme nejdále, pokud hledáme aspoň jednu cestu metodou generování pozic v kombinaci s optimalizací Warnsdorff. Zprava omezujeme maximální počet tahů kombinatorickou metodou.

Metoda 1 – Generování všech možných pozic
Method 1 – Hamiltonian path generation



Metoda vytváří nové pozice postupně přidáváním nových uzlů k výchozímu uzlu podle pohyblivosti příslušného skokana. Postupně tak zvětšuje možnou cestu až do maximální.
Do další úrovně přecházejí buď všechny cesty (pokud nás nezajímá jednoznačnost) nebo jen některé z nich (v případě, že generujeme jednoznačné cesty).

Pro případ **jednoznačných** cest (který je nejzajímavější) použijeme následující poznatky:

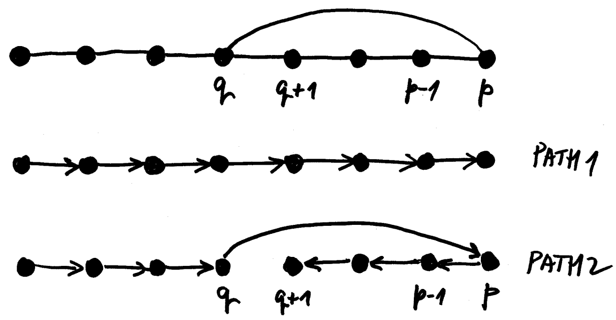
Platí tato **věta** (Kotěšovec, 2008): Pokud z posledního bodu cesty pořadí **p** existuje tah na pole sekvence pořadí **q**, kde q < p - 1 (tj. nejde o cestu, kterou jsem přišel na **p** z **p-1**), pak je úloha **nekorektní**.

Důkaz: Kromě cesty, kterou jsem přišel

1 → 2 → … → p-1 → p

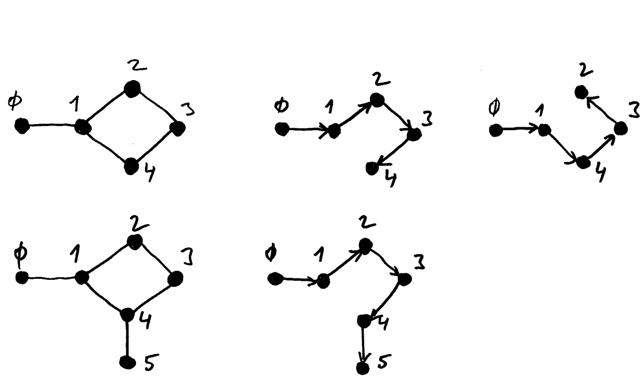
existuje ještě i cesta (procházející všechna pole)
1 → 2 → … → q-1 → q → p → p-1 → p-2 → … → q+2 → q+1

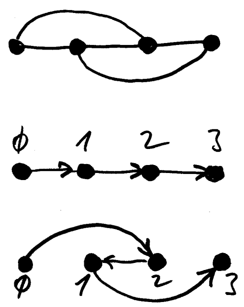
což je **vedlejší řešení**



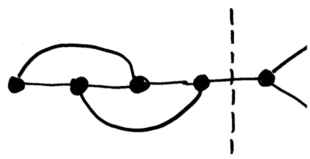
Přesto, že je taková pozice nekorektní, je obecně nutno pokračovat v generování tahů do další úrovně, protože takto může vzniknout pozice s jiným koncovým polem, do kterého je postup jednoznačný.

V následujícím grafu existují z uzlu označeném 0 dvě různé hamiltonovské cesty: 01234 a 01432, taková šachová úloha je tedy nekorektní, přesto přidáním uzlu s číslem 5, dostáváme korektní úlohu s hamiltonovskou cestou 12345.



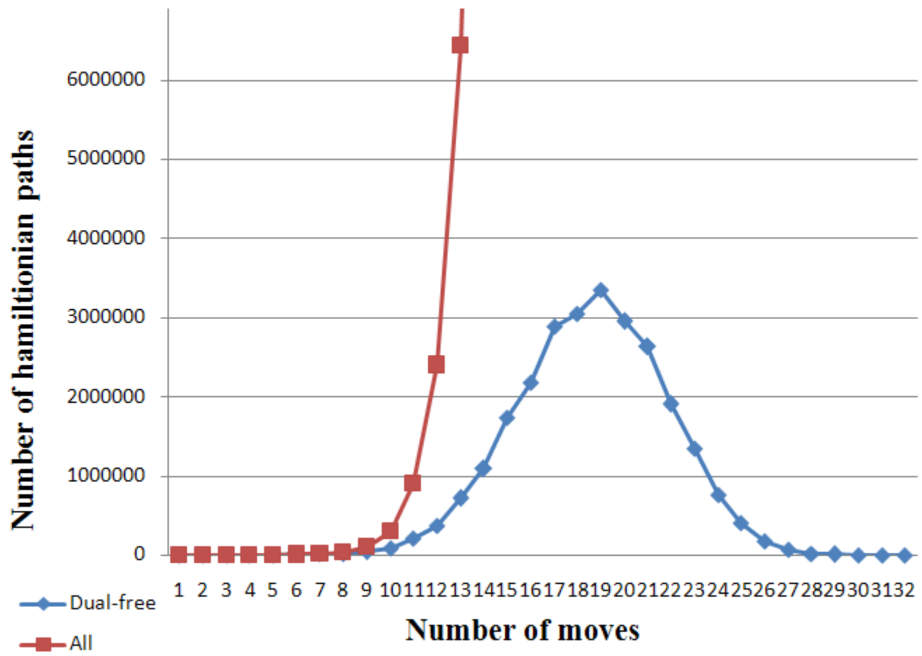


Kdy jde pozici eliminovat s tím, že všichni její následníci budou už nekorektní?
Pozici je možno (bez ztráty možných výstupů) vyloučit a do další úrovně nepokračovat jen tehdy, pokud existují aspoň 2 řešení (plné délky odpovídající aktuální úrovni generování) **končící na stejném poli p** (stačí k tomu najít ještě jedno další takové řešení, protože jedno vždy máme).



První graf vlevo obsahuje dvě různé hamiltonovské cesty 0123 a 0213, které ale obě končí ve stejném uzlu (na stejném poli) „3“. Nyní, když přidáme za uzel „3“ libovolný navazující graf, budou všechny takové cesty už nejednoznačné.

Závěr je ten, že při přímém generování pozic přecházejí do další úrovně
a) pokud hledáme libovolné (i nejednoznačné cesty) – pak všechny pozice
b) pokud hledáme jednoznačné cesty – pak takové pozice, kde neexistuje více řešení končící na tomtéž poli. Musí to být i ty, které jsou na dané úrovni nekorektní (mají jiné řešení končící na jiném poli), protože na další úrovni mohou mít jednoznačné řešení. Výpočty ukazují, že takto přechází do další úrovně průměrně 75 % pozic (asi 25 % je eliminováno).

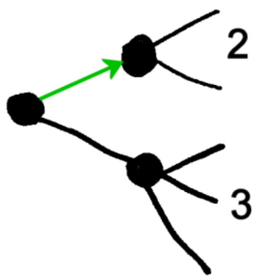


Např. pro jezdce na šachovnici 6×6 je celkový počet hamiltonovských cest (z pole b1) v délce 20 tahů 825 096 996, z toho je pouze 2 943 804 jednoznačných (tj. jen každá 280. cesta je jednoznačná).
S narůstajícím počtem tahů se tento poměr ještě zvětšuje.

Ideálním cílem je nalezení celkového počtu všech možných cest, tento cíl je však nesmírně časově náročný, jednoduše z toho důvodu, že těchto cest je velmi mnoho a procyklit všechny možnosti je nesmírně náročné už jen třeba na šachovnici 6×6 (viz levý graf označený „*All*“)

Warnsdorffův algoritmus – *Warnsdorff's rule*

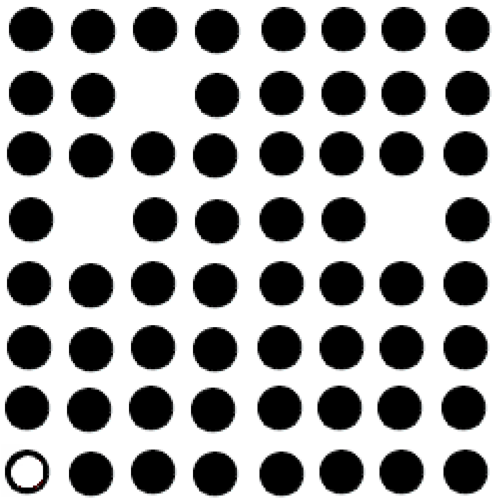
Pokud je cílem nalezení vůbec nějaké cesty, můžeme nechat program běžet nějakou dobu (hodinu, 10 hodin) a čekat, do jaké hloubky se v generování možných pozic dostane. Nějaké výstupy určitě dostaneme, ale zdaleka to nebudou ty maximální (snad jen pro šachovnice 4×4 a 5×5…). Zdálo by se, že s tím moc nenaděláme. Existuje však jednoduchý postup, tzv. Warnsdorffův algoritmus, který výrazně urychluje nalezení prvního řešení s velkou hloubkou. Na šachovnici 8×8 se dostaneme v případě hledání jednoznačných postupů okamžitě v průměru o 4–5 tahů dále! V případě hledání nejednoznačných cest je jeho úspěšnost ještě lepší. Postup vymyslel v roce **1823 H. C. Warnsdorff** a publikoval ho v knize „Des Rösselsprungs einfachste und allgemeinste Lösung". Dá se použít pro konstrukci cesty jezdce i bez počítače.



Warnsdorffův algoritmus uvažuje jako další pole v cestě vždy to, ze kterého vede nejméně možných cest. Např. na obrázku pokračujeme v cestě směrem, kde jsou jen 2 možné návazné cesty. Viz též tabulka dostupných uzlů v kapitole Převod šachové pozice na graf. Např. cesta jezdce na šachovnici 8×8 (ať už otevřená nebo uzavřená) je touto metodou nalezena prakticky okamžitě a metoda umožní během několika vteřin nalézt řešení třeba i na šachovnici 100×100 (u větších šachovnic se používá ještě doplňující podmínka, že v případě, že několik polí má stejný počet navazujících cest, vybere se to pole, které je více vzdáleno od středu šachovnice). Nalezení prvního řešení na šachovnici **n**×**n** je tak možné v téměř lineárním čase.
Je třeba si ale uvědomit, že tento algoritmus neurychlí prozkoumání všech cest (nutné k nalezení maxima), jen se dříve najdou dlouhá řešení. Toho pak můžeme využít k omezování maxima zleva i zprava (v kombinaci s metodou volných polí).

Z hlediska teorie pravděpodobnosti má tato metoda reálný základ. Pokud budeme zkoumat pravděpodobnost, zda náhodný graf je hamiltonovský, je zřejmé, že při pevném počtu uzlů, má větší pravděpodobnost graf s větším počtem hran. Čím více cest v grafu existuje, tím je pravděpodobnější, že některá z nich bude hamiltonovská. Nyní, pokud zvolím nějakou hranu jako další část cesty, tak zapojením nového uzlu do cesty je zřejmé, že z tohoto uzlu bude použita pro další část jen jedna hrana a zbývající hrany, vedoucí z tohoto uzlu, už nebudou moct být použity (protože tímto uzlem smíme projít jen jednou). Pokud tedy zvolíme uzel, z něhož vede **nejmenší počet návazných hran**, počet všech hran, které lze ještě použít, se zmenší nejméně a **pravděpodobnost** nalezení hamiltonovské cesty **bude větší** než v případě, že bychom šli uzlem většího stupně, kdy by odpadlo více hran.

Metoda 2 – Kombinatorická, pomocí prázdných polí
Method 2 – Free squares



Metoda prázdných polí spočívá v tom, že se jako základ vezme plný graf obsahující všechna pole (pro šachovnici **n×n** má takový graf n^2 uzlů). Nyní se zvolí počáteční uzel pevně a proměnná **k-tice uzlů, která se z grafu vždy vyloučí**. Tyto uzly odpovídají prázdným polím na šachovnici, přes která nepovede žádná cesta (resp. nebude se zde brát žádný černý kámen v úlohách typu sd=). Dělá se cyklus přes všechny možné k-tice vybrané ze všech polí šachovnice s vyjímkou počátečního uzlu (který je vždy součástí grafu). Možností rozmístění volných polí je celkem $\binom{n^2-1}{k}$. *Na obrázku je k=3.*

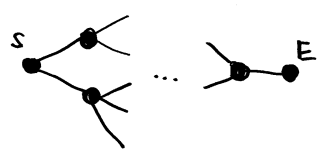
Pokud je maximální délka cesty blízko celkovému počtu polí na šachovnici, provede tato metoda nalezení nejdelší možné cesty nebo důkaz neexistence cesty pro zvolený počet prázdných polí nesmírně rychle. S narůstajícím počtem volných polí se však počet možností výrazně zvětšuje, viz předchozí tabulka.

Nejlepším příkladem je cesta jezdce na šachovnici 6×6, kde má nejdelší možná jednoznačná cesta délku 32 tahů. Přímé generování všech možných jednoznačných cest (od 1 do 32) zabere i s použitím všech optimalizací asi 3 hodiny strojového času. Postup „zprava“, kdy jsou postupně probírány všechny kombinace volných polí od 0, 1, 2, … zabere v tomto případě pouhých 17 vteřin! Šachovnice 6×6 má celkem 36 polí, na 32 bude táhnout jezdec a na 1 sám stojí, takže stačí probrat všechny pozice se 3 volnými poli, kterých je maximálně $\binom{35}{3}$ = 6545 (navíc použitím diagonální symetrie lze tento počet ještě zmenšit, pokud je počáteční pole na hlavní diagonále, tedy v případě počátečních polí a1, b2, c3 a d4).

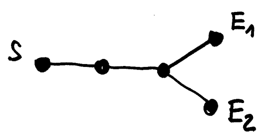
Úskalí kombinatorické metody *(possible difficulties with this method)* – ne všechny pozice musí mít řešení (tj. můžeme takto dostat i graf, který není hamiltonovský).
Pro porovnání – pokud jsme použili metodu generování možných cest, má každá takto vytvořená pozice automaticky tu vlastnost, že určitě má aspoň jedno řešení, totiž to, jakým byla vytvořena. Může být případně nekorektní (mohou existovat ještě jiná řešení s jiným koncovým polem), ale v každém případě řešení má. V případě vytváření pozice kombinatorickou metodou prázdných polí, toto bohužel neplatí, taková pozice nemusí mít řešení. Algoritmus hledání hamiltonovské cesty v grafu pak musí projít v daném grafu všechny možnosti a řešení nenajde. To je časově náročné, protože jde o backtracking.
V tomto případě je ale možné ještě před spuštěním tohoto grafového algoritmu provést několik jednoduchých testů, které některé pozice vyloučí jako neřešitelné, aniž by se muselo řešení hledat. Tady je několik takových kritérií:

Možné optimalizace (jednoúrovňové testy) – ***One-level tests for non-Hamiltonian graphs***

V případě jednoznačných postupů nejprve hledáme koncové pole. Na to musí vést pouze jediná možná cesta. Na obrázku je to cesta z uzlu S do uzlu E. Platí, že **koncové pole musí být uzel stupně 1** *(final square must be vertex with degree one).* Pro počáteční pole se taková podmínka nevyžaduje.



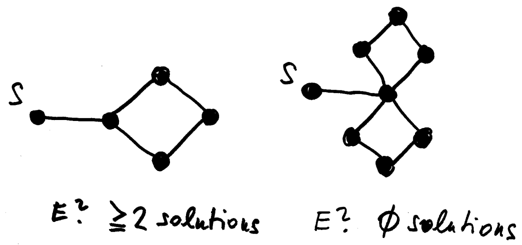
Jaké pozice (grafy) můžeme okamžitě vyloučit, aniž bychom museli hledat cestu složitým backtrackingovým algoritmem? *One-level tests to see if a graph can still be Hamiltonian.*



optimalizace „K“ – pokud má pozice více jak 2 možná koncová pole, nemůže mít řešení (lze použít i při hledání nejednoznačných řešení). Z obrázku je zřejmé, že graf není hamiltonovský.

If two vertices have degree 1, the graph cannot be Hamiltonian.

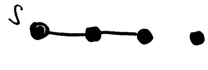
Algoritmus: cyklem přes všechny uzly grafu (s vyjímkou počátečního) zjistím, kolik uzlů má stupeň 1. Označme tento počet **u_1**. Pokud **u_1 > 1**, není třeba se grafem (pozicí) dále zabývat. Testy ukazují, že tato optimalizace **vyloučí v průměru asi 10 % pozic**.
*(**u_1** is the number of vertices with degree 1)*



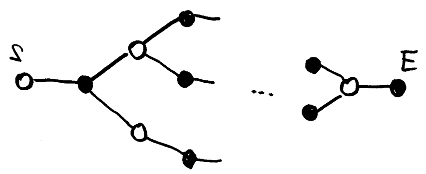
optimalizace „N“ – pokud pozice nemá žádné možné (jednoznačné) koncové pole, je nekorektní. **Má víc jak 1 řešení nebo je neřešitelná** – který z těchto případů nastane, nelze v tuto chvíli určit, v obou z nich je však nekorektní, takže se jí není nutno zabývat. Tuto optimalizaci lze použít jen v případě hledání jednoznačných postupů. Podle předchozího značení je v tomto případě **u_1 = 0**

If a graph has no vertex with degree 1, the corresponding chess problem has multiple solutions or is insoluble. If we are searching for dual-free solutions, the current position is immediately eliminated. If we are searching for all solutions, we must retain it.

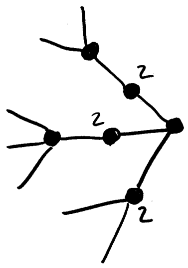
Oba grafy na obrázku nemají kromě počátečního uzlu žádný další uzel stupně 1. Levý graf je sice hamiltonovský, ale má více jak 1 řešení, graf vpravo hamiltonovský není, řešení nemá. Tato optimalizace je jednou z nejdůležitějších, **vyloučí asi 50–60 % všech pozic!**



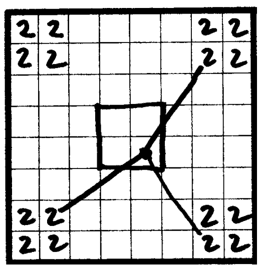
optimalizace „D“ – pokud na šachovnici existuje nedostupné pole (v rámci cesty), nemůže mít úloha řešení. Když v grafu existuje uzel stupně 0 (uzel, ze kterého nevedou žádné cesty), můžeme takový graf vyloučit. Vyloučeno je v průměru asi 1–2 % pozic. Je třeba ještě poznamenat, že tímto se nevyloučí všechny nesouvislé grafy (třeba takové, které se skládají ze dvou větších oddělených částí). Obecně zjistit, zda graf je souvislý, ale nejde pomocí jednoúrovňových testů, takže takové grafy jsou vyloučeny až ve fázi řešení.
A graph is eliminated if any vertex has degree zero.



optimalizace „S“ – test, zda barva koncového pole odpovídá počtu tahů (v případě skokanů, kteří tahem **mění barvu pole**). Optimalizaci nejde použít v případě skokanů [x,y], kde x+y je sudé (např. Fers nebo Camel), protože ti se pohybují jen po polích stejné barvy (v těchto případech to naštěstí ale až tak nevadí, protože díky tomu, že se tyto kameny mohou pohybovat pouze po polovičním množství polí, jde obvykle prozkoumat všechny možnosti v rozumném čase i bez optimalizací).
Např. pro všechny skokany [x,y] označené v textu výše jako Free Leapers platí, že x+y je liché (je to podmínka nutná proto, aby jim byla dostupná všechna pole na šachovnici) a proto lze pro ně tuto optimalizaci použít.
Z principu by mělo být vyloučeno 50 % pozic, skutečnost je však taková, že se optimalizace provádějí v pořadí, jak jsou zde uvedeny a řada pozic již byla v tu chvíli vyloučena optimalizacemi K a N, takže účinnost optimalizace S se pohybuje kolem 15 %.
V případě hledání **uzavřených** cest je tato optimalizace mimořádně účinná, protože v tom případě je barva koncového pole jednoznačně určena a jde okamžitě rozhodnout, zda je daným počtem tahů cesta nemožná. Speciálně odtud třeba ihned vyplývá neexistence uzavřené cesty jezdce na šachovnici 5×5 nebo 7×7 přes všechna pole.
The colour of the final square must be correct for the defined length of path.



optimalizace „3“ – pokud na nějaký uzel „míří“ alespoň 3 uzly stupně 2, hamiltonovská cesta nemůže existovat. Jestli v grafu existuje nějaký takový uzel, lze zjistit staticky cyklem přes všechny uzly.



Touto optimalizací jsou vyloučena asi 2 % pozic. Pro Zebru je to ale až 40 %! Viz obrázek, kde pole ve středu šachovnice nejsou schopna absorbovat hrany mířící na ně z rohů velikosti 2×2 (na diagramu může mířit na pole e4 dokonce ještě čtvrtá hrana z h2).

A graph is eliminated if an vertex is linked to three or more vertices of degree 2. This elimination is very effective for the Zebra.

Sítem těchto optimalizací projde v průměru jen asi 16 % pozic (úspěšnost je do značné míry závislá i na typu skokana). To znamená, že asi **84 % pozic je těmito jednoúrovňovými optimalizacemi vyloučeno** a není je třeba řešit (časově náročnějším) backtrackingem.

The tests in this section eliminate more than 80% of all positions, without the need for time-consuming backtracking.

Ještě je možné doplnit zajímavý údaj týkající se výsledku řešení pozic, které prošly do fáze, kdy bylo nutno je řešit. Z těchto zhruba 16 % pozic bylo asi 7 % neřešitelných a asi 9 % s alespoň 2 řešeními (statistika pro jezdce na šachovnici 6×6). Pozice s právě jedním řešením jsou mezi tím velmi raritní.

Kombinace obou metod – výsledky
Combination of both methods – results

Kombinací těchto dvou metod bylo možné na šachovnici 8×8 poměrně snadno prozkoumat **nejednoznačné cesty** pro všechny skokany. Časově náročná (ale také nejzajímavější) byla pouze cesta zebry ([2,3]skokana), jejíž prozkoumání si vyžádalo 260 hodin počítačového času. Hypotéza G. P. Jellisse (viz Chessics 9/1980), že možná existuje otevřená cesta délky 55, se nepotvrdila, takže jeho pozice s cestou v délce 54 tahů zůstává rekordní a stává se tak rekordem absolutním, dále již nepřekonatelným.
Podařilo se mi však překonat jeho 51 tahový rekord v délce **uzavřené cesty** zebry na šachovnici 8×8! Nejdelší taková cesta je 53 tahová. Opět jde o rekord absolutní. Uzavřené cesty 54 tahů dlouhé nejsou (pro skokany měnící každým tahem na šachovnici 8×8 barvu pole) vůbec možné a že neexistuje cesta délky 55 vyplývá z toho, že neexistuje žádná taková cesta (ani otevřená), což jsem dokázal svým programem využívajícím kombinatorickou metodu – zde pro 0 až 8 volných polí.

V případě hledání **jednoznačných cest** (ze kterých je pak možné vytvořit korektní šachové úlohy) jsem kompletně prozkoumal cesty všech možných skokanů na šachovnicích od 4×4 do 8×8. Nejvíce času zabrala zebra na 8×8, kombinatorická metoda pro 0 až 10 volných polí si vyžádala celkem **2250 hodin** počítačového času a výsledkem byl důkaz neexistence sd=53 s jednoznačným postupem. V tabulce na str. 23 zůstaly už jen 2 hodnoty (označené *), které by teoreticky ještě mohly být překonány, považuji to však za velmi málo pravděpodobné:

- Jezdec na 7×7 – nejdelší nalezená jednoznačná cesta má délku 41 tahů.
- Jezdec na 8×8 – nejdelší nalezená jednoznačná cesta má délku 53 tahů.
  Na prozkoumání všech možností by nestačilo ani 100 let… Určitou šanci vidím ve vylepšení kombinatorické metody nějakým algoritmem, který by rychleji eliminoval pozice, kde hamiltonovská cesta neexistuje (jinak víme, že existuje velké množství cest jezdce v plné délce 63 tahů a test, zda jsou takové nebo kratší hamiltonovské cesty jednoznačné, by byl možný již stávajícími prostředky)

Ve všech těchto 3 případech jsem navíc použil několik pomocných metod, které sice neprobírají všechny možnosti, ale výrazně snižují pravděpodobnost nalezení takové pozice.
První takovou metodou byla **metoda náhodných čísel** (někdy nazývaná metoda Monte Carlo). Tam, kde nebylo možné prozkoumat všechny možnosti, testoval jsem náhodné kombinace prázdných polí. Metoda nenašla žádná řešení, ale současně jsem ji ověřil pro případy mající řešení a tam řešení našla (i když se neprobraly všechny možnosti, ale jen jejich náhodný vzorek). Tyto testy jsem nechal běžet 10 hodin pro každé počáteční pole, tedy celkem 100 hodin pro každý z těchto případů.

Navíc jsem použil i metodu přímého generování pozic s různými **časovými omezeními** (testoval jsem vždy 10 hodin pro každé počáteční pole). Při jiném testu bylo dalším omezením probírání vždy maximálně 2 nebo 3 z vygenerovaných následných polí. Vzhledem ke kombinaci s metodou Warnsdorff toto mělo racionální důvod, protože metoda Warnsdorff setřídí vygenerované možné tahy podle počtu možných tahů z těchto polí směrem od nejmenšího. Tedy na začátku se v každé úrovni probírají tahy, ze kterých je dále jen 1 možnost nebo 2 možnosti atd. Omezení těchto tahů např. na 2 proto eliminuje ty tahy, kde je daleko menší pravděpodobnost, že by tudy mohla vést cesta a nechává ve stromu možností jen ty, které jsou více pravděpodobné.

V případě kombinatorické metody jsem také experimentoval s různými **časovými omezeními**, na rozdíl od postupu popsaném v předchozím odstavci, jsem však neomezoval celkovou dobu výpočtu, ale dobu řešení každé pozice. Pokud je náhodný graf hamilotonovský, je řešení (ať už má jedno nebo více) nalezeno téměř okamžitě, kdežto v případě neřešitelné pozice (kdy v grafu neexistuje hamiltonovská cesta), může takové kompletní řešení trvat i několik minut. Experimentálně jsem si stanovil jakousi **bezpečnou časovou hranici** (kolem 0,2 s), kterou když doba řešení překročí, už určitě žádné řešení nenajde. Jinými slovy, pokud nějaká hamiltonovská cesta existuje, je mým programem nalezena do 100 ms a při vyšším čase už téměř s jistotou neexistuje a je (v tomto smyslu) zbytečné řešení dokončovat, když pro tyto případy stejně nemáme šanci v rozumném čase všechny možnosti prozkoumat. Ještě je třeba poznamenat, že pokud by už měl program v okamžiku vypršení časového limitu jedno řešení nalezené, nechám jej vždy dořešit bez ohledu na časový limit.

I tak by pro kompletní potvrzení nejsložitějšího případu, nejdelší jednoznačné cesty jezdce na šachovnici 8×8, bylo potřeba přes 100 let strojového času. To je pro jeden počítač čas nedosažitelný, teoreticky by však již dnes byl takový projekt řešitelný např. systémem BOINC (zahrnující např. známý projekt hledání mimozemských civilizací SETI), pokud by se našlo např. 1000 nadšenců, kteří by tomu byli ochotni věnovat svůj strojový čas – což při porovnání s obdobnými projekty není až taková utopie, např. do projektu N-Queens se zapojilo asi 4000 lidí a výpočet hodnoty pro n=26 si vyžádá asi 400 let strojového času, reálná doba výpočtu se pohybuje v řádu měsíců. Z hlediska šachového by však v mém projektu s největší pravděpodobností už k nějakému **kvalitativnímu** zlepšení (nalezení úlohy v délce 54 tahů) nedošlo, pouze by bylo asi potvrzeno, že délka 53 tahů představuje **absolutní** rekord.

Jelikož ani kombinace všech těchto popsaných testovacích metod nevedla k nalezení žádných pozic s hamiltonovskou cestou, považuji i čísla, označená v tabulce na str. 23 hvězdičkou, s velkou pravděpodobností už za finální. **Jejich zlepšení i o jeden jediný tah by bylo velkým překvapením.** Předpokládám, že rychlejší počítače za 10–20 let tyto moje výsledky potvrdí.

Časy nezbytné k nalezení maximálních jednoznačných cest pro vybrané skokany
Elapsed time for selected leapers

	board →	5×5	6×6	7×7	8×8	*method*
Leaper		*time*				
[0,1]	**Wazir**	1 s	2 m			1
			1 s	3 m	90 h	2
[1,1]	**Fers**	0	0	0	3 s	1
[1,2]	**Knight**	4 s	3 h			1
			17 s	*>2000 h*	*>100 y*	2
[1,3]	**Camel**	0	0	11 s	37 m	1
[1,4]	**Giraffe**	0	0	5 m		1
				6 s	150 h	2
[2,3]	**Zebra**	0	0	44 m		1
					2250 h	2
[3,4]	**Antilope**	0	0	0	8 s	1

(v případě ostatních skokanů byly potřebné časy téměř nulové)

Maximal number of moves for each tour and chessboard

Maximální délky hamiltonovských cest skokanů podle velikosti šachovnice

	Board / šachovnice		4×4	5×5	6×6	7×7	8×8	8×8		
	Leaper skokan		*dual free tour* jednoznačná cesta					*open tour* otevřená	*closed tour* uzavřená	*access from a1* dostupnost
[0,1]	**Wazir**	vezír	14	22	32	44	**59**	63	63	63
[0,2]	**Dabbaba**	dababa	2	6	6	14	**14**	15	15	15
[0,3]			2	2	2	6	**6**	8	7	8
[0,4]			0	2	2	2	**2**	3	3	3
[0,5]			0	0	2	2	**2**	3	3	3
[0,6]			0	0	0	2	**2**	3	3	3
[0,7]			0	0	0	0	**2**	3	3	3
[1,1]	**Fers**	fers	6	10	15	22	**28**	28	27	31
[1,2]	**Knight**	jezdec	11	21	32	41*	**53***	63	63	63
[1,3]	**Camel**	velbloud	4	10	15	19	**28**	31	31	31
[1,4]	**Giraffe**	žirafa	0	14	26	45	**57**	62	61	63
[1,5]	**Ibis**		0	0	8	18	**26**	29	25	29
[1,6]	**Flamingo**	flamingo	0	0	0	22	**42**	44	43	47
[1,7]			0	0	0	0	**12**	13	13	13
[2,2]	**Alfil**	alfil	1	2	2	6	**6**	6	5	7
[2,3]	**Zebra**	zebra	2	14	29	36	**52**	54	53	63
[2,4]	**Lancer**		0	6	6	11	**11**	14	13	15
[2,5]	**Korsar**		0	0	4	30	**48**	49	45	59
[2,6]			0	0	0	4	**4**	5	5	5
[2,7]			0	0	0	0	**6**	6	1	6
[3,3]			1	1	1	2	**2**	3	3	4
[3,4]	**Antelope**	antilopa	0	2	4	22	**53**	54	53	63
[3,5]			0	0	2	6	**12**	13	13	13 *(from c1)*
[3,6]			0	0	0	6	**6**	7	7	7
[3,7]			0	0	0	0	**4**	4	1	4
[4,4]			0	1	1	1	**1**	1	1	1
[4,5]			0	0	2	4	**6**	6	1	6 *(from c1)*
[4,6]			0	0	0	2	**2**	2	1	2
[4,7]			0	0	0	0	**2**	2	1	2
[5,5]			0	0	1	1	**1**	1	1	1
[5,6]			0	0	0	2	**4**	4	1	4 *(from b1)*
[5,7]			0	0	0	0	**2**	2	1	2
[6,6]			0	0	0	1	**1**	1	1	1
[6,7]			0	0	0	0	**2**	2	1	2
[7,7]			0	0	0	0	**1**	1	1	1

* = nebyly probrány všechny možnosti, ale je velmi pravděpodobné, že i v těchto případech jde o nejdelší možné cesty [* = *Not all possibilities have been tested, but maximality highly probable*]

Leaper [0,1]

dual-free – 59 moves

15	16	17	18		22	23	24
14	13	12	19	20	21	26	25
	10	11	50	49	48	27	28
8	9	52	51	46	47	30	29
7	6	53	54	45	44	31	32
4	5	56	55	42	43	34	33
3	2	57	58	41	40	35	36
0	1		59		39	38	37

Leaper [0,1]

maximal – 63 moves

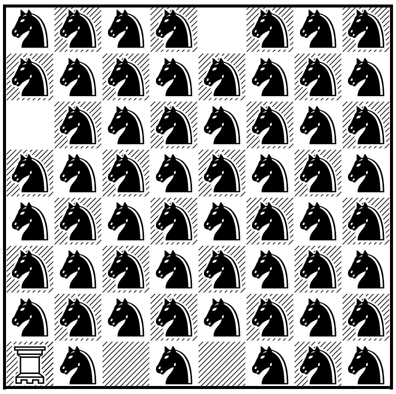
61	62	43	42	29	28	15	14
60	63	44	41	30	27	16	13
59	58	45	40	31	26	17	12
56	57	46	39	32	25	18	11
55	54	47	38	33	24	19	10
52	53	48	37	34	23	20	9
51	50	49	36	35	22	21	8
0	1	2	3	4	5	6	7

Leaper [0,1]

closed – 63 moves

57	56	43	42	29	28	15	14
58	55	44	41	30	27	16	13
59	54	45	40	31	26	17	12
60	53	46	39	32	25	18	11
61	52	47	38	33	24	19	10
62	51	48	37	34	23	20	9
63	50	49	36	35	22	21	8
0	1	2	3	4	5	6	7

1. Václav Kotěšovec
originál



sd=59 Wazir a1 (1+59)
C+

Nejdelší **jednoznačná** cesta vezíra na šachovnici 8×8. Absolutní rekord. Na diagramech číslo 0 odpovídá vždy počátečnímu poli cesty.

