

Università degli Studi de L'Aquila

**Appunti dalle Lezioni di**  
**MECCANICA RAZIONALE**

tenute dal prof. Raffaele ESPOSITO

## INDICE

Indice .....	v
Premessa .....	x
1. Assiomi della Meccanica .....	1
1.1 Tempo .....	1
1.2 Spazio .....	1
1.3 Punto materiale .....	12
1.4 Cambiamenti di riferimento .....	14
1.5 Principio d'inerzia .....	20
1.6 Legge di Newton .....	23
2. Equazioni differenziali e Legge di Newton .....	25
2.1 Posizione del problema .....	25
2.2 Esistenza ed unicità .....	28
2.3 Carattere deterministico della Legge di Newton .....	34
2.4 Continuità rispetto ai dati iniziali .....	36
2.5 Differenziabilità rispetto ai dati iniziali .....	39
2.6 Metodo delle differenze finite .....	41
3. Integrali primi, conservazione dell'energia .....	45
3.1 Integrali primi di un sistema differenziale .....	45
3.2 Conservazione dell'energia meccanica .....	45
4. Problemi unidimensionali .....	49
4.1 Riduzione a una dimensione .....	49
4.2 Analisi qualitativa del moto .....	51
4.3 Stabilità .....	58
4.4 Oscillatore armonico .....	62
4.5 Potenziali singolari .....	69
5. Problemi con attrito .....	74
5.1 Dissipazione dell'energia .....	74
5.2 Stabilità asintotica .....	76
5.3 Oscillatore armonico smorzato e forzato .....	79
5.4 Forzante periodica .....	84
5.5 Teorema di Fourier .....	86
5.6 Limite di attrito nullo .....	94
5.7 Piccole oscillazioni .....	96
6. Problemi tridimensionali. Forze centrali .....	100
6.1 Conservazione dell'energia .....	100

6.2	Conservazione del momento angolare .....	101
6.3	Coordinate polari .....	103
6.4	Conservazione della velocità areolare .....	105
6.5	Moti radiali .....	107
6.6	Moti generici .....	110
6.7	Moti Kepleriani .....	113
7.	Principio di minima azione: punto materiale .....	119
7.1	Funzionali su spazi di traiettorie .....	119
7.2	Punti stazionari di funzionali .....	121
7.3	Equazioni di Eulero-Lagrange .....	123
7.4	Principio di minima azione di Hamilton .....	128
7.5	Invarianza delle equazioni di Eulero-Lagrange .....	132
7.6	Condizioni di minimo .....	134
8.	Dinamica dei sistemi di punti materiali .....	137
8.1	Equazioni di Newton .....	137
8.2	Principio di azione e reazione .....	139
8.3	Equazioni cardinali della Meccanica .....	142
8.4	Legge di conservazione dell'energia .....	145
8.5	Moto in un riferimento non inerziale .....	148
8.6	Principio di minima azione di Hamilton per un sistema di particelle .....	149
9.	Sistemi di punti materiali vincolati .....	150
9.1	Vincoli e loro classificazione .....	150
9.2	Spazio delle configurazioni e coordinate Lagrangiane .....	152
9.3	Equazioni del moto e reazioni vincolari .....	153
9.4	Esempio 1: Moto vincolato ad una curva .....	154
9.5	Esempio 2: Moto di un punto su una superficie regolare .....	160
9.6	Principio dei lavori virtuali .....	165
9.7	Principio di D'Alambert .....	171
9.8	Principio di azione stazionaria per sistemi a vincoli ideali .....	172
9.9	Equazioni di Lagrange .....	176
9.10	Modello di vincolo ideale .....	180
9.11	Cenni sui vincoli anolonomi .....	185
10.	Proprietà dei sistemi Lagrangiani .....	189
10.1	Nozione di sistema Lagrangiano .....	189
10.2	Leggi di conservazione per un sistema Lagrangiano .....	194
10.3	Teorema di Noether .....	197
10.4	Principio di azione stazionaria di Maupertuis .....	200
10.5	Equilibrio e stabilità .....	205
10.6	Piccole oscillazioni .....	219
11.	Moto dei corpi rigidi .....	227
11.1	Cinematica del corpo rigido .....	227

11.2	Dinamica del corpo rigido .....	236
11.3	Equazioni di Eulero per il corpo rigido .....	246
12.	Sistemi Hamiltoniani .....	253
12.1	Nozione di sistema Hamiltoniano .....	253
12.2	Trasformata di Legendre .....	258
12.3	Principio di minima azione per sistemi Hamiltoniani .....	262
12.4	Leggi di conservazione in un sistema Hamiltoniano .....	264
12.5	Teorema di Liouville .....	265
12.6	Equazione di Liouville .....	272
12.7	Invarianti integrali .....	275
13.	Trasformazioni canoniche .....	286
13.1	Nozione di trasformazione canonica .....	286
13.2	Condizioni di canonicità .....	295
13.3	Funzioni generatrici di trasformazioni canoniche .....	298
13.4	Metodo di Hamilton-Jacobi .....	305
13.5	Trasformazioni completamente canoniche .....	311
13.6	Integrali primi e simmetrie dell'Hamiltoniana .....	317
14.	Sistemi integrabili e loro perturbazioni .....	321
14.1	Sistemi integrabili .....	321
14.2	Perturbazioni di sistemi integrabili .....	334
15.	Dinamica dei fluidi .....	345
15.1	Introduzione .....	345
15.2	Nozione di sistema continuo .....	345
15.3	Teorema del trasporto .....	348
15.4	Conservazione della massa .....	350
15.5	Bilancio dell'impulso (equazione di Newton .....	353
15.6	Bilancio del momento angolare .....	357
15.7	Bilancio dell'energia (prima legge della Termodinamica) .....	358
15.8	I fluidi .....	361
15.9	Fluido ideale (o di Eulero) .....	362
15.10	Fluido viscoso di Navier-Stokes .....	366
15.11	Fluido incompressibile .....	371
16.	Fluidi ideali .....	373
16.1	Equazioni dei fluidi ideali .....	373
16.2	Conservazione dell'energia .....	376
16.3	Teorema di Bernoulli .....	378
16.4	Teorema di Kelvin .....	380
16.5	Flussi bidimensionali .....	384
16.6	Equazione della vorticità in dimensione 3 .....	388
16.7	Flussi potenziali .....	391
16.8	Paradosso di D'Alambert .....	393

A. Appendice: Alcuni ausili matematici .....	396
A.1 Principio di contrazione .....	396
A.2 Teorema della funzione implicita .....	397
Testi consigliati .....	401



## Premessa

Le presenti note sono basate sulle lezioni di Meccanica Razionale da me tenute negli anni accademici 1994-95, 1995-96, 1996-97 agli studenti del corso di laurea in Matematica a L'Aquila. Esse non hanno la pretesa di costituire una trattazione esauriente della Meccanica Classica, ma piuttosto di fornire allo studente un filo conduttore nella preparazione dell'esame di Meccanica Razionale. È tuttavia opportuno che lo studente si riferisca anche ad uno dei tanti manuali di Meccanica esistenti per approfondire ed ampliare la discussione delle questioni qui trattate, ad esempio quelli menzionati in Bibliografia. Indispensabile per la comprensione del soggetto poi è la risoluzione di esercizi di Meccanica, dei quali esistono ampie raccolte.

Alcuni capitoli di queste note, come il secondo e l'appendice, coprono argomenti di Analisi Matematica che non sono usualmente noti agli studenti del corso di laurea in Matematica all'inizio del secondo anno, essendo parte del programma del secondo corso di Analisi Matematica. Gli ultimi due capitoli sono una rapida introduzione ai concetti preliminari della Dinamica dei Fluidi. Essi non fanno parte al momento del programma di Meccanica Razionale, ma piuttosto di quello di un corso successivo.

Ringrazio i colleghi Alessandra Celletti, Giorgio Fusco, Errico Presutti e Mario Pulvirenti e gli studenti che hanno usato queste note, per avermi offerto utili suggerimenti e segnalato sviste ed errori nelle precedenti versioni. Naturalmente, gli errori residui sono esclusivamente di mia responsabilità.

Settembre 1998

Raffaele Esposito

# 1. Assiomi della Meccanica

Le osservazioni empiriche che stanno alla base della Meccanica sono riassunte negli assiomi che verranno esposti in questo capitolo. La restante parte di queste note non farà alcun riferimento ai dati empirici: tutte le conclusioni saranno ottenute per via deduttiva dagli assiomi.

La nozione di *evento* è assunta come primitiva. Di ogni evento è possibile, da parte di un *osservatore* una localizzazione spaziale ed una temporale. L'insieme di tutti gli eventi si denoterà con  $\mathcal{M}$  ed il generico evento con  $e \in \mathcal{M}$ .

## 1.1 Tempo.

Ad ogni evento è possibile associare un numero reale tramite un'applicazione

$$\mathcal{T} : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}.$$

$t = \mathcal{T}(e)$  si interpreta come il tempo al quale avviene l'evento  $e$ . L'applicazione  $\mathcal{T}$  consente di stabilire un ordinamento degli eventi:

“ $e$  precede  $e'$ ” se e solo se  $\mathcal{T}(e) < \mathcal{T}(e')$

e

“ $e$  è simultaneo ad  $e'$ ” se e solo se  $\mathcal{T}(e) = \mathcal{T}(e')$ .

In Meccanica Classica (contrapposta alla Meccanica Relativistica) si assume che su tali affermazioni tutti gli osservatori concordino.

L'applicazione  $\mathcal{T}$  è detta *orologio*. Essa è in larga misura arbitraria e può essere modificata in qualsiasi altra  $\mathcal{T}'$ , a patto che la relazione d'ordine sia preservata. La specificazione di un orologio è parte integrante della caratterizzazione dell'osservatore.

## 1.2 Spazio.

La localizzazione spaziale richiede preliminarmente il richiamo di alcune definizioni elementari di carattere geometrico, che fornirà l'occasione per fissare le notazioni.

### Notazioni.

Sia  $\mathbb{V}_n$  uno spazio vettoriale ad  $n$  dimensioni su  $\mathbb{R}$ . Con  $\{e_1, \dots, e_n\}$  (o, in forma abbreviata  $\{e_i\}$ ), denoteremo una *base* di  $\mathbb{V}_n$ . Per ogni vettore  $v \in \mathbb{V}_n$ , con  $(v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^n$  denoteremo le *componenti* di  $v$  nella base  $\{e_i\}$ , in modo che

$$v = \sum_{i=1}^n v_i e_i.$$



Sia  $\{e'_k\}$  un'altra base di  $\mathbb{V}_n$ , con  $e'_k$  avente componenti  $\Lambda_{i,k}$  nella base  $\{e_i\}$ , e cioè

$$e'_k = \sum_{i=1}^n \Lambda_{i,k} e_i.$$

Le componenti di  $v \in \mathbb{V}_n$  rispetto alla base  $\{e'_k\}$  si denotano con  $(v'_1, \dots, v'_n) \in \mathbb{R}^n$  e la relazione tra tali componenti e le componenti  $(v_1, \dots, v_n)$  di  $v$  rispetto alla base  $\{e_i\}$  è

$$v_i = \sum_{k=1}^n \Lambda_{i,k} v'_k. \quad (1.1)$$

Infatti

$$\sum_{k=1}^n v'_k e'_k = \sum_{k=1}^n v'_k \sum_{i=1}^n \Lambda_{i,k} e_i = \sum_{i=1}^n e_i \sum_{k=1}^n \Lambda_{i,k} v'_k = \sum_{i=1}^n v_i e_i$$

e pertanto la (1.1). La matrice non singolare  $\Lambda = \{\Lambda_{i,k}\}$  è detta *matrice del cambiamento di base*.

**Definizione 1.1** (Prodotto Scalare): Si dice *prodotto scalare (euclideo)* su  $\mathbb{V}_n$  un'applicazione

$$\varphi: \mathbb{V}_n \times \mathbb{V}_n \rightarrow \mathbb{R},$$

tale che

$$\begin{aligned} \varphi(u, v) &= \varphi(v, u), \quad \forall u, v \in \mathbb{V}_n, \\ \varphi(\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2, v) &= \alpha_1 \varphi(u_1, v) + \alpha_2 \varphi(u_2, v) \quad \forall u_1, u_2, v \in \mathbb{V}_n \text{ e } \forall \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}, \\ \varphi(u, u) &\geq 0 \quad \forall u \in \mathbb{V}_n, \text{ e } \varphi(u, u) = 0 \text{ se e solo se } u = 0. \end{aligned}$$

Vale inoltre, in conseguenza delle precedenti assunzioni, la *legge di annullamento del prodotto*:

$$\varphi(u, v) = 0 \quad \forall v \in \mathbb{V}_n \text{ implica } u = 0.$$

Infatti, se  $\varphi(u, v) = 0$  per ogni  $v \in \mathbb{V}_n$ , in particolare, ciò è vero per  $v = u$ . Pertanto  $\varphi(u, u) = 0$  e questo implica  $u = 0$  per la terza proprietà del prodotto scalare.

Se il prodotto scalare è fissato una volta per tutte, per ogni coppia di vettori  $u, v$  di  $\mathbb{V}_n$  denoteremo il prodotto scalare tra  $u$  e  $v$  con uno dei simboli  $u \cdot v$  oppure  $(u, v)$ .

**Definizione 1.2** (Norma) Si dice *norma* di  $u$  un'applicazione

$$\psi: \mathbb{V}_n \rightarrow \mathbb{R}^+$$

tale che

$$\begin{aligned}\psi(\alpha u) &= |\alpha| \psi(u) \quad \forall \alpha \in \mathbb{R} \text{ e } \forall u \in \mathbb{V}_n, \\ \psi(u_1 + u_2) &\leq \psi(u_1) + \psi(u_2) \quad \forall u_1, u_2 \in \mathbb{V}_n, \\ \psi(u) &\geq 0 \quad \forall u \in \mathbb{V}_n, \text{ e } \psi(u) = 0 \text{ se e solo se } u = 0.\end{aligned}$$

Quando la norma  $\psi$  è fissata la si denota semplicemente con

$$\psi(u) = \|u\|.$$

Se su  $\mathbb{V}_n$  è definito un prodotto scalare, la funzione

$$\psi(u) = \|u\| = (u, u)^{1/2} \tag{1.2}$$

è una norma. Per mostrarlo basta controllare la seconda proprietà delle norme. A tal fine occorre dimostrare la fondamentale

*Disuguaglianza di Schwartz:*

$$|(u, v)| \leq \|u\| \|v\|. \tag{1.3}$$

Dim: Poiché  $(\lambda u - v) \cdot (\lambda u - v) \geq 0$  per ogni  $\lambda \in \mathbb{R}$ , deve essere

$$\lambda^2 \|u\|^2 - 2\lambda(u, v) + \|v\|^2 \geq 0. \tag{1.4}$$

Il discriminante di tale binomio di secondo grado in  $\lambda$  è

$$\frac{\Delta}{4} = (u, v)^2 - \|u\|^2 \|v\|^2.$$

Esso deve essere non positivo perché (1.4) sia verificata  $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ . In conseguenza

$$(u, v)^2 - \|u\|^2 \|v\|^2 \leq 0.$$

Estraendo la radice quadrata segue la (1.3).  $\square$

In conseguenza, si ha

$$\begin{aligned}\|u_1 + u_2\|^2 &= (u_1 + u_2, u_1 + u_2) = (u_1, u_1) + (u_2, u_2) + 2(u_1, u_2) \\ &\leq \|u_1\|^2 + \|u_2\|^2 + 2\|u_1\| \|u_2\| = (\|u_1\| + \|u_2\|)^2\end{aligned}$$

e pertanto vale il secondo assioma della norma.

La norma  $\|u\|$  definita da (1.2) si dice *norma indotta dal prodotto scalare*. Nel seguito, salvo avviso contrario, la norma considerata sarà sempre quella indotta dal prodotto scalare. Diremo anche *lunghezza* del vettore  $u$  la sua norma.

Poiché (1.3) comporta

$$\frac{|u \cdot v|}{\|u\| \|v\|} \leq 1,$$

esiste un angolo  $\varphi$  tale che

$$u \cdot v = \|u\| \|v\| \cos \varphi.$$

**Definizione 1.3** L'angolo  $\varphi$  determinato dalla precedente relazione si dice *angolo tra i vettori  $u$  e  $v$* .

Diremo che due vettori  $u, v$  di  $\mathbb{V}_n$  sono *ortogonali* se  $|\varphi| = \pi/2$  e cioè se  $(u, v) = 0$ .

Due vettori si dicono invece *paralleli* quanto risulta  $\varphi = 0 \pmod{\pi}$ . In tal caso  $|\cos \varphi| = 1$  e la disuguaglianza di Schwartz è soddisfatta come uguaglianza.

È facile controllare che *due vettori  $u$  e  $v$  sono paralleli se e solo se esiste  $\lambda \in \mathbb{R}$  tale che  $u = \lambda v$* .

Difatti, se ciò fosse falso, per ogni  $\lambda \in \mathbb{R}$  sarebbe non nullo  $z = \lambda u - v$  e quindi  $\lambda^2 \|u\|^2 - 2\lambda u \cdot v + \|v\|^2 = \|z\|^2 > 0$  per ogni  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Pertanto  $\Delta < 0$ , mentre è  $\Delta = 0$  per ipotesi.  $\square$

Diremo che la base  $\{e_i\}$  è *ortonormale* se per ogni  $i, j = 1, \dots, n$

$$(e_i, e_j) = \delta_{i,j}$$

ove  $\delta_{i,k}$  è il *simbolo di Kronecker*, definito da

$$\delta_{i,j} = \begin{cases} 1, & \text{se } i = j \\ 0, & \text{se } i \neq j. \end{cases}$$

L'esistenza di basi ortonormali è assicurata dal fatto che da una base qualunque si può sempre costruire una base ortonormale mediante il procedimento di *ortonormalizzazione* di Gram-Schmidt. Difatti, se  $\{x_i\}_{i=1}^n$  è una base non ortonormale, le formule ricorsive

$$y_1 = x_1, \quad e_1 = \frac{y_1}{\|y_1\|},$$

$$y_i = x_i - \sum_{j=1}^{i-1} e_j (x_i \cdot e_j), \quad e_i = \frac{y_i}{\|y_i\|}, \quad i = 2, \dots, n,$$

definiscono una base ortonormale.