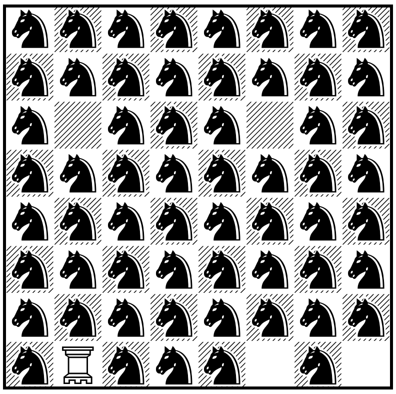
1.WA:b1 2.WA:b2 3.WA:a2 4.WA:a3 5.WA:b3 6.WA:b4 7.WA:a4 8.WA:a5 9.WA:b5 10.WA:b6 11.WA:c6 12.WA:c7 13.WA:b7 14.WA:a7 15.WA:a8 16.WA:b8 17.WA:c8 18.WA:d8 19.WA:d7 20.WA:e7 21.WA:f7 22.WA:f8 23.WA:g8 24.WA:h8 25.WA:h7 26.WA:g7 27.WA:g6 28.WA:h6 29.WA:h5 30.WA:g5 31.WA:g4 32.WA:h4 33.WA:h3 34.WA:g3 35.WA:g2 36.WA:h2 37.WA:h1 38.WA:g1 39.WA:f1 40.WA:f2 41.WA:e2 42.WA:e3 43.WA:f3 44.WA:f4 45.WA:e4 46.WA:e5 47.WA:f5 48.WA:f6 49.WA:e6 50.WA:d6 51.WA:d5 52.WA:c5 53.WA:c4 54.WA:d4 55.WA:d3 56.WA:c3 57.WA:c2 58.WA:d2 59.WA:d1=

Wazir

dual-free – 59 moves

12	13	16	17	42	43	46	47
11	14	15	18	41	44	45	48
10		20	19	40		50	49
9	8	21	22	39	38	51	52
6	7	24	23	36	37	54	53
5	4	25	26	35	34	55	56
2	3	28	27	32	33	58	57
1	0	29	30	31		59	

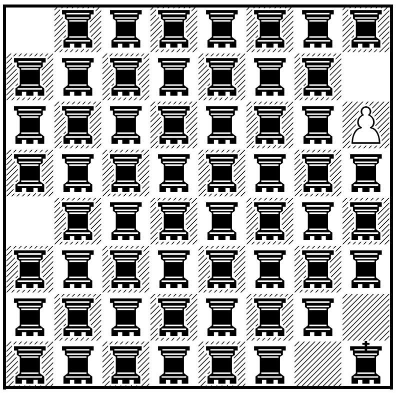
2. Václav Kotěšovec
originál



sd=59 Wazir b1 (1+59)
C+

1.WA:a1 2.WA:a2 3.WA:b2 4.WA:b3 5.WA:a3 6.WA:a4 7.WA:b4 8.WA:b5 9.WA:a5 10.WA:a6 11.WA:a7 12.WA:a8 13.WA:b8 14.WA:b7 15.WA:c7 16.WA:c8 17.WA:d8 18.WA:d7 19.WA:d6 20.WA:c6 21.WA:c5 22.WA:d5 23.WA:d4 24.WA:c4 25.WA:c3 26.WA:d3 27.WA:d2 28.WA:c2 29.WA:c1 30.WA:d1 31.WA:e1 32.WA:e2 33.WA:f2 34.WA:f3 35.WA:e3 36.WA:e4 37.WA:f4 38.WA:f5 39.WA:e5 40.WA:e6 41.WA:e7 42.WA:e8 43.WA:f8 44.WA:f7 45.WA:g7 46.WA:g8 47.WA:h8 48.WA:h7 49.WA:h6 50.WA:g6 51.WA:g5 52.WA:h5 53.WA:h4 54.WA:g4 55.WA:g3 56.WA:h3 57.WA:h2 58.WA:g2 59.WA:g1=

3. Juha Saukkola
Springaren 1997



sd=57 Wazirs royal WAh1 (1+58)

Celou problematiku vhodně doplňuje tato skladba, kterou jsem našel v databázi WinChloe (ID=146922). Úloha bohužel není C+, ani Alybadix ji nezvládne přezkoušet. Pokud ale provedu první 2 tahy, odstraním WAh1 a řeším ji mým programem jako sd=55 s podmínkou, že koncové pole musí být g2, pak je korektní!

1.h:g7 2.g:h8WA 3.WA:g8 4.WA:f8 5.WA:f7 6.WA:e7 7.WA:e8 8.WA:d8 9.WA:d7 10.WA:c7 11.WA:c8 12.WA:b8 13.WA:b7 14.WA:a7 15.WA:a6 16.WA:a5 17.WA:b5 18.WA:b6 19.WA:c6 20.WA:c5 21.WA:d5 22.WA:d6 23.WA:e6 24.WA:e5 25.WA:f5 26.WA:f6 27.WA:g6 28.WA:g5 29.WA:h5 30.WA:h4 31.WA:h3 32.WA:g3 33.WA:g4 34.WA:f4 35.WA:f3 36.WA:e3 37.WA:e4 38.WA:d4 39.WA:d3 40.WA:c3 41.WA:c4 42.WA:b4 43.WA:b3 44.WA:a3 45.WA:a2 46.WA:a1 47.WA:b1 48.WA:b2 49.WA:c2 50.WA:c1 51.WA:d1 52.WA:d2 53.WA:e2 54.WA:e1 55.WA:f1 56.WA:f2 57.WA:g2=

Následují nejdelší jednoznačné cesty vezíra na šachovnicích 4×4, 5×5, 6×6 a 7×7. Vše jsou absolutní rekordy.

Leaper [0,1]

dual-free - 14 moves

14		10	9
13	12	11	8
2	3	4	7
1	0	5	6

Leaper [0,1]

dual-free - 22 moves

22		18	17	16
21	20	19	14	15
4	5	6	13	12
3	2	7	8	11
0	1		9	10

Leaper [0,1]

dual-free - 32 moves

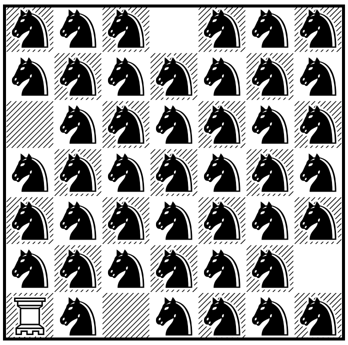
9	10	13	14	31	32
8	11	12	15	30	
7	6		16	29	28
4	5	18	17	26	27
3	2	19	20	25	24
0	1		21	22	23

Leaper [0,1]

dual-free - 44 moves

22	23	24		34	35	36
21	20	25	26	33	32	37
	19	18	27	28	31	38
5	6	17	16	29	30	39
4	7	8	15	14	41	40
3	2	9	10	13	42	
0	1		11	12	43	44

4. Václav Kotěšovec
originál



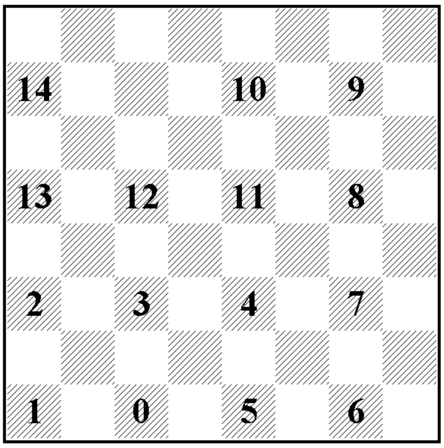
sd=44 Wazir a1 (1+44)
C+

1.WA:b1 2.WA:b2 3.WA:a2 4.WA:a3 5.WA:a4 6.WA:b4 7.WA:b3 8.WA:c3 9.WA:c2 10.WA:d2 11.WA:d1 12.WA:e1 13.WA:e2 14.WA:e3 15.WA:d3 16.WA:d4 17.WA:c4 18.WA:c5 19.WA:b5 20.WA:b6 21.WA:a6 22.WA:a7 23.WA:b7 24.WA:c7 25.WA:c6 26.WA:d6 27.WA:d5 28.WA:e5 29.WA:e4 30.WA:f4 31.WA:f5 32.WA:f6 33.WA:e6 34.WA:e7 35.WA:f7 36.WA:g7 37.WA:g6 38.WA:g5 39.WA:g4 40.WA:g3 41.WA:f3 42.WA:f2 43.WA:f1 44.WA:g1=

Cestám vezíra se důkladně věnuje také internetová stránka George Jellisse Wazir Wanderings (2001).

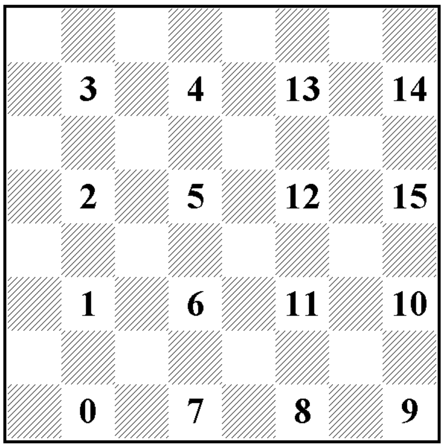
Leaper [0,2]

dual-free - 14 moves



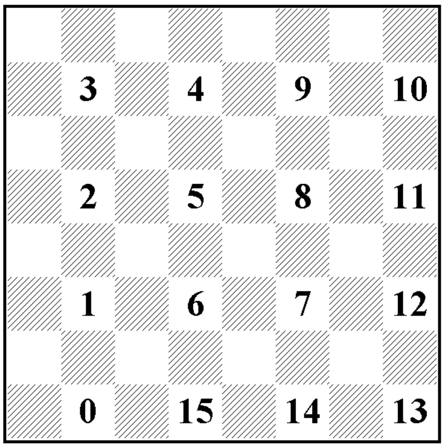
Leaper [0,2]

maximal - 15 moves



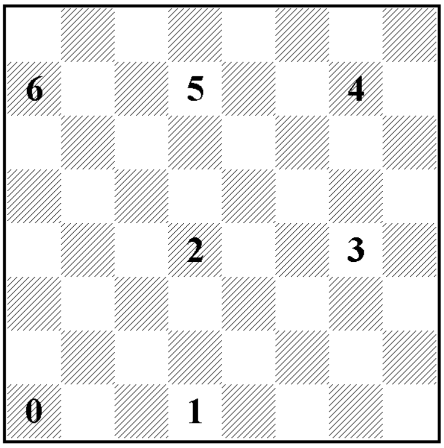
Leaper [0,2]

closed - 15 moves



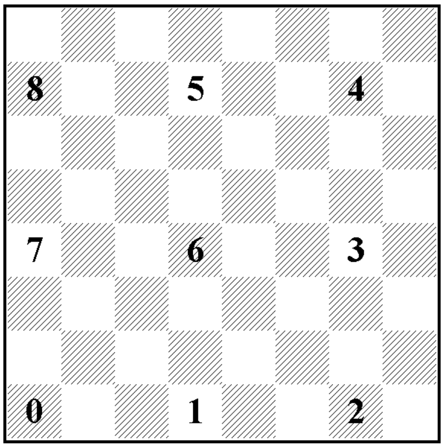
Leaper [0,3]

dual-free - 6 moves



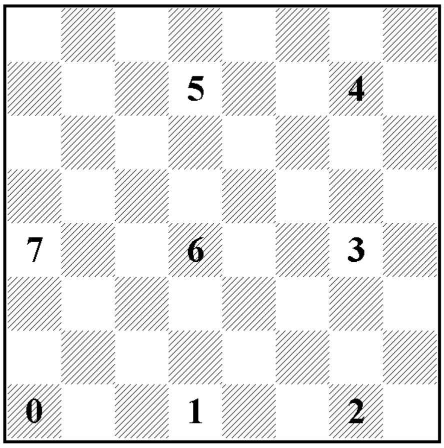
Leaper [0,3]

maximal - 8 moves



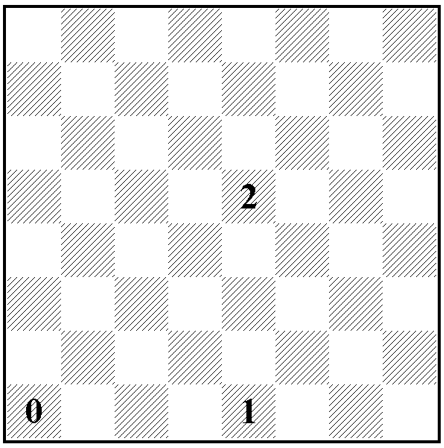
Leaper [0,3]

closed - 7 moves



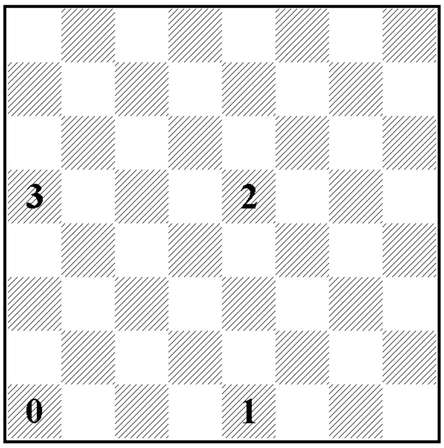
Leaper [0,4]

dual-free - 2 moves



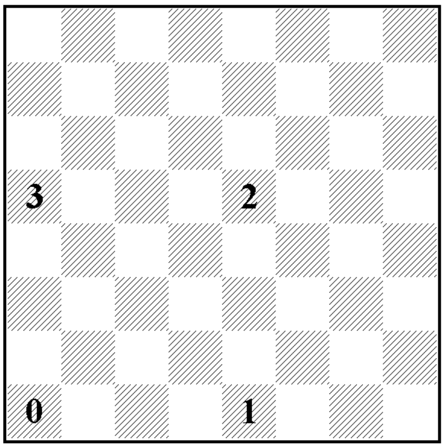
Leaper [0,4]

maximal - 3 moves



Leaper [0,4]

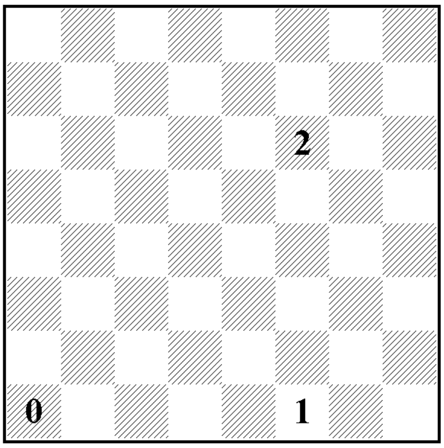
closed - 3 moves



Vidíme, že v tomto (nezajímavém) případě je maximální cesta současně i uzavřená (shodné diagramy jsem ponechal pouze pro úplnost a unifikaci).

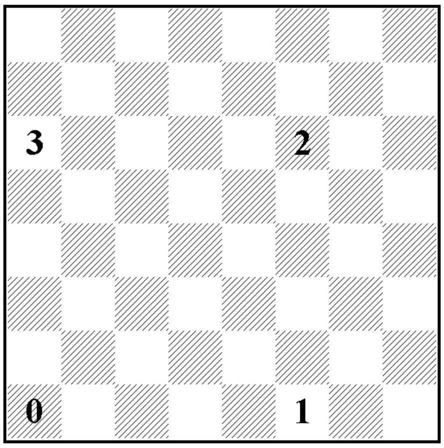
Leaper [0,5]

dual-free - 2 moves



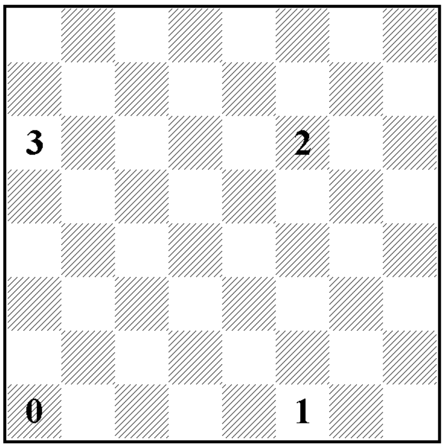
Leaper [0,5]

maximal - 3 moves



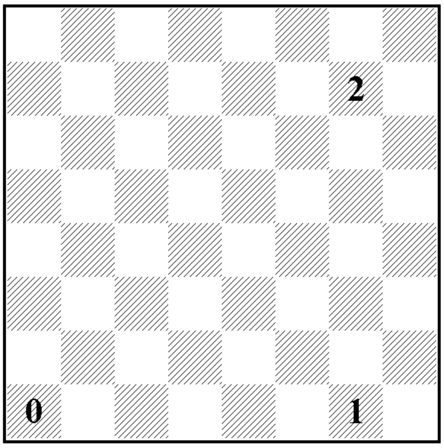
Leaper [0,5]

closed - 3 moves



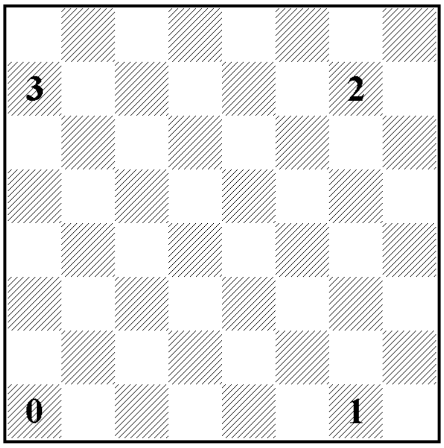
Leaper [0,6]

dual-free - 2 moves



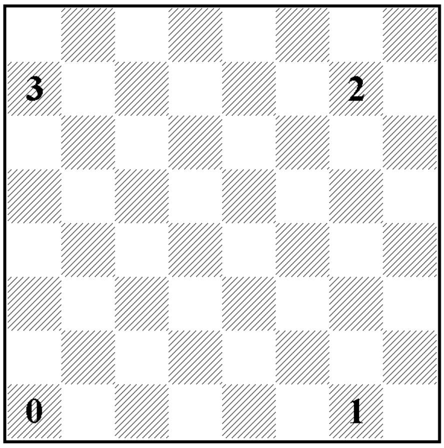
Leaper [0,6]

maximal - 3 moves



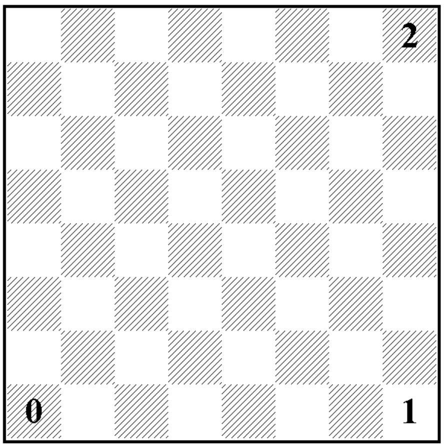
Leaper [0,6]

closed - 3 moves



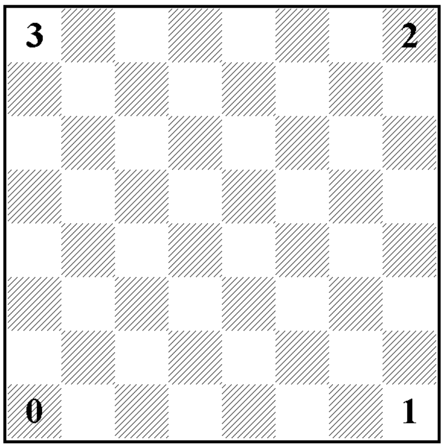
Leaper [0,7]

dual-free - 2 moves



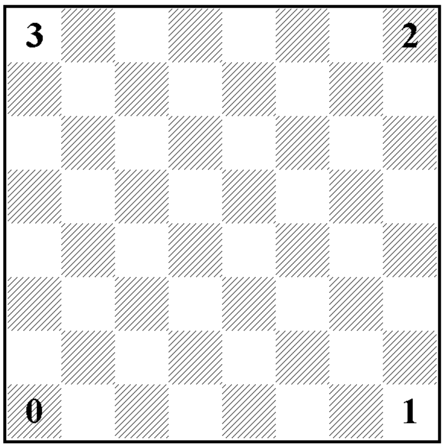
Leaper [0,7]

maximal - 3 moves



Leaper [0,7]

closed - 3 moves



I tyto (ne příliš zajímavé) diagramy jsou zde jen pro úplnost (*only for completeness*).

Leaper [1,1]

dual-free - 28 moves

		17		19		21	
	16		18		20		22
15		13		11		23	
	14		12		10		24
		3		9		25	
	2		4		8		26
1		5		7		27	
	0		6				28

Leaper [1,1]

maximal - 28 moves

	27				13		
28		26		14		12	
	23		25		15		11
22		24		16		10	
	21		19		17		9
		20		18		8	
	1		3		5		7
0		2		4		6	

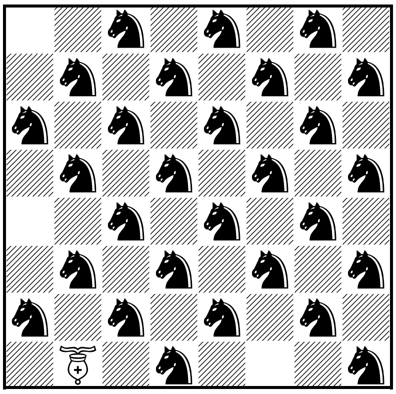
Leaper [1,1]

closed - 27 moves

		7		9		11	
	6		8		10		12
5				23		13	
	4		24		22		14
3		25		21		15	
	2		26		20		16
1		27		19		17	
	0				18		

5. Václav Kotěšovec

originál



sd=28 Fers b1 (1+28)

C+

Nejdelší **jednoznačná** cesta ferse (zkráceného střelce) na šachovnici 8×8. Absolutní rekord.

1.FE:a2 2.FE:b3 3.FE:c4 4.FE:d3 5.FE:c2 6.FE:d1 7.FE:e2 8.FE:f3 9.FE:e4 10.FE:f5 11.FE:e6 12.FE:d5 13.FE:c6 14.FE:b5 15.FE:a6 16.FE:b7 17.FE:c8 18.FE:d7 19.FE:e8 20.FE:f7 21.FE:g8 22.FE:h7 23.FE:g6 24.FE:h5 25.FE:g4 26.FE:h3 27.FE:g2 28.FE:h1=

Následují příklady nejdelších jednoznačných cest ferse na šachovnicích 5×5, 6×6 a 7×7.

Leaper [1,1]

dual-free - 10 moves

	10		8	
		9		7
	2		6	
1		3		5
	0		4	

Leaper [1,1]

dual-free - 15 moves

15		13		11	
	14		12		10
		3		9	
	2		4		8
1		5		7	
	0		6		

Leaper [1,1]

dual-free - 22 moves

	22		20		18	
		21		19		17
	4		6		16	
3		5		7		15
	2		8		14	
1		9		11		13
	0		10		12	

Leaper [1,2]

dual-free - 53 moves

6	27	4	41	8		46	31
3	40	7	28		30	9	48
26	5			42	47	32	45
39	2		24	29	44	49	10
20	25		43	50			33
1	38	19		23		11	14
18	21	36	51	16	13	34	53
37	0	17	22	35	52	15	12

Leaper [1,2]

maximal - 63 moves

25	56	11	40	27	38	9	6
12	41	26	61	10	7	28	37
57	24	55	44	39	62	5	8
42	13	58	51	60	45	36	29
23	54	43	46	63	50	19	4
14	47	52	59	20	35	30	33
53	22	1	16	49	32	3	18
0	15	48	21	2	17	34	31

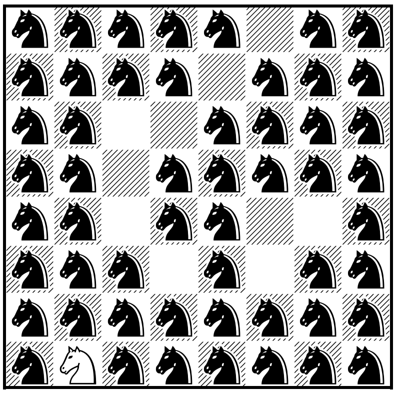
Leaper [1,2]

closed - 63 moves

25	56	11	40	27	38	9	6
12	41	26	53	10	7	28	37
57	24	55	44	39	52	5	8
42	13	62	49	54	45	36	29
23	58	43	46	51	48	19	4
14	63	50	61	20	35	30	33
59	22	1	16	47	32	3	18
0	15	60	21	2	17	34	31

6. Václav Kotěšovec

22 Šachové umění 3/2009



sd=53 (1+53)

C+

Nejdelší nalezená **jednoznačná** cesta jezdce na šachovnici 8×8. Jelikož nebylo časově možné probrat úplně všechny možnosti, je teoreticky možné, že existují i delší jednoznačné cesty, je to však velmi málo pravděpodobné.

1.♘:a3 2.♘:b5 3.♘:a7 4.♘:c8 5.♘:b6 6.♘:a8 7.♘:c7 8.♘:e8 9.♘:g7 10.♘:h5 11.♘:g3 12.♘:h1 13.♘:f2 14.♘:h3 15.♘:g1 16.♘:e2 17.♘:c1 18.♘:a2 19.♘:c3 20.♘:a4 21.♘:b2 22.♘:d1 23.♘:e3 24.♘:d5 25.♘:b4 26.♘:a6 27.♘:b8 28.♘:d7 29.♘:e5 30.♘:f7 31.♘:h8 32.♘:g6 33.♘:h4 34.♘:g2 35.♘:e1 36.♘:c2 37.♘:a1 38.♘:b3 39.♘:a5 40.♘:b7 41.♘:d8 42.♘:e6 43.♘:d4 44.♘:f5 45.♘:h6 46.♘:g8 47.♘:f6 48.♘:h7 49.♘:g5 50.♘:e4 51.♘:d2 52.♘:f1 53.♘:h2=

Úloha se ukázala i jako řešitelsky zajímavá. Do řešitelské soutěže Šachového umění zaslal Eduard Omasta správné řešení v rozsahu 4 stran s řadou diagramů a dokonalou analýzou pozice!

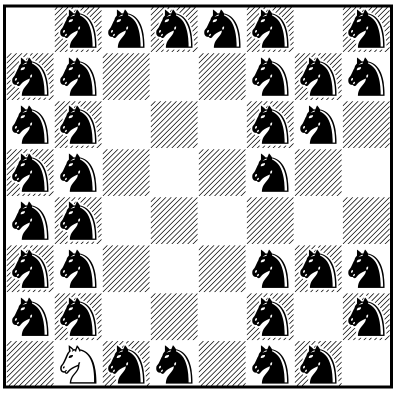
Knight

one variation, 33 moves

	33	4	25	18	21		23
3	26				24	17	20
32	5				19	22	
27	2				16		
6	31						
1	28				12	15	10
30	7				9		13
	0	29	8		14	11	

7. Václav Kotěšovec

originál



sd=33 (1+33)

C+

Příklad 33. tahové pozice ve které má bílý jezdec v každém tahu (úrovni) jen jednu možnost. Taková pozice se najde velmi rychle a je možno probrat v krátkém čase všechny možnosti, takže lze dokázat, že jde o absolutní rekord. Hloubka takových řešení je však velmi omezena (rekord pro obecný postup je v tomto případě o celých 20 tahů delší!). Je to však zajímavý příklad grafu, jehož všechny uzly mají stupeň maximálně 2.

1.♘:a3 2.♘:b5 3.♘:a7 4.♘:c8 5.♘:b6 6.♘:a4 7.♘:b2 8.♘:d1 9.♘:f2 10.♘:h3 11.♘:g1 12.♘:f3 13.♘:h2 14.♘:f1 15.♘:g3 16.♘:f5 17.♘:g7 18.♘:e8 19.♘:f6 20.♘:h7 21.♘:f8 22.♘:g6 23.♘:h8 24.♘:f7 25.♘:d8 26.♘:b7 27.♘:a5 28.♘:b3 29.♘:c1 30.♘:a2 31.♘:b4 32.♘:a6 33.♘:b8=

Leaper [1 , 2]

dual-free - 11 moves

4	7	2	
1	10	5	8
6	3		
11	0	9	

Leaper [1 , 2]

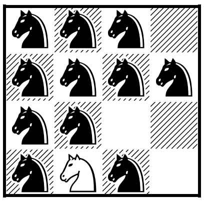
dual-free - 21 moves

2	15	20	9	4
21	10	3	14	19
16	1		5	8
11		7	18	13
0	17	12		6

Leaper [1 , 2]

dual-free - 32 moves

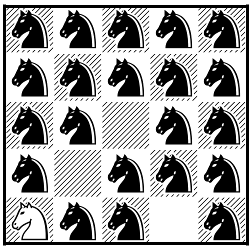
10	25	12	29	8	27
15	2	9	26	13	30
24	11	14		28	7
1	16	3	20	31	
4	23	18		6	21
17	0	5	22	19	32



sd=11 (1+11)

8. Václav Kotěšovec

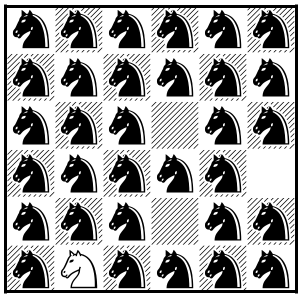
Kutnohorský deník 3.1.2009



sd=21 (1+21)

9. Václav Kotěšovec

originál



sd=32 (1+32)

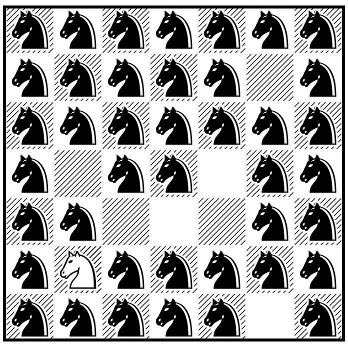
Leaper [1 , 2]

dual-free - 41 moves

34	27	10	5	12	25	22
9	6	35	26	23		13
28	33	8	11	4	21	24
7		29	36		14	3
32	39				17	20
41	0	37	30	19	2	15
38	31	40	1	16		18

10. Václav Kotěšovec

originál



sd=41 (1+41)

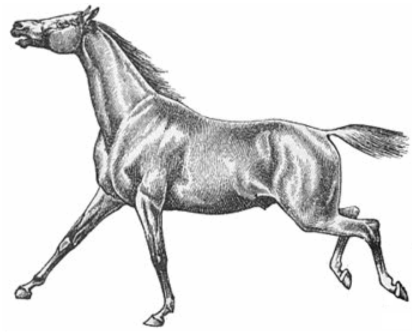
C+

Nejdelší **jednoznačná** cesta jezdce na šachovnici 7×7 má 41 tahů (podobně jako na šachovnici 8×8 není tento rekord absolutní, ale je to velmi pravděpodobné).

1.♘:d1 2.♘:f2 3.♘:g4 4.♘:e5 5.♘:d7 6.♘:b6 7.♘:a4 8.♘:c5 9.♘:a6 10.♘:c7 11.♘:d5 12.♘:e7 13.♘:g6 14.♘:f4 15.♘:g2 16.♘:e1 17.♘:f3 18.♘:g1 19.♘:e2 20.♘:g3 21.♘:f5 22.♘:g7 23.♘:e6 24.♘:g5 25.♘:f7 26.♘:d6 27.♘:b7 28.♘:a5 29.♘:c4 30.♘:d2 31.♘:b1 32.♘:a3 33.♘:b5 34.♘:a7 35.♘:c6 36.♘:d4 37.♘:c2 38.♘:a1 39.♘:b3 40.♘:c1 41.♘:a2=

			48
		48	47
	48	47	48
48	47	48	47

Co se týče nejednoznačných cest jezdce na šachovnici 7×7, je zajímavé, že cesta v plné délce přes všechna pole je možná jen z některých polí (viz diagram). Uzavřené cesty jezdce přes všechna pole na šachovnicích lichých rozměrů nejsou možné. Nejdelší uzavřená cesta jezdce na šachovnici 7×7 má 47 tahů a počáteční pole jsou v tomto směru rovnocenná.



Na tomto místě možná někoho napadlo, jestli někdo zkoumal uzavřené cesty jezdce na libovolně velké šachovnici? Podmínky řešitelnosti problému jezdcovy procházky pro obecné rozměry šachovnice stanovuje Schwenkova věta (Allen J. Schwenk: Which Rectangular Chessboards Have a Knight's Tour?, Mathematics Magazine, 5/1991, str. 325-332)

Pro jakoukoliv šachovnici o rozměrech m × n polí, kde m ≤ n, je uzavřené řešení jezdcovy procházky vždy možné, s výjimkou následujících případů:
1) obě čísla m a n jsou lichá
2) m = 1, 2 nebo 4; m a n nejsou současně obě rovna 1
3) m = 3 a n = 4, 6, nebo 8

Schwenk's Theorem
For any m × n board with m less than or equal to n, a closed knight's tour is always possible unless one or more of these three conditions are true:
1) m and n are both odd
2) m = 1, 2, or 4; m and n are not both 1
3) m = 3 and n = 4, 6, or 8

Problém existence cesty jezdce byl vyřešen i na válcových a prstencových šachovnicích. Znění následujících dvou vět jsem převzal z knihy Across the Board: The Mathematics of Chessboard Problems, John J. Watkins, 2004, (str. 67 a 71).

On a torus, every rectangular chessboard has a knight's tour.

J. J. Watkins, R. L. Hoenigman, Knight's tours on a torus. Mathematics Magazine 70(3), 1997, p.175-184.

An m × n cylindrical chessboard with m rows and n columns - the rows wrapped around the cylinder - has a knight's tour unless one of the following two conditions holds:
(a) m = 1 and n > 1; or
(b) m = 2 or 4 and n is even

J. J. Watkins, Knight's tours on cylinder and other surfaces. Congressus Numerantium 143, 2000, p.117-127.

Doplňující odkazy:

- G. P. Jelliss zasvětil cestám jezdce celý život, zaujme určitě jeho historie zkoumání cesty jezdce Chronology of Knight's Tours, ve které probírá události přes řadu století.
- Z matematického hlediska je cesta jezdce dobře popsána na internetových stránkách: Knight's Tour - from Wolfram MathWorld

Leaper [1,3]

dual-free - 28 moves

28		18		10		22	
	9				19		11
16		20				4	
	27		17		21		23
8		6		2		12	
	15		25		5		3
26		0		14		24	
	7				1		13

Leaper [1,3]

maximal - 31 moves

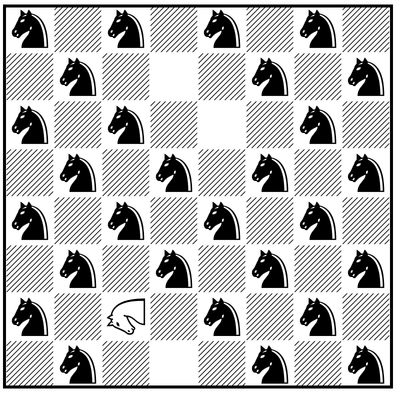
21		15		3		29	
	2		22		16		4
23		17		5		7	
	20		14		28		30
1		27		25		11	
	24		18		6		8
19		13		9		31	
	0		26		12		10

Leaper [1,3]

closed - 31 moves

21		15		3		29	
	2		22		16		4
23		17		5		7	
	20		14		30		28
1		31		25		11	
	24		18		6		8
19		13		9		27	
	0		26		12		10

11. Václav Kotěšovec
originál



sd=28 Camel c2 (1+28)
C+

Nejdelší **jednoznačná** cesta velblouda na šachovnici 8×8. Absolutní rekord.

1.CA:f1 2.CA:e4 3.CA:h3 4.CA:g6 5.CA:f3 6.CA:c4 7.CA:b1 8.CA:a4 9.CA:b7 10.CA:e8 11.CA:h7 12.CA:g4 13.CA:h1 14.CA:e2 15.CA:b3 16.CA:a6 17.CA:d5 18.CA:c8 19.CA:f7 20.CA:c6 21.CA:f5 22.CA:g8 23.CA:h5 24.CA:g2 25.CA:d3 26.CA:a2 27.CA:b5 28.CA:a8=

Následují příklady nejdelších **jednoznačných** cest na menších šachovnicích 5×5, 6×6 a 7×7:

Leaper [1,3]

dual-free - 10 moves

	8		6	
		1		3
	4		10	
9		7		5
	0		2	

Leaper [1,3]

dual-free - 15 moves

15		3		7	
	8		14		4
1		5		11	
			2		6
9		13			
	0		10		12

Leaper [1,3]

dual-free - 19 moves

	19		3			
4		6				2
	11				15	
		18		10		8
	5		7		1	
12		0		16		14
	17		13		9	

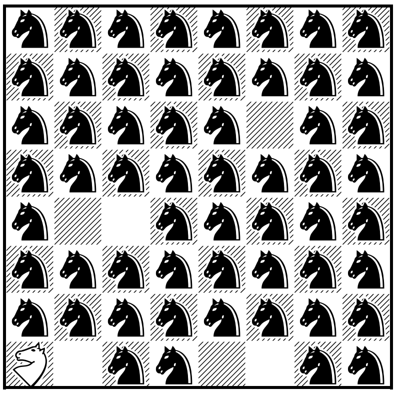
V článku Leapers at Large (2001), jehož autorem je G. P. Jelliss, lze nalézt, že **uzavřenou** cestu velblouda na šachovnici 8×8 (přes všechna pole) objevil T. R. Dawson a publikoval v „Cheltenham Examiner“ v roce 1913. Dále se touto problematikou zabýval F. Hansson *(The Problemist Fairy Chess Supplement April and June 1933, problem 715).*

Leaper [1,4] dual-free - 57 moves							
57	42	53	30	15	4	19	6
16	3	18	7	56	41	54	31
45	38	47	34	27		25	10
28	13	24	11	44	37	48	35
43			52	29	14	5	20
2	17	8	21	40	55	32	51
39	46	33	50	1	26	9	22
0		12	23			36	49

Leaper [1,4] maximal - 62 moves							
21	12	25	14	45	58	43	52
46	57	40	53	22	9	24	15
33	6	31	16	47	62	37	54
48	1	50	3	34	19	30	17
11	20	13	26	59	44	51	42
60	39	56	41	10	23	8	27
5	32	7	28	61	38	55	36
0	49	2	35	4		18	29

Leaper [1,4] closed - 61 moves							
23	14	27	16	45	58	43	54
46	57	40	55	24	11	26	17
35	8	33	18	49	2	39	4
50	1	52	5	36	21	32	19
13	22	15	28	59	44	53	42
60	47	56	41	12	25	10	29
7	34	9	30	61	48	3	38
0	51		37	6		20	31

12. Václav Kotěšovec
F0844 StrateGems 46/2009



sd=57 Giraffe a1 (1+57)
C+

Nejdelší **jednoznačná** (*dual-free*) cesta žirafy na šachovnici 8×8 je v délce 57 tahů. Tuto pozici jsem objevil metodou generování pozic a pak jsem (po 150 hodinách výpočtu) dokázal, že neexistuje taková pozice, kde by bylo 5 (nebo méně) volných polí kombinatorickou metodou. Odtud vyplývá, že neexistuje korektní pozice v délce 64 – 5 – 1 = 58 tahů, tedy sd=**57 je absolutní rekord**.

1.Gl:e2 2.Gl:a3 3.Gl:b7 4.Gl:f8 5.Gl:g4 6.Gl:h8 7.Gl:d7 8.Gl:c3 9.Gl:g2 10.Gl:h6 11.Gl:d5 12.Gl:c1 13.Gl:b5 14.Gl:f4 15.Gl:e8 16.Gl:a7 17.Gl:b3 18.Gl:c7 19.Gl:g8 20.Gl:h4 21.Gl:d3 22.Gl:h2 23.Gl:d1 24.Gl:c5 25.Gl:g6 26.Gl:f2 27.Gl:e6 28.Gl:a5 29.Gl:e4 30.Gl:d8 31.Gl:h7 32.Gl:g3 33.Gl:c2 34.Gl:d6 35.Gl:h5 36.Gl:g1 37.Gl:f5 38.Gl:b6 39.Gl:a2 40.Gl:e3 41.Gl:f7 42.Gl:b8 43.Gl:a4 44.Gl:e5 45.Gl:a6 46.Gl:b2 47.Gl:c6 48.Gl:g5 49.Gl:h1 50.Gl:d2 51.Gl:h3 52.Gl:d4 53.Gl:c8 54.Gl:g7 55.Gl:f3 56.Gl:e7 57.Gl:a8=

T. R. DAWSON
L"Echiquier 1930

51	46	53	44	13	24	11	X
14	23	2	27	50	41	62	43
49	38	61	36	15	22	3	28
16	21	6	31	48	33	58	35
47	52	45	54	17	12	25	10
18	1	26	9	40	63	42	55
39	60	37	56	19	4	29	8
20	5	30	7	32	59	34	57

Giraffe 62

Jednu z možných nejdelších cest (*open tour*) žirafy na šachovnici 8×8 objevil už v roce 1930 T. R. Dawson. Na šachovnici je vynecháno pouze jediné pole h8 (můj diagram výše předvádí jinou možnost s polem f1). Reprodukce Dawsonovy pozice pochází z časopisu Chessics 10/1980. Číslování polí je zde v rozsahu 1 až 63, tedy 62 tahů (*62 moves*). Moje číslování je vždy od 0, zde 0 až 62, tedy stejná délka.

Důkaz toho, že není možná cesta žirafy přes všechna pole šachovnice (což Dawson nevylučoval) provedl G. P. Jelliss v článku „The Five Free Leapers“, Chessics 2/1976. Počítačem jsem tyto výsledky potvrdil, jde o absolutní maxima.

Počítačem jsem dokázal, že cesty délky 62 *(open tours)* existují z počátečních polí a1, b1, c1, d1, c2, c3, d3 (a všech symetrických), z polí b2, d2, d4 existuje cesta pouze 61. tahem. Příklady viz diagramy dále (diagram s počátečním polem c2 odpovídá Dawsonově pozici).

			61
		62	62
	61	62	61
62	62	62	62

Giraffe

open tour - 62 moves

48	39	58	41	4	23	6	17
3	22	9	18	49	36	59	42
50	33	60	43	2	27	12	19
1	28	15	30	51	46	53	44
38	47	40	57	24	5	16	7
25	10	21	8	37	62	35	56
32	61	34	55	26	11	20	13
	0	29	14	31	52	45	54

Giraffe

open tour - 62 moves

19	10	23	12	43	56	41	50
44	55	38	51	20	7	22	13
31	4	29	14	45	62	35	52
46	61	48	1	32	17	28	15
9	18	11	24	57	42	49	40
58	37	54	39	8	21	6	25
3	30	5	26	59	36	53	34
60	47	0	33	2		16	27

Giraffe

open tour - 62 moves

48	9	50	5	40	29	44	27
39	22	43	26	47	8	53	4
56	13	60	3	38	19	36	25
31	18	33	16	57	14	59	2
10	49	6	51	30	41	28	45
21	42	23	46	11	54	7	52
12	55	0	61	20	37	24	35
	32	17	34	15	58	1	62

Giraffe

open tour - 62 moves

29	20	27	6	47	4	49	2
46	61	50	1	30	9	32	7
35	10	33	12	43	62	39	54
42	57	40	53	36	15	22	13
19	28	21	26	5	48	3	52
60	45	0	51	18	31	8	25
17	34	11	24	59	44	55	38
58	41	56	37	16		14	23

Giraffe

open tour - 62 moves

48	39	58	41	10	23	8	17
11	22	5	18	49	36	59	42
50	33	60	43	12	27	2	19
13	28	15	30	51	46	53	44
38	47	40	57	24	9	16	7
25	4	21	6	37	62	35	56
32	61	34	55	26	3	20	1
	14	29	0	31	52	45	54

Giraffe

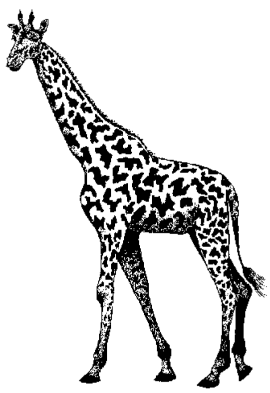
open tour - 62 moves

48	39	58	41	4	17	2	19
5	24	7	20	49	36	59	42
50	33	60	43	14	27	8	21
15	28	11	30	51	46	53	44
38	47	40	57	16	3	18	1
25	6	23	0	37	62	35	56
32	61	34	55	26	13	22	9
	12	29	10	31	52	45	54

334 G.P. JELLISS

4	49	2	47	30	45	26	43
29	36	27	42	5	58	9	60
6	57	8	61	20	37	22	41
19	32	17	40	15	54	13	62
50	3	48	1	46	31	44	25
35	28	X	24	51	X	59	10
52	7	56	11	34	21	38	23
33	18	39	16	53	14	55	12

Nejdelší uzavřenou cestu *(closed tour)* publikoval G. P. Jelliss, 334 Chessics 10/1980. Číslováno je opět od 1 do 62, počet tahů je v tomto případě 61 (*61 moves*). Počítačem bylo potvrzeno, že jde o absolutní rekord.



Následují příklady nejdelších **jednoznačných** cest žirafy na šachovnicích 5×5, 6×6 a 7×7.

Leaper [1,4]

dual-free - 14 moves

4		6	13	8
9				3
2				10
11				1
0	5	14	7	12

Leaper [1,4]

dual-free - 26 moves

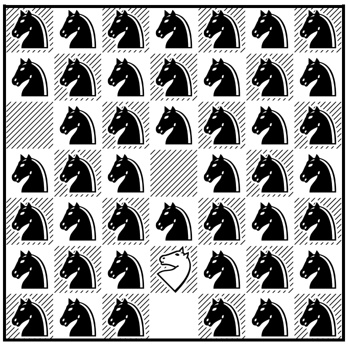
	7	16	9	14	
13	24	1	22	3	20
4	19			12	25
11	26			5	18
6	17	8	15	10	
	0	23	2	21	

Leaper [1,4]

dual-free - 45 moves

2	43	20	27	18	35	14
17	36	15	8	1	42	21
	5	24	39	30	11	32
29	12	33		45	4	25
44	3	26	19	28	13	34
37	16	9	0	7	22	41
6	23	40		38	31	10

13. Václav Kotěšovec
originál



sd=45 Giraffe d2 (1+45)
C+

1.GI:e6 2.GI:a7 3.GI:b3 4.GI:f4 5.GI:b5 6.GI:a1 7.GI:e2 8.GI:d6 9.GI:c2 10.GI:g1 11.GI:f5 12.GI:b4 13.GI:f3 14.GI:g7 15.GI:c6 16.GI:b2 17.GI:a6 18.GI:e7 19.GI:d3 20.GI:c7 21.GI:g6 22.GI:f2 23.GI:b1 24.GI:c5 25.GI:g4 26.GI:c3 27.GI:d7 28.GI:e3 29.GI:a4 30.GI:e5 31.GI:f1 32.GI:g5 33.GI:c4 34.GI:g3 35.GI:f7 36.GI:b6 37.GI:a2 38.GI:e1 39.GI:d5 40.GI:c1 41.GI:g2 42.GI:f6 43.GI:b7 44.GI:a3 45.GI:e4=

PROBLÈME D'EULER
AVEC LES SAUTS DE CAVALIER MODIFIÉS
Solutions du Rév. A. H. FROST

16	71	28	33	6	61	96	45	82	69
7	62	97	46	15	70	27	32	5	60
40	49	38	31	8	89	12	87	14	21
55	90	43	86	41	22	35	30	9	94
72	17	34	29	54	95	44	83	68	81
63	100	65	98	47	78	51	26	59	4
48	39	50	37	92	11	88	13	20	77
91	56	85	42	19	76	23	36	93	10
18	73	24	53	2	57	84	67	80	75
1	64	99	66	79	74	25	52	3	58

48	15	32	73	60	87	44	13	8	77
17	34	51	30	75	46	11	96	53	6
72	59	88	49	14	9	78	61	86	43
31	74	47	16	33	52	7	76	45	12
50	29	18	35	58	97	64	5	10	95
89	66	71	26	91	64	85	42	79	62
36	21	100	69	28	83	40	23	98	81
19	92	57	2	67	38	25	94	55	4
70	27	90	65	22	99	80	63	84	41
1	68	37	20	93	56	3	82	39	24

Nejmenší velikost čtvercové šachovnice, na které existuje uzavřená cesta žirafy přes všechna pole, je 10×10. První, kdo takovou cestu objevil, byl A. H. Frost.

Viz reprodukce z knihy Mikhail Frolov: Les Carrés Magiques (1886), kde jsou zobrazeny uzavřené cesty žirafy (vlevo) a zebry (vpravo). *(číslování je od 1 do 100)*

Leaper [1,5]

dual-free – 26 moves

11		7		5		17	
	16		14		12		8
1		21		23		25	
	26				2		20
3		19					
	10		6		4		18
		15		13		9	
	0		22		24		

Leaper [1,5]

maximal – 29 moves

29		17		15		5	
	4		22		20		18
11		9		1		25	
	26				12		8
13		7				27	
	28		16		14		6
3		23		21		19	
	10		0		2		24

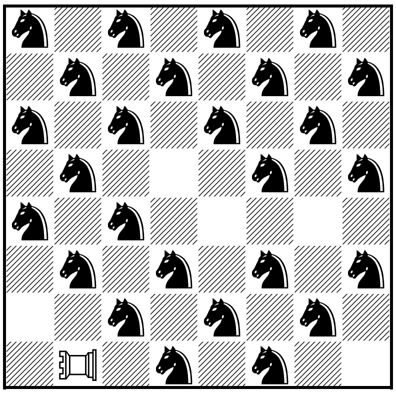
Leaper [1,5]

closed – 25 moves

11		7		5		19	
	20				10		8
1		25		23		15	
	14				2		
3						13	
	12		6		4		18
21		17				9	
	0		24		22		16

14. Václav Kotěšovec

originál



sd=26 Leaper [1,5] b1 (1+26)

C+

Skokan [1,5] (někdy nazývaný jako „Ibis“) se může pohybovat jen po polích stejné barvy, jeho maximální dosah je tedy jen na polovinu polí na šachovnici. Zde je příklad maximální jednoznačné cesty na 8×8, absolutní rekord.

1.(1,5):a6 2.(1,5):f5 3.(1,5):a4 4.(1,5):f3 5.(1,5):e8 6.(1,5):d3 7.(1,5):c8 8.(1,5):h7 9.(1,5):g2 10.(1,5):b3 11.(1,5):a8 12.(1,5):f7 13.(1,5):e2 14.(1,5):d7 15.(1,5):c2 16.(1,5):b7 17.(1,5):g8 18.(1,5):h3 19.(1,5):c4 20.(1,5):h5 21.(1,5):c6 22.(1,5):d1 23.(1,5):e6 24.(1,5):f1 25.(1,5):g6 26.(1,5):b5=

Leaper [1,5]

dual-free – 8 moves

			7		5
4					
					3
2					
					1
0		8		6	

Leaper [1,5]

dual-free – 18 moves

	14		12		10	
		1		3		5
	6				18	
17						7
	8				16	
15		13		11		9
	0		2		4	

Nejdelší jednoznačné cesty ibise na šachovnicích 6×6 a 7×7.

Leaper [1 , 6]

dual-free – 42 moves

	11	26	13	24	15	22	
21	38	1	36	3	34	5	32
6	31					20	39
19	40					7	30
8	29					18	41
17	42					9	28
10	27	12	25	14	23	16	
	0	37	2	35	4	33	

Leaper [1 , 6]

maximal – 44 moves

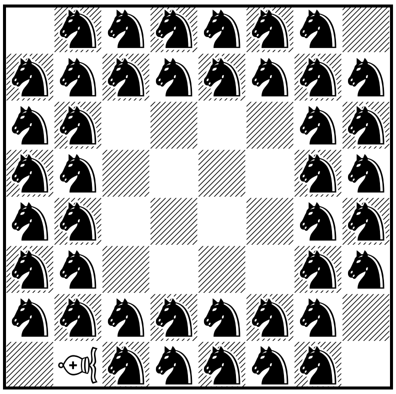
	6	35	4	37	2	39	
40	23	16	25	14	27	12	29
11	30					41	22
42	21					10	31
9	32					43	20
44	19					8	33
7	34	5	36	3	38	1	18
0	17	24	15	26	13	28	

Leaper [1 , 6]

closed – 43 moves

	11	26	13	24	15	22	
21	38	1	36	3	34	5	32
6	31					20	39
19	40					7	30
8	29					18	41
17	42					9	28
10	27	12	25	14	23	16	43
	0	37	2	35	4	33	

15. Václav Kotěšovec
originál



sd=42 Flamingo b1 (1+42)
C+

Nejdelší **jednoznačná** cesta flaminga na šachovnici 8×8. Absolutní rekord. Všechna pole šachovnice jsou tomuto skokanovi dostupná až na šachovnicích větších rozměrů.

1.(1,6):c7 2.(1,6):d1 3.(1,6):e7 4.(1,6):f1 5.(1,6):g7 6.(1,6):a6 7.(1,6):g5 8.(1,6):a4 9.(1,6):g3 10.(1,6):a2 11.(1,6):b8 12.(1,6):c2 13.(1,6):d8 14.(1,6):e2 15.(1,6):f8 16.(1,6):g2 17.(1,6):a3 18.(1,6):g4 19.(1,6):a5 20.(1,6):g6 21.(1,6):a7 22.(1,6):g8 23.(1,6):f2 24.(1,6):e8 25.(1,6):d2 26.(1,6):c8 27.(1,6):b2 28.(1,6):h3 29.(1,6):b4 30.(1,6):h5 31.(1,6):b6 32.(1,6):h7 33.(1,6):g1 34.(1,6):f7 35.(1,6):e1 36.(1,6):d7 37.(1,6):c1 38.(1,6):b7 39.(1,6):h6 40.(1,6):b5 41.(1,6):h4 42.(1,6):b3=

Nejmenší čtvercová šachovnice, na které existuje **uzavřená** cesta flaminga přes všechna pole, je 14×14. Existence takové cesty vyplývá z jedné Knuthových vět (viz str. 42), ale nenašel jsem nikde žádnou takovou cestu publikovanou, vygeneroval jsem ji proto počítačem.

Pole jsou číslována v rozsahu 0 až 195, z pole b7 se flamingo může vrátit zpět na a1.

chessboard 14×14 – closed tour

5	100	107	132	121	138	189	148	161	66	27	70	33	72
190	147	162	65	28	69	34	73	106	131	120	137	188	149
91	80	105	128	181	126	191	150	163	14	49	16	47	74
166	155	164	11	52	17	92	79	104	113	182	125	192	153
93	78	103	110	175	124	167	154	59	6	55	18	87	40
168	3	60	7	56	19	86	41	102	109	176	123	172	159
99	36	101	108	133	122	139	160	61	26	67	20	71	32
146	195	64	23	68	29	82	45	130	119	136	185	142	187
81	90	129	180	127	184	151	194	13	50	15	48	75	46
156	165	12	51	10	53	76	89	112	179	114	183	152	193
77	94	111	178	115	174	157	170	5	58	9	54	39	88
2	169	4	57	8	85	38	95	42	177	116	173	158	171
37	98	43	134	117	140	1	144	25	62	21	84	31	96
0	145	24	63	22	83	30	97	44	135	118	141	186	143

Leaper [1 , 6]

dual-free – 22 moves

6		8	21	10	19	12
13						5
4						14
15						3
2						16
17						1
0	7	22	9	20	11	18

Příklad nejdelší **jednoznačné** cesty flaminga na šachovnici 7×7

Leaper [1 , 7]

dual-free – 12 moves

		1		3		5	
							12
11							
							10
9							
							8
7							
	0		2		4		6

Leaper [1 , 7]

maximal – 13 moves

11		13		1		3	
							10
9							
							8
7							
							6
5							
	12		0		2		4

Leaper [1 , 7]

closed – 13 moves

13		1		3		5	
							12
11							
							10
9							
							8
7							
	0		2		4		6

Leaper [2 , 2]

dual-free – 6 moves

				3			
		2				4	
1				5			
		0				6	

Leaper [2 , 2]

maximal – 6 moves

			5				
	6				4		
			1				3
	0				2		

Leaper [2 , 2]

closed – 5 moves

				3			
		2				4	
1				5			
		0					

Leaper [2 , 3]

dual-free - 52 moves

	33	12	45	18	39	6	
31		23	14	41	50		4
46		38	7	34	11		19
13	44	51	32	5	24	17	40
22	15	30		26	3	42	49
37	8	47	28	1	20	35	10
52			43	16			25
29	0	21	36	9	48	27	2

Leaper [2 , 3]

maximal - 54 moves

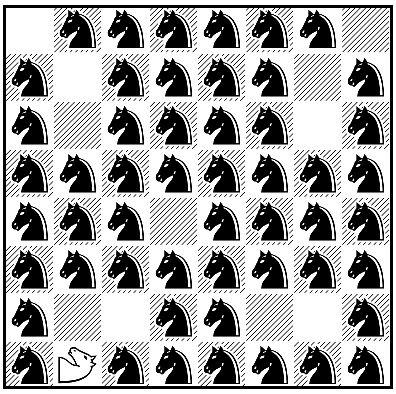
35	6	41	20	47	12		54
		52	43	16	33	4	25
29		11	36	7	40	21	48
42	19	34	5	26	53	46	13
51	44	15	28	3	24	17	32
10	37	30	1	22	49	8	39
			18	45	14	27	
0		50	9	38	31	2	23

Leaper [2 , 3]

closed - 53 moves

10		2	19	40	27	8	33
		35	52	25	14	43	
18	41	28	9	32	3	20	39
1	22	11	44	7	34	49	26
36	51	46	13	42	53	24	15
29	6	17	48	21	38	31	4
12		0	23	50	45		
47		37	30	5	16		

16. Václav Kotěšovec
9599 Šachová skladba 103/2009



sd=52 Zebra b1 (1+52)
C+

Toto je nejdelší **jednoznačná** cesta (*dual-free*) zebry na šachovnici 8×8, **absolutní rekord**!

Kombinatorickou metodou jsem prozkoumal všechny pozice pro 0 až 10 volných polí (celkem přes 1 bilion pozic!), což vyloučilo existenci sd=53 (nebo delšího) s právě jedním řešením. Tento výpočet jsem rozdělil na 10 částí podle možných nesymetrických počátečních polí zebry a celkem si vyžádal asi **2250 hodin**! (na dvojjádrovém procesoru byl sice reálný čas poloviční, ale i tak značný...)

1.Z:e3 2.Z:h1 3.Z:f4 4.Z:h7 5.Z:e5 6.Z:g8 7.Z:d6 8.Z:b3 9.Z:e1 10.Z:h3 11.Z:f6 12.Z:c8 13.Z:a5 14.Z:d7 15.Z:b4 16.Z:e2 17.Z:g5 18.Z:e8 19.Z:h6 20.Z:f3 21.Z:c1 22.Z:a4 23.Z:c7 24.Z:f5 25.Z:h2 26.Z:e4 27.Z:g1 28.Z:d3 29.Z:a1 30.Z:c4 31.Z:a7 32.Z:d5 33.Z:b8 34.Z:e6 35.Z:g3 36.Z:d1 37.Z:a3 38.Z:c6 39.Z:f8 40.Z:h5 41.Z:e7 42.Z:g4 43.Z:d2 44.Z:b5 45.Z:d8 46.Z:a6 47.Z:c3 48.Z:f1 49.Z:h4 50.Z:f7 51.Z:c5 52.Z:a2=

*The computer has proved that an **dual-free Zebra tour of length 53 does not exist***
(the run took 2250 hours, Kotěšovec 2009)

Leaper [2 , 3]

dual-free - 14 moves

	14	3	8	
12	5		1	10
7				
2	9		13	4
	0	11	6	

Leaper [2 , 3]

dual-free - 29 moves

	2	25	10	17	
		20	5		15
13	18	7	22	3	28
26	9	16	1	24	11
21	4	29	14	19	6
0	23	12	27	8	

Leaper [2 , 3]

dual-free - 36 moves

29		19	8	15	4	
		32	21	36	27	2
9	16	5	30	11	18	7
20	35	28	3	24	33	14
31	12		26	1	22	
		10	17	6		
	0	23	34	13		25

Příklady nejdelších **jednoznačných** cest zebry na šachovnicích 5×5, 6×6 a 7×7.

G. P. J. (surely someone has done this before?)

X	X	51	6	33	22	45	X
26	X	38	15	42	1	X	47
5	32	21	44	17	52	7	34
50	41	12	27	46	39	14	23
37	16	25	10	29	48	43	2
20	55	4	31	8	35	18	53
11	28	49	40	13	24	X	X
X	9	36	19	54	3	30	X

Zebra 54 (55 may be possible)

G. P. Jelliss publikoval v časopise Chessics 9/1980 tuto pozici v délce 54 tahů (číslováno 1 až 55) (*open tour*, *54 moves)* a vyslovil zde hypotézu (viz text pod diagramem), že možná existuje cesta v délce 55 tahů.