Se  $\{e_i\}$  è una base ortonormale, il calcolo delle componenti di un vettore  $v$  rispetto ad essa è semplificato dalla relazione

$$v_i = v \cdot e_i.$$

Se le basi  $\{e_i\}$  ed  $\{e'_k\}$  sono entrambe ortonormali, la matrice del cambiamento di base  $\Lambda_{i,k}$  è *ortogonale*, è cioè una matrice tale che

$$\Lambda^T \Lambda = \mathbb{I}. \quad (1.5)$$

ove  $\mathbb{I}$  denota la matrice identità di componenti  $\mathbb{I}_{i,k} = \delta_{i,k}$ . Equivalentemente, una matrice è ortogonale se e solo se

$$\Lambda^{-1} = \Lambda^T. \quad (1.6)$$

Infatti, si ha

$$\begin{aligned} \delta_{k,\ell} &= e'_k \cdot e'_\ell = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \Lambda_{i,k} \Lambda_{j,\ell} e_i \cdot e_j = \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \Lambda_{i,k} \Lambda_{j,\ell} \delta_{i,j} = \sum_{i=1}^n \Lambda_{i,k} \Lambda_{i,\ell} = \sum_{i=1}^n \Lambda_{\ell,i}^T \Lambda_{i,k}, \end{aligned}$$

che non è altro che (1.5) scritta per componenti.

Se  $u_i$  e  $v_i$  sono le componenti di  $u$  e  $v$  in una base  $\{e_i\}$ , allora

$$u \cdot v = \sum_{i,j=1}^n u_i v_j e_i \cdot e_j.$$

Se la base  $\{e_i\}$  è ortonormale, allora

$$u \cdot v = \sum_{i=1}^n u_i v_i.$$

In particolare

$$\|u\|^2 = \sum_{i=1}^n u_i^2.$$

Quando non vi sia possibilità di equivoco, in luogo della notazione  $\|u\|$  si usa la notazione  $|u|$ . Pertanto il simbolo  $|\cdot|$ , riferito ad un vettore  $u$  avente componenti  $u_i$  in una base ortonormale, ha il significato di

$$|u| = \left( \sum_{i=1}^n u_i^2 \right)^{1/2}.$$

Una successione  $\{u_\ell\}_{\ell=1}^\infty$  di elementi di  $\mathbb{V}_n$  converge ad  $u \in \mathbb{V}_n$  se

$$\lim_{\ell \rightarrow \infty} \|u_\ell - u\| = 0.$$

Sia  $s \rightarrow u(s)$  una funzione della variabile reale  $s$  a valori in  $\mathbb{V}_n$ .

**Definizione 1.4:** Il vettore

$$\frac{du(s)}{ds} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(s+h) - u(s)}{h}$$

si dice *vettore derivato di  $u(s)$* . Esso è il vettore che ha per componenti nella base  $\{e_i\}$  le derivate delle componenti di  $u(s)$ . La funzione vettoriale  $s \rightarrow u(s)$  è differenziabile se tali sono le relative componenti in una qualsiasi base.

Siano  $s \rightarrow u(s)$  e  $s \rightarrow v(s)$  due funzioni differenziabili. È facile controllare a partire dalle proprietà del prodotto scalare, oppure dalla sua espressione in termini delle componenti in una base, che

$$\frac{d}{ds}[u(s) \cdot v(s)] = \frac{du(s)}{ds} \cdot v(s) + u(s) \cdot \frac{dv(s)}{ds},$$

Nel seguito utilizzeremo spesso la nozione di *prodotto vettoriale*. In questa definizione si suppone la dimensione dello spazio vettoriale  $n = 3$ , non avendo essa senso per  $n > 3$ .

Sia  $n = 3$ . Si introduce il *simbolo di Levi-Civita*  $\varepsilon_{i,j,k}$  definito come

$$\varepsilon_{i,j,k} = \begin{cases} 1, & \text{se } i, j, k \text{ è una permutazione pari di } 1, 2, 3, \\ -1, & \text{se } i, j, k \text{ è una permutazione dispari di } 1, 2, 3, \\ 0, & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Ricordando la definizione di determinante di una matrice, è immediato controllare che, se  $A$  è una matrice  $3 \times 3$ , risulta

$$\sum_{i,j,k=1}^3 \varepsilon_{i,j,k} A_{i,\ell} A_{j,m} A_{k,n} = \varepsilon_{\ell,m,n} \det A. \quad (1.7)$$

**Definizione 1.5** (Prodotto Vettoriale): Siano  $u$  e  $v$  due vettori in  $\mathbb{V}_3$  di componenti  $u_i$  e  $v_i$  nella base ortonormale  $\{e_i\}$ . Si definisce *prodotto vettoriale* di  $u$  e  $v$  e si denota con  $u \wedge v$  il vettore di componenti in  $\{e_i\}$  date da

$$w_i = (u \wedge v)_i = \sum_{j,k=1}^3 \varepsilon_{i,j,k} u_j v_k,$$

o, più esplicitamente

$$\begin{aligned} w_1 &= (u \wedge v)_1 = u_2 v_3 - u_3 v_2, \\ w_2 &= (u \wedge v)_2 = u_3 v_1 - u_1 v_3, \\ w_3 &= (u \wedge v)_3 = u_1 v_2 - u_2 v_1. \end{aligned} \quad (1.8)$$

Non è evidente che la definizione 1.5 sia ben posta. L'interpretazione della terna  $(w_1, w_2, w_3)$  come le componenti di un vettore nella base  $\{e_i\}$  richiede una discussione: occorre infatti controllare che la definizione precedente non dipenda dalla base prescelta. In altri termini, se  $u'_\ell$  e  $v'_\ell$  sono le componenti dei vettori  $u$  e  $v$  nella base ortonormale  $\{e'_\ell\}$ , occorre che la terna  $(w'_1, w'_2, w'_3)$  sia legata alla terna  $(w_1, w_2, w_3)$  dalle relazioni tra le componenti di un vettore in due basi. Dalla (1.7) segue immediatamente la relazione

$$w_i = \det \Lambda \sum_{k=1}^3 \Lambda_{i,k} w'_k. \quad (1.9)$$

Infatti

$$\begin{aligned} w_i &= \sum_{j,k=1}^3 \varepsilon_{i,j,k} u_j v_k = \sum_{j,k,l,m=1}^3 \varepsilon_{i,j,k} \Lambda_{j,l} \Lambda_{k,m} u'_l v'_m \\ &= \sum_{j,k,l,m,n,s=1}^3 \varepsilon_{n,j,k} \Lambda_{j,l} \Lambda_{k,m} u'_l v'_m \Lambda_{n,s} \Lambda_{s,i}^T \\ &= \sum_{s=1}^3 \Lambda_{i,s} \sum_{l,m=1}^3 u'_l v'_m \sum_{n,j,k=1}^3 \varepsilon_{n,j,k} \Lambda_{j,l} \Lambda_{k,m} \Lambda_{n,s} \\ &= \sum_{s=1}^3 \Lambda_{i,s} \sum_{l,m=1}^3 u'_l v'_m \varepsilon_{s,l,m} \det \Lambda = \det \Lambda \sum_{s=1}^3 \Lambda_{i,s} w'_s. \end{aligned}$$

Ora, se  $\Lambda$  è una matrice ortogonale, risulta in generale

$$\det \Lambda = \pm 1,$$

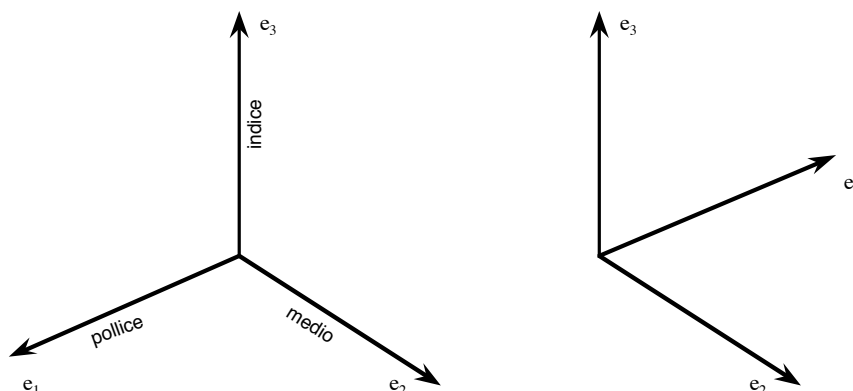
in quanto, dalla definizione di matrice ortogonale si ha

$$1 = \det \Lambda^T \Lambda = \det \Lambda^T \det \Lambda = (\det \Lambda)^2.$$

Pertanto la relazione (1.1) tra le componenti di  $w$  nelle due basi è violata se  $\det \Lambda = -1$ . Per poter interpretare  $w$  come un vettore procediamo come segue: dividiamo le basi ortonormali dello spazio vettoriale  $E_3$  in due classi di equivalenza: quella delle basi tali che il corrispondente determinante della matrice di trasformazione è positivo, che diremo *orientate concordemente alla base  $\{e_i\}$* , e quella delle basi tali che il corrispondente determinante della matrice di trasformazione è negativo, che diremo *orientate discordemente alla base  $\{e_i\}$* . La suddetta relazione di equivalenza tra le basi definisce pertanto un *orientamento*. Restringendoci a una qualsiasi delle due classi suddette *la definizione di prodotto vettoriale risulta ben posta* in quanto tutti i cambiamenti di base all'interno della stessa classe hanno determinante positivo. Nel seguito conveniamo di utilizzare una sola di tali classi.

La scelta è del tutto arbitraria e ci atterremo alla cosiddetta *regola della mano sinistra* che consiste nel fissare una base ortonormale  $\{e_1, e_2, e_3\}$  in modo che, disposti il pollice, il medio e l'indice della mano sinistra in tre direzioni ortogonali, il vettore  $e_1$  sia diretto secondo il pollice, il vettore  $e_2$  secondo il medio ed il vettore  $e_3$  secondo l'indice (a meno di una permutazione ciclica). Tutte le altre basi ortogonali orientate concordemente a questa sono membri dello stesso orientamento che sarà detto *levogiro*.

Notiamo che la riflessione di un asse, ad esempio dell'asse  $e_1$ , cioè il cambio di base  $\{e_1, e_2, e_3\} \rightarrow \{-e_1, e_2, e_3\}$  altera l'orientamento in quanto trasforma una base levogira in una base *destrogira*, cioè soddisfacente la regola della mano destra. La riflessione simultanea di due assi invece non altera l'orientamento.



I vettori che si trasformano secondo la (1.9) e che quindi non sono invarianti per riflessione di un asse, si dicono anche *vettori assiali*. Oltre a tutti i prodotti vettoriali, un esempio importante di vettore assiale in Meccanica è fornito dalla velocità angolare, che sarà definita più avanti.

Dalle (1.8) seguono le seguenti proprietà del prodotto vettoriale:

- 1)  $u \wedge v = -v \wedge u, \quad \forall u, v \in \mathbb{V}_3.$
- 2)  $(\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2) \wedge v = \lambda_1 u_1 \wedge v + \lambda_2 u_2 \wedge v, \quad \forall u_1, u_2, v \in \mathbb{E}_3 \text{ e } \forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}.$
- 3)  $u \wedge v = 0$  se  $u = 0$  oppure  $v = 0$  oppure esiste  $\lambda \in \mathbb{R}$  tale che  $u = \lambda v.$

La norma di  $u \wedge v$  è pari all'area del parallelogramma generato da  $u$  e  $v$ . In particolare risulta

$$|u \wedge v| = |u| |v| |\sin \varphi|.$$

Siano  $s \rightarrow u(s)$  e  $s \rightarrow v(s)$  due funzioni differenziabili. Dalle proprietà del prodotto vettoriale segue immediatamente che

$$\frac{d}{ds}[u(s) \wedge v(s)] = \frac{du(s)}{ds} \wedge v(s) + u(s) \wedge \frac{dv(s)}{ds}.$$

Dati  $u, v$  e  $w$  in  $\mathbb{V}_3$ , il *prodotto misto* è definito come

$$u \cdot (v \wedge w) = \sum_{i,j,k=1}^3 \varepsilon_{i,j,k} u_i v_j w_k.$$

Dalla sua espressione segue immediatamente che esso coincide con il determinante della matrice  $3 \times 3$  avente sulla prima riga le componenti del vettore  $u$ , sulla seconda quelle del vettore  $v$  e sulla terza quelle di  $w$ . Ne consegue che esso è invariante per permutazioni cicliche. Inoltre il suo valore assoluto coincide con il volume del parallelepipedo avente i vettori  $u, v$  e  $w$  come spigoli. Infine esso è nullo se i tre vettori sono linearmente dipendenti. Quindi

$u \wedge v$  è *ortogonale* ad  $u$  e  $v$ .

Il vettore  $u \wedge (v \wedge w)$  si dice *doppio prodotto vettoriale*. Vale l'identità

$$u \wedge (v \wedge w) = (u \cdot w)v - (u \cdot v)w. \quad (1.10)$$

Infatti, risulta ad esempio

$$\begin{aligned} & (u \wedge (v \wedge w))_1 \\ &= u_2(v_1 w_2 - v_2 w_1) - u_3(v_3 w_1 - v_1 w_3) \\ &= (u_2 w_2 + u_3 w_3)v_1 - (u_2 v_2 + u_3 v_3)w_1 \\ &= (u_2 w_2 + u_3 w_3)v_1 + u_1 w_1 v_1 - (u_2 v_2 + u_3 v_3)w_1 - u_1 v_1 w_1 \\ &= (u_1 w_1 + u_2 w_2 + u_3 w_3)v_1 - (u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3)w_1 \\ &= (u \cdot w)v_1 - (u \cdot v)w_1 \end{aligned}$$

*Osservazione 1:* In generale si ha  $u \wedge (v \wedge w) \neq (u \wedge v) \wedge w$ .

*Osservazione 2:* Il doppio prodotto vettoriale è invariante per riflessioni. Questo è un caso particolare del fatto che, se  $u$  è un vettore (cioè le componenti si trasformano secondo (1.1)) e  $w$  un vettore assiale (cioè le componenti si trasformano secondo (1.9)) allora  $u \wedge w$  è un vettore le cui componenti si trasformano secondo (1.1).

### Spazio puntuale Euclideo.

**Definizione 1.6** (Spazio puntuale euclideo):

Sia  $\mathbb{V}_n$  uno spazio vettoriale ad  $n$  dimensioni su  $\mathbb{R}$ , munito di prodotto scalare. Un insieme  $\mathbb{E}_n$  si dice *spazio puntuale euclideo* ad  $n$  dimensioni su  $\mathbb{V}_n$  ed il suo generico elemento  $P$  si dice *punto*, se esiste una applicazione da  $\mathbb{E}_n \times \mathbb{E}_n$  in  $\mathbb{V}_n$ , il cui valore su una coppia  $(P, Q) \in \mathbb{E}_n \times \mathbb{E}_n$  si denoterà con  $\overrightarrow{PQ}$ :

$$(P, Q) \in \mathbb{E}_n \times \mathbb{E}_n \rightarrow \overrightarrow{PQ} \in \mathbb{V}_n,$$



per la quale valgono le seguenti proprietà:

- 1)  $\overrightarrow{PQ} = -\overrightarrow{QP}$ ,  $\forall P, Q \in \mathbb{E}_n$
- 2)  $\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR} = \overrightarrow{PR}$ ,  $\forall P, Q, R \in \mathbb{E}_n$
- 3)  $\forall Q \in \mathbb{E}_n$  e  $\forall u \in \mathbb{V}_n$ ,  $\exists P \in \mathbb{E}_n$  tale che  $u = \overrightarrow{PQ}$ ;  $P$  è unico.

Il vettore  $\overrightarrow{PQ}$  è detto *segmento da P a Q*. A volte si usa la notazione  $\overrightarrow{QP} = P - Q$ . Se  $\overrightarrow{QP} = u$  allora si scrive anche  $P = Q + u$ .

Si dice *retta passante per P e Q* l'insieme  $r$  dei punti  $R \in \mathbb{E}_n$  tale che  $\overrightarrow{PR}$  è parallelo a  $\overrightarrow{PQ}$ . Se  $\overrightarrow{PQ} = u$ , allora, con la precedente notazione,

$$r = \{P + \lambda u, \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

$r$  è anche detta *retta per il punto P parallela al vettore u*.

Si dice *distanza tra P e Q* la norma del vettore  $\overrightarrow{PQ}$ :

$$d(P, Q) = \|\overrightarrow{PQ}\|.$$

Si dice *distanza tra il punto S e la retta r* il numero

$$d(S, r) = \inf_{Q \in r} d(S, Q).$$

Si dice *piano per i tre punti non allineati P, Q, S* l'insieme  $\pi$  dei punti  $R \in \mathbb{E}_n$  tali che  $\overrightarrow{PR}$  è combinazione lineare di  $\overrightarrow{PQ}$  e  $\overrightarrow{PS}$ , cioè esistono  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$  tali che

$$\overrightarrow{PR} = \lambda \overrightarrow{PQ} + \mu \overrightarrow{PS}.$$

Posto  $u = \overrightarrow{PQ}$  e  $v = \overrightarrow{PS}$  si ha quindi

$$\pi = \{P + \lambda u + \mu v, \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}.$$

$\pi$  si dice anche *piano passante per il punto P, generato dai vettori u e v*.

Fissato un punto  $O \in \mathbb{E}_n$  ed una base  $\{e_i\}$  in  $\mathbb{V}_n$ , ad ogni punto  $P \in \mathbb{E}_n$  si può associare un' $n$ -pla  $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$  nel modo seguente. Se  $x = \overrightarrow{OP}$ , l' $n$ -pla  $(x_1, \dots, x_n)$  è data dalle componenti di  $x$  nella base  $\{e_i\}$ . Si ha pertanto  $\overrightarrow{OP} = \sum_{i=1}^n x_i e_i$ , ovvero, con la notazione precedente

$$P = O + \sum_{i=1}^n x_i e_i.$$

**Definizione 1.7:** Una coppia  $\mathcal{R} = \{O, \{e_i\}\}$  costituita da un punto  $O \in \mathbb{E}_n$  e da una base in  $\mathbb{V}_n$  viene detta *riferimento* di  $\mathbb{E}_n$ . Il punto  $O$  è detto *origine*

del riferimento  $\mathcal{R}$ . Le componenti  $x_i$  del vettore  $\overrightarrow{OP}$  nella base  $\{e_i\}$  si dicono *coordinate* del punto  $P$  nel riferimento  $\mathcal{R}$ .

La retta per  $O$  parallela a  $e_i$  si dice  *$i$ -esimo asse coordinato*.

Il piano per  $O$  parallelo ad  $e_i$  ed  $e_j$  con  $i \neq j$  si dice *piano coordinato*  $(i, j)$ .

Se la base  $\{e_i\}$  è ortonormale, il riferimento  $\{O, \{e_i\}\}$  è detto a sua volta *ortonormale*.

Sia  $\mathcal{R}' = \{O', \{e'_k\}\}$  è un altro riferimento. La relazione tra le coordinate di  $P$  nei due sistemi di riferimento si ottiene come segue:

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'P},$$

e cioè

$$\sum_{i=1}^n x_i e_i = \sum_{i=1}^n x_i^{(O')} e_i + \sum_{k=1}^n x'_k e'_k = \sum_{i=1}^n x_i^{(O')} e_i + \sum_{k=1}^n x'_k \sum_{i=1}^n \Lambda_{i,k} e_i,$$

$x_i^{(O')}$  essendo le coordinate del punto  $O'$  nel riferimento  $\{O, \{e_i\}\}$ . Pertanto

$$x_i = x_i^{(O')} + \sum_{k=1}^n \Lambda_{i,k} x'_k. \quad (1.11)$$

In particolare, se sia  $\mathcal{R}$  che  $\mathcal{R}'$  sono riferimenti ortogonali, la matrice  $\Lambda$  è *ortogonale*.

*Nota Bene:* Nel seguito ci limiteremo a considerare riferimenti ortogonali.

### Struttura dello spazio fisico.

È ora possibile esprimere l'assunzione della Meccanica Classica sulla localizzazione spaziali degli eventi. Essa racchiude l'esperienza comune sulle proprietà dello spazio fisico e consiste nell'affermare che

*Ad ogni evento  $e \in \mathcal{M}$  è possibile associare in modo unico un punto  $P$  di uno spazio puntuale euclideo di dimensione 3,  $\mathbb{E}_3$ .*

In conseguenza l'osservatore di un evento  $e \in \mathcal{M}$ , dopo aver fissato un riferimento  $\mathcal{R} = \{O, \{e_i\}\}$  in  $\mathbb{E}_3$ , ad ogni evento associa una terna di numeri reali  $(x_1, x_2, x_3)$  rappresentanti le coordinate del punto  $P$  in  $\mathcal{R}$  ove l'evento  $e$  è localizzato ed il numero  $t = \mathcal{T}(e)$  indicato dal suo orologio. Intenderemo pertanto, con abuso di linguaggio, per *riferimento in  $\mathcal{M}$*  l'insieme  $\{\mathcal{R}, \mathcal{T}\}$ , che spesso si denoterà semplicemente con  $\mathcal{R}$ , sottintendendo in tal modo lo specifico orologio usato.

### 1.3 Punto materiale o particella.

La Meccanica studia il moto dei *corpi*. In generale un corpo è caratterizzato da varie proprietà geometriche che ne definiscono la forma e le dimensioni. Tuttavia un'utile schematizzazione è spesso quella di trascurare tali proprietà, in quanto ad esempio il corpo sia troppo lontano per determinarle, ovvero esse siano irrilevanti, nell'approssimazione considerata, per la determinazione del suo comportamento. Nasce così la nozione di *punto materiale* o *particella*, che verrà considerato come un concetto primitivo al pari della nozione di evento.

Avendo deciso di ignorare la forma e le dimensioni di un punto materiale, esso risulterà caratterizzato, dal punto di vista geometrico, soltanto dalla sua posizione nello spazio fisico. Gli eventi studiati in Meccanica del punto materiale sono quelli che corrispondono al fatto che il punto materiale occupi una specifica posizione  $P \in \mathbb{E}_3$  ad uno specifico tempo  $t$  determinato dall'orologio  $\mathcal{T}$  dell'osservatore associato ad un riferimento  $\mathcal{R}$  in  $\mathbb{E}_3$ .

La terna di numeri  $(x_1, x_2, x_3)$  associata a  $P$  tramite il riferimento  $\mathcal{R}$  si denoterà con  $x \in \mathbb{R}^3$  e si dirà *posizione* del punto materiale rispetto al riferimento  $\mathcal{R}$ .

Un *moto* di un punto materiale è una funzione  $t \in (a, b) \rightarrow P(t)$  che ad ogni tempo  $t$  in un intervallo  $(a, b)$  associa la posizione  $P(t) \in \mathbb{E}_3$  occupata dal punto al tempo  $t$ .

Per ogni riferimento  $\mathcal{R}$ , detta  $x(t)$  la posizione del punto materiale al tempo  $t$  rispetto al riferimento  $\mathcal{R}$ , si assumerà che *la funzione  $t \in (a, b) \rightarrow x(t)$  sia differenziabile due volte con derivate seconde continue in  $(a, b)$* , o più brevemente sia in  $C^2(a, b)$ .

La curva di  $\mathbb{E}_3$ ,  $\gamma = \{P(t), t \in (a, b)\}$  si dice *traiettoria* del punto materiale. Quando sia fissato il riferimento  $\mathcal{R}$ , si dirà *traiettoria rispetto a  $\mathcal{R}$*  la curva di  $\mathbb{R}^3$ ,  $\gamma_{\mathcal{R}} = \{x(t), t \in (a, b)\}$ .

**Definizione 1.8:** Fissato un riferimento  $\mathcal{R}$  ed un moto di un punto materiale,  $t \rightarrow P(t)$  si dice *velocità* del punto materiale rispetto al riferimento  $\mathcal{R}$  al tempo  $t$ , il vettore di componenti nella base  $\{e_i\}$

$$v_i = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x_i(t+h) - x_i(t)}{h}.$$

Il numero  $v_i$  si dice  *$i$ -sima componente della velocità*. L'applicazione  $t \rightarrow v(t)$  con  $v(t)$  velocità al tempo  $t$  rispetto al riferimento  $\mathcal{R}$  si dice *funzione velocità*. Con abuso di notazione si denota con  $v$  anche la terna  $(v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{R}^3$  costituita dalle componenti di  $v$  in  $\mathcal{R}$ .

Spesso in luogo di  $v$  si usa la notazione  $\dot{x}$ . Più in generale, la derivata di una funzione del tempo  $t \rightarrow g(t)$  viene spesso indicata con  $\dot{g}$ .

$v(t)$  è tangente a  $\gamma_{\mathcal{R}}$  in  $x(t)$ .

La quantità  $|v| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}$  si dice *velocità scalare*.

**Definizione 1.8:** Si dice *accelerazione* al tempo  $t$  rispetto a  $\mathcal{R}$  il vettore

$$a = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{v(t+h) - v(t)}{h}.$$

Il numero  $a_i(t)$ , componente di  $a$  nella base  $\{e_i\}$  si dice  $i$ -sima componente dell'accelerazione. L'applicazione  $t \rightarrow a(t)$  con  $a(t)$  accelerazione al tempo  $t$  rispetto al riferimento  $\mathcal{R}$  si dice *funzione accelerazione*. Spesso in luogo di  $a$  si usa la notazione  $\ddot{x}$ . Le suddette derivate esistono continue per l'ipotesi  $t \rightarrow x(t) \in C^2(a, b)$ .

Un moto  $t \rightarrow P(t)$  si dice *rettilineo uniforme* rispetto ad  $\mathcal{R}$  se  $a(t) = 0$  per ogni  $t$ . In particolare ciò significa che  $v(t)$  è costante. In un moto rettilineo uniforme di velocità  $v$ , la legge oraria è data da

$$x(t) = x^0 + vt,$$

con  $x^0$  coordinate di  $P^0$ , la posizione occupata dal punto al tempo  $t = 0$ . In componenti,

$$x_1 = x_1^0 + v_1 t, \quad x_2 = x_2^0 + v_2 t, \quad x_3 = x_3^0 + v_3 t.$$

Quindi la traiettoria è la retta per  $P^0$  parallela a  $v$ . Inoltre la velocità scalare è costante. Pertanto un moto rettilineo uniforme è un moto che avviene su una retta con velocità scalare costante, e il punto percorre distanze uguali in tempi uguali.

Un moto  $t \rightarrow P(t)$  si dice *circolare uniforme* se la traiettoria è una circonferenza e archi uguali sono percorsi in tempi uguali. Supponendo, senza perdita di generalità, che il centro della circonferenza sia l'origine  $O$  del riferimento e che la circonferenza sia contenuta nel piano  $(1, 2)$ , le coordinate del punto variano nel tempo secondo la legge

$$x_1 = R \cos(\omega t + \phi^0), \quad x_2 = R \sin(\omega t + \phi^0), \quad x_3 = 0,$$

dove  $R$  è il raggio della circonferenza e  $\phi^0$  l'angolo al tempo  $t = 0$ . L'angolo  $\phi(t)$  al tempo  $t$  è dato da

$$\phi(t) = \omega t + \phi^0.$$

Detto  $T$  il tempo necessario per percorrere un intero giro, la costante  $\omega$  pari a  $2\pi/T$  si dice *pulsazione* del moto circolare uniforme oppure *velocità angolare* in quanto essa rappresenta l'angolo percorso nel tempo unitario.

La velocità del moto circolare uniforme è data da

$$v_1 = -\omega R \sin(\omega t + \phi^0) = -\omega x_2, \quad v_2 = \omega R \cos(\omega t + \phi^0) = \omega x_1, \quad v_3 = 0.$$

L'accelerazione è data da

$$a_1 = -\omega^2 R \cos(\omega t + \phi^0) = -\omega^2 x_1, \quad a_2 = -\omega^2 R \sin(\omega t + \phi^0) = -\omega^2 x_2, \quad a_3 = 0.$$

Si può notare che l'accelerazione è diretta secondo la normale alla circonferenza, verso l'interno della circonferenza (*accelerazione centripeta*) e con modulo  $a = \omega^2 R$  costante nel tempo e proporzionale al quadrato della velocità angolare e al raggio del cerchio.

Sia  $P'(t)$  il punto proiezione di  $P(t)$  sull'asse  $e_1$ . Il moto  $t \rightarrow P'(t)$  di tale proiezione è detto *moto armonico* di pulsazione  $\omega$ . La componente  $a_1$  dell'accelerazione è l'unica non nulla. Essa è data da

$$\ddot{x}_1 = -\omega^2 x_1. \quad (1.12)$$

L'equazione (1.12) prende il nome di *equazione del moto armonico*.

#### 1.4 Cambiamenti di riferimento:

Le definizioni precedenti dipendono dalla scelta del riferimento e dell'orologio. In un riferimento  $\mathcal{R}'$  dotato di un orologio  $\mathcal{T}'$  il moto sarà descritto da una funzione  $t' \rightarrow x'(t')$ , e  $v'(t')$ ,  $a'(t')$  saranno definite in modo analogo, come derivate rispetto alla variabile temporale  $t'$ . Si pone pertanto il problema della relazione tra le misure delle quantità cinematiche fatte dagli osservatori  $\mathcal{R}$  e  $\mathcal{R}'$ . Poiché l'origine  $O'$  ed i vettori di base  $\{e'_k\}$  di  $\mathcal{R}'$  non sono in generale fissi rispetto ad  $\mathcal{R}$ , la (1.11) si scriverà:

$$x_i = x_i^{(O')}(t) + \sum_{k=1}^3 \Lambda_{i,k}(t) x'_k.$$

Il moto  $t \rightarrow P(t)$  è descritto nei due sistemi rispettivamente da  $t \rightarrow x(t)$  e  $t' \rightarrow x'(t')$ , dove la relazione tra  $t$  e  $t'$  è data dalla funzione monotona crescente  $t \rightarrow t'(t)$ , che si assumerà derivabile con derivata positiva. Per ogni  $t$  risulta

$$x_i(t) = x_i^{(O')}(t) + \sum_{k=1}^3 \Lambda_{i,k}(t) x'_k(t'(t)). \quad (1.13)$$

Differenziando rispetto a  $t$  e ricordando le definizioni di  $v$  e  $v'$ , si ha

$$v_i(t) = \dot{x}_i^{(O')}(t) + \sum_{k=1}^3 \dot{\Lambda}_{i,k}(t) x'_k(t'(t)) + \sum_{k=1}^3 \Lambda_{i,k}(t) v'_k(t'(t)) \dot{t}'(t)$$

Le quantità

$$v_i^\tau = \dot{x}_i^{(O')}(t) + \sum_{k=1}^3 \dot{\Lambda}_{i,k}(t) x'_k(t'(t))$$

sono le componenti in  $\{e_i\}$  del vettore  $v^\tau$  che viene detto *velocità di trascinamento* di  $\mathcal{R}'$  rispetto ad  $\mathcal{R}$ . Essa può interpretarsi come la velocità al tempo  $t$  di un punto che a tale istante è a riposo rispetto al riferimento  $\mathcal{R}'$  nel punto  $x'(t')$ .

Le quantità

$$v_i^r = \sum_{k=1}^3 \Lambda_{i,k}(t) v'_k(t'(t)) \quad (1.14)$$

sono le componenti in  $\{e_i\}$  del vettore  $v^r$  che viene detto *velocità relativa* del moto  $t \rightarrow P(t)$  rispetto al riferimento  $\mathcal{R}'$ . Si ha pertanto

$$v = v^\tau + v^r \dot{t}'(t), \quad (1.15)$$

che si riduce a

$$v = v^\tau + v^r \quad (1.16)$$

nel caso particolare che gli orologi siano tali che  $\dot{t}'(t) = 1$ .

Una espressione più esplicita di  $v^\tau$  si ottiene come segue: dalla (1.13) si ottiene

$$x'_k(t') = \sum_{j=1}^3 \Lambda_{k,j}^{-1}(t) [x_j(t) - x_j^{(O')}(t)],$$

che, sostituita nell'espressione di  $v^\tau$  dà

$$v_i^\tau = \dot{x}_i^{(O')}(t) + \sum_{j=1}^3 A_{i,j} [x_j(t) - x_j^{(O')}(t)],$$

con

$$A_{i,j} = \sum_{k=1}^3 \dot{\Lambda}_{i,k}(t) \Lambda_{k,j}^{-1}(t).$$

La matrice  $A = \dot{\Lambda}(t)\Lambda^{-1}$  è *antisimmetrica*, cioè

$$A^T = -A.$$

Questa è conseguenza dell'ortogonalità della matrice  $\Lambda(t)$  che comporta

$$\Lambda(t)\Lambda^T(t) = \mathbf{I},$$

differenziando la quale si ottiene

$$\dot{\Lambda}(t)\Lambda^T(t) + \Lambda(t)\dot{\Lambda}^T(t) = 0. \quad (1.17)$$

Ricordando che  $\Lambda^T(t) = \Lambda^{-1}(t)$ , il primo termine si riduce ad  $A(t)$ . D'altra parte,

$$A^T(t) = [\dot{\Lambda}(t)\Lambda^{-1}(t)]^T = [\dot{\Lambda}(t)\Lambda^T(t)]^T = \Lambda(t)\dot{\Lambda}^T(t).$$

Pertanto il secondo termine in (1.17) è  $A^T(t)$  e si è quindi ottenuto  $A + A^T = 0$ , come affermato.

Ad una matrice antisimmetrica  $3 \times 3$ ,  $A$ , può sempre associarsi una terna  $\omega \in \mathbb{R}^3$  di componenti  $\omega_i$  secondo la seguente regola. Ricordando la definizione di simbolo di Levi-Civita, si pone

$$\omega_i = -\frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^3 \varepsilon_{i,j,k} A_{j,k}.$$

Si ha

$$A_{i,j} = -\sum_{k=1}^3 \varepsilon_{i,j,k} \omega_k$$

Piú esplicitamente,

$$A_{1,2} = -A_{2,1} = -\omega_3, \quad A_{2,3} = -A_{3,2} = -\omega_1, \quad A_{3,1} = -A_{1,3} = -\omega_2.$$

È immediato verificare che  $\omega$  è un vettore assiale, e cioè le sue componenti si trasformano secondo la (1.9) in un cambiamento di base.

In conseguenza della definizione di  $\omega$ , le componenti della velocità di trascinamento possono scriversi

$$v_i^\tau = \dot{x}_i^{(O')}(t) + \sum_{j,k=1}^3 \varepsilon_{i,j,k} [x_j(t) - x_j^{(O')}(t)] \omega_k(t).$$

Poiché  $[x_j(t) - x_j^{(O')}(t)]$  sono le componenti del vettore  $\overrightarrow{O'P}(t)$  nella base  $\{e_i\}$ , mentre  $\dot{x}^{(O')}(t)$  sono le componenti della velocità di  $O'$  rispetto al riferimento  $\mathcal{R}$ , si ha:

$$v^\tau = v^{(O')} + \omega \wedge \overrightarrow{O'P} \quad (1.18)$$

Il vettore  $\omega$  è denominato *velocità angolare* di  $\mathcal{R}'$  rispetto a  $\mathcal{R}$ .

Per giustificare tale denominazione, si consideri il caso particolare in cui  $O'$  rimane costantemente sovrapposto ad  $O$ . Sia inoltre  $\omega = (0, 0, \omega_3)$ . Un punto  $P$  a riposo nel riferimento  $\mathcal{R}'$  ha la seguente legge oraria in  $\mathcal{R}$ :

$$x_1(t) = R \cos(\omega_3 t + \phi), \quad x_2(t) = R \sin(\omega_3 t + \phi), \quad x_3 = x_3^0,$$

dove

$$R = [(x_1^0)^2 + (x_2^0)^2]^{1/2}, \quad \tan \phi = \frac{x_2^0}{x_1^0},$$

e  $x^0 = (x_1^0, x_2^0, x_3^0)$  sono le coordinate di  $P$  rispetto ad  $\mathcal{R}$  al tempo  $t = 0$ . Pertanto il punto  $P$  si muove di moto circolare uniforme con velocità angolare  $\omega_3$ . Se  $\omega$  non

è parallelo al vettore di base  $e_3$ , la stessa descrizione del moto è valida nei piani ortogonali ad  $\omega$ .