Počítačem jsem nyní (po 260 hodinách výpočtu) dokázal, že žádná taková cesta zebry v délce 55 tahů (nebo delší) neexistuje! Kombinatorickou metodou jsem probral všechny možnosti 1 až 8 volných polí. Program přitom musel celkem zkoumat přes 50 miliard možných pozic!

The computer has proved that an ***open Zebra tour of length 55 does not exist***
(the run took 260 hours, Kotěšovec 2008)

Příklady dalších nalezených maximálních otevřených cest zebry podle různých počátečních polí:

Zebra

open tour - 54 moves

54		12	45	18	33	6	39
29		23	14	43	52		4
48		34	7	38	11	46	19
13	44	53	30	5	40	17	32
22	15	28	47	24	3	42	51
35	8	49	26	1	20	37	10
			41	16	31		
27	0	21	36	9	50	25	2

Zebra

open tour - 54 moves

39	4	31	46	17	10	37	
		22	53	26		2	35
47	16	9	38	5	30	45	18
32	25	40	3	36	23	52	11
21	54	13	42	1	34	27	50
8		48	15	44	19	6	29
41	0	33	24	51	12		
14	43	20	7	28	49		

Zebra

open tour - 54 moves

27	10	23	36	3	50	25	12
54		14	43	18	31	8	
35	4	49	26	11	22	37	2
42	17	28	9	24	13	44	51
15	46	53	30	7	40	19	32
48		34	5	38	1		21
29		41	16	45	52		
		0	47	20	33	6	39

Zebra

open tour - 54 moves

40	19	2	49	32	25		17
		15	34	7	38		54
48	31	24	41	18	3	50	13
1	8	39	20	43	16	33	26
10	35	28	45	14	53	6	37
23	42	47	30	51	12	21	4
		0	9	36	27	44	
29		11	22	5	46		52

Zebra

open tour - 54 moves

11	40	7	20	31	50	9	38
		36	27	2	15		
19		51	10	39	6	21	32
26	1	12	41	8	37	30	49
35	28	47	14	43	24	3	16
52		18	45	22	33	54	5
13	42	25	0	29	48		
46		34	53	4	17	44	23

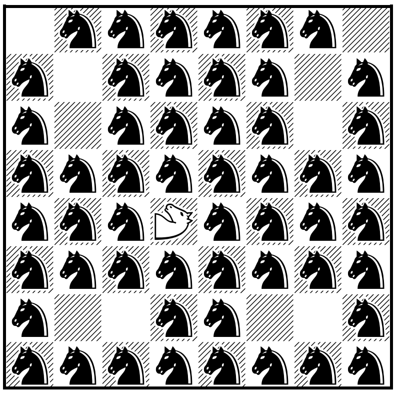
335 G.P.J.

X	X	23	4	15	38	27	X
36	X	8	19	32	47	X	X
51	16	39	28	43	24	3	14
22	5	46	37	26	9	18	33
7	44	35	52	11	20	31	48
40	29	50	17	2	13	42	25
X	X	21	6	45	34	X	10
X	1	12	41	30	49	X	X

G. P. Jelliss dále publikoval v Chessics 10/1980 pozici 335, což je uzavřená cesta (*closed tour*) zebry v 51 tazích (v číslování 1 až 52). Tato pozice byla dlouhé roky považována za nejdelší možnou a zde nám můj počítačový program připravil velké překvapení! Našel totiž uzavřenou cestu (hamiltonovskou kružnici) v délce 53 tahů.

17. Václav Kotěšovec

Longest closed tour



sd=53 Zebra d4 (1+53)

C+ 2 solutions

A closed zebra tour in 53 moves exists!

1.Zb1 2.Ze3 3.Zh1 4.Zf4 5.Zh7 6.Ze5 7.Zg8 8.Zd6 9.Zb3 10.Ze1 11.Zh3 12.Zf6 13.Zc8 14.Za5 15.Zd7 16.Zb4 17.Ze2 18.Zg5 19.Ze8 20.Zh6 21.Zf3 22.Zc1 23.Za4 24.Zc7 25.Zf5 26.Zh2 27.Ze4 28.Zg1 29.Zd3 30.Za1 31.Zc4 32.Za7 33.Zd5 34.Zb8 35.Ze6 36.Zg3 37.Zd1 38.Za3 39.Zc6 40.Zf8 41.Zh5 42.Ze7 43.Zg4 44.Zd2 45.Zb5 46.Zd8 47.Za6 48.Zc3 49.Zf1 50.Zh4 51.Zf7 52.Zc5 53.Za2=

1.Za2 2.Zc5 3.Zf7 4.Zh4 5.Zf1 6.Zc3 7.Za6 8.Zd8 9.Zb5 10.Zd2 11.Zg4 12.Ze7 13.Zh5 14.Zf8 15.Zc6 16.Za3 17.Zd1 18.Zg3 19.Ze6 20.Zb8 21.Zd5 22.Za7 23.Zc4 24.Za1 25.Zd3 26.Zg1 27.Ze4 28.Zh2 29.Zf5 30.Zc7 31.Za4 32.Zc1 33.Zf3 34.Zh6 35.Ze8 36.Zg5 37.Ze2 38.Zb4 39.Zd7 40.Za5 41.Zc8 42.Zf6 43.Zh3 44.Ze1 45.Zb3 46.Zd6 47.Zg8 48.Ze5 49.Zh7 50.Zf4 51.Zh1 52.Ze3 53.Zb1=

Rekordní uzavřená hamiltonovská kružnice!

Úloha má pouze 2 řešení, stejnou cestu v obou směrech.

Jde o **absolutní rekord**, protože víme, že nejdelší možná cesta má 54 tahů, ale délka uzavřené cesty (když nepočítáme tah na poslední pole) musí být v případě kamenů, u kterých dochází s každým tahem ke změně barvy pole, na šachovnicích sudých rozměrů vždy lichá, nemůže být proto 54. tahem a 53 je proto maximum.

The computer has proved that an ***closed Zebra tour of length 54 does not exist.***

Důkaz, že pro zebru neexistuje hamiltonovská cesta přes všechna pole na šachovnici 8×8, provedl již dříve G. P. Jelliss v článku „The Five Free Leapers“, Chessics 2/1976. Jiný, graficky velmi elegantní důkaz, jehož autorem je Ed Pegg, lze nalézt na stránce Leapers (Chess Knights and the like).

Nejmenší čtvercová šachovnice, na které existuje uzavřená cesta zebry přes všechna pole, je 10×10. První, kdo takovou cestu objevil, byl A. H. Frost před rokem 1886. Tento fakt byl citován v knize Mikhail Frolov: Les Carrés Magiques, kde je cestám skokanů věnována kapitola „Sur les carrés diaboliques“. Na konci této knihy pak nalezneme 2 diagramy (pro žirafu a zebru), komentované jako „Problème d'Euler avec les sauts de cavalier modifiés“. Viz reprodukce z této knihy na str. 35 zde.

Leaper [2,4]
dual-free - 11 moves

4		7		2			
1		10		5		8	
6		3					
11		0		9			

Leaper [2,4]
maximal - 14 moves

	9		4		13		2
	12		1		10		7
	5		8		3		14
	0		11		6		

Leaper [2,4]
closed - 13 moves

			4		9		
	12		1		6		3
	5		8		13		10
	0		11		2		7

Jak je to s možnostmi uzavřených cest skokanů přes všechna pole na různých velikostech šachovnic?

Hypotéza: **T. H. Willcocks**, Chessics 2/1976: Nejmenší velikost šachovnice, na které pro skokana [m,n] existuje uzavřená cesta přes všechna pole šachovnice, je 2*(m+n). Skokan musí patřit do kategorie Free Leaper (musí mu být dostupná všechna pole šachovnice).

Conjecture: T. H. Willcocks, Chessics 2/1976: The smallest square board on which an [m,n] free leaper can make a closed tour is of side 2(m+n).*

Vidíme, že pro vezíra 2*(0+1)=2 (šachovnice 2×2) a jezdce 2*(1+2)=6 (šachovnice 6×6) je tato věta platná. Příklady uzavřených cest žirafy [2*(1+4)=10] a zebry [2*(2+3)=10] na šachovnici 10×10 viz str. 35, antilopy [2*(3+4)=14] na šachovnici 14×14 viz Jellissova stránka Leapers at Large.

Touto problematikou se později zabýval **Donald E. Knuth**, který v článku Leaper graphs, The Mathematical Gazette 78 (1994), str. 274-297 dokázal následující věty:

- *The graph of an [r,s] leaper on an m×n board, when 2 <= m <= n and 1 <= r <= s, is connected if and only if the following three conditions hold:*
  (i) r + s is relatively prime to r – s; (ii) n >= 2s; (iii) m >= r + s
- *If r > 2 and the graph of an [r,r+1] leaper on an m×n board has a Hamiltonian circuit, and if 2r + 1 < m <= n, then m >= 4r + 2*
- *If r > 3 and the graph of an [r,r+1] leaper on a (2r+1)×n board has a Hamiltonian circuit, then n >= r^2 + 5r + 2 if r is odd, r^2 + 6r + 4 if r is even.*
- *The graph of an [r,r+1] leaper on a (4r+2)×(4r+2) board is Hamiltonian*
- *The graph of a [1,2k] leaper on a (4k+2)×(4k+2) board is Hamiltonian*
- *The graph of a [1,2k] leaper on a (4k+1)×(4k+2) board is Hamiltonian*
- *A [1,2k] leaper has no Hamiltonian circuit on a board of area less than (4k+1)×(4k+2)*
- *An [r,s] leaper has no Hamiltonian circuit on an m×n board when*
  *2*s <= m <= n < 2*(r+s)*

Tím dokázal Willcocksovu hypotézu pro určité třídy skokanů a navíc poslední z jeho vět stanovuje i nutnou podmínku existence takové cesty. Zbývá dokázat, že taková cesta (v obecném případě) skutečně existuje. Podle údajů z článku byla navíc hypotéza prý potvrzena počítačem pro všechny skokany [r,s], kde r+s=15.

Leaper [2,5]

dual-free - 48 moves

47		13			24	15	2
10	31	44	19	8	33	42	21
25	16	3	38	27	48	5	36
	41	22			11	30	45
	6	35				17	
12	29	46		14	1	40	23
	18	9	32	43	20	7	34
0	39	26		4	37	28	

Leaper [2,5]

maximal - 49 moves

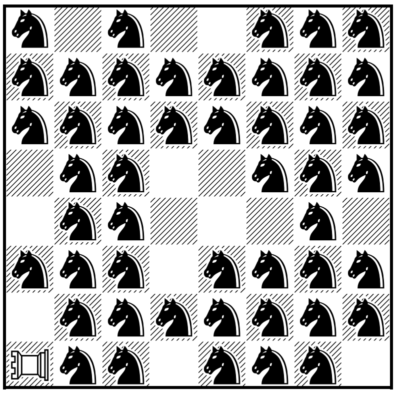
		13			42	15	2
10	35	22	47	8	33	24	45
41	16	3	28	39	18	5	30
	25	44			11	36	21
	6	31				49	
12	37	20		14	1	26	43
	48	9	34	23	46	7	32
0	27	40	17	4	29	38	19

Leaper [2,5]

closed - 45 moves

	38	13	2	25	36	15	
	5	30	19	42	7	28	
33	16	45			22	39	10
	27					4	
21	40	9			32	17	44
12	3	24	37	14	1	26	35
31	18	43	6	29	20	41	8
0		34			11		23

18. Václav Kotěšovec
originál



sd=48 Leaper [2,5] a1 (1+48)
C+

Nejdelší jednoznačná cesta skokana [2,5] (který bývá označován jako „Korsár“) na šachovnici 8×8, absolutní rekord.

1.(2,5):f3 2.(2,5):h8 3.(2,5):c6 4.(2,5):e1 5.(2,5):g6 6.(2,5):b4 7.(2,5):g2 8.(2,5):e7 9.(2,5):c2 10.(2,5):a7 11.(2,5):f5 12.(2,5):a3 13.(2,5):c8 14.(2,5):e3 15.(2,5):g8 16.(2,5):b6 17.(2,5):g4 18.(2,5):b2 19.(2,5):d7 20.(2,5):f2 21.(2,5):h7 22.(2,5):c5 23.(2,5):h3 24.(2,5):f8 25.(2,5):a6 26.(2,5):c1 27.(2,5):e6 28.(2,5):g1 29.(2,5):b3 30.(2,5):g5 31.(2,5):b7 32.(2,5):d2 33.(2,5):f7 34.(2,5):h2 35.(2,5):c4 36.(2,5):h6 37.(2,5):f1 38.(2,5):d6 39.(2,5):b1 40.(2,5):g3 41.(2,5):b5 42.(2,5):g7 43.(2,5):e2 44.(2,5):c7 45.(2,5):h5 46.(2,5):c3 47.(2,5):a8 48.(2,5):f6=

Leaper [2,5]

dual-free - 30 moves

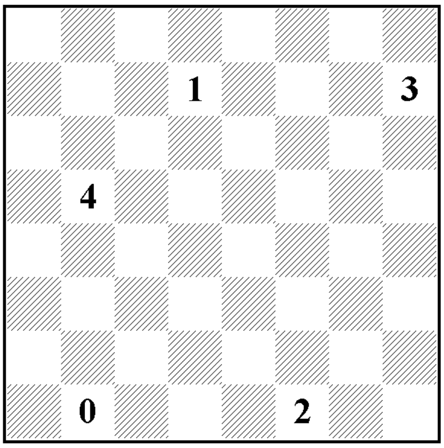
24	5	14		26	3	16
11			20	9		29
2	17				23	6
	28				12	
22	7				1	18
13		25	4	15		27
0	19	10		30	21	8

Příklad nejdelší jednoznačné cesty skokana [2,5] na šachovnici 7×7.

Nejmenší čtvercová šachovnice, na které existuje uzavřená cesta skokana [2,5] přes všechna pole, je 14×14. První takovou cestu objevil T. H. Willcocks (Chessics 6/1978, lépe je tato cesta zobrazena v článku Leapers at Large, G. P. Jelliss, 2001).

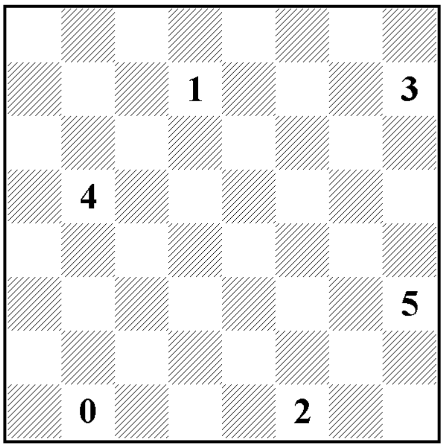
Leaper [2,6]

dual-free - 4 moves



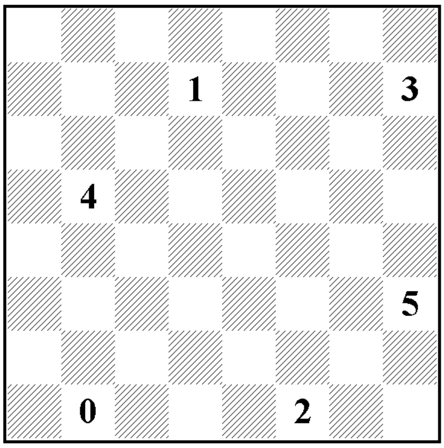
Leaper [2,6]

maximal - 5 moves



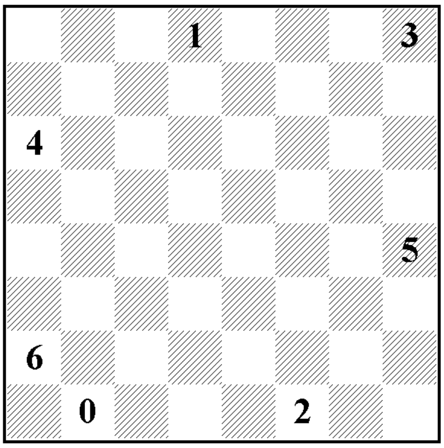
Leaper [2,6]

closed - 5 moves



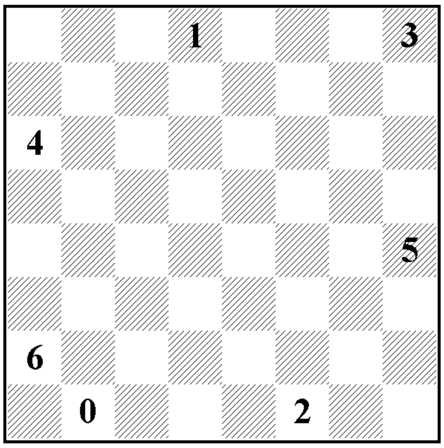
Leaper [2,7]

dual-free - 6 moves



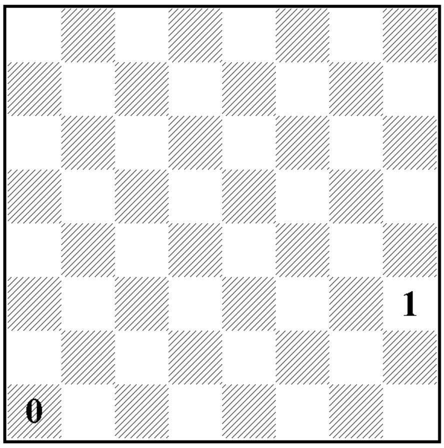
Leaper [2,7]

maximal - 6 moves



Leaper [2,7]

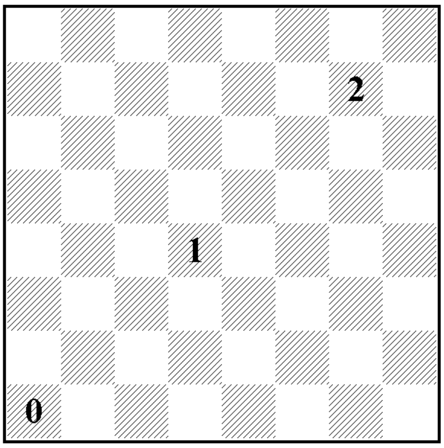
closed - 1 moves



Uzavřená cesta skokana [2,7] přes všechna pole může existovat až na šachovnici 18×18. Její existence však přímo nevyplývá z Knuthových vět, protože skokan [2,7] nepatří do kategorií skokanů, pro které to dokázal.

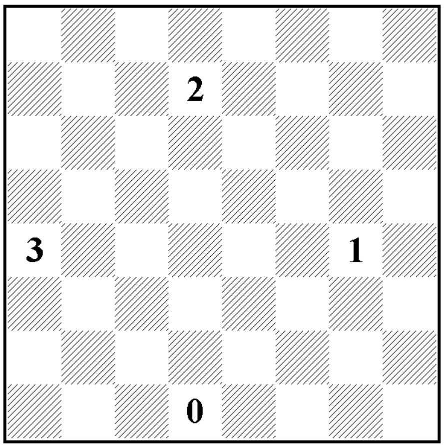
Leaper [3,3]

dual-free - 2 moves



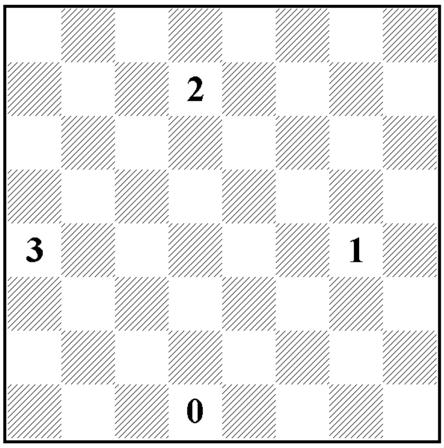
Leaper [3,3]

maximal - 3 moves



Leaper [3,3]

closed - 3 moves



Leaper [3 , 4]

dual-free – 53 moves

	4		40	11	50	29	2
	25	42	9	18	33	48	27
	44	53	20	7	16	35	46
12	51	30	1	22	5	14	37
39	32	49	28	3	24	41	10
8	17	34	47	26	43		19
21	6	15	36	45	52		
0	23		13	38	31		

Leaper [3 , 4]

maximal – 54 moves

		33	26	51		41	2
		12	19	28	49	6	43
45	10	21	38	17	30	47	8
54	23	40	3	36	15	32	25
27	50	5	42	1	34	13	52
18	29	48	7	44	11	20	
37	16	31	46	9	22	39	
0	35	14	53	24		4	

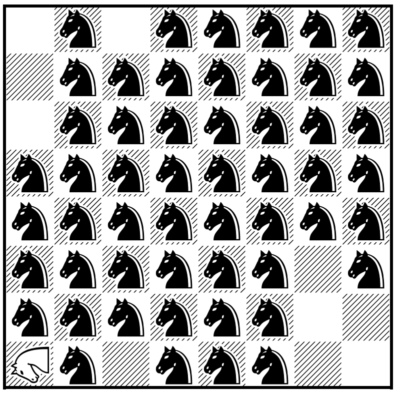
Leaper [3 , 4]

closed – 53 moves

	27	2	9	38		48	
25		31	16	7	40	23	46
44	33	14	51	18	5	42	
35	12	49	20	53	28	3	10
8	39	22	47	26	1	30	37
17	6	41	24	45	32	15	
52		4	43	34	13	50	19
	0	29	36	11		21	

19. Václav Kotěšovec

originál



sd=53 Antilope a1 (1+53)

C+

Nejdelší jednoznačná cesta (*dual-free*) antilopy. Absolutní rekord.

1.AN:d5 2.AN:h8 3.AN:e4 4.AN:b8 5.AN:f5 6.AN:b2 7.AN:e6 8.AN:a3 9.AN:d7 10.AN:h4 11.AN:e8 12.AN:a5 13.AN:d1 14.AN:g5 15.AN:c2 16.AN:f6 17.AN:b3 18.AN:e7 19.AN:h3 20.AN:d6 21.AN:a2 22.AN:e5 23.AN:b1 24.AN:f4 25.AN:b7 26.AN:e3 27.AN:h7 28.AN:d4 29.AN:g8 30.AN:c5 31.AN:f1 32.AN:b4 33.AN:f7 34.AN:c3 35.AN:g6 36.AN:d2 37.AN:h5 38.AN:e1 39.AN:a4 40.AN:d8 41.AN:g4 42.AN:c7 43.AN:f3 44.AN:b6 45.AN:e2 46.AN:h6 47.AN:d3 48.AN:g7 49.AN:c4 50.AN:f8 51.AN:b5 52.AN:f2 53.AN:c6=

Leaper [3 , 4]

dual-free – 22 moves

		4	21	14		
	6	19			12	
8	17				1	10
15						3
22	13				5	20
	0	11		7	18	
		2	9	16		

Nejdelší jednoznačná cesta antilopy na šachovnici 7×7.

T. H. WILLCOCKS *
Fairy Chess Review 1944

X	41	X	31	2	51	20	X
39	16	33	46	9	24	X	18
X	35	48	11	44	7	26	37
1	50	21	54	13	42	5	28
30	23	52	19	40	15	32	3
45	8	25	38	17	34	47	10
12	43	6	27	36	49	X	55
X	14	X	4	29	22	53	X

Antelope 54

Nejdelší možnou (nejednoznačnou) cestu antilopy na šachovnici 8×8 objevili již v roce 1944 T. H. Willcocks (viz reprodukce z Chessics 9/1980 – číslování 1 až 55, 54 *moves*) a A. H. Haddy (publikoval prý jinou pozici ve FCR 1944). Počítačem jsem nyní dokázal, že tato cesta (*open tour*) je opravdu nejdelší možná.

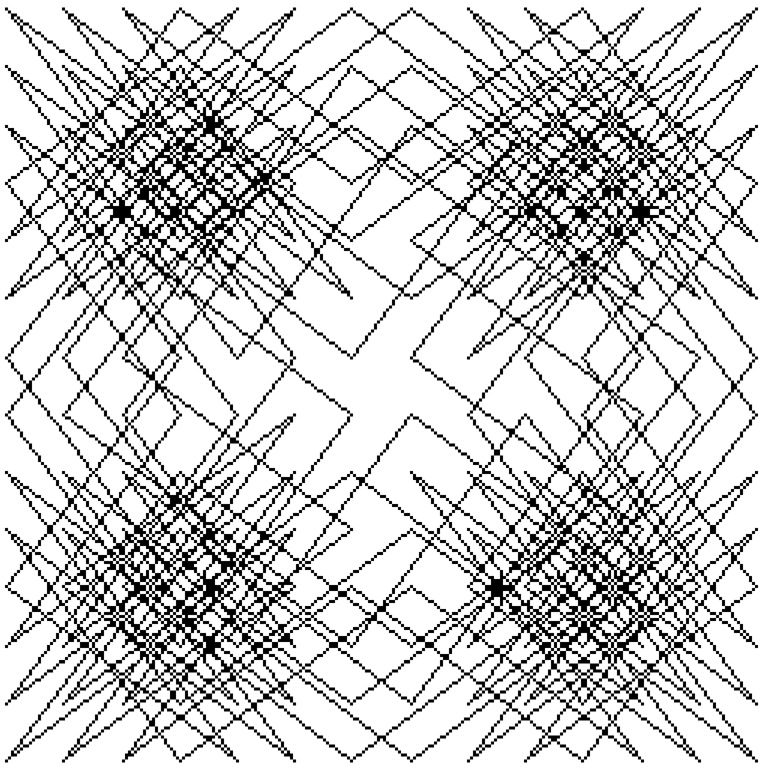
333 T. H. WILLCOCKS

X	39	X	29	54	47	18	X
37	14	31	52	7	22	X	16
X	33	50	9	42	5	24	35
1	48	19	44	11	40	3	26
28	21	46	17	38	13	30	53
X	6	23	36	15	32	51	8
10	41	4	25	34	49	X	43
X	12	X	2	27	20	45	X

Tato pozice uveřejněná v Chessics 10/1980 pod číslem 333 je nejdelší možná uzavřená cesta (*closed tour*) antilopy na šachovnici 8×8 (číslování 1 až 54, 53 *moves*). Počítačem vygenerovaná pozice (viz str. 45, třetí diagram vpravo) topologicky odpovídá Willcocksově pozici (v případě uzavřených cest skokanů je jedno, jaké pole se zvolí za počáteční).

Nejmenší čtvercová šachovnice, na které existuje uzavřená cesta antilopy přes všechna pole, je 14×14. První takovou cestu objevil T. H. Willcocks (Chessics 6/1978). Lépe je tato cesta zobrazena v článku Leapers at Large, G. P. Jelliss, 2001 (*viz reprodukce*), kde se můžete dočíst další zajímavé informace o vývoji hledání cesty antilopy na různých šachovnicích.

T. H. Willcocks {3,4} 1978



Leaper [3 , 5]

dual-free - 12 moves

			3		9		
		12					
	5				1		7
10							
2		8				4	
					11		
		0		6			

Leaper [3 , 5]

maximal - 13 moves

		12		6			
					1		
10		4				8	
							13
2							
	7				11		5
		0					
			9		3		

Leaper [3 , 5]

closed - 13 moves

		12		6			
					1		
10		4				8	
							13
2							
	7				11		5
		0					
			9		3		

Leaper [3 , 6]

dual-free - 6 moves

2						4	
5						1	
0			3			6	

Leaper [3 , 6]

maximal - 7 moves

2			7			4	
5						1	
0			3			6	

Leaper [3 , 6]

closed - 7 moves

2			7			4	
5						1	
0			3			6	

Skokanu [3,6] nejsou dostupná všechna pole ani větších šachovnicích. I když je součet r+s lichý (a může se pohybovat po polích obou barev), nesplňuje podmínku (i) z první z Knuthových vět (viz str. 42).

Leaper [3 , 7]

dual-free - 4 moves

				1			
							4
3							
	0						2

Leaper [3 , 7]

maximal - 4 moves

				1			
							4
3							
	0						2

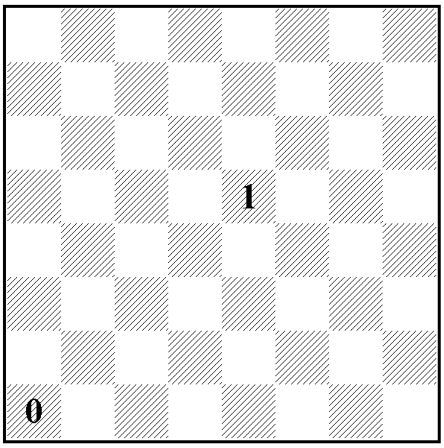
Leaper [3 , 7]

closed - 1 moves

							1
0							

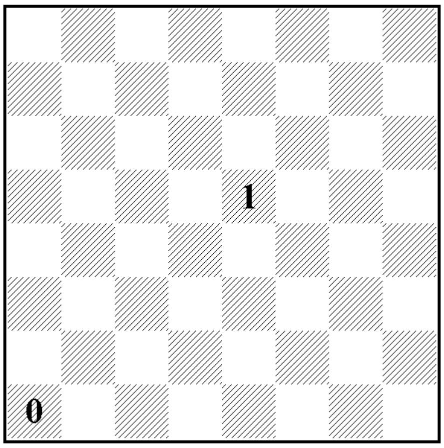
Leaper [4,4]

dual-free - 1 moves



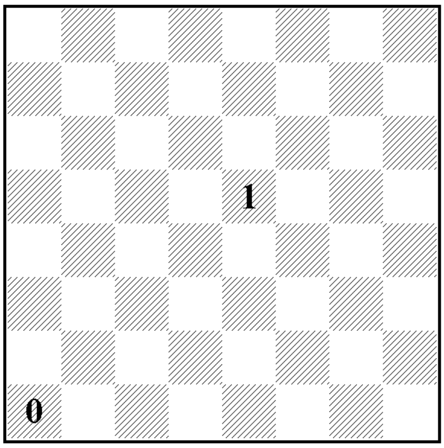
Leaper [4,4]

maximal - 1 moves



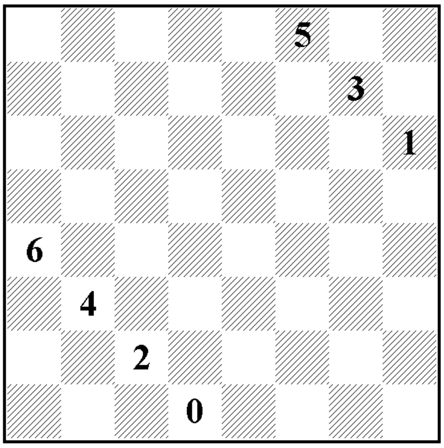
Leaper [4,4]

closed - 1 moves



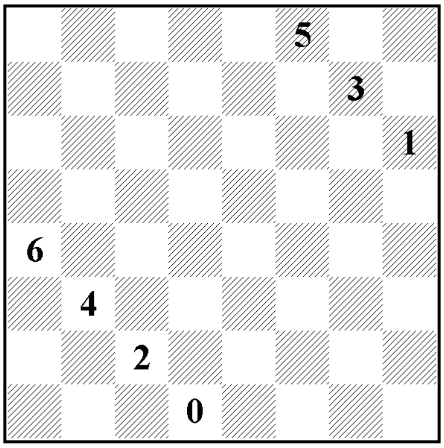
Leaper [4,5]

dual-free - 6 moves



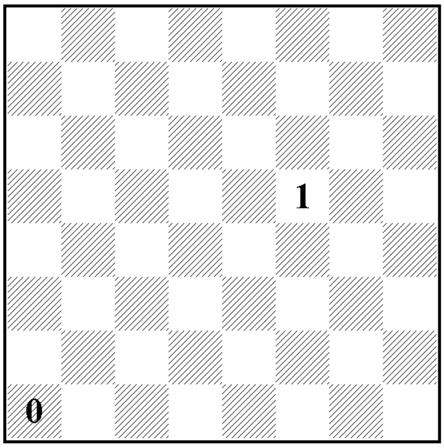
Leaper [4,5]

maximal - 6 moves



Leaper [4,5]

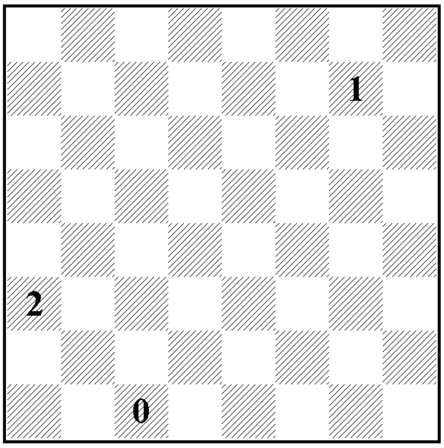
closed - 1 moves



Pro skokana [4,5] je šachovnice 8×8 malá. K uzavřené cestě přes všechna pole potřebuje šachovnici 18×18. Cestu najdeme v článku Donald E. Knuth: Leaper graphs, The Mathematical Gazette 1994, str. 11.