In modo analogo si ottiene la relazione tra le accelerazioni nei due riferimenti. A tal fine basta differenziare due volte la (1.13). Si ottiene così:

$$\begin{aligned} a_i(t) = & \ddot{x}_i^{(O')}(t) + \sum_{k=1}^3 \ddot{\Lambda}_{i,k}(t)x'_k(t'(t)) \\ & + [2 \sum_{k=1}^3 \dot{\Lambda}_{i,k}(t)v'_k(t'(t))\dot{t}'(t) + \sum_{k=1}^3 \Lambda_{i,k}(t)v'_k(t'(t))\ddot{t}'(t) \\ & + \sum_{k=1}^3 \Lambda_{i,k}(t)a'_k(t'(t))(\dot{t}'(t))^2] \end{aligned}$$

Come per le velocità, il primo termine rappresenta le componenti,

$$a_i^\tau = [\ddot{x}_i^{(O')}(t) + \sum_{k=1}^3 \ddot{\Lambda}_{i,k}(t)x'_k(t'(t))],$$

in  $\{e_i\}$ , dell'*accelerazione di trascinamento*,  $a^\tau$ , il terzo rappresenta, a meno del fattore  $(\dot{t}'(t))^2$  le componenti,

$$a_i^r = \sum_{k=1}^3 \Lambda_{i,k}(t)a'_k(t'(t)), \quad (1.19)$$

in  $\{e_i\}$ , dell'*accelerazione relativa* al riferimento  $\mathcal{R}'$ ,  $a^r$ , mentre il secondo rappresenta le componenti,

$$a_i^c = 2 \sum_{k=1}^3 \dot{\Lambda}_{i,k}(t)v'_k(t'(t))\dot{t}'(t) + \sum_{k=1}^3 \Lambda_{i,k}(t)v'_k(t'(t))\ddot{t}'(t),$$

in  $\{e_i\}$ , dell'*accelerazione complementare* o di Coriolis,  $a^c$ .

In definitiva

$$a = a^\tau + a^c + a^r(\dot{t}'(t))^2, \quad (1.20)$$

che si riduce a

$$a = a^\tau + a^c + a^r \quad (1.21)$$

se  $\dot{t}'(t) = 1$ .

Si noti che l'accelerazione di trascinamento è definita (in analogia alla velocità di trascinamento) come l'accelerazione rispetto a  $\mathcal{R}$  di un punto materiale a riposo



rispetto a  $\mathcal{R}'$ , che si trova in  $P$  al tempo  $t$ . In particolare, come si vede dalle espressioni esplicite,  $a^\tau \neq \dot{v}^\tau$ .

Un'espressione piú significativa per  $a^c$  si ottiene procedendo come fatto in precedenza per la velocità di trascinamento. Il risultato è:

$$a^c = 2\omega \wedge v^r \dot{t}'(t) + v^r \ddot{t}'(t). \quad (1.22)$$

Nel caso particolare che la relazione tra i due orologi sia tale che  $\dot{t}' = 1$ , questa si riduce a

$$a^c = 2\omega \wedge v^r.$$

Per ottenere un'espressione piú utile per  $a^\tau$  occorre effettuare qualche calcolo. Differenziando l'equazione che definisce  $A_{i,j}$ , si ha

$$\dot{A}_{i,j} = \sum_{k=1}^3 \ddot{\Lambda}_{i,k} \Lambda_{k,j}^{-1} + \sum_{k=1}^3 \Lambda_{i,k} (\dot{\Lambda}^{-1})_{k,j}.$$

Differenziando l'identità  $\sum_{h=1}^3 \Lambda_{\ell,h} \Lambda_{h,j}^{-1} = \delta_{\ell,j}$ , si ottiene

$$\sum_{h=1}^3 \dot{\Lambda}_{\ell,h} \Lambda_{h,j}^{-1} + \sum_{h=1}^3 \Lambda_{\ell,h} (\dot{\Lambda}^{-1})_{h,j} = 0.$$

Moltiplicando per  $\Lambda_{k,\ell}^{-1}$  e sommando su  $\ell$ , si ha pertanto:

$$(\dot{\Lambda}^{-1})_{k,j} = - \sum_{\ell,h=1}^3 \Lambda_{k,\ell}^{-1} \dot{\Lambda}_{\ell,h} \Lambda_{h,j}^{-1},$$

che, sostituita nell'espressione di  $\dot{A}_{i,j}$  fornisce

$$\begin{aligned} \dot{A}_{i,j} &= \sum_{k=1}^3 \ddot{\Lambda}_{i,k} \Lambda_{k,j}^{-1} - \sum_{k,\ell,h=1}^3 \dot{\Lambda}_{i,k} \Lambda_{k,\ell}^{-1} \dot{\Lambda}_{\ell,h} \Lambda_{h,j}^{-1} \\ &= \sum_{k=1}^3 \ddot{\Lambda}_{i,k} \Lambda_{k,j}^{-1} - \sum_{\ell=1}^3 A_{i,\ell} A_{\ell,j}. \end{aligned}$$

Usando tale espressione nella definizione di  $a^\tau$  si ha

$$a_i^\tau = \ddot{x}_i^{(O')}(t) + \sum_{j=1}^3 \dot{A}_{i,j}(t) [x_j(t) - x_j^{(O')}(t)] + \sum_{\ell,j=1}^3 A_{i,\ell} A_{\ell,j} [x_j(t) - x_j^{(O')}(t)].$$

Ricordando che  $A_{i,j} = -\sum_{k=1}^3 \varepsilon_{i,j,k} \omega_k$  e quindi anche  $\dot{A}_{i,j} = -\sum_{k=1}^3 \varepsilon_{i,j,k} \dot{\omega}_k$ , e la definizione di prodotto vettoriale, detta  $a^{(O')}$  l'accelerazione di  $O'$  rispetto al riferimento  $\mathcal{R}$ , si ha

$$a^\tau = a^{(O')} + \dot{\omega} \wedge \overrightarrow{O'P} + \omega \wedge (\omega \wedge \overrightarrow{O'P}).$$

Usando l'identità (1.10) per il doppio prodotto vettoriale, risulta

$$\omega \wedge (\omega \wedge \overrightarrow{O'P}) = (\omega \cdot \overrightarrow{O'P})\omega - (\omega \cdot \omega)\overrightarrow{O'P}$$

Detta  $Q$  la proiezione ortogonale di  $P$  sulla retta per  $O'$  parallela a  $\omega$ , risulta

$$(\omega \cdot \overrightarrow{O'P})\omega - (\omega \cdot \omega)\overrightarrow{O'P} = -\omega^2 \overrightarrow{QP}$$

e pertanto

$$a^\tau = a^{(O')} + \dot{\omega} \wedge \overrightarrow{O'P} - \omega^2 \overrightarrow{QP}. \quad (1.23)$$

*Esempio:*

Sia  $v_r = (\alpha, 0, 0)$  la velocità relativa, costante, di un punto  $P$  che si trova sull'asse  $e'_1$ . Il suo moto rispetto al riferimento  $\mathcal{R}'$  è quindi rettilineo uniforme, con legge oraria

$$x'(t) = (x_0 + \alpha t', 0, 0).$$

Sia il riferimento  $\mathcal{R}$  con la stessa origine ed inizialmente gli stessi assi. Sia  $\omega = (0, 0, \omega_3)$ , per cui il moto del riferimento  $\mathcal{R}$  rispetto a  $\mathcal{R}'$  è una rotazione intorno all'asse  $e_3$ , che resta fisso. Il moto del punto  $P$  rispetto al riferimento  $\mathcal{R}$  è quindi dato da

$$(x_1, x_2, x_3) = (x'_1 \cos \omega_3 t, -x'_1 \sin \omega_3 t, 0)$$

ed ha velocità

$$v = v^r + \omega \wedge \overrightarrow{OP} = (\alpha \cos \omega_3 t, -\alpha \sin \omega_3 t, 0) + (\omega_3 x_2, -\omega_3 x_1, 0),$$

mentre l'accelerazione di  $P$  è data da

$$a = a^r + 2\omega \wedge v^r + a^\tau.$$

Ma  $a^r = 0$ ,

$$2\omega \wedge v^r = (\omega_3 v_2, -\omega_3 v_1, 0) = (0, -\omega_3 \alpha, 0)$$

e

$$a^\tau = -\omega_3^2 (x_1, x_2, 0).$$

Pertanto risulta  $a \neq 0$ , ed il moto non è rettilineo uniforme rispetto al riferimento  $\mathcal{R}$ .

## 1.5 Principio d'inerzia.

Gli assiomi fin qui presentati riguardano le proprietà dello spazio e del tempo. Su essi sono poi basate alcune definizioni connesse con la descrizione del moto di un punto materiale. La descrizione del moto di un punto materiale viene sovente denominata *Cinematica* del punto materiale. La Meccanica piú in generale intende studiare il moto dei punti materiali in relazione alle azioni che l'ambiente esercita su di essi. Lo studio di tali relazioni è denominato *Dinamica* del punto materiale. Il *Principio d'inerzia* è il primo degli assiomi della Dinamica. La sua formulazione richiede preliminarmente alcune definizioni.

**Definizione 1.9** (Punto materiale libero): Un punto materiale si dice *libero* se non vi sono restrizioni *a priori* (vincoli) sui moti per esso possibili.

**“Definizione” 1.10** (Punto materiale isolato): Un punto materiale si dice *isolato* quando non subisce le influenze da parte dell'ambiente esterno.

*Osservazione:* La parola definizione è stata in questo caso messa tra virgolette perché essa è in realtà ambigua in quanto non è ancora specificato come si determina l'influenza dell'ambiente sul punto materiale. Questo sarà parte di un assioma successivo, sicché si potrebbe vedere in tale presentazione un circolo vizioso. In realtà la nozione di punto materiale isolato va interpretata come segue: si presume che le interazioni tra i corpi siano tanto minori quanto maggiore è la distanza che li separa. Sarà pertanto ragionevole considerare con buona approssimazione isolato un punto materiale che si trovi molto lontano (al limite a distanza infinita) da tutti gli altri corpi. Questo è il significato intuitivo della nozione di punto materiale isolato, che converrà considerare come *primitiva* per evitare circoli viziosi.

**Definizione 1.11** (Riferimento inerziale): Sia  $\mathcal{I} = \{\mathcal{R}, \mathcal{T}\}$  un riferimento di  $\mathbb{E}_3$  munito del suo orologio.  $\mathcal{I}$  si dice *riferimento inerziale* se il moto di ogni punto materiale libero ed isolato è rispetto ad  $\mathcal{I}$  rettilineo ed uniforme.

**Teorema 1.1:** Sia  $\mathcal{I} = \{\mathcal{R}, \mathcal{T}\}$  un riferimento inerziale. Sia  $\mathcal{I}' = \{\mathcal{R}', \mathcal{T}'\}$  un altro riferimento.  $\mathcal{I}'$  è inerziale se e solo se, dette  $\omega$  la velocità angolare e  $a^\tau$  l'accelerazione di trascinamento di  $\mathcal{I}'$  rispetto a  $\mathcal{I}$  e  $t'(t)$  la relazione tra gli orologi  $\mathcal{T}'$  e  $\mathcal{T}$ , risulta

$$a^\tau = 0, \quad \omega = 0, \quad \ddot{t}' = 0. \quad (1.24)$$

*Osservazione:* Si noti che quando (1.24)<sub>1,2</sub> sono verificate, dall'espressione dell'accelerazione di trascinamento segue che  $a^{(O')}$  = 0 e quindi la velocità dell'origine  $O'$  di  $\mathcal{R}'$  è costante. Inoltre da (1.24)<sub>2</sub> e dalla definizione di  $\omega$  segue che  $\dot{\Lambda}_{i,k} = 0$  e quindi i vettori della base  $\{e'_k\}$  hanno componenti costanti nella base  $\{e_i\}$ .

Quando queste due condizioni sono verificate, si dice che il riferimento  $\mathcal{R}'$  è in *moto traslatorio uniforme* rispetto ad  $\mathcal{R}$ . Infine (1.24)<sub>3</sub> comporta che  $t'(t) = \alpha t + \beta$ . Quindi gli orologi differiscono al più per un cambio delle unità di misura dei tempi e per un cambio dell'origine dei tempi. Quando ciò accade, non vi è perdita di generalità nell'assumere che  $\beta = 0$  ed  $\alpha = 1$ , e cioè  $t' = t$ . Il contenuto del Teorema 1.1 può quindi esprimersi nell'affermazione che i riferimenti inerziali sono caratterizzati completamente dal fatto di essere in moto traslatorio uniforme l'uno rispetto all'altro e con orologi coincidenti (a meno di cambiamenti di scala e di origine).

Dim.

La condizione sufficiente segue immediatamente dalle (1.24), che comportano  $\dot{t}' = \alpha$  e  $v^r$  costante per l'osservazione precedente. Quindi  $v^r$  è costante in quanto lo è  $v$  e anche  $\mathcal{I}'$  è inerziale.

Per provare la condizione necessaria, si supponga viceversa che  $\mathcal{I}'$  sia anch'esso inerziale. Per un generico punto libero ed isolato risultano nulle tanto  $a$  che  $a^r$ . Da (1.21) consegue che deve essere anche

$$a^\tau + a^c = 0.$$

In particolare, poiché il punto materiale è arbitrario, lo si supponga per il momento a riposo rispetto a  $\mathcal{I}'$ , sicché  $v^r = 0$ . Ricordando l'espressione (1.22) di  $a^c$ , ne consegue che deve essere  $a^c = 0$  per tale moto. Quindi anche  $a^\tau = 0$ . D'altra parte  $a^\tau$  non dipende da  $v^r$ , e ciò prova (1.24)<sub>1</sub>. Inoltre deve essere anche  $a^c = 0$  per ogni moto e non solo per quello con  $v^r = 0$ .

Sia ora  $v^r \neq 0$ . Da quanto prima osservato,  $a^c = 0$ . Ma i due addendi nell'espressione di  $a^c$  (1.22) sono tra loro ortogonali per le proprietà del prodotto vettoriale; pertanto sono separatamente nulli. L'arbitrarietà di  $v^r$  implica (1.24)<sub>2</sub> e (1.24)<sub>3</sub>, poiché  $\dot{t}'(t) > 0$ .  $\square$

In definitiva, se  $\mathcal{I}$  e  $\mathcal{I}'$  sono due riferimenti inerziali, le coordinate ed i tempi nei due riferimenti sono legati dalle seguenti relazioni:

$$\begin{aligned} x_i &= x_i^{(O')} + v_i^{(O')} t + \sum_{k=1}^3 \Lambda_{i,k} x'_k \\ t &= \alpha t' + \beta \end{aligned} \tag{1.25}$$

Nel seguito assumeremo sempre  $\alpha = 1$ ,  $\beta = 0$ , sicché la (1.25)<sub>2</sub> sarà sostituita da

$$t = t'.$$

Il Teorema 1.1 caratterizza la classe dei riferimenti inerziali, ma nulla esclude *a priori* che tale classe sia vuota. Poiché la Meccanica classica assume come ambiente

in cui formulare le leggi della Dinamica un riferimento inerziale, è fondamentale il seguente

**Principio d'inerzia:** *Esistono riferimenti inerziali.*

*Osservazione:* Il principio di inerzia stabilisce l'esistenza di riferimenti inerziali, ma non fornisce alcun metodo per costruire un riferimento inerziale in situazioni concrete. In altre parole, sebbene basandosi sul principio di inerzia si possa costruire una teoria della Meccanica completamente coerente, rimane discutibile la sua applicabilità pratica per la difficoltà di stabilire un riferimento inerziale. È appunto dalla critica della nozione di riferimento inerziale che Einstein partì nella formulazione della teoria della Relatività Generale. Ciò non toglie però che la Meccanica Classica sia una teoria di enorme utilità pratica, in grado di schematizzare correttamente i fenomeni dell'esperienza comune. Per comprendere come ciò sia possibile occorre reinterpretare la nozione di riferimento inerziale come un concetto limite che corrisponde ad una idealizzazione di situazioni concrete. In altri termini, mentre non sappiamo costruire riferimenti *esattamente* inerziali, in molte circostanze possiamo affermare che uno specifico riferimento è *approssimativamente* inerziale, con accuratezza sufficiente per le misure che si intende effettuare e nelle scale di tempo dei fenomeni cui siamo interessati. Ad esempio, si consideri un riferimento con l'origine nel centro della Terra ed assi diretti verso tre stelle fisse. Un tale riferimento può considerarsi *sufficientemente* inerziale quando si osservino fenomeni su scale di tempo dell'ordine del giorno o della settimana e non si effettuino misure di grandissima accuratezza. Tuttavia, se i fenomeni cui siamo interessati avvengono su tempi dell'ordine dell'anno, il moto di rivoluzione della Terra intorno al Sole diviene rilevante e non è più corretto considerare tale riferimento come una buona approssimazione di un riferimento inerziale. Si potrà sostituire un tale riferimento con uno con origine nel Sole ed assi diretti verso le solite tre stelle fisse. Tale sistema sarà molto più adatto a descrivere fenomeni su scale di tempo dell'ordine degli anni o anche dei secoli, come avviene per la maggior parte dei fenomeni astronomici relativi al sistema solare. Tuttavia, se i periodi di osservazione divengono confrontabili con il periodo di rivoluzione del Sole attorno al centro della galassia, anche tale riferimento andrà in crisi come riferimento inerziale ed occorrerà trovarne uno migliore.

Tale esempio mostra che in concreto, sebbene non siamo in grado di costruire il riferimento inerziale assicurato dal principio d'inerzia, è sempre possibile costruire empiricamente un riferimento che può considerarsi inerziale nella situazione in esame. Questa considerazione rende la Meccanica classica una teoria applicabile in situazioni concrete.

## 1.6 Legge di Newton.

L'azione dell'ambiente esterno su un punto materiale è schematizzata in Meccanica Classica mediante la nozione di *forza*, che è definita come segue.

**Definizione 1.12:** Si fissi un sistema di riferimento  $\mathcal{R}$  e si assuma che in ogni punto  $P$  dello spazio, per ogni valore della velocità  $v$  rispetto a  $\mathcal{R}$  ed ad ogni istante di tempo  $t$  sia univocamente determinato un vettore  $f \in \mathbb{V}_3$ . La funzione

$$f : (P, v, t) \in \mathbb{E}_3 \times \mathbb{V}_3 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{V}_3,$$

si dice *legge di forza*.