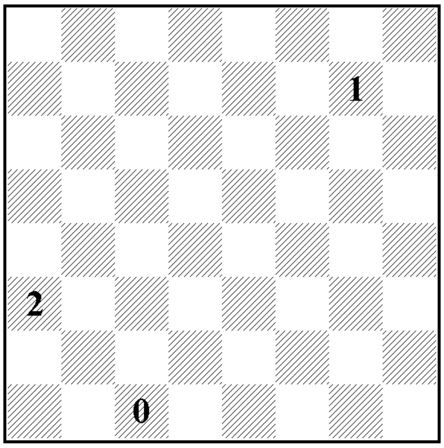
Leaper [4,6]

dual-free - 2 moves



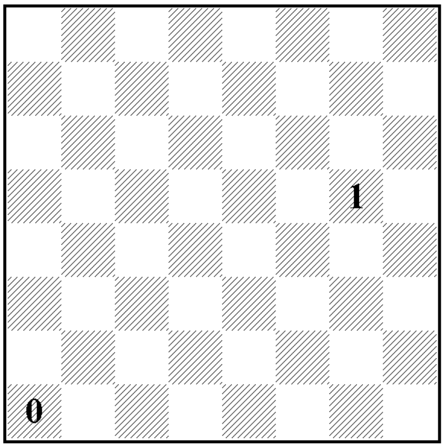
Leaper [4,6]

maximal - 2 moves



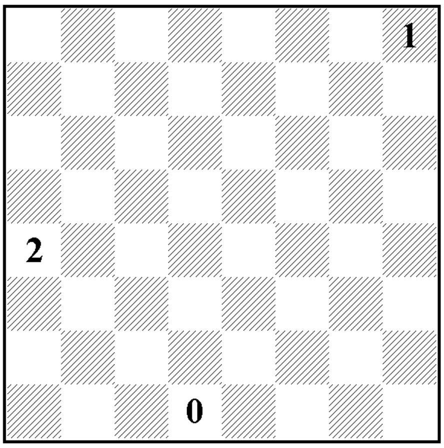
Leaper [4,6]

closed - 1 moves



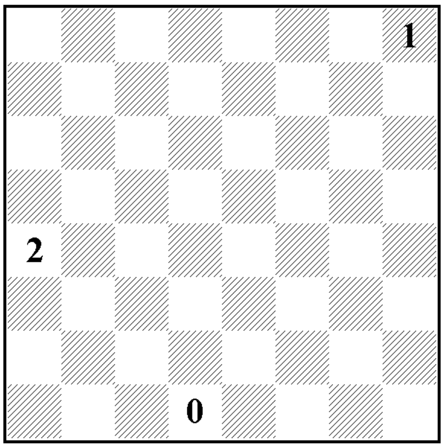
Leaper [4,7]

dual-free - 2 moves



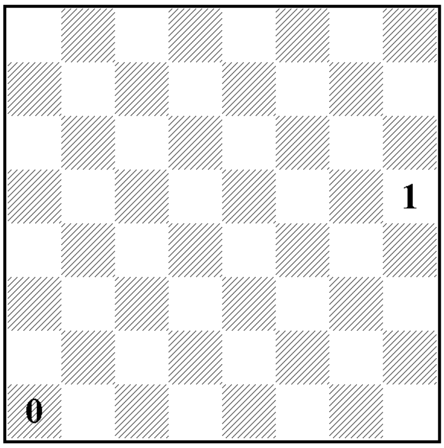
Leaper [4,7]

maximal - 2 moves



Leaper [4,7]

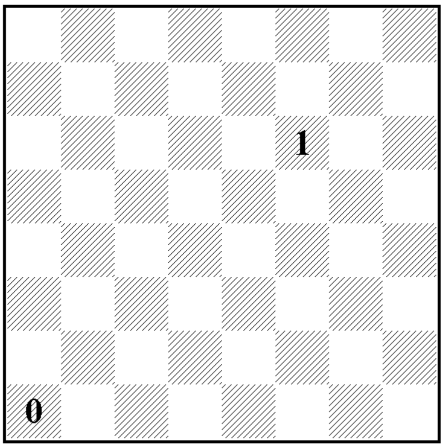
closed - 1 moves



Uzavřená cesta skokana [4,7] přes všechna pole může existovat až na šachovnici 22×22. Její existence však přímo nevyplývá z Knuthových vět, protože skokan [4,7] nepatří do kategorií, pro které existenci dokázal.

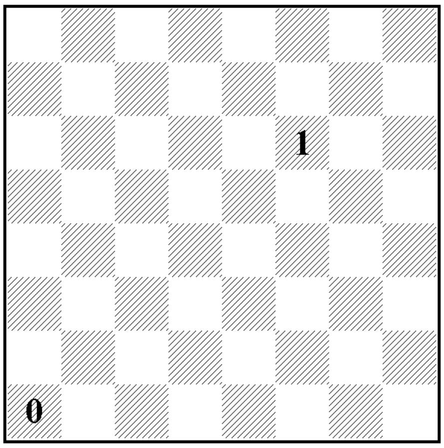
Leaper [5,5]

dual-free - 1 moves



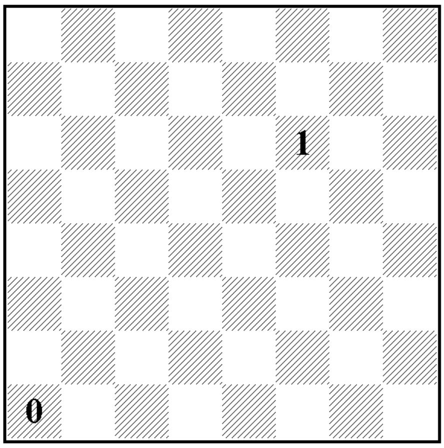
Leaper [5,5]

maximal - 1 moves



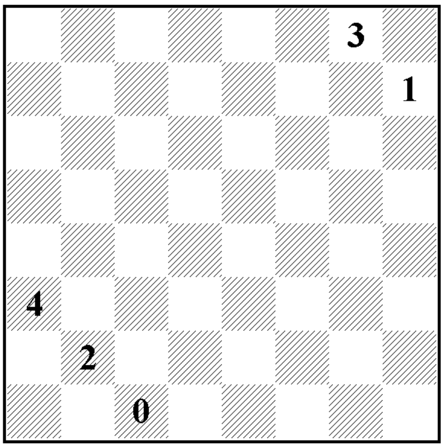
Leaper [5,5]

closed - 1 moves



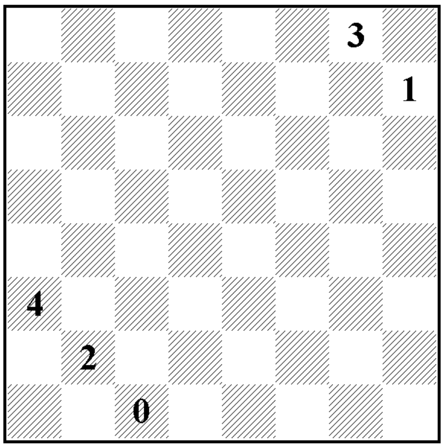
Leaper [5,6]

dual-free - 4 moves



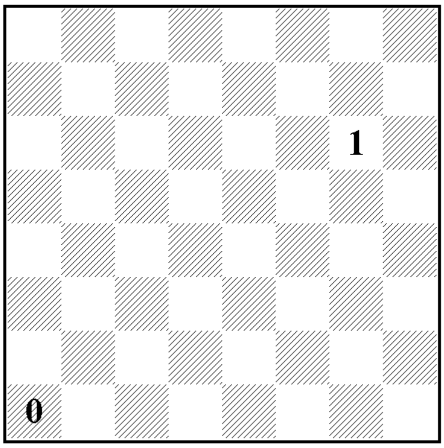
Leaper [5,6]

maximal - 4 moves



Leaper [5,6]

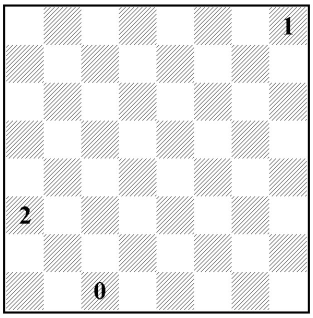
closed - 1 moves



Uzavřená cesta skokana [5,6] přes všechna pole existuje až na šachovnici 22×22. Skokan je typu [r,r+1], proto její existence vyplývá z jedné z Knuthových vět, viz str. 42.

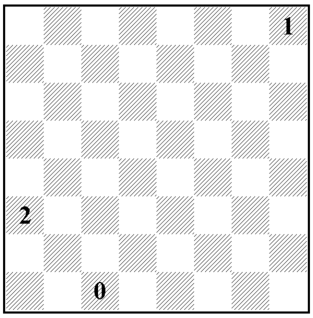
Leaper [5 ,7]

dual-free - 2 moves



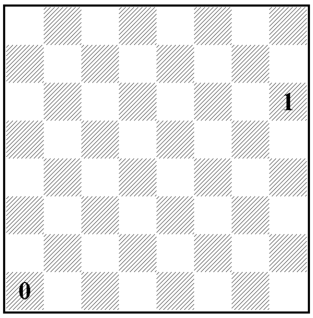
Leaper [5 ,7]

maximal - 2 moves



Leaper [5 ,7]

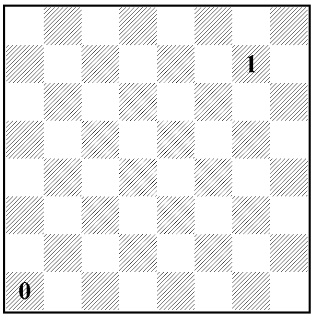
closed - 1 moves



Diagramy pro zbytek skokanů jsou poměrně nezajímavé a uvádím je jen pro úplnost (*only for completeness*).

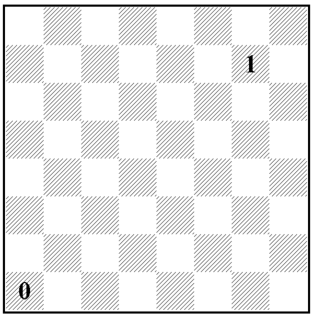
Leaper [6 , 6]

dual-free - 1 moves



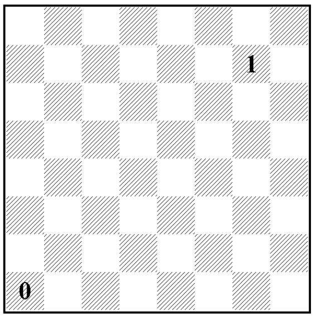
Leaper [6 , 6]

maximal - 1 moves



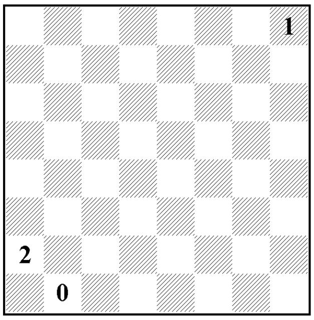
Leaper [6 , 6]

closed - 1 moves



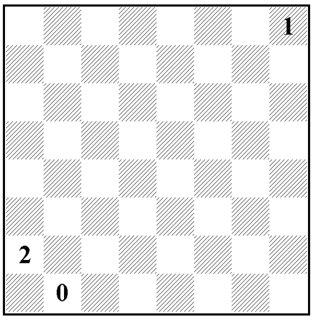
Leaper [6 ,7]

dual-free - 2 moves



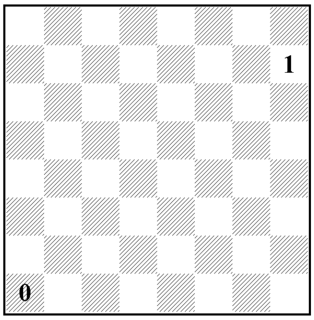
Leaper [6 ,7]

maximal - 2 moves



Leaper [6 ,7]

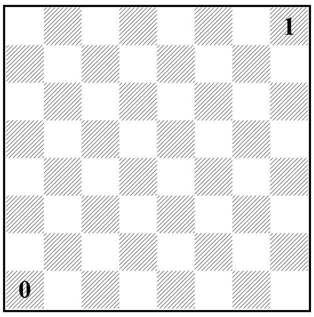
closed - 1 moves



Uzavřená cesta skokana [6,7] přes všechna pole existuje až na šachovnici 26×26. Skokan je typu [r,r+1], proto její existence vyplývá z jedné z Knuthových vět, viz str. 42.

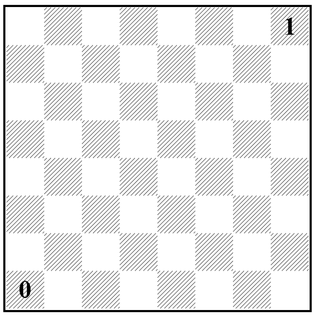
Leaper [7 ,7]

dual-free - 1 moves



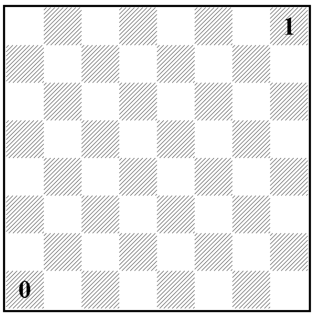
Leaper [7 ,7]

maximal - 1 moves

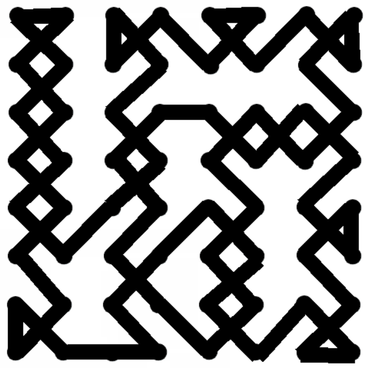


Leaper [7 ,7]

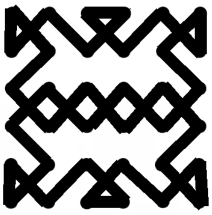
closed - 1 moves



Geometricky nejdelší cesta krále – *King tours*



Je zřejmé, že (obecná) cesta krále přes všechna pole šachovnice existuje na šachovnici **n×n** pro libovolné **n**. Zatímco všechny cesty skokanů měly naprosto stejnou délku, v případě cesty krále tomu tak není. Tahy mohou být



ortogonální (s délkou 1) nebo diagonální (s délkou √2). Pro sudé **n** stačí na nejkratší uzavřenou cestu sekvence jen ortogonálních tahů (odpovídá cestě vezíra) a celá cesta (včetně posledního tahu zpět na počáteční pole) má délku n^2. Mnohem zajímavější je problém **geometricky maximální délky uzavřené cesty krále**.

šachovnice	nejdelší cesta		
2×2	2 + 2√2	4.828	absolutní rekord
3×3	6 + 3√2	10.242	absolutní rekord
4×4	4 + 12√2	20.970	absolutní rekord
5×5	10 + 15√2	31.213	absolutní rekord
6×6	6 + 30√2	48.426	absolutní rekord
7×7	14 + 35√2	63.497	
8×8	10 + 54√2	86.367	

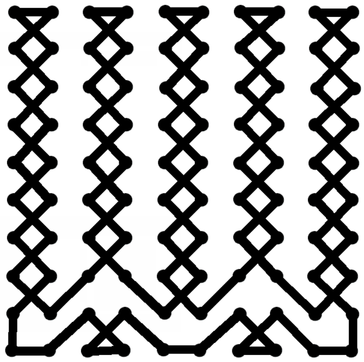
Nejdelší počítačem nalezená uzavřená cesta na šachovnici 8×8 má **10 ortogonálních tahů** (*viz obrázek nahoře*), nebylo ale možné probrat všechny možnosti. Vzhledem k podmínce uzavřenosti cesty musí být počet ortogonálních tahů (počet změn barvy pole) vždy sudý. Odtud plyne, že možnostmi s 9 ortogonálními tahy se nemusíme zabývat. **Cesta krále typu 8+56√2 pravděpodobně neexistuje.**

Pro geometricky nejdelší cestu krále na šachovnici n×n označme počet ortogonálních tahů ort(n) a počet diagonálních tahů diag(n). Je zřejmé, že ort(n) + diag(n) = n^2 a délka cesty je ort(n) + diag(n) * √2.

Vyslovuji tuto hypotézu (*conjecture*)

n sudé (*even*), n > 6	n liché (*odd*)
ort(n) = n + 2 diag(n) = (n–2)(n+1)	ort(n) = 2n diag(n) = n(n–2)

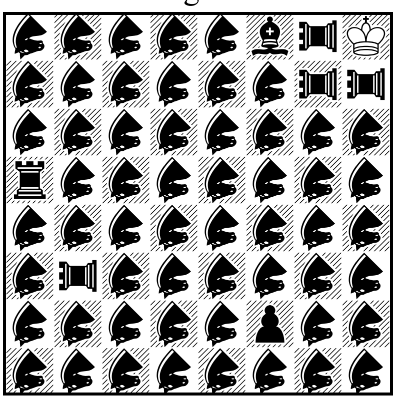
Metodu konstrukce cesty s **n+2 ortogonálními tahy** na šachovnici n×n sudých rozměrů demonstruje příklad na šachovnici 10×10 →



Touto úlohou se zatím asi nikdo nezabýval. O jednodušším případu cesty krále, která se nesmí nikde křížit (*uncrossed closed tour*) se dočteme v knize E. Ya. Gik: Matematika na shahmatnoj doske (1976), str. 80-82 a v knize Miodrag Petković: Mathematics and chess (1997), str. 69, kde shodně autoři docházejí k výsledku, že nejdelší taková cesta krále na šachovnici 8×8 má délku 28 + 36√2 = 78.911...

---

20. Václav Kotěšovec
originál



sd=63 56 Moa, 4 Pao (1+63)

Na závěr této části jedna kuriozita. Task, **jednoznačná** cesta krále přes všech zbývajících 63 polí šachovnice!

35	21	20	10	9	3	2	♔
36	34	22	19	11	8	4	1
63	37	33	23	18	12	7	5
38	62	40	32	24	17	13	6
61	39	59	41	31	25	16	14
53	60	51	58	42	30	26	15
54	52	57	50	47	43	29	27
55	56	49	48	46	45	44	28

King tour over all 63 squares on the chessboard.

Úloha je přezkoušena za podmínky, že bílý musí v každém tahu brát. (bez této podmínky je s největší pravděpodobností také korektní, test Alybadixem byl však možný jen do 24 tahů).

1.♔:h7 ... 63.♔:a6=

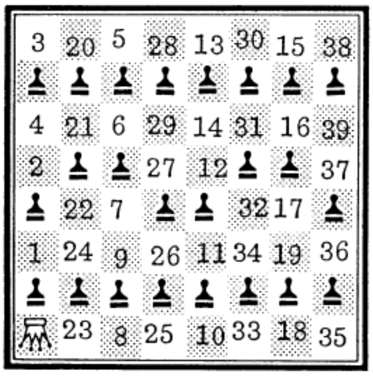
II. Cesty přeskakujících kamenů

II. *Hopper tours*

Přeskakující kameny (např. cvrček = *grasshopper*) vyžadují k provedení svých tahů přítomnost dalších kamenů, přes které mohou přeskakovat. Možností, jaké typy cest přeskakujících kamenů lze zkoumat, je celá řada.

1) Cesta cvrčka přes všechna volná pole šachovnice (typ Dawson)
Grasshopper tours

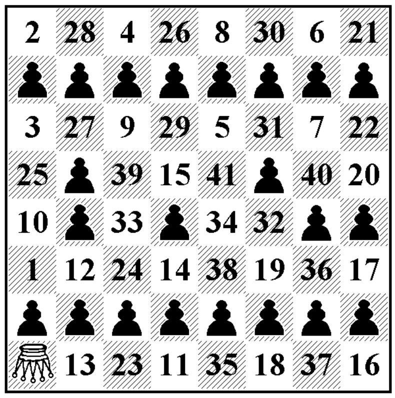
566. T.R.DAWSON
F.C.R., Aug 1950



První úloha pochází z bezedné pokladnice idejí T. R. Dawsona a předvádí cestu cvrčka přes **všechna** volná pole šachovnice, přičemž cvrček nevstoupí na žádné pole dvakrát!
Thomas Rayner Dawson pozici nejprve publikoval v Chess Amateur 1927 (č. 8755) bez řešení a pak ji uveřejnil znovu (už s řešením) ve Fairy Chess Review 1950, reprodukce je z časopisu Chessics 15/1983, kde byl komentář: “*566 shows a tour of all vacant (40) squares, all blocks being hurdles.*”

Pořadí tahů v Dawsonově úloze není jednoznačné (např. v 5. tahu je možno pokračovat na c4, apod.), ale s tímto záměrem Dawson úlohu ani neskládal. *Dawson's problem does not have a unique move order.* Tento typ úlohy nelze transformovat na úlohu typu sd=n (s braním všech kamenů), protože některá pole na liniích musí zůstat volná. Proto je zde hledání jednoznačných cest méně zajímavé než v jiných typech úloh.

41 moves, 22 pawns



Pozice představuje hamiltonovskou cestu v grafu. Uzly grafu jsou určeny počátečním polem a doskokovými poli, hrany jsou dány možnými tahy. Proti cestám skokanů je zde však rozdíl v tom, že příslušný graf musí být **orientovaný**, protože např. z pole h5 je možný skok na pole h8, ale nikoliv obráceně!

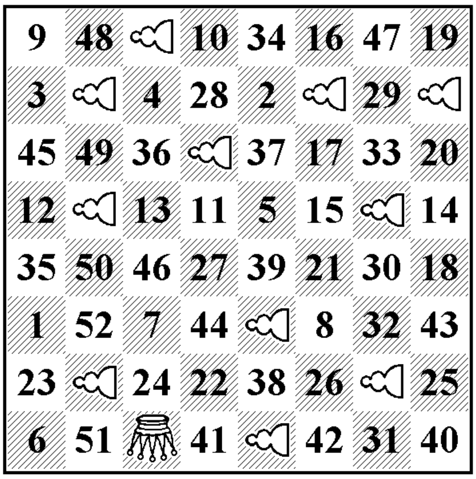
Původní Dawsonovu pozici (kdy na místě překážek mohou stát pěšci, tedy je volná 1. a 8. řada.) lze upravit tak, aby na cestu cvrčka přes všechna volná pole šachovnice stačilo jen 22 překážek.

Jedno z možných **zobecnění Dawsonovy úlohy** je následující: Určete minimální počet překážek (rozmístěných na libovolných polích šachovnice), nezbytně nutných k tomu, aby se cvrček mohl dostat na všechna volná pole šachovnice! Zadání může mít dvě varianty:

a) všechna pole musí být dosažena během **jedné** cesty z počátečního pole a na každé pole je možno vstoupit pouze jednou (případ Dawsonovy úlohy, ve které je celkem 24 překážek, jak ale uvidíme dále, absolutní minimum je pouze **11 překážek!**)

b) každé volné pole musí být z počátečního pole dostupné nějakou cestou, pro každé pole mohou být ale tyto cesty různé. Tento případ odpovídá hledání nejkratší cesty v grafu a jeho řešení je jednodušší než případ a). Viz zobecněná úloha Marlowa (opět stačí **11 překážek** a s 10 překážkami není možné všechna pole šachovnice navštívit).

21. Václav Kotěšovec
52 moves



Longest ***open tour,*** *absolute record*

Řešení případu a) představuje tato pozice, kterou jsem zkonstruoval pomocí počítače, s pouhými **11 překážkami**, ve které je cvrčkovi jednou cestou délky 52 tahů dostupných všech 52 volných polí šachovnice. **Absolutní rekord**!

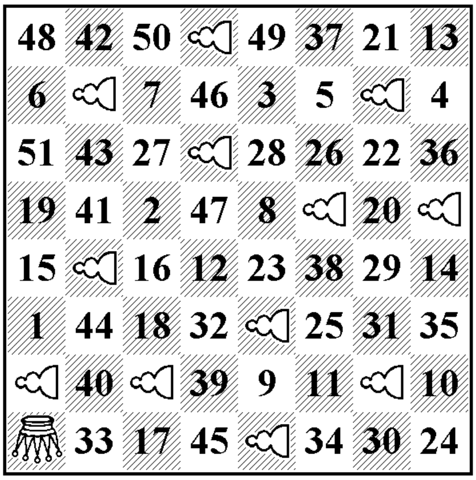
Je třeba ještě poznamenat, že tato pozice je (až na symetrie) jediná možná! Neexistuje takové rozmístění 11 překážek při pozici cvrčka na a1, b1, b2, c2, c3, d1, d2, d3 nebo d4 (resp. na symetrických polích).

Pozice č. 22 představuje nejdelší **uzavřenou** cestu cvrčka v délce 51 tahů, s 12 překážkami (z koncového pole a6 se může cvrček vrátit zpět na a1).

Obě pozice na diagramech nemají jednoznačné pořadí tahů. V případě této úlohy se to však nevyžaduje.

Jako překážky jsou použiti zdánliví pěšci = *dummy pawns*. (tento kámen jen blokuje pole na kterém stojí a nemůže táhnout)

22. Václav Kotěšovec
51 moves



Longest ***closed tour***

Existuje rozmístění **11 překážek** takové, že cvrček může projít **jednou cestou** všechna prázdná pole šachovnice. **Neexistuje rozmístění 10 překážek**, se kterými by to bylo možné. Zobecněná úloha Dawsona je tímto kompletně vyřešena!

With 11 hurdles, a grasshopper can visit all free squares on the chessboard in one tour, but ***no such placement of 10 hurdles exists.***

Prozkoumání všech rozmístění 11 (nebo více) překážek by si vyžádalo neúměrné množství počítačového času (např. možných rozmístění 11 kamenů na šachovnici 8×8 je 743 595 781 824), proto jsem program optimalizoval nutnou podmínkou existence řešení, která spočívá v tom, že v každé z 9 označených oblastí musí být alespoň 1 překážka (jinak by na šachovnici existovala nedostupná pole, např. a1 nebo d1/e1, h1, a4/a5, d4/d5/e4/e5, h4/h5, a8, d8/e8 nebo h8). *Viz obrázek.* Rozmístění dalších překážek je pak už libovolné. I tak trvalo probrání možných pozic 11 překážek přes 86 hodin. *There must be at least one hurdle in each zone.*

7	7	8	8	8	8	9	9
7	7	8	8	8	8	9	9
4	4	5	5	5	5	6	6
4	4	5	5	5	5	6	6
4	4	5	5	5	5	6	6
4	4	5	5	5	5	6	6
1	1	2	2	2	2	3	3
1	1	2	2	2	2	3	3

2) Dostupnost maximálního počtu polí přes nejméně překážek (typ Marlow)
Accessibility of maximal number of squares over minimum hurdles

Případu b) odpovídá zobecnění následující úlohy, kterou publikoval T. W. Marlow v časopise Chessics 15/1983 pod číslem č. 567 se zadáním:

567. T.W.MARLOW

„Place G and (a) 2, (b) 3, (c) 4, (d) 5 stationary Rooks on the board so that the G, in a series of moves, can visit as many squares as possible in as few moves as possible.“
V tomto případě se povoluje několik možných cest cvrčka a počet dosažených polí se sčítá. Řešení pro 5 černých věží je reprodukováno na diagramu (a vidíme, že cvrčkovi je přes 5 překážek dostupných celkem 36 polí), ostatní pozice je možno nalézt v časopise Chessics 16/1984. Nyní jsem ale počítačem dokázal, že ani jedna z Marlowových pozic nepředstavuje absolutní rekord!

	T. W. Marlow 1983	V. Kotěšovec 2009	*With 11 hurdles, a grasshopper can visit all free squares, but no such placement of 10 hurdles exists.*
počet překážek	počet dostupných polí		
number of hurdles	*number of accessible squares*		
2	6	10	absolutní rekord
3	18	20	absolutní rekord
4	28	32	absolutní rekord
5	36	38	absolutní rekord
6		43	absolutní rekord
7		47	absolutní rekord
8		49	
9		51	
10		52	absolutní rekord (1 pole je nedostupné)
10 nebo 11		52	**maximální** počet dostupných polí (**absolutní rekord!**)
11		52	**minimum** překážek nutných k dosažení celé šachovnice (**absolutní rekord!**)

V případě pokrytí celé šachovnice platí pro počet překážek **p** a počet dostupných polí **d** na šachovnici **n×n** rovnice

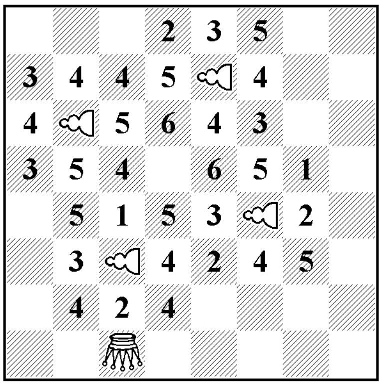
$$p + d = n^2 - 1$$

(11 + 52 = 64 – 1, od všech polí je třeba odečíst pole obsazené přeskakujícím kamenem)

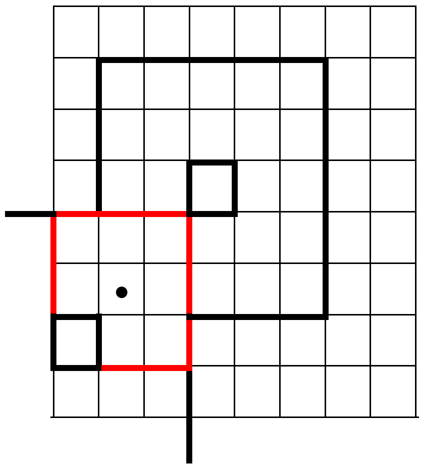
Počítačem jsem dokázal, že na šachovnici 8×8 **neexistuje rozmístění 10 překážek** tak, aby cvrčkovi byla dostupná všechna pole! Je k tomu nutných **minimálně 11 překážek**. Tím je tento problém kompletně vyřešen (Kotěšovec, 2009).

Se zvyšujícím se počtem překážek se pak počet možných tahů zmenšuje (pro 12 kamenů už může být nejvýše 51 dostupných polí, pro 13 kamenů max. 50 polí, atd.)
Pozice do 7 překážek jsem testoval probráním všech možností, pro větší počet překážek jsem program optimalizoval následující **nutnou** podmínkou dostupnosti všech polí šachovnice. **Když vytvoříme kolem překážek čtverce velikosti 3×3, musí tyto čtverce pokrývat celou šachovnici.** Není to podmínka postačující, protože pokrytí šachovnice nestačí k tomu, aby byla dostupná všechna pole (např. na pokrytí prázdné šachovnice 8×8 stačí 9 čtverců, ale neexistuje takové počáteční pole cvrčka, odkud by doskákal na všechna prázdná pole šachovnice). Umožňuje to však výrazně zredukovat počet probíraných možností a objev, že minimální počet potřebných kamenů je 11 (a že nestačí 10), si vyžádal pomocí této metody jen několik desítek minut počítačového času (proti odhadem stovkám hodin potřebných v případě metody hrubé síly).

Pro specialisty ještě uvádím popis **efektivního** algoritmu, jak rychle zjistit, kolik překážek je třeba minimálně ještě umístit, aby byla šachovnice celá dostupná.



1) Metodou hledání nejkratší cesty v grafu (ze známého počátečního pole daného pozicí cvrčka) si vytvořím **tabulku dostupnosti polí**, ve které každé číslo určuje, v kolika tazích je příslušné pole dostupné z počátečního pole. Po zaplnění zůstanou některá pole neoznačena, ta jsou nedostupná.
Tabulku vytvořím tak, že ji nejprve zinicializuji (např. hodnotou -1) a na počáteční pole *(na obrázku c1)* dám nulu. Nyní označím všechna pole, na která může cvrček (jedním tahem) doskočit, hodnotou 1 *(na obrázku c4 a g5)*. Dále dělám cyklus přes všechna pole, na kterých je hodnota 1, a z těch označím dostupná pole hodnotou 2. V dalším kroku probírám všechna pole označená jako 2 a na pole, kam z nich může cvrček doskočit, dám hodnotu 3, atd. Takto vždy označuji jen ta pole, která dosud nebyla označena (pokud tam již je číslo >= 0, bylo takové pole dostupné v menším počtu tahů). V cyklu pokračuji tak dlouho, až již žádné další pole nelze označit. *V příkladu na diagramu se z polí označených číslem 6 nedostanu už na žádné nové pole.* Všechna pole, na nichž zůstala inicializační hodnota (-1), jsou cvrčkovi nedostupná.



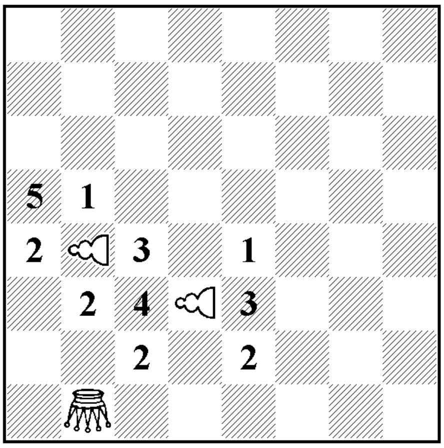
2) Dělám cyklus přes **nedostupná** pole. Z každého takového pole vytvořím čtverec velikosti 5×5, ve kterém (v rozsahu uvnitř šachovnice) vynuluji příznaky nedostupných polí. Zvýším čítač počtu nutných kamenů o 1 a pokračuji v cyklu přes aktuálně nedostupná pole. Vtip je v tom, že tímto vynuluji příznaky i těch případných nedostupných polí, na které by bylo možno se dostat přes tentýž přidaný kámen *(např. na obrázku pole a2 by mohlo být dostupné přes jednu a tu samou přidanou překážku b3 současně např. s polem a4)*. Nedostupná pole mimo čtverec 5×5 jsou **s jistotou** mimo dosah tohoto přidaného kamene *(např. pole d5 se nemůže stát dostupným současně s polem a2 nebo třeba s g2 nebo c8)*.
Na konci cyklu mám v čítači minimální počet dalších kamenů, které budu muset do pozice ještě přidat, aby byla **všechna** pole dostupná.

3) Nyní při generování možných pozic testuji právě popsanou metodou, zda aktuální počet kamenů v pozici plus zjištěný nezbytně nutný počet kamenů, které bude nutno přidat, nepřesahuje celkový počet kamenů, který zkoumám. Pokud ano, nemusím se touto větví (směrem do hloubky) zabývat a pokračuji v generování s další možností na stejné úrovni.

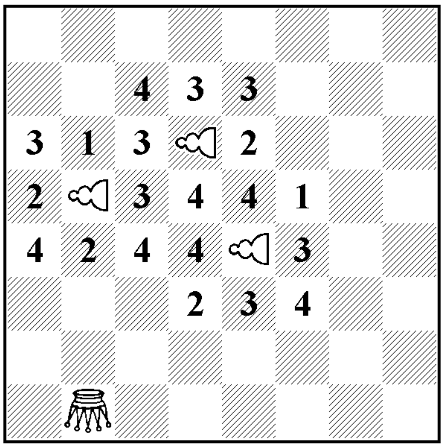
Následují rekordní pozice.

Čísla na diagramech určují délku nejkratší cesty cvrčka na toto pole. Neoznačená pole jsou mu nedostupná. Nad diagramy je uveden počet překážek a celkový počet dostupných polí.

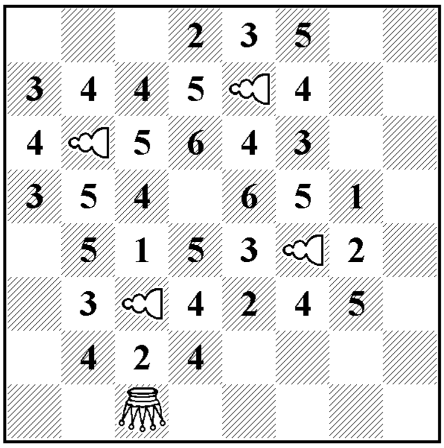
2 DU / 10 squares



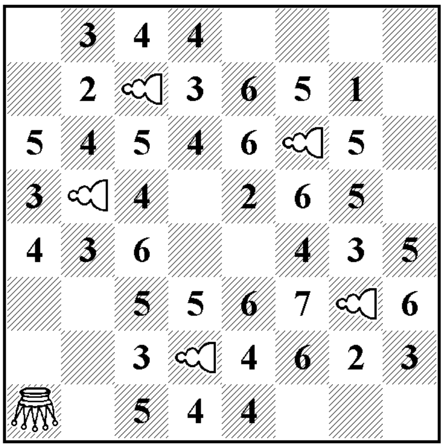
3 DU / 20 squares



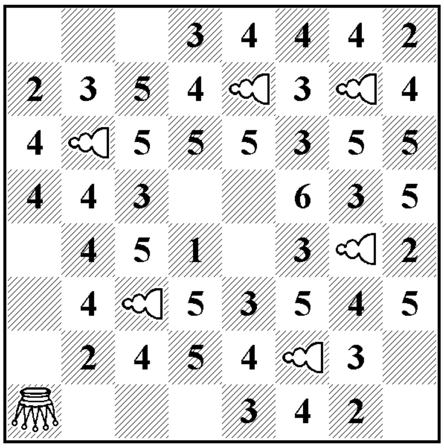
4 DU / 32 squares



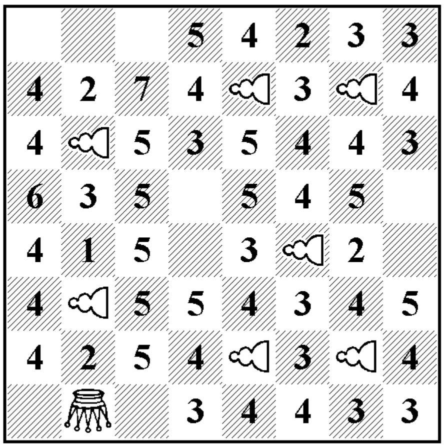
5 DU / 38 squares



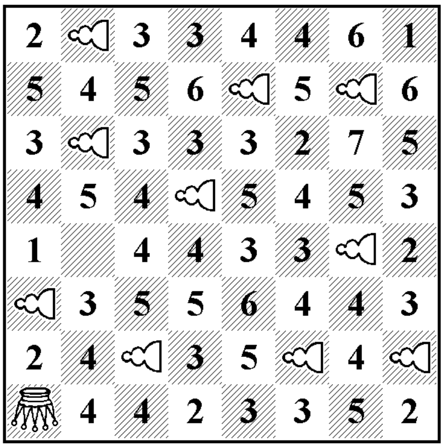
6 DU / 43 squares



7 DU / 47 squares

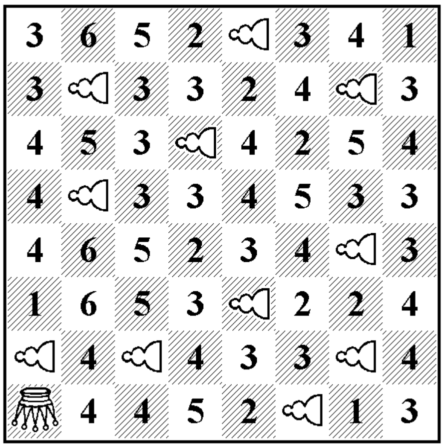


10 DU / 52 squares



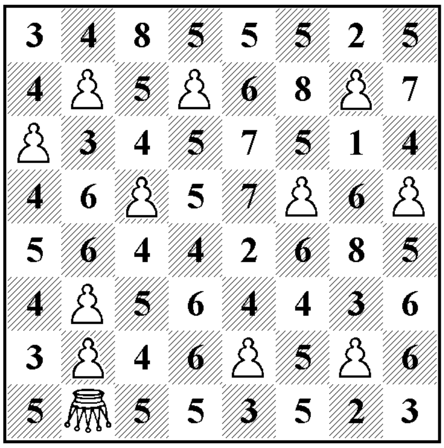
nedostupné je pouze pole b4

11 DU / 52 squares



celá šachovnice je dostupná

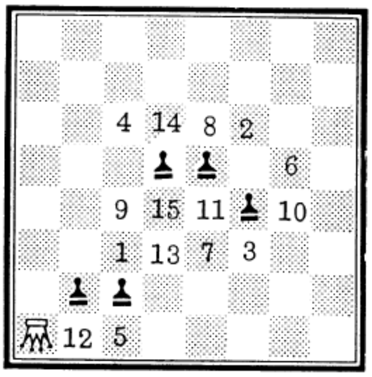
11 pawns / 52 squares



jiné schéma - stačí pěšci

3) Nejdelší jednoznačná cesta na některé pole (Cassani – Kotěšovec – Bartel)
Longest dual-free path to some square

565. F.CASSANI
Die Schwalbe, Aug 1931



Francesco Cassani ve své pozici ze Schwalbe 1931 (reprodukované v časopise Chessics 15/1983 s komentářem: „*565 shows 15 maximumming moves over 5 hurdles*“) předvádí cestu cvrčka přes 5 překážek v délce 15 tahů. Z počítačových výsledků vyplývá, že s pěti kameny není tato cesta ta nejdelší, ale že existuje pozice s cestou délky dokonce 18 tahů!
V tomto typu úloh není nutné projít všechna pole na šachovnici, ale najít tu nejdelší ze všech nejkratších cest z nějakého pole na jiné pole. Otevírá se tu prostor pro úlohy typu „SerienZug-Ziel“ s **jednoznačným** řešením.

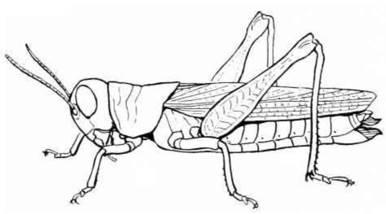
Cassaniho prototyp jde zobecnit takto (Kotěšovec, 1998):

Na šachovnici 8×8 rozmístěte 1 cvrčka a **k** zdánlivých pěšců *(dummy pawns)* tak, aby cvrček dosáhl nejdelší jednoznačné cesty na některé z volných polí šachovnice. Speciálně, pro šachovnici 8×8 určete nejdelší ze všech jednoznačných cest pro libovolné **k**.

*On a chessboard 8×8, place one grasshopper and **k** dummy pawns (hurdles) so that it has a longest path with unique move order to some free square on the board.*

Taková nalezená pozice je pak přijatelná jako **korektní** šachová úloha s výzvou typu SerienZug-Ziel nalezené délky s příslušným cílovým polem. Tímto problémem jsem se zabýval již v roce 1997 a první výsledky jsem v roce 1998 poslal do německého časopisu Problemkiste. Moje rekordní úlohy byly publikovány v článku SerienZiel Forderung für Grashüpfer auf einem n×n Brett, na který pak navázal svým článkem a programem Elmar Bartel a svoje výsledky publikoval taktéž v Problemkiste 117/1998. Zde je možné nalézt i některé rekordy na menších šachovnicích, mnohé z nich už byly rekordy absolutními. Tehdejší síla počítačů však neumožňovala prozkoumat problém do větší hloubky. Některé rekordy se mi podařilo od té doby překonat. Nejnovější výsledky shrnuje tabulka na str. 59.

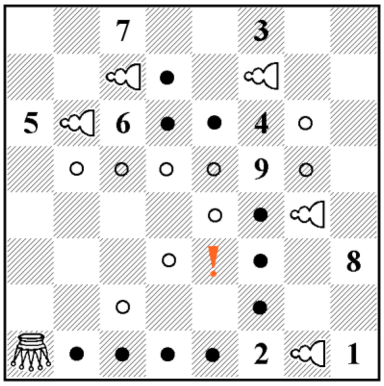
Že se dá dát podobným úlohám i přijatelnější forma než pomocí pozic se zdánlivými pěšci, demonstrovaly ještě 4 moje originály v Problemkiste 119/1998. Viz též úlohy č. 52 až 54 a reprodukce 204-205 v mojí knize 234 best chess problems (2008).



Z hlediska teorie grafů odpovídá tento typ úlohy hledání nejkratší cesty v grafu. To je (ve srovnání s hledáním hamiltonovské cesty v grafu) jednoduchá úloha lineární složitosti. Řešení úlohy typu SerienZug-Ziel je pro počítač jednoduché a podobné skladby řeší např. program Popeye prakticky v nulovém čase. Jiná věc je otázka generování pozic rekordních úloh. Tady máme (podobně jako v případě skokanů) 2 možnosti jak postupovat.

1) generovat možné cesty postupným přidáváním nových kamenů (přes které bude kámen přeskakovat) vždy na konec maximální možné cesty. Značný rozdíl proti podobné metodě použité v případě skokanů je zde ale v tom, že přidáním nového kamene se délka maximální možné cesty může zvýšit i **o více tahů než jeden**, protože cvrček může přes stejný kámen přeskočit během cesty i vícekrát v různých směrech.

schema



Při tomto postupu je možno rychle najít i dlouhé cesty, ale s rizikem, že se neproberou všechny možnosti, takže nemusíme tu úplně nejdelší možnou cestu vždy najít. Po řadě experimentů se ukázala jako nejlepší metoda, kdy

a) z pevně zvoleného počátečního pole najdu tu nejdelší ze všech nejkratších cest v grafu.

b) vyznačím si takto určenou maximální cestu. Je dána počátečním polem, překážkami, přes které kámen skáče, liniemi kterými prochází *(na obrázku vyznačeny plnými kolečky)* a koncovým polem.

c) jako možná pole pro umístění nového kamene zvolím všechna pole šachovnice s vyloučením polí na nalezené maximální cestě. Je třeba poznamenat, že případné omezení těchto polí jen na ta, která jsou potenciálně dostupná (jedním tahem) z koncového pole *(na obrázku vyznačena bílými kolečky ve směrech od pole 9)*, sice urychlí generování, ale vedlo k příliš velké ztrátě nejdelších cest *(např. na obrázku není uvažováno následné pole e3, přes které ale vede nejdelší cesta délky 20 tahů, viz diagram č.27)*. Naopak, uvažovat v další úrovni úplně všechna pole (tedy i ta, nacházející se na některé z linií nejdelší předtím vygenerované cesty) vedlo k neúměrnému prodloužení času generování bez viditelného nárůstu délky vygenerovaných pozic.

d) během generování postup optimalizuji podmínkou, že každé přidání nového kamene musí délku cesty prodloužit minimálně o 1 tah

2) kombinatorická metoda - probrání všech možných rozmístění k-tice kamenů. Tato metoda je časově náročnější (prakticky použitelná jen do 7-8 kamenů), ale má 100% úspěšnost a umožňuje najít absolutní (dále již nepřekonatelné) rekordy pro daný počet kamenů. Rozdíl proti kombinatorické metodě popsané v případě skokanů je ale ten, že zde probíráme možné pozice **ve směru od nejmenšího počtu kamenů** (tedy ve stejném směru jako generování a nejde proto použít něco jako přibližování zleva a zprava v případě skokanů).

V případě obou metod si lze ještě pro každý přeskakující kámen předem určit pole na šachovnici, přes která nebude možný skok (např. v případě tátošového cvrčka jsou to všechna pole na okraji šachovnice a ještě pole b2 atd., čímž se počet možných rozmístění kamenů sníží z 63 na 32). Toto jsem však volil jen jako parametr, protože kameny umístěné na těchto polích mohou ovlivnit délku maximální možné cesty (zablokováním pole na kraji šachovnice, přes které by sice kámen neskákal, ale vedla by tudy možná cesta).

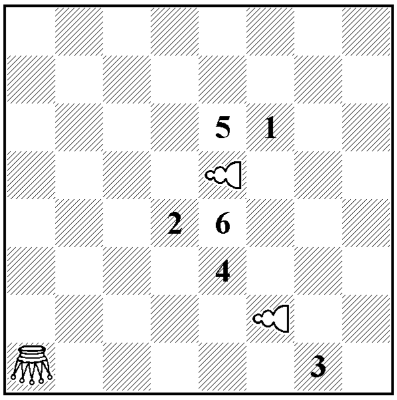
Rekordy podle počtu překážek na šachovnici 8×8
Records by number of hurdles on chessboard 8×8

kámen→	cvrček Grasshopper		věžový cvrček Rookhopper		střelcový cvrček Bishophopper		tátošový cvrček Nightriderhopper	
překážek *hurdles*	nejedn.	jednozn. *dual-free*	nejedn.	jednozn. *dual-free*	nejedn.	jednozn. *dual-free*	nejedn.	jednozn. *dual-free*
1	**2**	**2**	**2**	**2**	**2**	**2**	**2**	**2**
2	**6**	**6**	**4**	**4**	**4**	**4**	**4**	**4**
3	**13**	**13**	**8**	**8**	**7**	**6**	**7**	**7**
4	**16**	**16**	**11**	**11**	**9**	**9**	**10**	**10**
5	**19**	**18**	**15**	**15**	**11**	**11**	**14**	**14**
6	**20**	**20**	**18**	**18**	**14**	**14**	**20**	**20**
7	**23**	**23**	**20**	**20**	**14**	**14**	**21**	**20**
8	**26**	**26**	**21**	**21**	**14**	**14**	**24**	**23**
9	28	28	22	22	**15**	**15**	26	26
10	28	28	23	23	**15**	**15**	28	28
11	29	29	24	24	**15**	**15**	28	28
12	29	29	25	25	**15**	**15**	29	29
13	29	29	25	25	**15**	**15**	30	29
14	29	29	25	25	**15**	**15**	30	30
15	30	30	26	26	**14**	**14**	32	32
16	30	30	26	26	**14**	**14**	32	32
17	31	31	26	26	**14**	**14**	32	32
18	31	31	26	26	**13**	**13**	32	32
19	31	31	28	28	**12**	**12**	32	32
20	31	31	28	28	**11**	**11**	32	32
21	31	31	29	29	**10**	**10**	32	32
22	31	31	29	29	**9**	**9**	32	32
maximum	17 / 31	17 / 31	21 / 29	21 / 29	**9/ 15**	**9 / 15**	15 / 32	15 / 32

Pro cvrčka si vyžádalo kompletní prozkoumání pozic do 8 překážek (včetně) 105 hodin počítačového času a metoda generování (bez omezení počtu kamenů) celkem 183 hodin. Hodnoty do 8 překážek jsou **absolutní rekordy** (což je pro 7 a 8 překážek nový výsledek proti roku 1998, kdy pozice č. 28 a 29 objevil již Elmar Bartel, tehdejší výkon počítačů mu však neumožňoval dokázat, že neexistují delší). Hodnoty nad 8 překážek jsou rekordní s velkou pravděpodobností. Pro ostatní kameny byly potřebné časy menší, pro věžového cvrčka 50 hodin, pro tátošového cvrčka 80 hodin, do 8 překážek jde o absolutní rekordy. V (nejméně zajímavém) případě střelcového cvrčka jsou všechny hodnoty absolutní rekordy, kombinatorická metoda (vždy jen přes pole stejné barvy) si vyžádala pouhých 11 hodin. Je zde názorně vidět, jak po dosažení maxima s přibývajícím počtem překážek délka maximální cesty klesá (na šachovnici je pak méně místa).
Values for grasshopper, rookhopper and nightriderhopper up to 8 hurdles are absolute records, others have high probability. All values for bishophopper are absolute records.

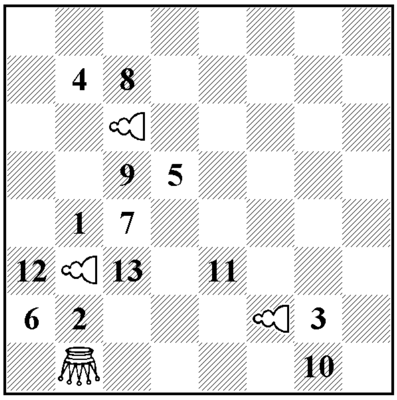
Je zajímavé, že zatímco v případě skokanů byly jednoznačné cesty velmi raritní a většina cest byla duálových, tak v případě přeskakujících kamenů je většina cest jednoznačných, takže délky maximálních cest jsou (až na několik vyjímek) shodné. Nejzajímavější úlohy je možno nalézt na následujících diagramech (v tabulce jsou tyto skladby označeny hypertextovými odkazy).

23. Václav Kotěšovec
G6 Problemkiste 117/1998



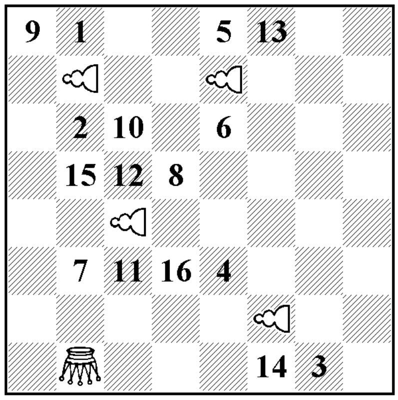
sd[e4]6 Grasshopper a1
C+ 2 Dummy pawns

24. Václav Kotěšovec
G7 Problemkiste 117/1998



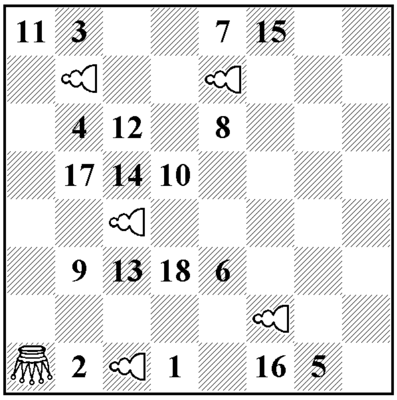
sd[c3]13 Grasshopper b1
C+ 3 Dummy pawns

25. Václav Kotěšovec
G8 Problemkiste 117/1998



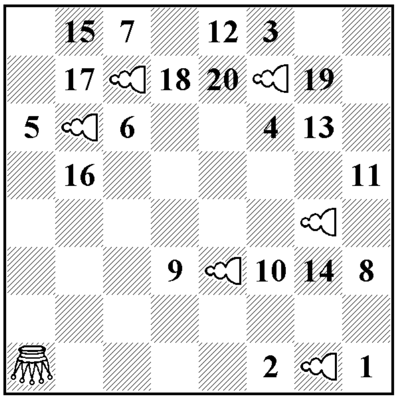
sd[d3]16 Grasshopper b1
C+ 4 Dummy pawns

26. Václav Kotěšovec
G9 Problemkiste 117/1998



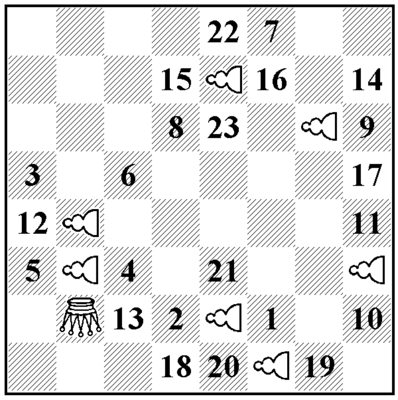
sd[d3]18 Grasshopper a1
C+ 5 Dummy pawns

27. Václav Kotěšovec
G10 Problemkiste 117/1998



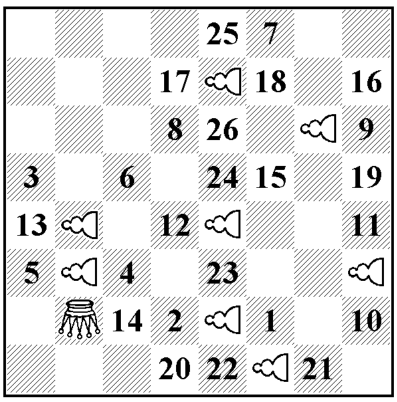
sd[e7]20 Grasshopper a1
C+ 6 Dummy pawns

28. Elmar Bartel
G14 Problemkiste 117/1998



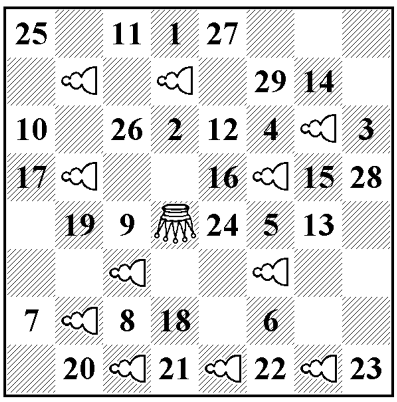
sd[e6]23 Grasshopper b2
C+ 7 Dummy pawns

29. Elmar Bartel
G15 Problemkiste 117/1998



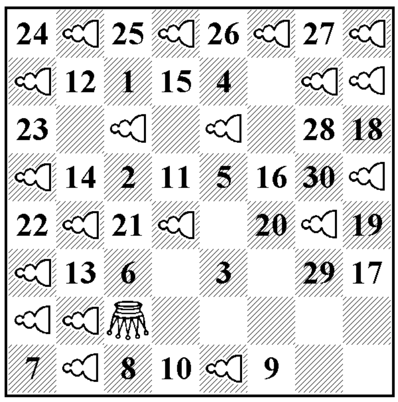
sd[e6]26 Grasshopper b2
C+ 8 Dummy pawns

30. Elmar Bartel
G17 Problemkiste 117/1998



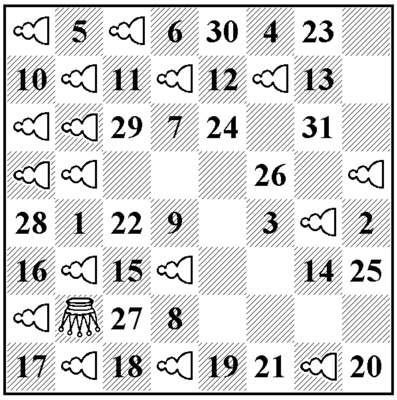
sd[f7]29 Grasshopper d4
C+ 11 Dummy pawns

31. Václav Kotěšovec
originál



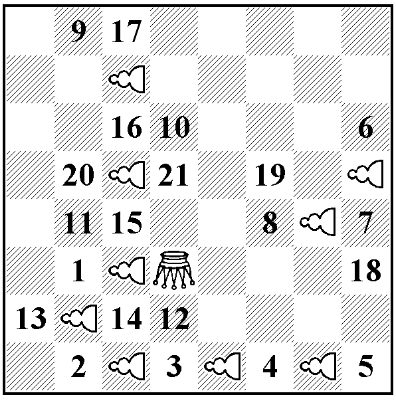
sd[g5]30 Grasshopper c2
C+ 19 Dummy pawns

32. Václav Kotěšovec
originál



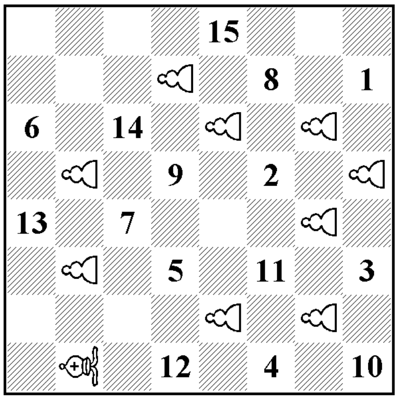
sd[g6]31 Grasshopper b2
C+ 17 Dummy pawns

33. Václav Kotěšovec
originál



sd[d5]21 Grasshopper d2
C+ 9 Dummy pawns

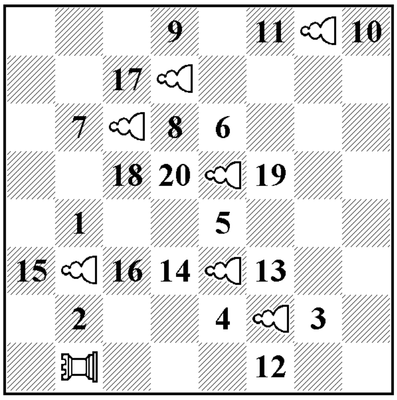
34. Václav Kotěšovec
originál



sd[e8]15 Bishophopper b1
C+ 9 Dummy pawns

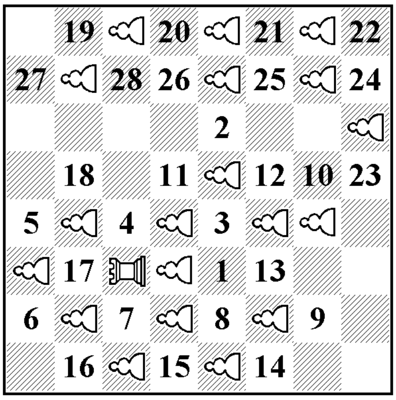
V rekordní úloze č. 32 lze odebráním zdánlivých pěšců a8 a b7 dostat sd[g6]30 s 15 kameny. V úloze č.33 je cesta délky sice jen 21 tahů, ale cvrček má v každém tahu právě jednu možnost (při této podmínce jde o absolutní rekord). Zajímavé je srovnání s úlohou č. 7.