Quando si esprimono  $P$  in termini di coordinate in  $\mathcal{R}$  e  $v$  ed  $f$  in termini delle componenti nella base  $\{e_i\}$  associata a  $\mathcal{R}$ , la legge di forza è anche espressa tramite le funzioni

$$f_i : (x, v, t) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad i = 1, \dots, 3.$$

Al solito si è usato  $x = (x_1, x_2, x_3)$  e con abuso di notazione,  $v = (v_1, v_2, v_3)$ . Allo stesso modo si userà la notazione  $f = (f_1, f_2, f_3)$ .

*Osservazione:* Non vi è motivo a priori per supporre che la forza agente sul punto materiale non dipenda da derivate superiori del moto, quali l'accelerazione o la derivata terza ecc. L'assunzione che la forza dipenda solo dalla posizione, dalla velocità e dal tempo è giustificata solo dal fatto che essa è sufficientemente generale per comprendere tutti i problemi di interesse in Meccanica Classica. Altri settori della Fisica forniscono esempi in cui tale assunzione non è valida.

Principio di covarianza della legge di forza: Si assume che *il valore del vettore forza  $f$ , come elemento di  $\mathbb{V}_3$  non varia quando si passa da un riferimento  $\mathcal{R}$  ad un altro  $\mathcal{R}'$ .*

**Legge di Newton:** *Ad ogni punto materiale è associato un numero reale positivo,  $m$ , detto massa, indipendente dallo stato di moto del punto materiale, tale che, per ogni legge di forza  $f(P, v, t)$  e per ogni moto  $t \rightarrow P(t)$  rispetto al riferimento inerziale  $\mathcal{I}$ , l'accelerazione  $a$  risulti proporzionale alla forza secondo l'equazione*

$$ma(t) = f(P(t), v(t), t). \quad (1.26)$$

Usando le componenti rispetto alla base  $\{e_i\}$  associata ad  $\mathcal{I}$ , ed i soliti abusi di notazione, (1.26) si scrive

$$m\ddot{x}(t) = f(x(t), \dot{x}(t), t). \quad (1.27)$$

La legge di Newton afferma anche, implicitamente, che *la massa  $m$  di ogni punto materiale è indipendente dal riferimento considerato.*

Le coordinate di due riferimenti inerziali sono legate dalle relazioni (1.25), e quindi le accelerazioni sono legate da

$$a_i = \sum_{k=1}^3 \Lambda_{i,k} a'_k,$$

e cioè, *si trasformano come vettori* nel passaggio da un riferimento inerziale ad un altro. In conseguenza di ciò si può affermare che la legge di Newton (1.26) è invariante nel passaggio da un riferimento inerziale  $\mathcal{I}$  ad un qualsiasi altro  $\mathcal{I}'$ . Tale affermazione è il contenuto del *Principio di invarianza Galileiana*.

D'altra parte la relazione tra le accelerazioni in sistemi di riferimento differenti (1.21) mostra che la legge di Newton *non* è invariante nel passaggio ad un qualsiasi altro riferimento non inerziale. Questo è il motivo per cui la classe dei sistemi di riferimento inerziali è privilegiata rispetto agli altri e ne è così fondamentale la sua costruzione.

Le relazioni (1.26) o (1.27) sono le equazioni fondamentali della Meccanica Classica e la loro formulazione è particolarmente semplice nei sistemi di riferimento inerziali, mentre risulterebbe molto più complessa in sistemi non inerziali.

Nel capitolo successivo si mostrerà che (1.27) può interpretarsi come un sistema di equazioni differenziali e si proverà un teorema secondo il quale è sempre possibile in linea di principio, sotto ipotesi di regolarità molto generali, costruire soluzioni di tali equazioni differenziali, sebbene ciò sia spesso difficile. Tale teorema fornirà quindi soluzione generale al

*Primo Problema Fondamentale della Meccanica Classica (o problema diretto):  
Assegnata la legge di forza, determinare il moto del punto materiale.*

Si chiama invece

*Secondo Problema Fondamentale della Meccanica Classica (o problema inverso)  
il problema seguente:*

*Dati i moti del punto materiale, determinare la legge di forza.*

Naturalmente le difficoltà del problema inverso dipendono fortemente dal significato da attribuirsi alla parole “dati i moti del punto materiale”, nel senso che, se effettivamente sono date tutti i moti che il punto può effettuare in presenza di certe azioni esterne, allora la sua risoluzione si riduce ad una semplice operazione di differenziazione. D'altra parte, se i moti sono assegnati nel senso di specificarne alcune caratteristiche qualitative, il problema può essere in generale mal posto. I moti Kepleriani forniranno un esempio in cui il secondo problema è ben posto e risolvibile, senza essere banale. La sua soluzione conduce ad individuare la legge di forza di attrazione di gravità nella forma della legge di gravitazione universale di Newton. A parte questo caso, in questo corso ci occuperemo essenzialmente della risoluzione, più o meno esplicita, del problema diretto.

## 2. Equazioni differenziali e Legge di Newton

### 2.1 Posizione del problema.

Siano  $X$ ,  $Y$  e  $T$  tre intervalli di  $\mathbb{R}$  e sia  $f(x, y, t)$  una funzione reale definita per  $(x, y, t) \in X \times Y \times T$ . Sia inoltre  $t \rightarrow x(t)$  una funzione di variabile reale definita in  $T$  ed a valori in  $X$ . Si userà nel seguito la notazione  $\dot{x}$  per indicare la derivata di  $t \rightarrow x(t)$  rispetto alla variabile indipendente  $t$ . Spesso  $t$  avrà l'interpretazione di *tempo* ed  $x$  di *posizione* di una particella. Tale interpretazione però è puramente terminologica e non è essenziale alla discussione matematica che segue.

La scrittura

$$f(x, \dot{x}, t) = 0$$

denoterà il seguente problema:

*Determinare la classe delle funzioni  $t \rightarrow x(t)$  definite in un sottoinsieme  $T^* \subset T$ , a valori in  $X$ , derivabili rispetto a  $t$  con derivata in  $Y$  e tali che risulti verificata la relazione*

$$f(x(t), \dot{x}(t), t) = 0 \quad \text{per ogni } t \in T^*.$$

Tale problema si dice **equazione differenziale del primo ordine**.

Più in generale, fissato  $n \geq 1$ , se  $X$ ,  $Y_1, \dots, Y_n$  e  $T$  sono  $n + 2$  intervalli di  $\mathbb{R}$ , sia  $f(x, y_1, \dots, y_n, t)$  una funzione reale definita per  $(x, y_1, \dots, y_n, t) \in X \times Y_1 \times \dots \times Y_n \times T$ . Si denoterà con  $x^{(k)}$  la  $k$ -ma derivata di  $t \rightarrow x(t)$ .

La scrittura

$$f(x, \dot{x}, \dots, x^{(n)}, t) = 0$$

denoterà il seguente problema:

*Determinare la classe delle funzioni  $t \rightarrow x(t)$  definite in un sottoinsieme  $T^* \subset T$ , a valori in  $X$ , derivabili  $n$  volte rispetto a  $t$  con derivata prima in  $Y_1, \dots$ , derivata  $n$ -ma in  $Y_n$  e tali che risulti verificata la relazione*

$$f(x(t), \dot{x}(t), \dots, x^{(n)}(t), t) = 0 \quad \text{per ogni } t \in T^*.$$

Tale problema si dice **equazione differenziale di ordine  $n$** .

Siano ora  $X$  ed  $Y$  due intervalli di  $\mathbb{R}^n$ ,  $T$  un intervallo di  $\mathbb{R}$  ed

$$f(x, y, t) = (f_1(x, y, t), \dots, f_n(x, y, t))$$

una funzione a valori in  $\mathbb{R}^n$  (ovvero  $f_i(x, y, t)$  funzioni reali per  $i = 1, \dots, n$ ) definite per  $(x, y, t) \in X \times Y \times T$ .

La scrittura

$$f(x, \dot{x}, t) = 0$$

oppure

$$f_i(x_1, \dots, x_n, \dot{x}_1, \dots, \dot{x}_n, t) = 0, \quad \text{per } i = 1, \dots, n$$



denoterà il seguente problema

Determinare la classe delle funzioni  $t \rightarrow x(t)$  (ovvero  $t \rightarrow (x_1(t), \dots, x_n(t))$ ) definite in un sottoinsieme  $T^* \subset T$ , a valori in  $X$ , derivabili rispetto a  $t$  con derivate prime in  $Y$  e tali che risulti verificata la relazione

$$f(x(t), \dot{x}(t), t) = 0 \quad \text{per ogni } t \in T^*,$$

oppure

$$f_i(x_1(t), \dots, x_n(t), \dot{x}_1(t), \dots, \dot{x}_n(t), t) = 0, \quad \text{per ogni } t \in T^* \quad \text{per } i = 1, \dots, n$$

Tale problema si dice **sistema di  $n$  equazioni differenziali del primo ordine**. In modo analogo si definisce un sistema di  $n$  equazioni differenziali di ordine  $k$ .

La funzione  $t \rightarrow x(t)$  si dice *incognita* del problema.

Un'equazione differenziale di ordine  $n$  si dice in **forma normale** se  $f$  è della forma

$$f(x, y_1, \dots, y_n, t) = y_n - g(x, y_1, \dots, y_{n-1}, t)$$

per qualche funzione  $g$  definita in  $X \times Y_1 \times \dots \times Y_{n-1} \times T$ , e cioè se la relazione  $f = 0$  può essere risolta rispetto alle derivate di ordine massimo. In tal caso si scrive

$$x^{(n)} = g(x, \dot{x}, \dots, x^{(n-1)}, t).$$

Per il teorema della funzione implicita, se

- 1)  $f$  è differenziabile,
  - 2) esiste  $(x^*, y_1^*, \dots, y_n^*, t^*) \in X \times Y_1 \times \dots \times Y_n \times T$  tale che  $f(x^*, y_1^*, \dots, y_n^*, t^*) = 0$ ,
  - 3) La derivata  $f_{y_n}(x^*, y_1^*, \dots, y_n^*, t^*) \neq 0$ ;
- allora è possibile risolvere rispetto alla variabile  $y_n$  la relazione  $f = 0$  in un intorno di  $(x^*, y_1^*, \dots, y_n^*, t^*)$ . Quando ciò si verifica, si dice che l'equazione differenziale è riducibile a forma normale.

Un sistema di  $n$  equazioni differenziali del primo ordine si dice in **forma normale** se le  $f_i$  sono della forma

$$f_i(x, y, t) = y_i - g_i(x, t)$$

per qualche funzione  $g = (g_1, \dots, g_n)$  definita in  $X \times T$ , e cioè se le relazioni  $f = 0$  possono essere risolte rispetto alle derivate. In tal caso si scrive

$$\dot{x} = g(x, t).$$

Per il teorema della funzione implicita, se

- 1)  $f$  è differenziabile,
- 2) esiste  $(x^*, y^*, t^*) \in X \times Y \times T$  tale che  $f(x^*, y^*, t^*) = 0$ ,
- 3) Il differenziale  $\partial_{y_i} f_j(x^*, y^*, t^*)$  ha determinante non nullo;

allora è possibile risolvere rispetto alle variabili  $y$  le relazioni  $f = 0$  in un intorno di  $(x^*, y^*, t^*)$ . Quando ciò si verifica, si dice che il sistema di equazioni differenziali è riducibile a forma normale.

Un'equazione differenziale di ordine  $n$  può ricondursi ad un particolare sistema di  $n$  equazioni del primo ordine. Basta infatti considerare il sistema

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= x_3, \\ &\dots \\ \dot{x}_{n-1} &= x_n, \\ f(x_1, x_2, \dots, x_n, \dot{x}_n, t) &= 0.\end{aligned}$$

È evidente che, nota la soluzione  $t \rightarrow x(t)$  di tale sistema, la funzione  $t \rightarrow x_1(t)$  ammette  $n$  derivate ed è soluzione dell'equazione differenziale

$$f(x_1, \dot{x}_1, \dots, x_1^{(n)}, t) = 0.$$

Più in generale, un sistema di  $n$  equazioni di ordine  $k$  può ricondursi ad un sistema di  $nk$  equazioni del primo ordine. In considerazione di ciò nel seguito si discuterà soltanto il caso di un sistema di  $n$  equazioni del primo ordine, i risultati essendo trasferibili in modo ovvio agli altri problemi. Si considereranno inoltre sempre sistemi in forma normale, gli unici per i quali è possibile costruire soluzioni in modo sufficientemente generale. Il problema considerato nel seguito sarà pertanto sempre nella forma

$$\dot{x} = f(x, t), \tag{2.1}$$

con  $x \in \mathbb{R}^n$  ed  $f : X \times T \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ .

L'individuazione della classe di soluzioni dell'equazione (2.1) è in generale ardua. Anche nei casi più semplici, essa non si riduce a pochi elementi, ma contiene famiglie di funzioni, per la descrizione delle quali occorre trovare adeguate parametrizzazioni. Ad esempio, nel caso particolare che  $f$  si riduca ad un vettore costante  $b$ , le funzioni lineari

$$x_i = b_i(t - c) + a_i$$

risolvono (2.1) per ogni scelta di  $a \in \mathbb{R}^n$  e di  $c \in \mathbb{R}$ . Quindi la famiglia delle soluzioni è parametrizzata dal vettore  $a$  di  $\mathbb{R}^n$  e da  $c$ , ovvero dagli  $n + 1$  parametri reali  $a_i$  per  $i = 1 \dots, n$  e  $c$ . D'altra parte, se si fissano  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  e  $t_0 \in \mathbb{R}$  e si cerca la soluzione tale che

$$x(t_0) = x_0, \tag{2.2}$$

allora i valori di  $a$  e  $c$  che soddisfano entrambe le condizioni si riducono alla sola scelta  $c = t_0$  ed  $a = x_0$ . In altre parole, se al sistema (2.1) si aggiunge la

condizione (2.2), nel caso speciale  $f = b$ , la classe delle soluzioni si riduce ad una sola soluzione. Si può cioè ritenere di poter parametrizzare le soluzioni di (2.1) in termini della posizione  $x_0$  occupata ad un certo istante  $t_0$ . Che tale affermazione sia vera più in generale non è ovvio, ma è il contenuto del teorema fondamentale della teoria delle equazioni differenziali.

L'insieme delle condizioni (2.1) ed (2.2) viene detto **problema ai valori iniziali** oppure **problema di Cauchy** per l'equazione (2.1). La condizione (2.2) è detta **condizione iniziale**. Tale terminologia lascia intendere che si è interessati a determinare la soluzione per  $t > t_0$ . In realtà, sebbene questo sia spesso il caso, la teoria esposta nel seguito non distingue tra  $t > t_0$  e  $t < t_0$ , sicché si potrebbe parlare con uguale ragione di problema ai valori finali.

Diremo che  $t \rightarrow x(t)$  è una **soluzione** del problema ai valori iniziali (2.1), (2.2) se esiste un intervallo  $(t_1, t_2)$  cui  $t_0$  appartiene, in cui è definita la funzione  $t \rightarrow x(t)$ , ivi è continua, derivabile con derivata continua. In tale intervallo inoltre risulta:

$$\begin{aligned} x(t_0) &= x_0, \\ \dot{x}(t) &= f(x(t), t), \quad \text{per ogni } t \in (t_1, t_2) \end{aligned} \tag{2.3}$$

Diremo che una soluzione  $t \rightarrow x(t)$  con dato iniziale  $x(t_0) = x_0$  e  $t \in (t_1, t_2)$  è **massimale** se non esiste un'altra soluzione  $t \rightarrow \hat{x}(t)$  con dato iniziale  $\hat{x}(t_0) = x_0$  e  $t \in (\hat{t}_1, \hat{t}_2)$ , tale che  $(t_1, t_2) \subset (\hat{t}_1, \hat{t}_2)$  e  $\hat{x}(t) = x(t)$  per ogni  $t \in (t_1, t_2)$ . Una soluzione massimale si dice **globale** o anche **globale nel futuro** se  $t_2 = +\infty$ , si dice **globale nel passato** se  $t_1 = -\infty$ .

## 2.2 Esistenza ed unicità.

Forma integrale del problema (2.3).

Supporremo ora che la funzione  $f(x, t)$  sia continua e limitata in  $X \times T$ .

Sia  $t \rightarrow x(t)$  una soluzione del problema (2.3) nell'intervallo  $(t_1, t_2)$  e sia  $t \in (t_1, t_2)$ . Se si integra la seconda delle (2.3) sull'intervallo  $(t_0, t)$ , per il teorema fondamentale del calcolo e la prima delle (2.3) si ha:

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t ds f(x(s), s), \quad \text{per ogni } t \in (t_1, t_2). \tag{2.4}$$

L'equazione (2.4) è detta **forma integrale del problema di Cauchy**. Essa è conseguenza dell'equazione (2.3) e pertanto ogni soluzione del problema (2.3) risolve anche la (2.4). D'altra parte, se  $t \rightarrow x(t)$  soddisfa la (2.4), allora essa è certamente continua sull'intervallo  $(t_1, t_2)$  in quanto integrale di una funzione limitata. Pertanto  $f(x(s), s)$  è continua poiché  $f$  è una funzione continua. Pertanto  $t \rightarrow x(t)$  è differenziabile in  $(t_1, t_2)$  in quanto integrale di una funzione continua. Inoltre risulta  $\dot{x}(t) = f(x(t), t)$  per ogni  $t \in (t_1, t_2)$  e  $x(t_0) = x_0$ . Quindi  $t \rightarrow x(t)$

è soluzione del problema (2.3). Ne consegue che *Il problema (2.3) è equivalente alla sua forma integrale.*

La forma integrale del problema (2.3) è particolarmente utile per la costruzione delle soluzioni.

**Definizione 2.1:** Sia  $A \subset X$  un intervallo aperto di  $\mathbb{R}^n$ . Si dice che  $f$  è **Lipshitziana** in  $A$  se esiste una costante  $L$  (*costante di Lipshitz*) tale

$$\sup_{x, x' \in A} \left\{ \frac{|f(x) - f(x')|}{|x - x'|} \right\} \leq L \quad (2.5)$$

Una semplice condizione *sufficiente* perché  $f$  sia Lipshitziana in  $A$  è che essa ammetta derivate parziali rispetto alle  $x_i$  in  $A$  e che esse siano ivi limitate. In tal caso si può migliorare  $L$  con

$$L \leq \sup_{x \in A} \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) \right|$$

**Teorema 2.1 (di unicità):** *Si supponga  $f$  continua in  $A \times (a, b)$  e Lipshitziana in  $A$  e siano  $t_0 \in (a, b)$ ,  $x_0 \in A$ . Esiste al più una soluzione dell'equazione (2.4),  $t \rightarrow x(t)$  in  $(t_1, t_2) \subset (a, b)$ , con  $x(t) \in A$ .*

In altre parole, il problema ai valori iniziali ammette al più una soluzione nell'insieme ove la  $f$  è Lipshitziana.