35. Václav Kotěšovec
originál



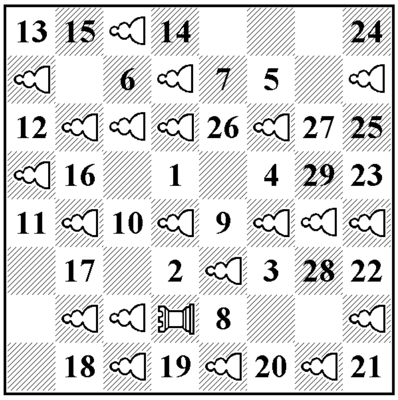
sd[d5]20 Rookhopper b1
C+ 7 Dummy pawns

36. Václav Kotěšovec
originál



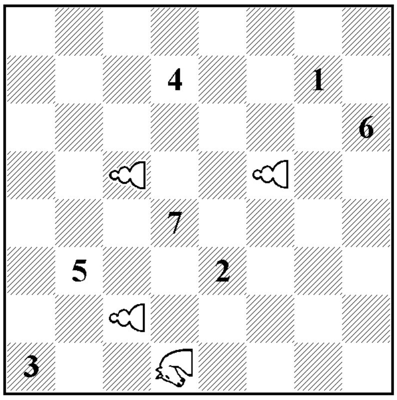
sd[c7]28 Rookhopper c3
C+ 19 Dummy pawns

37. Václav Kotěšovec
originál



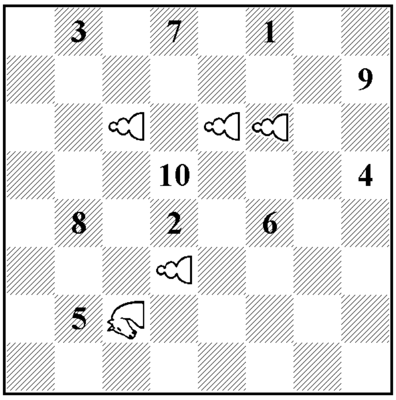
sd[g5]29 Rookhopper d2
C+ 21 Dummy pawns

38. Václav Kotěšovec
originál



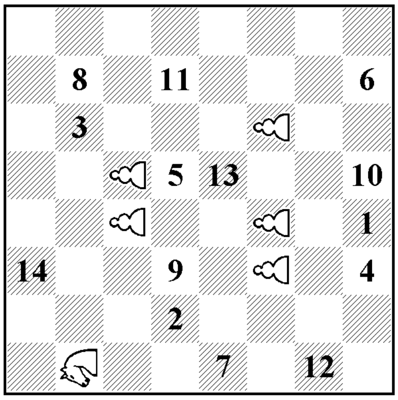
sd[d4]7 Nightriderhopper d1
C+ 3 Dummy pawns

39. Václav Kotěšovec
originál



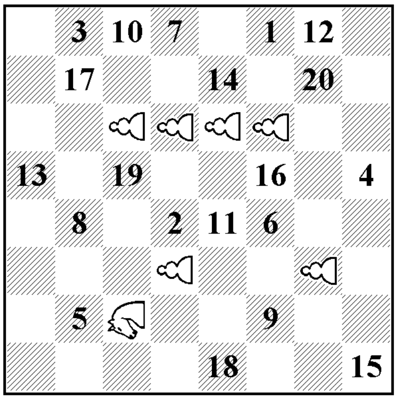
sd[d5]10 Nightriderhopper c2
C+ 4 Dummy pawns

40. Václav Kotěšovec
originál



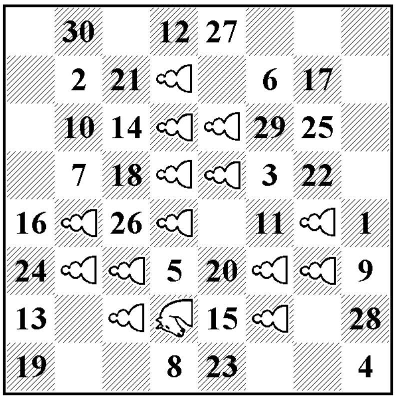
sd[a3]14 Nightriderhopper b1
C+ 5 Dummy pawns

41. Václav Kotěšovec
originál



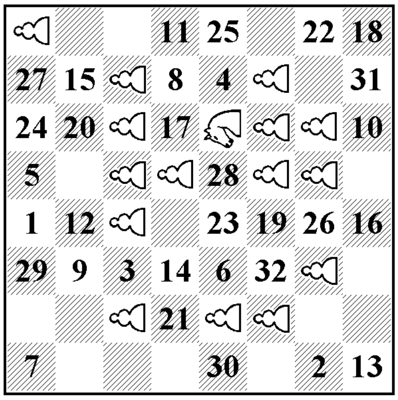
sd[g7]20 Nightriderhopper c2
C+ 6 Dummy pawns

42. Václav Kotěšovec
originál



sd[b8]30 Nightriderhopper d2
C+ 14 Dummy pawns

43. Václav Kotěšovec
originál

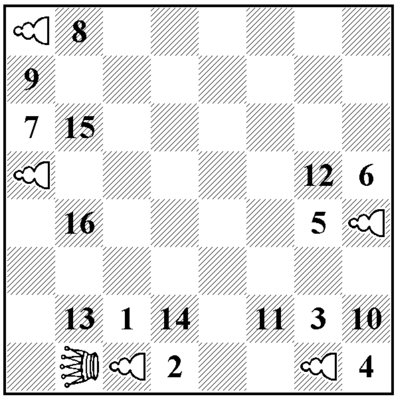


sd[f3]32 Nightriderhopper e6
C+ 15 Dummy pawns

V úloze č. 42 skáče tátošový cvrček přes všechny zdánlivé pěšce (což je při této podmínce absolutní rekord). Pokud někteří jen blokují pole (jako a8 v č. 43), je možná i delší cesta.

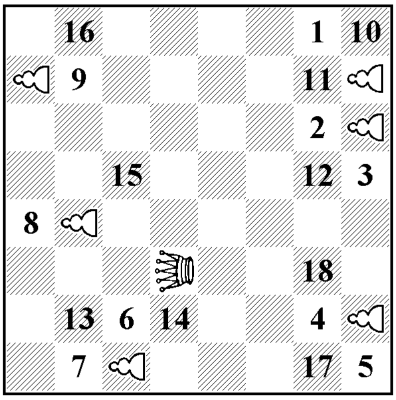
Zkoušel jsem ještě i méně obvyklé přeskakující kameny Eagle, Sparrow, Moose a zde je na doplnění několik úloh s nimi. Cesty ale (proti očekávání) nevyšly příliš dlouhé.

44. Václav Kotěšovec
originál



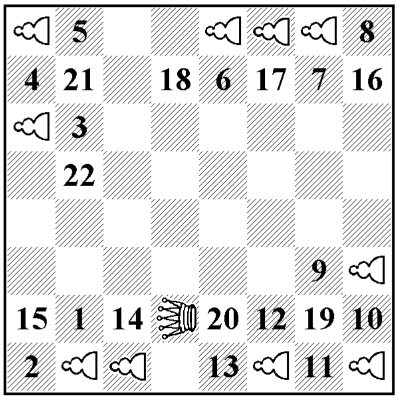
sd[b4]16 Eagle b1
C+ 5 Dummy pawns

45. Václav Kotěšovec
originál



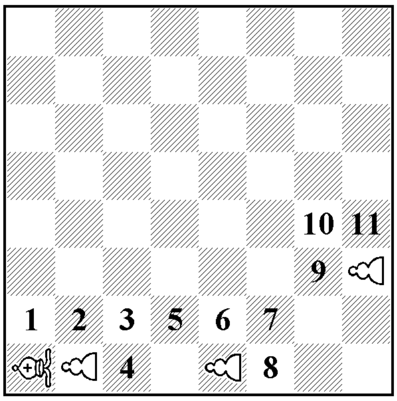
sd[g3]18 Eagle d3
C+ 6 Dummy pawns

46. Václav Kotěšovec
originál



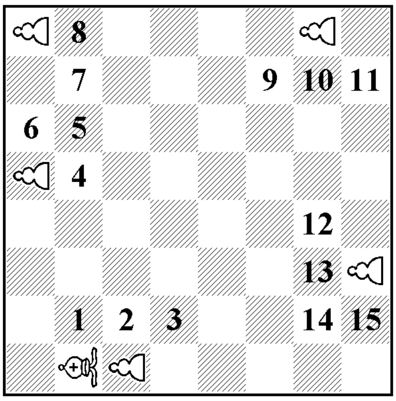
sd[b5]22 Eagle d2
C+ 10 Dummy pawns

47. Václav Kotěšovec
originál



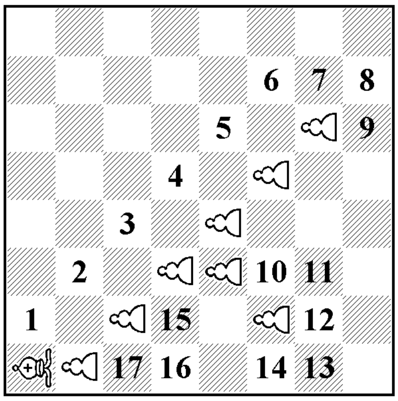
sd[h4]11 Sparrow a1
C+ 3 Dummy pawns

48. Václav Kotěšovec
originál



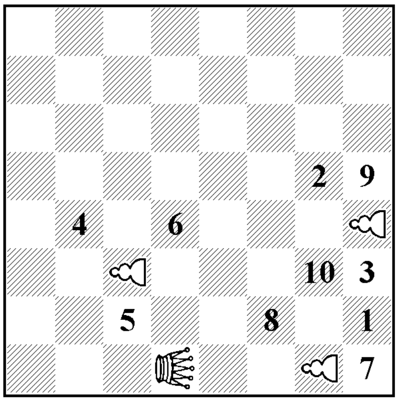
sd[h2]15 Sparrow b1
C+ 5 Dummy pawns

49. Václav Kotěšovec
originál



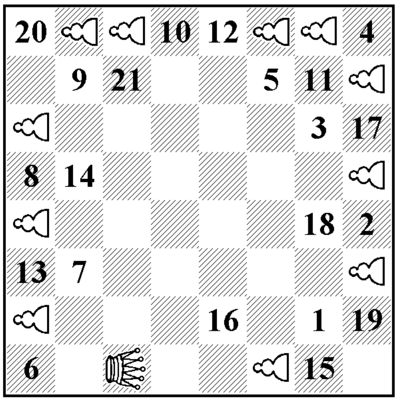
sd[c1]17 Sparrow a1
C+ 8 Dummy pawns

50. Václav Kotěšovec
originál



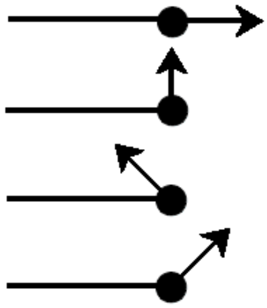
sd[g3]10 Moose d1
C+ 3 Dummy pawns

51. Václav Kotěšovec
originál



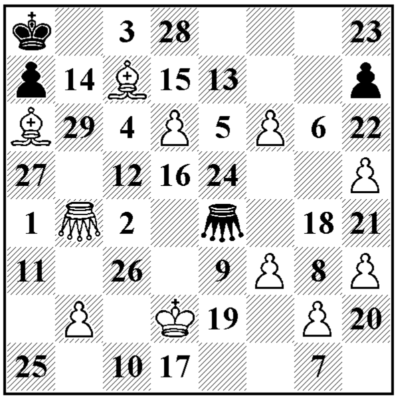
sd[c7]21 Moose c1
C+ 11 Dummy pawns

Grasshopper (0°)
Eagle (90°)
Sparrow (135°)
Moose (45°)



Následující 3 úlohy jsou příkladem, jak se dají z pozic se zdánlivými pěšci (sloužícími zde jako schémata) odvodit skladby se šachově přijatelnějším materiálem.

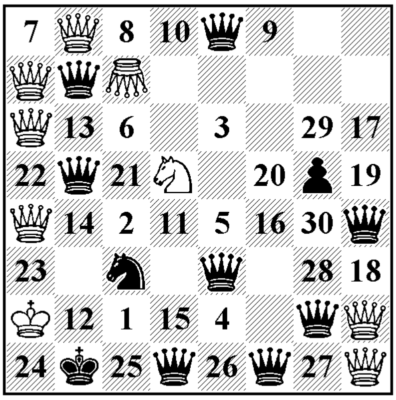
52. Václav Kotěšovec
K1255 Problemkiste 119/1998



sh#29 Grasshoppers
C+ (11+4)

1.Ga4 ... 29.Gb6 ♗b7#
Podle č.30 Elmara Bartela

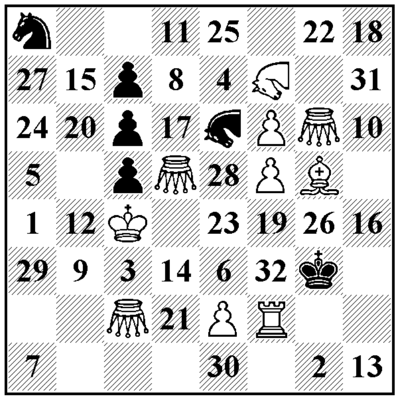
53. Václav Kotěšovec
1.Lob Šachová skladba 2004



sd=30 Madrasi Rex Inclusiv
C+ (9+11)

1.Gc2 ... 30.Gg4=
Podle pozice č. 31

54. Václav Kotěšovec
K1257 Problemkiste 119/1998



sh#32 Nightriderhopper f7/e6
C+ (10+6)

1.NHa4 ... 32.NHf3 ♖g2#
Podle pozice č. 43

Další náměty se nabízejí. Např. pokud bychom připustili možnost braní (tedy použili zdánlivé pěšce opačné barvy), dostáváme zcela jiný typ úlohy, která není už řešitelná pomocí hledání nejkratší cesty v grafu (překážka může být běhově sebrána, čímž se graf změní v průběhu řešení). Tímto typem úloh jsem se nezabýval, z hlediska uměleckého jsem měl pocit, že kombinací tahů s braním a bez braní by došlo k určité ztrátě elegance řešení. Pokud bychom šli ještě dále, šlo by třeba kombinovat i barvy zdánlivých pěšců (bylo by možno brát jen některé z nich atd.), takže skladatelský prostor zde určitě ještě není zcela vyčerpán. Zajímavější se mi ale zdály cesty s kamenem locust (který bere každým svým tahem), zkoumané v následující kapitole.

4) Locust – sekvence s odstraňováním překážek (Kotěšovec)
Locust – sequence with capturing of hurdles

Nové možnosti cest vznikají pro kámen locust (*český termín „saranče" se příliš nepoužívá*), který skáče jako cvrček, ale jen přes kameny opačné barvy a přeskakovaný kámen je odstraněn ze šachovnice (pokud není pole za přeskakovaným kamenem volné, tah není možný). Zde se opět dostáváme k hamiltonovské cestě, ale ne vzhledem k polím doskoku, ale k přeskakovaným kamenům. Každý kámen může být sebrán z různých směrů a locust nemusí při své cestě navštívit všechna teoreticky dostupná pole, musí jen sebrat všechny kameny. Příslušný graf musí být **orientovaný** (ne vždy je možný tah i opačným směrem).

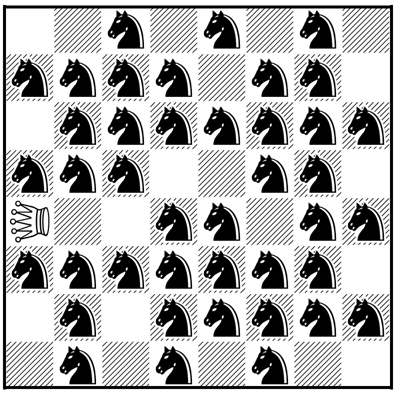
Z hlediska úlohářského zde navíc zaujme možnost **návratu** locustů na počáteční pole *(a return to the starting square is possible)*. V případě braní kamenů **může být uzavřená cesta jednoznačná**, což nebylo možné v případě skokanů (kde každá uzavřená cesta měla nutně minimálně 2 řešení, protože nezáleží na směru cesty).

Všechny rekordy uvedené v následující tabulce jsou **absolutní!** *All records in this table are* ***absolute***.

	šachovnice 8×8		
	nejednoznačné cesty	jednoznačné cesty	
kámen		otevřené	uzavřené
Locust	45	45	45
Rook-Locust	39	39	38
Bishop-Locust	12	11	6
Nightrider-Locust	25	25	21
piece	*open tours longest path*	*open tours*	*closed tours*
		dual-free	

V této skupině považuji za zajímavé (a hodné diagramu) pouze **jednoznačné cesty**.

55. Václav Kotěšovec
F0532 StrateGems 30/2005



sd=41 Locust a4
C+ (1+41)
1.LO:b3-c2 ... 41.LO:c7-d7=

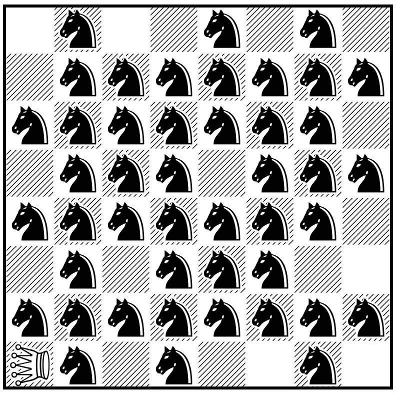
		5		6		7	
4	35	41	36		37	28	
	30	40	29	22	21	27	8
34	3	23			26	17	
			13	16		20	9
15	1	2	19	18	39	38	
	14		12	24	31	25	10
	33		32		11		

Úlohu č. 55 přirovnal Ivan Skoba k „známému Leibnitzovu hlavolamu". Viz též její reprodukce v mojí knize 234 best chess problems, 2008, č. 206. Tato skladba nebyla složena pomocí počítače.

Absolutní rekord v délce 45 tahů (č. 56 s dokonce uzavřenou cestou) jsem objevil počítačem až v roce 2009 při sestavování této knihy.

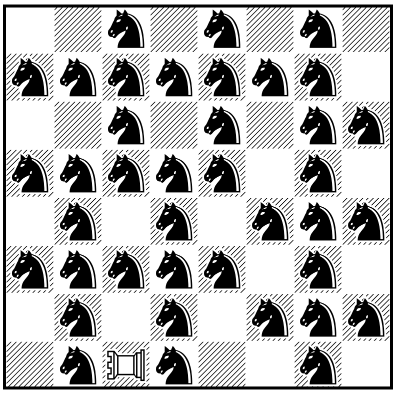
Čísla na diagramech určují pořadí v jakém jsou černé kameny postupně brány.

56. Václav Kotěšovec
9598 Šachová skladba 103/2009



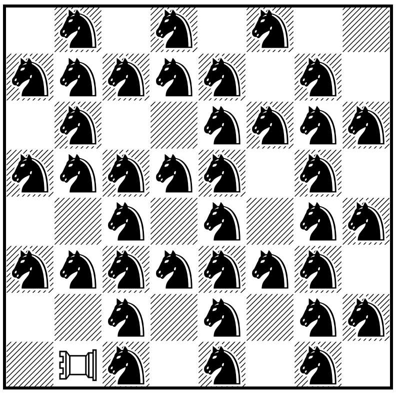
sd=45 Locust a1
C+ (1+45)
1.LO:b1-c1 ... 45.LO:a2-a1=
návrat – *switchback*

57. Václav Kotěšovec
originál



sd=39 Rook-Locust c1
C+ (1+39)
1.RL:d1-e1 ... 39.RL:g6-h6=

58. Václav Kotěšovec
originál



sd=38 Rook-Locust b1
C+ (1+38)
1.RL:b3-b4 ... 38.RL:c1-b1=
návrat – *switchback*

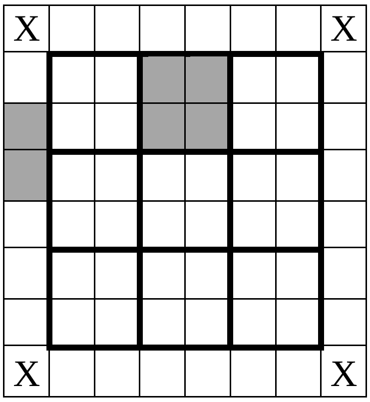
	17			37		9	
	32	41	31	16	42	8	36
18	44	40	38	22	10	35	
	33	39	34		15	23	7
19	3	28	21	30	11	24	
	20		27	14	25		
45	29	2	4	26	12	43	6
	1		13			5	

		13		29		28	
12	16	35	14	34	27	33	
		15		26		39	32
11	17	25	30	38		22	
	8		18		23	31	21
7	36	9	24	19		4	
	10		37		5	20	3
	6		1			2	

	9		28		36		
8	27	10	35	29		14	
	5			21	13	22	15
6	20	11	4	30		16	
		2		12		31	23
7	1	26	3	25	17	24	
		19		18		37	32
		38		34		33	

V úloze č. 56 zaujme kromě rekordní délky i zajímavá hra se čtvercovými manévry, jednou diagonálně (v 31. - 34. tahu) a podruhé ortogonálně (v 38. - 41. tahu).

Vzhledem k obrovskému množství pozic nebylo možné projít všechny možnosti rozmístění braných kamenů, přesto se mi podařilo najít ve všech případech **absolutní rekordy**! Pro Locust a Rook-Locust jsem použil kombinatorickou metodu s následujícími optimalizacemi.



V obou případech není možné brát kameny **v rozích** šachovnice (na obrázku označené X) a na všech čtyřech okrajích šachovnice se nemohou vyskytovat 2 vedle sebe stojící kameny (např. a5 a a6 by nebylo možno brát). Na každém **okraji** tak existují pouze 4 možné kombinace rozmístění nejvýše 3 braných kamenů: 01010100, 01010010, 01001010 a 00101010.
Po nalezení cesty délky 45 tahů stačilo jen dokázat, že neexistuje cesta délky 46 tahů (nebo delší). Na každém okraji šachovnice mohou být maximálně 3 kameny, celkem tedy 12 kamenů. Z vnitřních 36 polí šachovnice by potom muselo být 34 obsazených (12+34=46), tedy jenom 2 pole volná. Proto stačilo probrat pouze $4^4 * 36 * 35 / 2 = 161280$ možností.
V případě Rook-Locust navíc nesmí být nikde na šachovnici čtverec 2×2 plně obsazený kameny (např. 4 kameny na polích d6, d7, e6, e7 by nebylo možné brát). V každém takovém čtverci mohou být maximálně 3 černé kameny (čtvrté pole musí být prázdné nebo může být polem počátečním – může zde stát bílý kámen). Celkový počet rozestavení braných kamenů pro cesty délky 12 + (36 – 9) = 39 tahů je proto menší než $4^4 * 4^9 = 67\ 108\ 864$ (z toho je možno ještě vyloučit další pozice, kdy čtverec 2×2 vzniká např. na polích c6, c7, d6, d7 atd.) Prozkoumání všech pozic si vyžádalo asi 60 hodin počítačového času. *Pro srovnání – počet rozestavení 39 stejných kamenů na šachovnici 8×8 je 401 038 568 751 465 792, takový neefektivní postup by si vyžádal asi 40 milionů let...*

Pro šachovnici n×n (kde **n** je sudé) platí pro maximální délku cesty **m** v případě Locust horní odhad

$$m \;<=\; 4\,(n-2)\,/\,2 + (n-2)^2 \;=\; n\,(n-2)$$

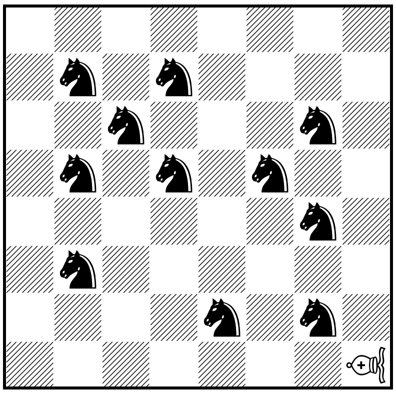
V případě Rook-Locust

$$m \;<=\; 4\,(n-2)\,/\,2 + (n-2)^2 - ((n-2)\,/\,2)^2 \;=\; (n-2)\,(3n+2)\,/\,4$$

Pro šachovnici 8×8 je skutečná hodnota pro Locust 45 < 48, ale pro Rook-Locust existuje cesta přesně v délce teoretického horního odhadu 39 tahů! V limitě pro n → ∞ může Rook-Locust sebrat kameny rozmístěné nejvýše na 75% plochy celé šachovnice.

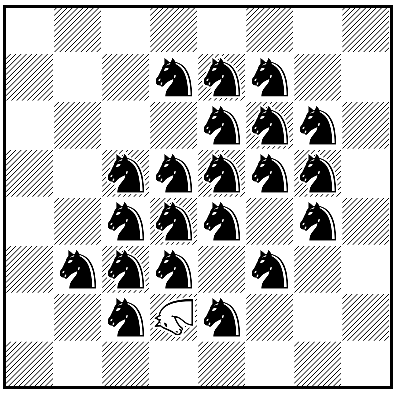
V případě Bishop-Locust a Nightrider-Locust jsem použil metodu generování pozic s postupným přidáváním braných kamenů a časy byly (vzhledem k omezené pohyblivosti těchto kamenů) téměř nulové.

59. Václav Kotěšovec
originál



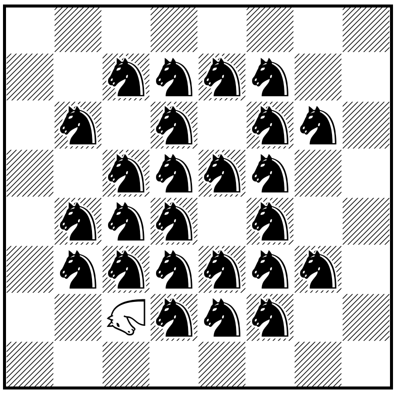
sd=11 Bishop-Locust h1
C+ (1+11)
1.BL:g2-f3 ... 11.BL:c6-d7=

60. Václav Kotěšovec
originál

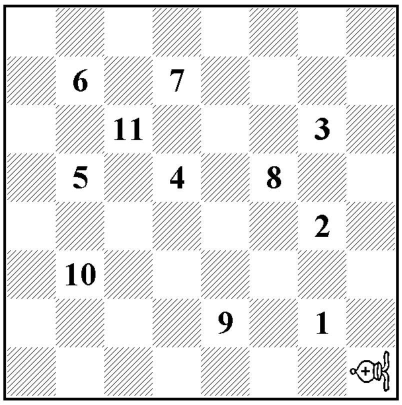


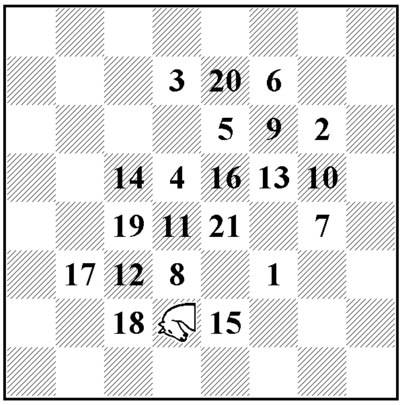
sd=21 Nightrider-Locust d2
C+ (1+21)
1.NL:f3-h4 ... 21.NL:e4-d2=
návrat – *switchback*

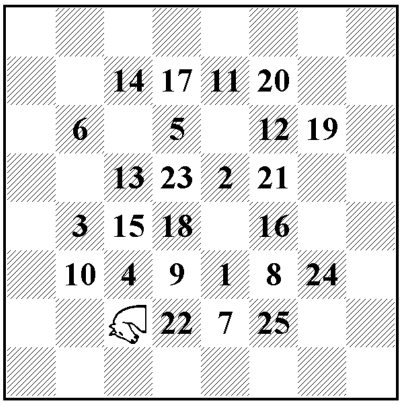
61. Václav Kotěšovec
originál



sd=25 Nightrider-Locust c2
C+ (1+25)
1.NL:e3-g4 ... 25.NL:f2-d3=







Tento typ úloh není pro běžné řešící programy (Alybadix, Popeye, WinChloe) tak náročný jako úlohy se skokany, ale opět je překvapivě nejrychlejší program WinChloe. Všechny ostatní programy však byly schopny úlohy poměrně rychle vyřešit, čímž byly současně ověřeny moje výsledky.

Program	***version***	sd=45	sd=39
Alybadix	2005	2 m 4 s	10 s
Popeye	4.47	2 m 54 s	14 s
WinChloe	2.0	49 s	4 s
VKsol	1.0	< 1 s	< 1 s

5) Cesta cvrčka s pomocí jezdce (Hall – Willcocks)

Grasshopper tour over Knight

Na závěr se budeme věnovat spolupráci dvou kamenů. Bílý má cvrčka a jezdce, kteří střídavě dělají jeden tah a cílem je, aby cvrček navštívil všechna pole šachovnice a na žádné nevstoupil dvakrát (tahy jezdce mohou být na libovolná pole, tedy i na taková, kde už byl). Jednoznačnost se zde nepožaduje. *Grasshopper tour using a knight as the movable hurdle.*

Tento typ cesty vymyslel v roce **1938 Sidney H. Hall**, kdy publikoval úlohu č. 3107 ve Fairy Chess Review. Jeho skladba ale měla délku jen 60 tahů cvrčka (přes 61 polí). Dlouhé roky se pak mělo za to, že úplná cesta cvrčka přes jezdce neexistuje. Až v roce **1985** publikoval **Theophilus H. Willcocks** otevřenou cestu cvrčka přes všechna pole šachovnice (Chessics 23/1985, str. 84, *viz reprodukce*, číslování na diagramu je od 1 do 64). Celkem 63 tahů cvrčka, dohromady s jezdcem 125 tahů!

Ve svém článku Willcocks rozlišoval ještě termíny „*closed tour*“ a „*cyclic tour*“. Cyklická cesta je speciální případ uzavřené cesty (cvrčka), kterou je možno opakovat, tj. i jezdec se může vrátit na své počáteční pole. Uzavřenou cestu přes celou šachovnici ale Willcocks neobjevil (přestože, jak píše, ji hledal celý život), jeho pozice ale současně obsahuje i cyklickou cestu o 2 tahy kratší (61 tahů cvrčka).

B. T.H.WILLCOCKS

14	45	10	54	11	53	02	57
35	48	06	16	59	49	05	24
09	55	13	44	01	56	12	52
42	19	34	63	20	23	62	31
15	46	07	04	47	50	03	58
36	28	40	17	60	29	39	25
08	21	33	43	32	22	64	51
41	18	37	27	38	26	61	30

64-square open G/S tour. And 62-square cyclic G/S tour (2...63)

21.4.**2009** se mi podařilo najít i **uzavřenou** cestu cvrčka (*closed tour*), *viz diagram níže.* Jezdec stojí na f6, v prvním tahu skáče cvrček na g7, jezdec táhne na g4, cvrček skáče na g3, jezdec jde na e3, ... , až v posledním tahu může jezdec z d2 na b1 a cvrček e1 se vrací na a1. ***The dream of Willcocks really exists!***

6×6

open tour

24	19	11	2	18	27
4	7	15	22	5	14
32	1	31	34	10	35
16	20	28	25	17	26
23		12	3	6	13
33	8	29	21	9	30

7×7

closed tour

37	15	2	38	8	16	9
30	45	29	23	46	4	22
1	40	7	14	42	39	13
36	44	18	10	35	17	21
31	27	3	32	47	28	24
19	41	6	11	20	5	12
	34	48	26	43	33	25

Václav Kotěšovec, originál

Knight f6 – closed

30	33	25	40	31	34	24	39
43	54	61	19	44	8	1	18
26	22	29	48	23	38	47	35
60	16	42	53	32	17	41	7
27	49	13	20	45	50	12	36
59	55	62	3	56	9	2	6
14	21	28	52	15	37	46	51
	4	58	11	63	5	57	10

	otevřená cesta	uzavřená cesta
šachovnice	přes všechna pole	
4×4	–	–
5×5	–	–
6×6	existuje	–
7×7	existuje	existuje
8×8	existuje	existuje
chessboard	open tour	closed tour

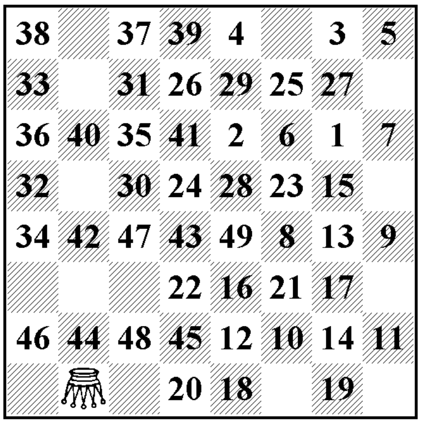
Počítačem jsem zjistil, že na šachovnicích **4×4** a **5×5** neexistuje cesta cvrčka přes všechna pole šachovnice a na **6×6** existuje jen otevřená cesta (až na symetrie jediná možnost!). Na šachovnici **7×7** už existuje i uzavřená cesta, ale neexistuje cyklická cesta (vzhledem k tomu, že jezdec mění každým svým tahem barvu pole, **neexistuje cyklická cesta na šachovnicích lichých rozměrů**).
Na šachovnici **8×8** existuje uzavřená cesta. Cyklická asi neexistuje, ale existuje cyklická cesta s tátošem.