Dim. Si supponga per assurdo che ne esistano due distinte,  $t \rightarrow x_1(t)$  e  $t \rightarrow x_2(t)$  in  $[t_0, t_1]$ . La differenza  $u(t) = x_1(t) - x_2(t)$  soddisfa la relazione

$$u(t) = \int_{t_0}^t ds [f(x_1(s), s) - f(x_2(s), s)].$$

Sia

$$\gamma = \sup_{t \in [t_0, t_1]} |u(t)|.$$

Per la Lipshitzianità di  $f$ , si ha

$$\begin{aligned} |u(t)| &\leq \int_{t_0}^t ds |f(x_1(s), s) - f(x_2(s), s)| \leq L \int_{t_0}^t ds |u(s)| \\ &\leq \dots \leq L^n \int_{t_0}^t ds_1 \int_{t_0}^{s_1} ds_2 \dots \int_{t_0}^{s_{n-1}} ds_n \gamma \leq \gamma \frac{L^n (t_1 - t_0)^n}{n!}, \end{aligned}$$

in quanto

$$\int_{t_0}^t ds_1 \int_{t_0}^{s_1} ds_2 \dots \int_{t_0}^{s_{k-1}} ds_k = \frac{(t-t_0)^k}{k!}, \quad (2.6)$$

come può controllarsi facilmente per induzione. Poiché  $n$  si può scegliere arbitrariamente grande, la quantità  $L^n(t_1-t_0)^n/n!$  può rendersi minore di  $1/2$ . Ne consegue che

$$\gamma \leq \frac{1}{2}\gamma.$$

Tale relazione è assurda a meno che  $\gamma = 0$ . Ciò prova l'unicità.  $\square$

**Teorema 2.2 (di esistenza):** *Si supponga  $f$  continua in  $A \times (a, b)$  e Lipschitziana in  $A$  e siano  $t_0 \in (a, b)$ ,  $x_0 \in A$ . Esiste un  $\bar{t} > 0$  ed una soluzione  $t \rightarrow x(t)$  dell'equazione (2.4) per  $t \in (t_0, \bar{t})$ , tale che  $(t, x(t)) \in A \times (a, b)$  per ogni  $t \leq \bar{t}$ .*

Dim. Fissato  $\bar{t} > 0$ , si consideri l'insieme delle funzioni continue su  $[t_0, \bar{t}]$ ,  $t \rightarrow x(t)$  a valori in  $A$ , con  $x(t_0) = x_0$ . Tale insieme si denoterà con  $C_{x_0, A}([t_0, \bar{t}])$ . Se su tale spazio si considera la metrica

$$d(x, y) = \sup_{t \in [t_0, \bar{t}]} |x(t) - y(t)|, \quad (2.7)$$

esso è uno spazio metrico è completo (vedi Appendice). In  $C_{x_0, A}([t_0, \bar{t}])$  si definisca la seguente trasformazione  $x \rightarrow \mathcal{A}x$ :

$$(\mathcal{A}x)(t) = x_0 + \int_{t_0}^t ds f(x(s), s). \quad (2.8)$$

Una soluzione di (2.4) può quindi costruirsi come punto fisso della trasformazione  $\mathcal{A}$ . A tale scopo basta mostrare (vedi Appendice) che

- 1)  $\mathcal{A}$  trasforma  $C_{x_0, A}([t_0, \bar{t}])$  in sé;
- 2)  $\mathcal{A}$  è una contrazione.

Sia  $\rho > 0$  tale che la sfera  $B_\rho(x_0)$  sia contenuta in  $A$ . Sia inoltre  $M > 0$  tale che  $|f(x, t)| \leq M$  per ogni  $(x, t) \in A \times T$ . Ne consegue che

$$|(\mathcal{A}x)(t) - x_0| = \left| \int_{t_0}^t ds f(x(s), s) \right| \leq \int_{t_0}^t ds |f(x(s), s)| \leq M(t - t_0).$$

Il secondo membro di tale disuguaglianza può rendersi minore di  $\rho$  a patto di scegliere  $\bar{t}$  sufficientemente piccolo. Pertanto  $(\mathcal{A}x)(t) \in B_\rho(x_0) \subset A$  per ogni  $t \in [t_0, \bar{t}]$ . Inoltre  $t \rightarrow (\mathcal{A}x)(t)$  è continua in  $[t_0, \bar{t}]$ . Questo prova 1).

D'altra parte se  $t \rightarrow x(t)$  e  $t \rightarrow y(t)$  sono due elementi di  $C_{x_0, A}([t_0, \bar{t}])$ , allora

$$\begin{aligned} d(\mathcal{A}x, \mathcal{A}y) &= \sup_{t \in [t_0, \bar{t}]} |(\mathcal{A}x)(t) - (\mathcal{A}y)(t)| \\ &= \sup_{t \in [t_0, \bar{t}]} \left| \int_{t_0}^t ds [f(x(s), s) - f(y(s), s)] \right| \leq \sup_{t \in [t_0, \bar{t}]} \int_{t_0}^t ds |f(x(s), s) - f(y(s), s)| \\ &\leq L \sup_{t \in [t_0, \bar{t}]} \int_{t_0}^t ds |x(s) - y(s)| \leq Ld(x, y) \sup_{t \in [t_0, \bar{t}]} \int_{t_0}^t ds = Ld(x, y)(\bar{t} - t_0). \end{aligned}$$

Poiché  $L(\bar{t} - t_0)$  può rendersi minore di  $\lambda < 1$  a patto di scegliere  $\bar{t} - t_0$  sufficientemente piccolo, la 2) risulta provata e con essa, per il principio di contrazione, il teorema di esistenza.  $\square$

Il Teorema 2.2 stabilisce l'esistenza di soluzioni solo in intervalli sufficientemente piccoli. Inoltre, l'unicità è garantita solo ove sussista la condizione di Lipschitz. Tali restrizioni non possono rimuoversi in generale, come mostrato dai seguenti esempi.

*Esempio 1:* Sia  $n = 1$ ,  $f(x, t) = x^2$ . Una tale  $f$  è Lipschitziana in ogni intervallo limitato. È facile controllare che, per ogni  $t_0 \in \mathbb{R}$  e per ogni  $x_0 \in \mathbb{R}$ ,  $x_0 \neq 0$ , la funzione  $t \rightarrow x(t)$  con  $x(t)$  dato dall'espressione

$$x(t) = -\frac{x_0}{x_0(t - t_0) - 1}, \text{ per } x_0(t - t_0) \neq 1,$$

soddisfa l'equazione differenziale e la condizione iniziale. Si supponga ora, per fissare le idee,  $x_0 > 0$  e si ponga  $t_e = t_0 + x_0^{-1}$ . È chiaro che, al tendere di  $t$  al valore  $t_e$ ,  $x(t) \rightarrow +\infty$ . Il tempo  $t_e$  è detto tempo di esplosione. In tale situazione la soluzione esiste soltanto per  $t \in (t_1, t_e)$  e non può esistere soluzione globale nel futuro, con questo dato iniziale. Tale situazione corrisponde al fatto che  $f$  è Lipschitziana solo in intervalli limitati di  $\mathbb{R}$ , mentre la soluzione esce da qualunque intervallo limitato.

Se invece  $x_0 < 0$ , per ogni  $t > t_0$  l'espressione di  $x(t)$  è ben definita e quindi rappresenta una soluzione globale nel futuro.

Infine, per  $x_0 = 0$ ,  $x(t) = 0$  è soluzione, ed è l'unica corrispondente a tale dato iniziale perché la Lipschitzianità nell'intorno dell'origine è sufficiente a stabilire l'unicità.

*Esempio 2:* Sia  $n = 1$ ,  $f(x, t) = x^{1/2}$ . Una tale  $f$  è Lipschitziana in ogni intervallo (limitato o non limitato) che esclude l'origine, in quanto  $f'(x) = (1/2)x^{-1/2}$ , che diverge all'origine. Per ogni  $x_0 \in \mathbb{R}$ ,  $t \rightarrow x(t)$  definita dalla posizione

$$x(t) = \left( x_0^{1/2} + \frac{1}{2}(t - t_0) \right)^2$$

è soluzione globale dell'equazione e soddisfa la condizione iniziale. Tuttavia, per  $x_0 = 0$  vi è un'altra soluzione e cioè  $x(t) = 0$ . Viene pertanto meno l'unicità nell'intorno dell'origine, ove  $f$  non è Lipschitziana.

Il tempo  $\bar{t}$  entro il quale si è provata l'esistenza di una soluzione non è ottimale. La prossima proposizione, quando applicabile, permette di stabilire l'esistenza globale della soluzione.

Sia  $f$  Lipschitziana in  $\mathbb{R}^n$  per ogni  $t \in (a, +\infty)$ , con costante di Lipschitz limitata uniformemente in  $t$ . La costruzione della soluzione del problema di Cauchy richiede lo studio della seguente successione di soluzioni approssimate:

$$\begin{aligned} x^{(0)}(t) &= x_0, \\ x^{(1)}(t) &= x_0 + \int_{t_0}^t ds f(x^{(0)}(s), s) = x_0 + \int_{t_0}^t ds f(x_0, s), \\ &\dots, \\ x^{(n)}(t) &= x_0 + \int_{t_0}^t ds f(x^{(n-1)}(s), s), \quad n > 1 \\ &\dots \end{aligned}$$

Tale successione è esattamente la stessa che si introduce per costruire il punto fisso della trasformazione  $\mathcal{A}$  introdotta per provare i Teoremi 2.1 e 2.2. Per ottenere l'esistenza globale occorre provare la convergenza di tale successione usando una stima più accurata.

Fissiamo arbitrariamente  $\tau > t_0$ . Per provare la convergenza di tale successione nell'intervallo  $(t_0, \tau)$  basta far vedere che, fissato  $N > 0$  intero ed  $m, n > N$ ,  $\sup_{t \in (t_0, \tau)} |x^{(n)}(t) - x^{(m)}(t)|$  può essere reso arbitrariamente piccolo per  $N$  sufficientemente grande. Decomposto  $x^{(n)}(t) - x^{(m)}(t)$  come

$$x^{(n)}(t) - x^{(m)}(t) = \sum_{k=m+1}^n [x^{(k)}(t) - x^{(k-1)}(t)],$$

per ogni  $t \in (t_0, \tau)$  si ha:

$$\begin{aligned} |x^{(k)}(t) - x^{(k-1)}(t)| &= \left| \int_{t_0}^t ds [f(x^{(k-1)}(s), s) - f(x^{(k-2)}(s), s)] \right| \\ &\leq \int_{t_0}^t ds |f(x^{(k-1)}(s), s) - f(x^{(k-2)}(s), s)| \\ &\leq L \int_{t_0}^t ds |x^{(k-1)}(s) - x^{(k-2)}(s)| \end{aligned}$$

Iterando la precedente disuguaglianza fino a  $k = 1$ , si ottiene pertanto

$$|x^{(k)}(t) - x^{(k-1)}(t)| \leq L^k \int_{t_0}^t ds_1 \int_{t_0}^{s_1} ds_2 \dots \int_{t_0}^{s_{k-1}} ds_k |x^{(1)}(s_k) - x_0|$$

Poiché

$$|x^{(1)}(s_k) - x_0| \leq M(t - t_0),$$

con  $M = \sup_{s \in (t_0, \tau)} |f(x_0, s)|$ , usando l'identità (2.6) si ottiene

$$|x^{(k)}(t) - x^{(k-1)}(t)| \leq \frac{L^k (t - t_0)^k}{k!} M(t - t_0).$$

In conseguenza di ciò, risulta

$$|x^{(n)}(t) - x^{(m)}(t)| \leq \frac{ML^N (\tau - t_0)^{N+1}}{N!} \exp[L(t - \tau)],$$

che tende a 0 per  $N \rightarrow \infty$ . Pertanto la successione  $x^{(n)}$  converge per  $n \rightarrow \infty$  ad un limite  $x$  per ogni  $t \in (t_0, \tau)$ .

Tale limite definisce una soluzione del problema di Cauchy, in quanto

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{t_0}^t ds f(x^{(n)}(s), s) = \int_{t_0}^t ds f(x(s), s)$$

perché la convergenza è uniforme in  $(t_0, \tau)$ . Poiché  $\tau$  è arbitrario, si è così provata la seguente

**Proposizione 2.3:** *Sia  $f$  continua in  $\mathbb{R}^n \times (a, +\infty)$  e Lipshitziana in  $\mathbb{R}^n$  per ogni  $t \in (a, +\infty)$ . Allora, per ogni dato iniziale  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  e per ogni  $t_0 \geq a$  esiste unica la soluzione globale del problema di Cauchy.*

*Esempio 3:* Sia  $n = 1$  ed  $f(x) = \alpha x$ . Allora  $f$  è Lipshitziana in  $\mathbb{R}$  e quindi c'è un'unica soluzione globale del problema di Cauchy. Questa può costruirsi come limite della successione precedente, che nel caso in esame si scrive

$$\begin{aligned} x^{(0)}(t) &= x_0, \\ x^{(1)}(t) &= x_0 + (t - t_0)\alpha x_0, \\ x^{(n)}(t) &= x_0 \left( 1 + \sum_{k=1}^n \frac{\alpha^k (t - t_0)^k}{k!} \right), \end{aligned}$$

il cui limite è

$$x(t) = x_0 \exp[\alpha(t - t_0)].$$

Pertanto il metodo precedente in questo caso particolare fornisce anche la soluzione esplicita del problema. Ciò naturalmente non è vero in generale.

*Osservazione:* In molti casi concreti in Meccanica, non si ha una condizione di Lipshitz globale come quella assunta nelle ipotesi della Proposizione 2.3, ma solo



in un aperto  $A$ . Tuttavia si dispone dell'informazione *a priori* che partendo da un certo dato iniziale, la soluzione non potrà mai uscire dall'insieme  $A$  nel futuro. In tal caso è possibile estendere la soluzione fino ad essere globale nel futuro. Infatti, si definisca

$$\bar{f}(x, t) = \begin{cases} f(x, t), & \text{se } x \in A \\ \text{arbitrariamente se } x \notin A \end{cases}$$

ma in modo tale che  $\bar{f}$  sia Lipshitziana in  $\mathbb{R}^n$  per ogni  $t \in (a, +\infty)$ . Il problema di Cauchy per  $\bar{f}$  ammette pertanto soluzione globale per la Proposizione 2.3. Sia essa  $t \rightarrow \bar{x}(t)$ . Poiché sappiamo che la soluzione non può uscire da  $A$ , risulta

$$\bar{x}(t) = x_0 + \int_0^t ds \bar{f}(\bar{x}(s), s) = x_0 + \int_0^t ds f(\bar{x}(s), s).$$

Pertanto  $t \rightarrow \bar{x}(t)$  risolve anche il problema di Cauchy per  $f$  e quindi si ha una soluzione globale di tale problema.

Per chiarire il senso di questo argomento, si consideri il seguente esempio di una singola equazione del primo ordine:

$$\dot{x} = \phi(x)$$

con  $\phi(x) \geq 0$  e Lipshitziana in qualunque insieme che non contiene il punto  $x = 0$ . Se il dato iniziale è  $x_0 > 0$ , essendo  $\dot{x} > 0$ , è certamente  $x(t) > x_0 > 0$  per ogni  $t > t_0$ . Basta quindi modificare  $\phi$  per  $x < x_0$  in modo che sia Lipshitziana ovunque e concludere l'esistenza globale per  $x_0 > 0$ . Naturalmente, l'argomento non conduce a nessuna conclusione se  $x_0 \leq 0$ .

Esempi concreti di tale situazione verranno presentati successivamente.

### 2.3 Carattere deterministico della Legge di Newton.

Torniamo ora a discutere la Legge di Newton. In accordo con le definizioni precedenti, essa si può interpretare come un sistema di tre equazioni differenziali del secondo ordine:

$$\begin{aligned} \ddot{x}_1 &= \frac{1}{m} f_1(x_1, x_2, x_3, \dot{x}_1, \dot{x}_2, \dot{x}_3, t), \\ \ddot{x}_2 &= \frac{1}{m} f_2(x_1, x_2, x_3, \dot{x}_1, \dot{x}_2, \dot{x}_3, t), \\ \ddot{x}_3 &= \frac{1}{m} f_3(x_1, x_2, x_3, \dot{x}_1, \dot{x}_2, \dot{x}_3, t). \end{aligned} \tag{2.9}$$

Esso può risciversi come un sistema di sei equazioni del primo ordine come segue:

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_1 &= v_1, \\
 \dot{x}_2 &= v_2, \\
 \dot{x}_3 &= v_3, \\
 \dot{v}_1 &= \frac{1}{m} f_1(x_1, x_2, x_3, v_1, v_2, v_3, t), \\
 \dot{v}_2 &= \frac{1}{m} f_2(x_1, x_2, x_3, v_1, v_2, v_3, t), \\
 \dot{v}_3 &= \frac{1}{m} f_3(x_1, x_2, x_3, v_1, v_2, v_3, t).
 \end{aligned} \tag{2.10}$$

Indicato con  $z$  il vettore a sei componenti  $z = (x_1, x_2, x_3, v_1, v_2, v_3)$  e con  $F(z, t)$  la funzione a valori in  $\mathbb{R}^6$

$$F(z, t) = (v_1, v_2, v_3, f_1(x, t), f_2(z, t), f_3(z, t)),$$

il sistema precedente si scrive sinteticamente

$$\dot{z} = F(z, t).$$

Il problema di Cauchy per questo sistema corrisponde a risolvere l'equazione con la condizione iniziale

$$z(t_0) = z_0,$$

e cioè

$$\begin{aligned}
 x_1(t_0) &= x_1^0, & x_2(t_0) &= x_2^0, & x_3(t_0) &= x_3^0, \\
 v_1(t_0) &= v_1^0, & v_2(t_0) &= v_2^0, & v_3(t_0) &= v_3^0.
 \end{aligned}$$

In altri termini, il problema di Cauchy corrisponde ad assegnare la posizione del punto al tempo  $t_0$  e la sua velocità al tempo  $t_0$  rispetto al riferimento inerziale prefissato. I teoremi precedentemente dimostrati implicano che:

**Proposizione 2.4:** *Sia  $A \subset \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$  un aperto. Se la legge di forza  $(x, v, t) \rightarrow f(x, v, t)$  è continua in  $A \times (a, b)$  e Lipschitziana in  $A$  per ogni  $t \in (a, b)$  e  $(x^0, v^0, t_0) \in A \times (a, b)$ , allora esiste uno ed un solo moto  $t \rightarrow x(t)$  che al tempo  $t_0$  occupa la posizione  $x^0$  con velocità  $v^0$  e che soddisfa la Legge di Newton. In particolare, ciò è vero se la forza è derivabile con derivate parziali prime continue e limitate nell'aperto suddetto.*

Il contenuto della Proposizione 2.4 è di solito riferito come il *carattere deterministico della Meccanica Classica*, cioè la circostanza che, note le forze agenti e lo stato del sistema ad un dato istante  $t_0$ , lo stato del sistema ai tempi successivi risulta univocamente determinato.

## 2.4 Continuità rispetto ai dati iniziali.

Torniamo ora al caso generale di un sistema di equazioni differenziali della forma (2.3). In base ai teoremi precedenti, in un intervallo di tempo opportuno, risulta ben definita la seguente applicazione

$$\Phi : (x_0, t) \in X \times (a, b) \rightarrow \Phi(x_0, t) = x(t)$$

con  $t \rightarrow x(t)$  l'unica soluzione del problema ai valori iniziali (2.3). Nel seguito l'intervallo  $(a, b)$  denoterà sempre un intervallo di valori di  $t$  per il quale il teorema di esistenza ed unicità assicura la buona definizione di  $\Phi$ .

Quando il sistema considerato corrisponde ad un problema di Meccanica, è ragionevole aspettarsi che piccoli spostamenti della condizione iniziale corrispondano a piccoli cambiamenti della soluzione. Pertanto una proprietà naturale da richiedere per tale problema è la *continuità rispetto ai dati iniziali*, cioè la proprietà che, se  $x'_0 \rightarrow x_0$ , allora  $\Phi(x'_0, t) \rightarrow \Phi(x_0, t)$  per  $t \in (a, b)$ . Il teorema successivo mostrerà che questa proprietà è verificata nelle stesse ipotesi dell'esistenza, se la convergenza è intesa a tempi fissati. Condizioni di convergenza più forti e più significative dal punto di vista fisico saranno discusse in seguito.

**Teorema 2.5:** *Nelle ipotesi dei teoremi precedenti, si ha la dipendenza continua dai dati iniziali nel senso che per ogni  $t \in (t_1, t_2)$*

$$\lim_{x'_0 \rightarrow x_0} \Phi(x'_0, t) = \Phi(x_0, t).$$

Più esplicitamente, risulta

$$|\Phi(x'_0, t) - \Phi(x_0, t)| \leq |x'_0 - x_0| \exp[L(t - t_0)].$$

Dim. Poiché risulta

$$\Phi(x_0, t) = x_0 + \int_{t_0}^t ds f(\Phi(x_0, s), s)$$

e

$$\Phi(x'_0, t) = x'_0 + \int_{t_0}^t ds f(\Phi(x'_0, s), s),$$

sottraendo membro a membro si ha:

$$\begin{aligned} |\Phi(x_0, t) - \Phi(x'_0, t)| &\leq |x_0 - x'_0| + \int_{t_0}^t ds |f(\Phi(x_0, s), s) - f(\Phi(x'_0, s), s)| \\ &\leq |x_0 - x'_0| + L \int_{t_0}^t ds |\Phi(x_0, s) - \Phi(x'_0, s)|. \end{aligned} \tag{2.11}$$

Pertanto il Teorema 2.5 sarà provato quando si sarà dimostrato il seguente

**Proposizione 2.6 (Lemma di Gronwall esponenziale):** *Sia  $t \rightarrow u(t)$  una funzione definita nell'intervallo chiuso e limitato  $[a, b]$ , a valori non negativi ed ivi limitata. Si supponga inoltre che per ogni  $t \in [a, b]$  valga la disuguaglianza*

$$u(t) \leq c + d \int_a^t ds u(s), \quad (2.12)$$

con  $c$  e  $d$  numeri reali non negativi. Allora vale anche la disuguaglianza

$$u(t) \leq c \exp[d(b-a)] \quad \text{per ogni } t \in [a, b] \quad (2.13)$$

Infatti, posto  $u(t) = |\Phi(x_0, t) - \Phi(x'_0, t)|$ ,  $c = |x_0 - x'_0|$ ,  $d = L$ , la (2.11) equivale alla (2.12) e pertanto, dalla Proposizione 2.6 segue che

$$|\Phi(x_0, t) - \Phi(x'_0, t)| \leq |x'_0 - x_0| \exp[L(t - t_0)],$$

da cui segue il Teorema 2.5. Si noti che la convergenza è tanto peggiore quanto più è grande l'intervallo  $(t_0, t)$ .  $\square$

Dimostrazione della Proposizione 2.6. È sufficiente iterare la (2.12):

$$\begin{aligned} u(t) &\leq c + d \int_a^t ds u(s) \leq c + (t-a)dc + \int_a^t ds \int_a^s ds' u(s') \\ &\leq \dots \\ &\leq c \left( 1 + \sum_{n=1}^N \frac{d^n (t-a)^n}{n!} \right) + d^{N+1} \int_a^t ds_1 \int_a^{s_1} ds_2 \dots \int_a^{s_N} ds_{N+1} u(s_{N+1}) \end{aligned}$$

Detto  $M$  il massimo di  $u$  in  $[a, b]$ , per ogni  $N > 0$  si ha pertanto

$$u(t) \leq c \exp[d(b-a)] + \frac{Md^{N+1}(b-a)^{N+1}}{(N+1)!}.$$

Passando al limite  $N \rightarrow \infty$  si ottiene la (2.13).  $\square$

È spesso utile disporre di una formulazione più generale del Lemma 2.6. Questa è rappresentata dalla seguente

**Proposizione 2.7 (Lemma di Gronwall):** *Sia  $t \rightarrow u(t)$  una funzione definita nell'intervallo chiuso e limitato  $[a, b]$ , a valori non negativi ed ivi limitata. Si supponga inoltre che per ogni  $t \in [a, b]$  valga la disuguaglianza*

$$u(t) \leq c + \int_a^t ds \varphi[u(s)], \quad (2.14)$$

con  $\varphi$  funzione da  $\mathbb{R}^+$  in sé, continua, monotona non decrescente. Si supponga inoltre che l'equazione differenziale

$$\dot{y} = \varphi(y) \quad (2.15)$$

ammetta una ed una sola soluzione per il problema di Cauchy in  $[a, b]$ , e sia  $\eta(y_0, t)$  la soluzione tale che  $\eta(y_0, a) = y_0$ . Si assuma infine che  $\eta(y_0, t)$  dipenda con continuità dal dato iniziale. Allora risulta

$$u(t) \leq \eta(c, t) \quad (2.16).$$

*Osservazioni:* Poiché non si assume che  $\varphi$  sia Lipshitziana, occorre assumere esplicitamente la dipendenza continua dal dato iniziale, che è invece conseguenza del Teorema 2.5 se  $\varphi$  è Lipshitziana. La Proposizione 2.7 è utile quando è possibile risolvere esplicitamente l'equazione differenziale (2.15). Ciò avviene nel caso considerato nella Proposizione 2.6, ma anche in altri casi di interesse. Si noti che nel caso  $\varphi(y) = d y$  risulta  $\eta(y_0, t) = y_0 \exp[d(t - a)]$ , che è ovviamente continua rispetto al dato iniziale. Pertanto la Proposizione 2.6 si ottiene subito come conseguenza della Proposizione 2.7. Si osservi infine che tanto nella Proposizione 2.6 quanto nella Proposizione 2.7, non si assume la continuità di  $t \rightarrow u(t)$ .

Dim. Si ha

$$\eta(y_0, t) = y_0 + \int_a^t ds \varphi[\eta(y_0, s)].$$

Sia  $y_0 > c$  e  $\bar{t}$  tale che  $u(t) < \eta(y_0, t)$  per  $t \in [a, \bar{t}]$ . Risulta  $\bar{t} > a$  in quanto, se tale condizione fosse violata in tutto un intervallo  $(a, \tau)$ , in esso risulterebbe  $\eta(y_0, t) < c + \int_a^t \varphi[u(s)] ds$ . Poiché  $u$  è supposta limitata, passando al limite  $t \rightarrow a$  si avrebbe  $y_0 < c$  contro l'ipotesi.

Per provare la Proposizione basta far vedere che  $\bar{t} = b$ . Infatti, in tal caso, la continuità di  $\eta(y_0, t)$  rispetto ad  $y_0$  implica la (2.16). Supponiamo pertanto che  $\bar{t} < b$ . Avremo

$$\eta(y_0, \bar{t}) \leq u(\bar{t}) \leq c + \int_a^{\bar{t}} ds \varphi[u(s)]$$

Poiché per ogni  $s < \bar{t}$  risulta  $u(s) < \eta(y_0, s)$ , si ha quindi

$$\eta(y_0, \bar{t}) \leq c + \int_a^{\bar{t}} ds \varphi[\eta(y_0, s)] = c + \eta(y_0, \bar{t}) - y_0 < \eta(y_0, \bar{t}),$$

poiché  $y_0 > c$ . La disuguaglianza così ottenuta è assurda e questo conclude la dimostrazione.  $\square$

## 2.5 Differenziabilità rispetto ai dati iniziali.

Quando la funzione  $f$  che rappresenta il secondo membro del sistema di equazioni differenziali ha maggiore regolarità che non la sola Lipshitzianità, la dipendenza dal dato iniziale è più regolare che semplicemente continua. Se la  $f$  ammette derivate parziali limitate e continue nell'insieme di definizione, allora la dipendenza dal dato iniziale è differenziabile. Inoltre la soluzione è derivabile due volte rispetto al tempo. Questo è il contenuto della

**Proposizione 2.8** *Sia  $X \subset \mathbb{R}^n$  un aperto ed  $f : X \times (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^n$  dotata di derivate parziali prime limitate e continue in  $X \times (a, b)$ . In tal caso la funzione  $(x, t) \rightarrow \Phi(x, t)$  che rappresenta la soluzione del problema di Cauchy con condizione iniziale  $\Phi(x, a) = x$  è differenziabile rispetto ad  $x$  e la matrice  $D\Phi(t)$  avente per elementi le derivate parziali di  $\Phi$  rispetto alle  $x_i$ , è soluzione del sistema di equazioni differenziali lineari*

$$(D\Phi(t))_{i,j} = \delta_{i,j} + \int_a^t ds \sum_{k=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial x_k}(\Phi(x, s), s)(D\Phi(s))_{k,j}. \quad (2.17)$$

Inoltre  $\tau \rightarrow \Phi(x, t)$  ammette derivata seconda continua per  $t \in (a, b)$ .

Dim. L'equazione (2.17) segue differenziando formalmente la relazione

$$\Phi(x, t) = x + \int_a^t ds f(\Phi(x, s), s) \quad (2.18)$$

rispetto alla variabile  $x$ . Per provare la prima parte del teorema, siano  $x_i(t) = \Phi_i(x, t)$  ed  $y_j(t) = \Phi(x + he_j, t)$ , per  $h$  sufficientemente piccolo e sia

$$\Delta_{i,j}(t) = \frac{y_{i,j}(t) - x_i(t)}{h} - (D\Phi(t))_{i,j},$$

con  $(D\Phi(t))_{i,j}$  soluzione di (2.17). Si noti che, detto  $L$  il massimo delle derivate di  $f$  in  $X \times (a, b)$ , risulta

$$|(D\Phi(t))_{i,j}| \leq \exp[L(b-a)] \quad (2.19)$$

per ogni  $t \in (a, b)$ . Per il teorema di Lagrange

$$\begin{aligned} y_{i,j}(t) - x_i(t) &= h\delta_{i,j} + \int_a^t ds [f_i(y_j(s), s) - f_i(x(s), s)] \\ &= h\delta_{i,j} + \int_a^t ds \sum_{k=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial x_k}(\xi, s)[y_{k,j}(s) - x_k(s)], \end{aligned}$$

dove  $\xi = \lambda y(s) + (1-\lambda)x(s)$ , con  $\lambda \in (0, 1)$  dipendente da  $s$ ,  $x(s)$  ed  $y(s)$ . Pertanto, aggiungendo e sottraendo

$$\begin{aligned} & \frac{\partial f_i}{\partial x_k}(\xi, s)(D\Phi(s))_{k,j}, \\ \Delta_{i,j}(t) = & \int_a^t ds \sum_{k=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial x_k}(\xi, s)\Delta_{k,j}(s) + \\ & + \int_a^t ds \sum_{k=1}^n \left[ \frac{\partial f_i}{\partial x_k}(\xi, s) - \frac{\partial f_i}{\partial x_k}(x(s), s) \right] (D\Phi(s))_{k,j} \end{aligned}$$

Detto

$$\alpha(h) = \sup_{t \in (a,b)} \sup_{i,j \in \{1, \dots, n\}} \left| \int_a^t ds \sum_{k=1}^n \left[ \frac{\partial f_i}{\partial x_k}(\xi, s) - \frac{\partial f_i}{\partial x_k}(x(s), s) \right] (D\Phi(s))_{k,j} \right|,$$

per il Lemma di Gronwall risulta

$$|\Delta_{i,j}(t)| \leq \alpha(h) \exp[nL(b-a)].$$

D'altra parte, dalla definizione di  $\xi$  segue che, qualunque siano  $h$ ,  $s$ , risulta

$$|\xi - x(s)| = \lambda|y(s) - x(s)| \leq |y(s) - x(s)|.$$

La continuità di  $\Phi(x, t)$  rispetto al dato iniziale assicura quindi che per ogni  $t$  fissato,  $\xi$  converge a  $x(s)$  uniformemente in  $(a, t)$  quando  $h$  tende a 0. Ne consegue che  $\alpha(h)$  tende a 0, poiché vale la (2.19) e quindi la prima parte del teorema è dimostrata.

Per provare che  $\Phi(x, t)$  ammette derivata seconda rispetto a  $t$ , basta notare che la derivata prima  $\dot{\Phi}(x, t)$  soddisfa l'equazione differenziale e quindi

$$\dot{\dot{\Phi}}(x, t) = f(\Phi(x, t), t).$$

Pertanto, per  $h$  sufficientemente piccolo, per il teorema di Lagrange

$$\begin{aligned} & \frac{\dot{\Phi}(x, t+h) - \dot{\Phi}(x, t)}{h} \\ &= \frac{f(\Phi(x, t+h), t+h) - f(\Phi(x, t+h), t)}{h} + \frac{f(\Phi(x, t+h), t) - f(\Phi(x, t), t)}{h} \\ &= \frac{\partial f}{\partial t}(\Phi(x, t+h), \tau) + \sum_{k=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_k}(\xi, t) \frac{\Phi(x, t+h) - \Phi(x, t)}{h}, \end{aligned}$$

con  $\tau \in (t, t+h)$  e  $\xi = \lambda\Phi(x, t+h) + (1-\lambda)\Phi(x, t)$ . La convergenza del rapporto incrementale segue pertanto dallo stesso argomento precedente e il suo limite risulta dato da

$$\frac{\partial f}{\partial t}(\Phi(x, t), t) + \sum_{k=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_k}(\Phi(x, t), t) f_k(\Phi(x, t), t)$$

che è finita per ogni  $(x, t) \in X \times (a, b)$ .  $\square$

*Osservazione 1:* In modo analogo si prova ad esempio che, se  $f$  è infinitamente differenziabile in  $X \times (a, b)$ , tale è anche la soluzione, almeno fino a che esiste unica.

*Osservazione 2:* Se la funzione  $(x, t) \rightarrow f(x, t)$  ha anche le derivate seconde limitate, l'equazione (2.17) implica che, per  $t \leq T$ ,

$$(D\Phi(t))_{i,j} = \delta_{i,j} + t \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x, 0) + O(t^2). \quad (2.20)$$

Infatti, dall'applicazione del Lemma di Gronwall all'equazione (2.17) segue che esiste  $C > 0$  tale che per ogni  $t \leq T$  risulta

$$\|D\Phi(t)\| \leq C.$$

Iterando la (2.17) una volta ed applicando la precedente stima si ottiene allora

$$\left| (D\Phi(t))_{i,j} - \delta_{i,j} - \int_0^t ds \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\Phi(x, s), s) \right| \leq CL^2 t^2.$$

Infine, sostituendo  $(\Phi(x, s), s)$  con  $(x, 0)$  in questa stima, grazie alla limitatezza delle derivate seconde, si commette un errore proporzionale ad  $s$ , che integrato fornisce ancora un termine  $O(t^2)$  e quindi la (2.20).

## 2.6 Metodo delle differenze finite.

Concludiamo questo capitolo sulle equazioni differenziali illustrando brevemente un algoritmo per il calcolo approssimato (mediante un computer) della soluzione del problema ai valori iniziali. Per semplicità di presentazione si supponrà che il secondo membro del sistema di equazioni differenziali non dipenda dal tempo. Si porrà quindi, senza perdita di generalità,  $t_0 = 0$ . Si assumerà inoltre, per evitare complicazioni, che  $f$  e le sue derivate parziali prime siano limitate in  $\mathbb{R}^n$  da  $M$  ed  $L$  rispettivamente. Il metodo è basato sulla seguente interpretazione geometrica del problema ai valori iniziali. L'assegnazione della funzione  $f$  corrisponde a fissare un campo vettoriale su  $\mathbb{R}^n$ . Ogni soluzione del sistema di equazioni differenziali può interpretarsi come la forma parametrica di una curva  $t \in (a, b) \rightarrow x(t) \in \mathbb{R}^n$ ,



la cui tangente in ciascun suo punto coincide con il campo vettoriale nello stesso punto. Pertanto il problema ai valori iniziali può riformularsi come segue: assegnato il campo vettoriale  $x \rightarrow f(x)$  su  $\mathbb{R}^n$  ed un punto  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  arbitrario, determinare la curva passante per  $x_0$  al tempo  $t = 0$  e tangente al campo vettoriale  $f$  in ogni suo punto.