Cesta cvrčka s pomocí skokanů - *Grasshopper tours over other Leapers*

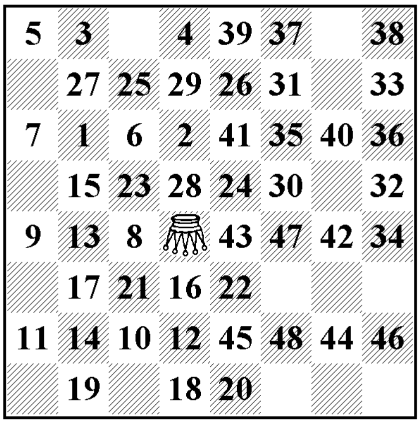
S jinými skokany, sloužícími jako pohyblivé překážky, jsou možnosti cest cvrčka menší než s jezdcem. Na šachovnici 8×8 není možná cesta přes všechna pole šachovnice s žádným jiným skokanem. Relativně nejdelší je spolupráce s vezírem (*Leaper* [0,1]), kde existuje nejdelší cesta délky 49. Všechny rekordy uvedené v tabulce jsou absolutní.

chessboard 8×8		otevř.	uzavř.
skokan		cesta	cesta
Leaper		***open***	***closed***
[0,1]	Wazir	49	48
[0,2]	Dabbaba	6	4
[0,3]		3	2
[0,4]		3	2
[0,5]		2	2
[0,6]		1	0
[0,7]		1	0
[1,1]	Fers	16	12
[1,2]	Knight	**63**	**63**
[1,3]	Camel	8	3
[1,4]	Giraffe	5	3
[1,5]	Ibis	5	3
[1,6]	Flamingo	4	3
[1,7]		1	0
[2,2]	Alfil	4	3
[2,3]	Zebra	2	0
[2,4]	Lancer	2	0
[2,5]	Korsar	1	0
[2,6]		1	0
[2,7]		1	0
[3,3]		3	2
[3,4]	Antelope	2	0
[3,5]		2	0
[3,6]		1	0
[3,7]		1	0
[4,4]		3	2
[4,5]		2	0
[4,6]		1	0
[4,7]		1	0
[5,5]		2	2
[5,6]		2	0
[5,7]		1	0
[6,6]		1	0
[6,7]		1	0
[7,7]		1	0

Wazir f5 - 49

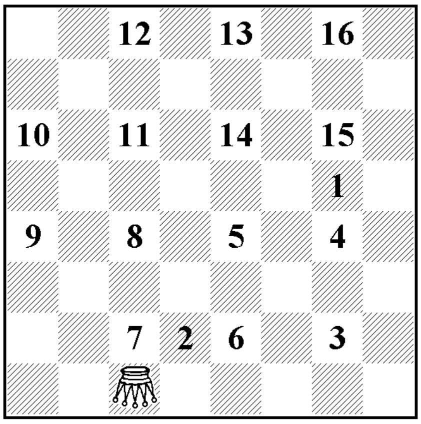


Wazir c5 - 48 (closed)

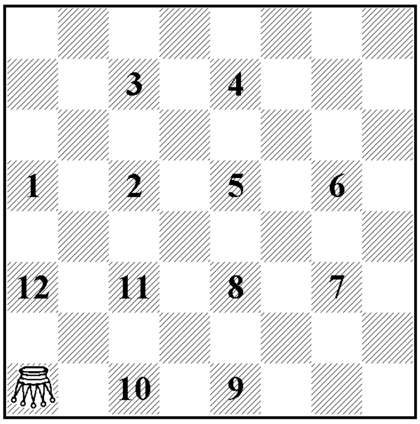


Na diagramu vlevo je vezír v počáteční pozici na poli f5 a cvrček přes něj skáče na g6, potom táhne vezír na f6 a cvrček na e6, atd. Postup je docela zajímavý. Na pravém diagramu jde ve 48. tahu cvrček z f4 na f2 přes vezíra f3 a nyní se může po tahu vezíra na e3 vrátit na počáteční pole d4.

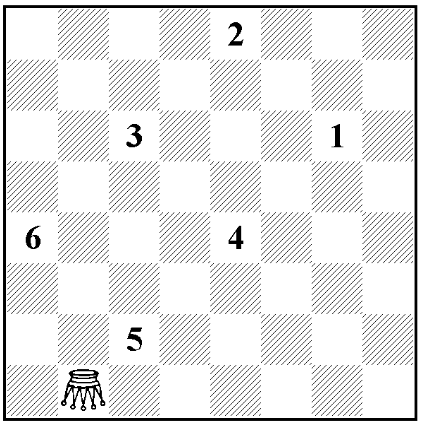
Fers f4 - 16



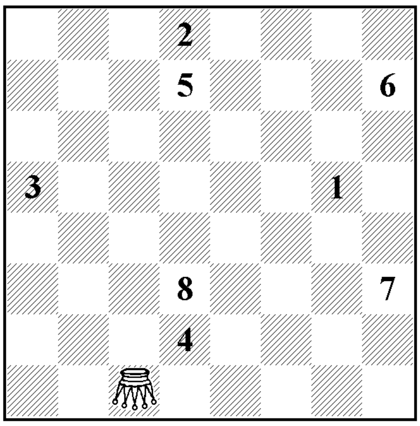
Fers a4 - 12 (closed)



Dabbaba f5 - 6



Camel f4 - 8



Cesta cvrčka s pomocí různých kamenů (Dawson – Tylor)

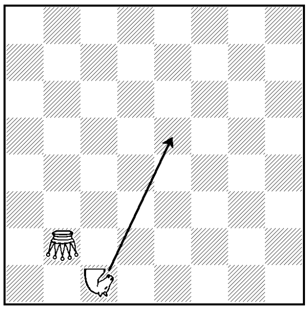
Grasshopper tours over various pieces

Následující tabulka obsahuje nejdelší cesty cvrčka přes běžné kameny na různých velikostech šachovnic. Vidíme, že s pomocí dámy jsou možné cesty přes všechna pole šachovnice, s pomocí věže je taková cesta možná až od šachovnice 5×5.

šachovnice / *chessboard*		4×4		5×5		6×6		7×7		8×8	
cvrček přes	**Grasshopper over**	otevř. *open*	uzavř. *closed*	otevř. *open*	uzavř. *closed*	otevř. *open*	uzavř. *closed*	otevř. *open*	uzavř. *closed*	otevř. *open*	uzavř. *closed*
věž	**Rook**	10	6	**24**	**24**	**35**	**35**	**48**	**48**	**63**	**63**
dáma	**Queen**	**15**	**15**	**24**	**24**	**35**	**35**	**48**	**48**	**63**	**63**
jezdec	**Knight**	4	3	13	10	**35**	34	**48**	**48**	**63**	**63**
tátoš	**Nightrider**	4	3	13	10	**35**	34	**48**	**48**	**63**	**63**
střelec	**Bishop**	6	3	9	4	12	4	17	12	20	12
král	**King**	**15**	**15**	**24**	**24**	**35**	34	**48**	46*	**63**	**63**

* - pouze hodnota označená hvězdičkou není absolutní rekord, nebylo možné prozkoumat všechny možnosti
* - *Not all possibilities have been tested (best results to date)*

Hodnoty v tabulce pro jezdce a tátoše jsou sice shodné, přesto se oba kameny liší v tom, že s pomocí tátoše jsou možné i cyklické cesty na šachovnicích 7×7 a 8×8. S pomocí jezdce jsou (s možnou vyjímkou v prvním tahu) cvrčkovi dosažitelná pouze pole vzdálená o [0,2], [0,3], [0,4], [2,2] nebo [3,3] (jezdec táhne vždy z pole sousedícího se cvrčkem). Tátoš přináší proti jezdci ještě možnost skoku cvrčka o [4,4] (např. při postavení cvrčka na b2, umožní tátoš tahem z c1 na e5 skok cvrčka na f6 – *viz diagram vpravo*).



Ukázalo se, že tato relativně malá výhoda už stačí k existenci **cyklické cesty** (*cyclic tour*) cvrčka s pomocí tátoše přes všechna pole šachovnice 8×8!

Viz diagram dole vlevo. Specifického tahu tátoše je využito hned v jeho prvním tahu, kdy jde z c2 na e6, čímž umožní skok cvrčka z b3 na f7. V pozici po 61. tahu cvrčka táhne tátoš z b2 na f4, cvrček jde na g5, tátoš na g2, cvrček na g1 a nyní po tahu tátošem na e1 se cvrček může vrátit své na výchozí pole d1. Tato cesta je **cyklická** (*cyclic tour*), protože se nyní může tátoš vrátit na c2 a cestu je možno opakovat.

Václav Kotěšovec, originál

Nightrider c2 - cyclic

20	48	29	32	11	49	31	12
59	3	54	57	37	2	56	8
28	33	19	47	10	46	23	41
53	6	50	26	36	7	62	13
21	38	18	58	4	39	30	45
60	1	51	15	42	14	55	9
27	35	22	25	5	34	24	40
52	16	61		43	17	63	44

Nightrider f4 - cyclic

40	21	39	3	34	20	2
47	32	43	14	46	31	13
8	4	7	11	38	5	1
41	35	19	26	22	18	23
48	45	30	15	33	44	29
9	36	42	10	37	6	12
27	16		25	28	17	24

Jelikož tátoš (na rozdíl od jezdce, viz str. 67) může táhnout i na pole stejné barvy, je i **na šachovnici 7×7 možná cyklická cesta** (*cyclic tour*). Cesta cvrčka na diagramu je však trochu kuriózní – mohla by být realizována i jen s pomocí jezdce (pak je uzavřená, ale není cyklická). S pomocí tátoše je cyklická, protože tátoš může táhnout na konci cesty z b2 na f4.

Příklady nejdelších cest cvrčka s pomocí **věže** na různých velikostech šachovnic.

Rook c3 – 24 (closed)

11	18	16	20	17
9	2	6	1	7
13	21	12	19	15
10	4	8	3	5
	23	14	22	24

Rook a4 – 35 (closed)

8	17	6	11	7	9
1	15	3	13	31	23
35	19	33	10	5	21
27	14	2	25	29	26
34	16	4	20	32	22
	18	28	12	30	24

Rook b2 – 48 (closed)

6	40	5	7	38	14	39
23	21	25	22	32	12	34
4	8	3	41	36	10	37
26	18	24	20	30	16	33
2	42	1	9	46	11	35
28	19	27	17	31	13	29
	44	47	43	48	15	45

Na šachovnici **5×5** existuje uzavřená cesta, ale neexistuje cyklická cesta, uzavřené cesty na šachovnicích **6×6** a **7×7** jsou cyklické.

T. R. Dawson, 1938

49	47	52	46	54	35	48	33
64	25	7	27	10	29	9	31
51	45	50	44	53	34	55	36
6	26	5	24	8	28	11	30
62	43	60	40	56	37	58	38
4	23	2	21	12	18	13	19
63	41	61	42	59	39	57	32
	16	3	22	14	20	15	17

První **uzavřenou cestu cvrčka s pomocí věže** na šachovnici 8×8 objevil T. R. Dawson, 3179 Fairy Chess Review 1938. Věž je na b2 (*Rook b2*), 63 tahů. Cesta je **cyklická**.

A closed symmetric G tour over R was given by T. R. Dawson.
(*číslování bylo převzato z FCR v původním rozsahu 1 až 64*).

T. R. Dawson ke svému řešení napsal*: "My solution of 3179 is in diametral symmetry, the tour falling into 4 identical groups of 16 squares, so that the difference of pairs of numbers, images of one another in mid-point of board, is 32."*

Rook a2 – 63 (closed)

61	32	57	26	51	24	49	21
59	30	55	28	10	14	9	11
63	34	53	25	50	22	47	23
60	29	58	15	8	12	7	13
38	36	54	35	52	39	45	37
1	31	3	17	6	16	5	19
62	42	56	40	44	41	46	43
	33	2	27	4	18	48	20

Moje pozice představuje nesymetrickou uzavřenou cestu. Je ale kuriózní, že tato cesta není cyklická. Po 63. tahu je cvrček na a6 a věž na a5, nyní táhne věž na a2 a cvrček se vrací na a1. V této pozici by sice mohl táhnout cvrček na a3, ale na tahu je věž!
(číslování je zde už opět v obvyklém rozsahu 0 až 63)

Bishop e5 – 20

20		19		8			7
						3	
17		18		9	1	10	
				5			
16		15		12		11	
		2					
	4	14		13			
6							

Cesty cvrčka s pomocí **střelce** jsou omezeny pohybem střelce po polích stejné barvy a nedosahují proto velkých délek (*viz diagram vpravo*).

Nejdelší uzavřená cesta cvrčka s pomocí střelce v délce 12 tahů je shodná s cestou s pomocí ferse.

Příklady nejdelších cest cvrčka s pomocí **krále** na různých velikostech šachovnic.

King b1 – 15 (closed)

15	10	13	8
3	6	2	4
12	9	14	11
♔	5	1	7

King c2 – 24 (closed)

3	13	11	15	12
6	17	20	23	19
2	14	9	1	10
4	22	5	16	21
7	♔	8	24	18

King a5 – 35

1	8	12	10	7	11
4	22	3	5	23	35
18	14	20	9	13	33
2	6	24	28	31	25
17	15	19	16	21	34
♔	29	32	27	30	26

King a4 – 34 (closed)

5	9	7	4	8	
1	30	2	32	29	16
34	10	6	11	14	19
3	31	28	24	27	22
33	12	15	18	13	17
♔	25	20	23	26	21

Obě uzavřené cesty na šachovnicích **4×4** i **5×5** jsou cyklické.
Na šachovnici **6×6** neexistuje uzavřená cesta cvrčka s pomocí krále přes všechna pole.

C. M. B. Tylor, 1978

62	52	61	50	42	48	41	46
57	55	59	56	37	35	39	36
64	51	63	49	44	47	43	45
58	53	60	54	38	33	40	34
2	8	1	6	22	28	21	26
13	11	15	12	17	31	19	32
4	7	3	5	24	27	23	25
14	9	16	10	18	29	20	30

První **uzavřenou cestu cvrčka s pomocí krále** na šachovnici 8×8 publikoval C. M. B. Tylor, 183 [Chessics 5/1978] (viz reprodukce vlevo, číslování 1–64). Jeho cesta je i **cyklická**.
Symmetric Closed Grasshopper Tour over King as hurdle

Moje pozice vpravo představuje jiný typ uzavřené cyklické cesty.

King b2 – 63 (closed)

12	15	25	13	24	26	30	33
20	18	22	19	37	35	39	36
10	14	11	28	31	27	29	32
5	16	21	17	23	47	38	34
8	61	9	♔	41	45	40	53
3	59	4	57	49	55	51	48
6	63	7	62	43	46	42	44
1	60	2	58	52	56	50	54

Na šachovnici **7×7** jsem našel (otevřenou) cestu cvrčka s pomocí krále přes všechna pole v plné délce 48 tahů cvrčka (*viz diagram*).

Je zajímavé, že její nalezení bylo mnohem obtížnější než v případě šachovnice 8×8. Otevřenou otázkou ale zůstává, zda na 7×7 existuje i cesta uzavřená (nejdelší počítačem nalezená měla jen 46 tahů, ale nebylo časově možné prozkoumat všechny možnosti).

King c2 – 48

43	41	31	42	29	32	28
47	39	48	37	25	36	26
44	3	45	34	30	33	23
7	40	11	38	21	15	27
46	2	9	1	24	35	19
6	4	13	5	12	14	22
8	♔	10	17	20	16	18

Je třeba ještě poznamenat, že cesty cvrčka s pomocí dámy jsou zahrnuty v cestách krále (na šachovnici 4×4), resp. věže (na větších šachovnicích) a případné diagramy by byly proto nadbytečné.

Cesta věžového cvrčka s pomocí různých kamenů

Rookhopper tours over various pieces

Pohyblivost věžového cvrčka je sice menší než v případě cvrčka, přesto jeho cesty s pomocí různých kamenů jsou zajímavé. Na všechna pole šachovnice se dostane jen s pomocí dámy. Všechny rekordy v této tabulce jsou absolutní.

*All records in this table are **absolute**.*

šachovnice / *chessboard*		8×8	
věžový cvrček přes	**Rookhopper over**	otevřené *open*	uzavřené *closed*
věž	**Rook**	7	7
dáma	**Queen**	**63**	**63**
jezdec	**Knight**	7	4
tátoš	**Nightrider**	7	4
střelec	**Bishop**	14	12
král	**King**	59	57

Václav Kotěšovec, originál

Rook a4 – 7 (closed)

7							
5							
3							
1							
6							
4							
2							
♖							

Queen a3 – 63 (closed)

16	11	9	14	10	15	17	50
61	57	5	55	25	53	56	54
63	12	3	13	19	48	18	49
60	58	7	59	24	52	23	51
1	38	2	39	20	47	21	46
62	36	4	35	26	32	27	31
44	42	6	40	43	41	22	45
♖	37	8	34	29	33	28	30

Knight d7 – 7

			1			2	
7			4			3	
6			5				
			♖				

Tato uzavřená cesta věžového cvrčka s pomocí dámy je cyklická.

Bishop a6 – 14

1		2		13		14	
4		3		12		11	
5		6		9		10	
♖		7		8			

King b6 – 59

8	6	11	7	12	49	15	48
41	1	40	42		45		46
9	5	10	4	13	50	14	51
38	29	39	43	17	44	16	47
33	2		3	57	53	58	52
37	28	36	27	18	24	19	23
32	30		31	56	54	59	55
34	♖	35	26	21	25	20	22

King b6 – 57 (closed)

8	6	11	7	12	39	15	38
31	1	30	32	18	35		36
9	5	10	4	13	40	14	41
28	57	29	33	17	34	16	37
23	2	20	3	19	43	47	42
27	56	26	55		52		51
22	♖	21	45		44	46	
24		25	54	49	53	48	50

Prozkoumání všech možností bylo v případě cest věžového cvrčka přes krále možné a vyžádalo si pouhé 2 hodiny počítačového času pro obecné cesty a 3 hodiny pro uzavřené cesty.

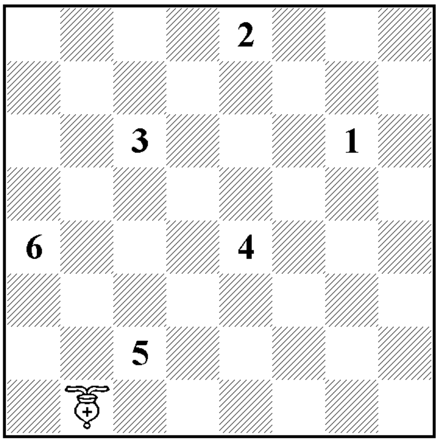
Cesta střelcového cvrčka s pomocí různých kamenů

Bishophopper tours over various pieces

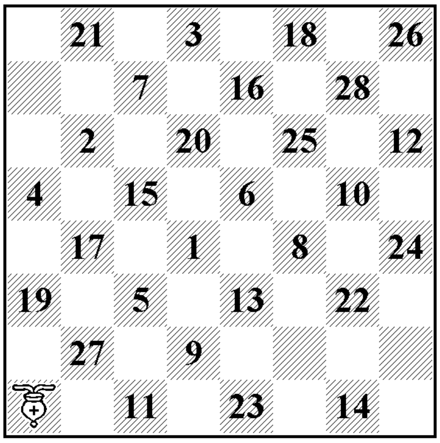
Střelcový cvrček se může dostat maximálně jen na polovinu polí šachovnice, takže cesty s pomocí různých kamenů nedosahují velkých délek. Zajímavá je pouze cesta s pomocí dámy. Všechny rekordy v této tabulce jsou absolutní. *All records in this table are **absolute**.*

šachovnice / *chessboard*		8×8	
střelcový cvrček přes	**Bishophopper over**	otevřené *open*	uzavřené *closed*
věž	**Rook**	6	4
dáma	**Queen**	28	28
jezdec	**Knight**	1	0
tátoš	**Nightrider**	2	0
střelec	**Bishop**	7	7
král	**King**	2	1

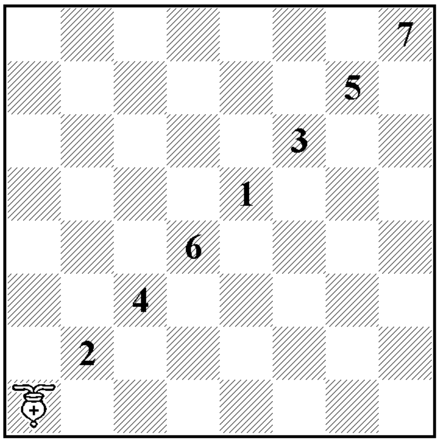
Rook f5 – 6



Queen c3 – 28 (closed)



Bishop d4 – 7 (closed)



Cesta tátošového cvrčka s pomocí věže nebo dámy (Dawson – Douglas)

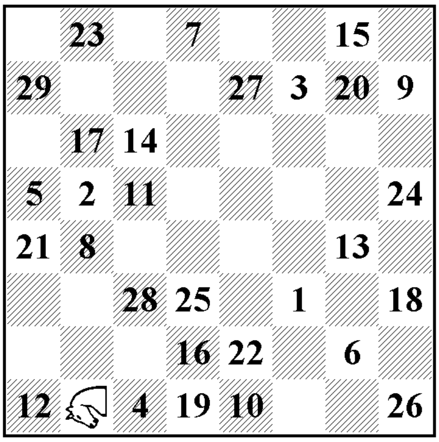
Nightriderhopper tours over Rook or Queen

Cestami tátošového cvrčka s pomocí **věže** se jako první zabývali T. R. Dawson + F. Douglas v roce 1928 (*path by Nightriderhopper over Rook),* kdy nalezli 3 typy nejdelších možných cest: "*a2/b4, a4/e2, and c3/b5*". Tento výsledek jsem potvrdil počítačem, který navíc našel nejdelší uzavřenou cestu tátošového cvrčka s pomocí věže v délce 16 tahů.
Daleko zajímavější se však ukázala cesta tátošového cvrčka s pomocí **dámy**, která dosahuje až 60 tahů tátošového cvrčka a existuje taková cesta i uzavřená. Všechny údaje uvedené v následující tabulce jsou **absolutní rekordy**.

šachovnice / *chessboard*		8×8	
tátošový cvrček přes	**Nightriderhopper over**	otevřené *open*	uzavřené *closed*
věž	**Rook**	29	16
dáma	**Queen**	60	60

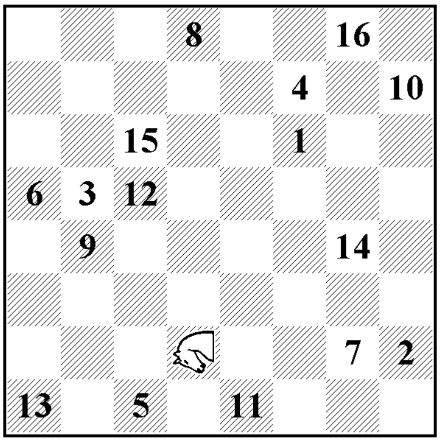
T. R. Dawson + F. Douglas
1259 Chess Amateur 1928

Rook d2 – 29



Václav Kotěšovec
originál

Rook e4 – 16 (closed)



Václav Kotěšovec
originál

Queen e5 – 60 (closed)

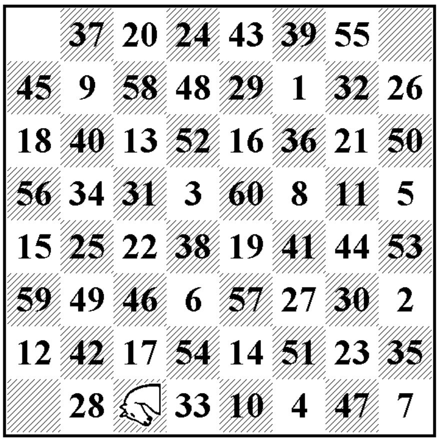


Diagram vlevo (nalezený počítačem) odpovídá Dawsonově pozici a2/b4 (otočené kolem diagonály). Nejdelší uzavřená cesta tátošového cvrčka přes dámu (diagram vpravo) je jediného možného typu.

Definice použitých exokamenů a exopodmínek
Definitions of fairy pieces and conditions

cvrček (Grasshopper, Grashüpfer, Sauterelle) – Přeskakující figura, pohybuje se po frontálách nebo diagonálách na první pole bezprostředně za prvním kamenem, který mu stojí v cestě. Na diagramu se označuje symbolem dámy otočeným o 180°. *Moves along Queen-lines over another unit of either colour to the square immediately beyond that unit. A capture may be made on arrival, but the hurdle is not affected.*

tátoš (Nightrider, Nachtreiter, Noctambule) – Liniová figura s jednotkovým tahem jezdce. Na diagramu se označuje symbolem jezdce otočeným o 180°. *A Rider along a straight line on squares lying a Knight's move away from each other.*

věžový cvrček (Rookhopper, Turmhüpfer, Tour-Sauterelle) – Přeskakující figura, pohybuje se po frontálách na první pole bezprostředně za prvním kamenem, který mu stojí v cestě. *Moves like a Grasshopper but only on Rook-lines.*
střelcový cvrček (Bishophopper, Läuferhüpfer, Fou-Sauterelle) – Přeskakující figura, pohybuje se po diagonálách na první pole bezprostředně za prvním kamenem, který mu stojí v cestě. *Moves like a Grasshopper but only on Bishop-lines.*
tátošový cvrček (Nightriderhopper, Nachtreiterhüpfer, Noctambule-Sauteur) – Přeskakující figura, pohybuje se po liniích tátoše na první pole bezprostředně za prvním kamenem, který mu stojí v cestě. *Moves like a Grasshopper but only on Nightrider-lines.*

orel (Eagle, Adler, Aigle) – Přeskakující figura pohybující se jako cvrček, při přeskoku se však točí o 90°. *Moves like a Grasshopper but lands on the cells to left or right of the hurdle.*
vrabec (Sparrow, Spatz, Moineau) – Přeskakující figura pohybující se jako cvrček, při přeskoku se však točí o 135°. *Moves like a Grasshopper but turning 135° over the hurdle to land on one of two cells.*
los (Moose, Elch, Elan) – Přeskakující figura pohybující se jako cvrček, při přeskoku se však točí o 45°. *Moves like a Grasshopper but turns 45° over the hurdle to land on one of two cells.*

saranče (Locust, Heuschrecke, Locuste, blcha) – Figura, pohybující se jako cvrček, ale pouze přes soupeřův kámen, který je tímto brán, s podmínkou, že pole za ním je volné. Může tedy táhnout pouze s braním. Kámen stojící těsně za soupeřovým králem je takto vázán. *Moves like a Grasshopper, but the piece it hops over must be adverse, and it is captured (as in checkers). The Locust must arrive on an empty square.*

věžové saranče (Rook-Locust, Turmheuschrecke, Tour-Locuste) – Táhne jako saranče, ale jen po věžových liniích. *Moves like a Locust but only on Rook-lines.*
střelcové saranče (Bishop-Locust, Läuferheuschrecke, Fou-Locuste) – Táhne jako saranče, ale jen po střelcových liniích. *Moves like a Locust but only on Bishop-lines.*
tátošové saranče (Nightrider-Locust, Nachtreiterheuschrecke, Noctambule-Locuste) – Táhne jako saranče, ale jen po tátošových liniích. *Moves like a Locust but only on Nightrider-lines.*

zdánlivý pěšec (Dummy pawn, Dummy, Pion impuissant) – Kámen, který nemá pohyblivost (nechodí ani nepůsobí), jen blokuje pole, na němž stojí. Může být brán. *Immobile man (may be captured).*

Moa – Figura, která se pohybuje jako jezdec, ale jen je-li diagonální pole v daném směru volné. *Moves like a Knight, but via the square diagonally adjacent to it. If this square is occupied, the move is not playable. The Moa can therefore be interfered with on this square.*

Pao – Metafigura, bez braní táhne jako věž, bere a šachuje na věžové linii za prvním kamenem, který ji stojí v cestě. *The Chinese Rook, which moves like a normal Rook but captures like a Rookhopper, but its arrival square may be any number of squares beyond the hurdle, provided the line is free.*

sériový cíl [xy] n. tahem (SerienZug-Ziel [xy] in n Zügen, series-case [xy] in n moves) – Cílem je obsadit jakýmkoli kamenem pole [xy] v maximálně n tazích. Stojí-li na tomto poli již nějaký kámen, musí jej opustit nebo být brán. Německý termín pro tento typ úloh je běžnější. *The aim is to reach square [xy] within **n** moves.*

sériovotahový pomocný mat (serie helpmate) – Černý vykoná bezprostředně za sebou určený počet tahů tak, aby bílému umožnil dát jednotahový mat. Označuje se sh#n, kde n je počet tahů. *In a series-helpmate Black plays **n** moves to reach a position where White can mate in one, avoiding checks until the final move of the sequence.*

sériový pat (serie direct stalemate) – Bílý vykoná bezprostředně za sebou určený počet tahů tak, aby posledním tahem dal pat druhé straně. Označuje se sd=n, kde n je počet tahů. *In a series direct stalemate (sd=n) White plays **n** moves to reach a position where Black is in stalemate.*

Madrasi – Kameny stejné hodnoty, ale opačné barvy, které se napadají, se paralyzují. Paralyzování nemusí být oboustranné. *Like units other than Kings are paralysed when they attack each other. Paralysed units cannot move, capture or give check, their only power being that of causing paralysis.*
Madrasi Rex Inclusiv – Podmínka madrasi se vztahuje i na oba krále. *Rex inclusive - the rule applies to Kings as well, so the two Kings may stand next to each other.*

Názvy a definice skokanů, viz str. 23. *Names and definitions of Leapers, see page 23.*

Rejstřík úloh a pozic jiných autorů
Index of problems and positions by other composers

Bartel El.	28 p. 60, 29 p. 60, 30 p. 60
Cassani F.	p. 57
Dawson T.R.	p. 33, p. 52, p. 70, p. 74
Douglas F.	p. 74
Frost A.H.	p. 35
Jelliss G.P.	p. 34, p. 40, p. 41
Marlow T.W.	p. 54
Saukkola J.	3 p. 25
Tylor C.M.B.	p. 71
Willcocks T.H.	p. 46, p. 67

Rejstřík autorů článků a odkazů
Index of resources

Dawson T.R.	p. 32
Frolov M.	p. 35, 41
Gik E.Ya.	p. 51
Haddy A.H.	p. 46
Hall S.H.	p. 67
Hannson F.	p. 32
Jelliss G.P.	p. 4, 21, 25, 31, 32, 33, 41, 43
Knuth D.	p. 42, 48
Omasta E.	p. 29
Pegg E.	p. 41
Petković M.	p. 51
Schwenk A.J.	p. 31
Warnsdorff H.C.	p. 17
Watkins J.J.	p. 31
Willcocks T.H.	p. 42, 43, 46

Electronic edition of chess booklets by Václav Kotěšovec, volume 4

Využití teorie grafů v šachových úlohách © Václav Kotěšovec, 2009
[Application of Graph Theory in Chess Problems (Dual-free Leaper and Hopper tours)]

***Published 31.5.2009 on site*: http://web.telecom.cz/vaclav.kotesovec/**

Vychází jako elektronická kniha v PDF, doplňkový náklad 60 tištěných brožur *[Total 60 printed booklets]*