Questa riformulazione suggerisce anche un metodo per calcolare la soluzione stessa. Fissato  $t > 0$ , vogliamo valutare  $x(t)$ . È chiaro che se  $t$  è molto piccolo, la curva può confondersi con la retta tangente e una valutazione approssimata di  $x(t)$  è fornita da

$$x(t) \approx x_0 + tf(x_0).$$

Tale approssimazione non è però buona se  $t$  non è realmente molto piccolo. Quando  $t$  è finito, si può ottenere una approssimazione migliore dividendo l'intervallo  $(0, t)$  in  $N$  tratti uguali di lunghezza  $h = t/N$ . Si ponga  $t_k = kh$ , per  $k = 0, \dots, N$ . Se  $N$  è sufficientemente grande, una valutazione approssimata di  $x(t_1)$  è data da

$$x(t_1) \approx x_1 \equiv x_0 + hf(x_0).$$

Il procedimento potrà poi essere ripetuto a partire dal punto  $x_1$  e successivamente dal punto  $x_2$ , definendo iterativamente,

$$\begin{aligned} x_k &= x_{k-1} + hf(x_{k-1}), & k = 1, \dots, N \\ x_0 &= x(0), \end{aligned} \tag{2.21}$$

Al termine di tale procedimento si ottiene una valutazione di  $x(t) \approx x_N$ . Quindi il procedimento consiste nel costruire, in luogo della curva  $t \rightarrow x(t)$  soluzione del sistema differenziale, la poligonale con  $N - 1$  lati, il  $k$ -mo dei quali essendo il segmento che parte da  $x_{k-1}$ , parallelo al campo vettoriale valutato in  $x_{k-1}$  di lunghezza pari a  $h|f(x_{k-1})|$ . Per tale ragione il metodo è anche detto *metodo delle tangenti*. È intuitivamente chiaro che la poligonale così costruita approssima sempre meglio la soluzione al tendere di  $N$  all'infinito. Tuttavia il procedimento implica ad ogni passo un errore, dovuto al fatto che  $x_1$  è solo una valutazione approssimata di  $x(t_1)$ , che si propaga nella valutazione di  $x_2$ , che approssima quindi peggio  $x(t_2)$ . Non è ovvio che l'accumulo degli errori non sia tale da produrre per  $x_N$  un risultato completamente diverso da  $x(t)$ . Tale questione è risolta dalla proposizione seguente, che fornisce una stima dell'errore.

**Proposizione 2.9.** *Se  $x \rightarrow f(x)$  è tale che*

$$\begin{aligned} \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |f(x)| &\leq M, \\ \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \sum_{i,j=1}^n \left| \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(x) \right| &\leq L, \end{aligned}$$

allora

$$|x(t) - x_N| \leq \frac{Mt}{2N} (e^{Lt} - 1).$$

*Osservazioni:*

1) Le ipotesi fatte sono ampiamente sovrabbondanti. Un risultato piú generale può facilmente ottenersi con argomenti simili a quelli precedentemente esposti.

2) La stima ottenuta cresce esponenzialmente con il tempo  $t$ , sicché, prefissato un errore  $\epsilon$ , il numero  $N$  da scegliere per rendere l'errore piú piccolo di  $\epsilon$  diviene rapidamente grande. È chiaro che a fini pratici non si potrà utilizzare tale metodo per il calcolo di  $x(t)$  su tempi lunghi, in quanto il tempo di calcolo diverrebbe proibitivo. Si può tuttavia modificare l'algoritmo, senza alterarne la sostanza e migliorare notevolmente l'errore. Si rinvia ai testi di Calcolo Numerico per una discussione piú approfondita di tale importante problema.

Dim. Sia  $d_k = x(t_k) - x_k$ . Poiché si può scrivere

$$x(t_k) = x(t_{k-1}) + \int_0^h ds f(x(t_{k-1} + s))$$

e

$$x_k = x_{k-1} + hf(x_{k-1}) = x_{k-1} + \int_0^h ds f(x_{k-1}),$$

si ha

$$d_k = d_{k-1} + \int_0^h ds [f(x(t_{k-1} + s)) - f(x_{k-1})].$$

Poiché  $f$  è Lipshitziana, si ha

$$\begin{aligned} |d_k| &\leq |d_{k-1}| + L \int_0^h ds |x(t_{k-1} + s) - x_{k-1}| \\ &\leq |d_{k-1}| + L \int_0^h ds |x(t_{k-1} + s) - x(t_{k-1})| + L \int_0^h ds |x(t_{k-1}) - x_{k-1}| \\ &= |d_{k-1}|(1 + Lh) + L \int_0^h ds |x(t_{k-1} + s) - x(t_{k-1})|. \end{aligned}$$

D'altra parte

$$\begin{aligned} |x(t_{k-1} + s) - x(t_{k-1})| &= \left| \int_0^s ds' f'(x(t_{k-1} + s')) \right| \\ &\leq \int_0^s ds' |f'(x(t_{k-1} + s'))| \leq Ms. \end{aligned}$$

Pertanto

$$|d_k| \leq |d_{k-1}|(1 + Lh) + \frac{MLh^2}{2}.$$

Iterando tale disuguaglianza si ottiene così

$$\begin{aligned} |d_k| &\leq \frac{MLh^2}{2} \{1 + (1 + Lh) + \dots + (1 + Lh)^{k-1}\} \\ &= \frac{MLh^2}{2} \frac{(1 + Lh)^k - 1}{1 + Lh - 1} = \frac{MLh^2}{2} ((1 + Lh)^k - 1). \end{aligned}$$

Quindi, ricordando che  $t = Nh$ , si ha

$$|x(t) - x_N| \leq \frac{Mt}{2N} \left( \left(1 + \frac{Lt}{N}\right)^N - 1 \right) \leq \frac{Mt}{2N} (e^{Lt} - 1).$$

□

*Osservazione:* La dimostrazione precedente fa esplicito uso dell'esistenza di una soluzione  $t \rightarrow x(t)$ . Tuttavia l'argomento precedente non cambia essenzialmente se in luogo della soluzione si usa la poligonale costruita in corrispondenza di un altro valore di  $N$ . In tal modo si dimostra che la successione di poligonali, al crescere di  $N$  è una successione di Cauchy rispetto alla distanza del superiore. Il limite è soluzione del sistema differenziale e questo argomento fornisce un diverso metodo di dimostrazione del teorema di esistenza.

### 3. Integrali primi, conservazione dell'energia.

#### 3.1 Integrali primi di un sistema differenziale.

Dato il sistema di  $n$  equazioni differenziali

$$\dot{x} = f(x, t) \quad (3.1)$$

con  $f$  soddisfacente le condizioni atte ad assicurare l'esistenza e l'unicità della soluzione, sia  $G(x, t)$  una funzione a valori reali differenziabile nel suo insieme di definizione. Si dice che  $G$  è un **integrale primo** per il sistema (3.1) se per ogni soluzione  $t \rightarrow x(t)$  di tale sistema, la funzione del tempo  $t \rightarrow g(t)$  con

$$g(t) = G(x(t), t)$$

è indipendente da  $t$ , e cioè se risulta

$$\frac{d}{dt}g(t) \equiv \frac{\partial}{\partial t}G(x(t), t) + \dot{x}(t) \cdot \nabla G(x(t), t) = \frac{\partial}{\partial t}G(x(t), t) + f(x(t), t) \cdot \nabla G(x(t), t) = 0$$

In particolare, se  $G$  non dipende dal tempo, essa è un integrale primo se e solo se  $\nabla G$  è ortogonale ad  $f$  lungo le soluzioni. La conoscenza di integrali primi per il sistema rappresenta spesso una grande semplificazione nella risoluzione del problema ai valori iniziali. Questo verrà illustrato da diversi esempi meccanici, il più rilevante dei quali è la conservazione dell'energia.

#### 3.2 Conservazione dell'energia meccanica.

Consideriamo ora un sistema meccanico soggetto all'azione di una legge di forza regolare:  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ ;

$$m\ddot{x} = f(x, \dot{x}, t) \quad (3.2).$$

Consideriamo il caso di forze *posizionali*, cioè supponiamo che  $f$  dipenda solo da  $x$  e non da  $\dot{x}$  e  $t$ .

Moltiplicando la (3.2) scalarmente per  $\dot{x}$  e ricordando che

$$\frac{d}{dt} \frac{\dot{x}^2}{2} = \dot{x} \cdot \ddot{x},$$

si ha

$$m \frac{d}{dt} \frac{\dot{x}^2}{2} = \dot{x} \cdot f(x).$$

Nel caso  $n = 1$  il secondo membro di tale relazione può scriversi sempre come

$$\dot{x} \cdot f(x) = -\frac{d}{dt}V(x(t)).$$

Basta infatti scegliere per  $V$  una primitiva di  $-f$ . Quando ciò si verifica, la quantità

$$m\frac{\dot{x}(t)^2}{2} + V(x(t))$$

non varia nel tempo e quindi  $mv^2/2 + V(x)$  è un integrale primo per le equazioni del moto. Se  $n > 1$  una tale affermazione non può essere fatta così in generale. Una forza posizionale  $f$  si dice **conservativa** se esiste una funzione reale  $V$  definita e differenziabile in  $\mathbb{R}^n$ , tale che

$$f(x) = -\nabla V(x) \quad (3.3).$$

La funzione  $V$  si dice **energia potenziale** per la legge di forza  $f$ . Naturalmente, ogni altra funzione che differisca da  $V$  per una costante è energia potenziale per  $f$  e quindi l'energia potenziale è definita a meno di una costante additiva. Quando la legge di forza è conservativa, la quantità

$$E(x, v) = m\frac{v^2}{2} + V(x) \quad (3.4)$$

è un integrale primo, nel senso che

$$\frac{d}{dt}E(x(t), \dot{x}(t)) = 0, \quad (3.5)$$

e quindi  $E(x(t), \dot{x}(t)) = E(x(t_0), \dot{x}(t_0))$ . La quantità  $E$  è denominata **energia** del punto materiale e l'equazione (3.5) esprime la **legge di conservazione dell'energia**. La quantità  $T = mv^2/2$  è detta **energia cinetica**.

La condizione (3.3) rappresenta una effettiva restrizione alla legge di forza. Infatti si possono costruire facilmente controesempi a tale condizione. Essi si ottengono mostrando che è violata la seguente condizione necessaria per la (3.3):

**Proposizione 3.1:** *Se  $f$  ammette un'energia potenziale differenziabile due volte, allora vale la condizione*

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j} = \frac{\partial f_j}{\partial x_i}, \quad i \neq j.$$

Dim. La dimostrazione è un'immediata conseguenza del teorema di Schwartz sull'ordine di derivazione:

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j} = -\frac{\partial^2 V}{\partial x_j \partial x_i} = -\frac{\partial^2 V}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial f_j}{\partial x_i}. \quad \square$$

Si consideri ad esempio, per  $n = 2$ , una forza  $f$  data da

$$f_1 = x_2, \quad f_2 = -x_1$$

Risulta

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_2} = 1 = -\frac{\partial f_2}{\partial x_1},$$

e quindi tale forza non è conservativa. Tuttavia la condizione della Proposizione 3.1 non è in generale sufficiente, come mostrato dal seguente esempio, sempre con  $n = 2$ :

$$f_1 = \frac{x_2}{|x|^2}, \quad f_2 = -\frac{x_1}{|x|^2},$$

per il quale

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_2} = \frac{\partial f_2}{\partial x_1} = \frac{x_1^2 - x_2^2}{|x|^4}.$$

Ciononostante, tale legge di forza non è conservativa, in quanto se si considera la curva  $\gamma$  di equazione  $|x|^2 = 1$ , orientata in senso levogiro, si ha l'integrale circuitale

$$\int_{\gamma} f \cdot dl = 2\pi,$$

in violazione della seguente altra condizione necessaria e sufficiente perché una legge di forza sia conservativa:

**Proposizione 3.2:** *Condizione necessaria e sufficiente perché  $f$  sia una legge di forza conservativa è che, per ogni curva chiusa  $\gamma$  nel dominio di definizione di  $f$  risulti*

$$\int_{\gamma} f \cdot dl = 0. \quad (3.6)$$

Dim. Infatti detta  $t \rightarrow \gamma(t)$  l'equazione parametrica della curva, dall'intervallo  $[a, b]$  in  $\mathbb{R}^n$  con  $\gamma(a) = \gamma(b)$ ,

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} f \cdot dl &= \int_a^b dt f(\gamma(t)) \cdot \dot{\gamma}(t) = - \int_a^b dt \nabla V(\gamma(t)) \cdot \dot{\gamma}(t) = - \int_a^b dt \frac{d}{dt} V(\gamma(t)) \\ &= V(\gamma(a)) - V(\gamma(b)) = 0. \end{aligned}$$

Viceversa, se è verificata la (3.6) per ogni curva  $\gamma$ , fissato arbitrariamente un punto  $x_*$ , sia  $\gamma_x$  una qualsiasi curva che congiunge  $x_*$  con  $x$  e si ponga

$$V(x) = - \int_{\gamma_x} f \cdot dl.$$

La funzione  $V$  è ben definita perché non dipende dalla scelta della curva  $\gamma_x$ : siano  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$  due qualsiasi curve che congiungono  $x_*$  con  $x$ . Denotata con  $-\gamma_2$  la curva che differisce da  $\gamma_2$  per il solo orientamento, la curva  $\gamma_1 \cup (-\gamma_2)$  è chiusa e pertanto

$$\int_{\gamma_1 \cup (-\gamma_2)} f \cdot dl = 0$$

In conseguenza

$$\int_{\gamma_1} f \cdot dl = - \int_{-\gamma_2} f \cdot dl = \int_{\gamma_2} f \cdot dl,$$

che mostra l'affermata indipendenza dalla curva. Poiché si controlla immediatamente che  $\nabla V = -f$ , ciò prova che  $f$  è conservativa.  $\square$

Un esempio di legge di forza conservativa è invece fornito dalla *forza centrale*. Con ciò si intende una forza che in ogni punto  $x \in \mathbb{R}^n$  è diretta verso un punto prefissato, detto *centro* che si può assumere coincidente con l'origine senza perdita di generalità, e il cui modulo è una funzione della sola distanza dal centro. Nel nostro contesto ciò equivale a supporre che esista una funzione  $\phi$  da  $\mathbb{R}^+$  a valori reali, tale che, per ogni  $x \neq 0$  si abbia

$$f(x) = \phi(|x|) \frac{x}{|x|}. \quad (3.7)$$

Detta  $\Phi(r)$  una primitiva di  $-\phi(r)$ , la funzione

$$V(x) = \Phi(|x|)$$

è un'energia potenziale per  $f$ . Difatti,

$$-\nabla V(x) = -\Phi'(|x|) \nabla |x| = \phi(|x|) \frac{x}{|x|} = f(x),$$

in quanto

$$\frac{\partial |x|}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} (x \cdot x)^{1/2} = x_i (x \cdot x)^{-1/2} = \frac{x_i}{|x|}.$$

## 4. Problemi unidimensionali.

### 4.1 Riduzione a una dimensione

Si supponga la legge di forza  $f$  *unidimensionale* nel senso che essa è diretta in ogni punto secondo una direzione fissa che possiamo assumere coincidente con l'asse  $e_1$  e dipendente da  $x$  ed  $\dot{x}$  solo tramite le rispettive componenti nella direzione dell'asse  $e_1$ . Cioè

$$f(x, \dot{x}, t) = e_1 f_1(x_1, \dot{x}_1, t).$$

In tali condizioni, le equazioni del moto divengono

$$\begin{aligned} m\ddot{x}_1 &= f_1(x_1, \dot{x}_1, t), \\ m\ddot{x}_2 &= 0, \\ m\ddot{x}_3 &= 0 \end{aligned}$$

e quindi il moto nelle direzioni  $e_2$  ed  $e_3$  è di integrazione immediata e non influenza il moto nella direzione  $e_1$ . Con un'opportuna scelta del riferimento inerziale, ci si potrà sempre ricondurre al caso  $x_2(0) = x_3(0) = 0$ . Assumendo inoltre  $\dot{x}_2(0) = \dot{x}_3(0) = 0$ , per eliminare una parte banale della soluzione, l'unica equazione significativa resta la prima. Sopprimendo l'indice 1 per semplificare la notazione, siamo quindi ricondotti allo studio del problema *unidimensionale*

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= f(x, \dot{x}, t), \\ x(0) &= x_0, \\ \dot{x}(0) &= v_0, \end{aligned} \tag{4.1}$$

con  $x, x_0, v_0 \in \mathbb{R}$ .

Lo stesso problema emerge in molti altri contesti sia in Meccanica che in altri settori della Fisica. In Meccanica quasi tutti i problemi *risolubili* sono quelli riconducibili al problema (4.1). La sua buona posizione è conseguenza della discussione generale. In questo caso particolare tuttavia ci proponiamo di fornire una descrizione più dettagliata della soluzione e quando possibile, di pervenire alla soluzione esplicita. Ciò risulterà possibile solo in situazioni molto particolari, mentre spesso sarà possibile ottenere significative proprietà *qualitative* della soluzione.

Una notevole semplificazione del problema (4.1) si ha quando si considera il caso di forza puramente *posizionale*. Infatti, in questo caso, come già osservato, la legge di forza risulta conservativa, potendosi sempre determinare, per ogni funzione  $x \rightarrow f(x)$  continua, una funzione  $x \rightarrow V(x)$  tale che

$$V'(x) = -f(x).$$



In tal caso il problema (4.1) diviene

$$\begin{aligned} m \ddot{x} &= -V'(x), \\ x(0) &= x_0, \\ \dot{x}(0) &= v_0. \end{aligned} \tag{4.2}$$

e la quantità

$$E(x, \dot{x}) = m \frac{\dot{x}^2}{2} + V(x), \tag{4.3}$$

detta energia totale del sistema (mentre  $V(x)$  si dice energia potenziale e  $T = m\dot{x}^2/2$  si dice energia cinetica) è conservata durante ogni moto:

$$\frac{d}{dt} E(x(t), \dot{x}(t)) = 0.$$

L'uso della conservazione dell'energia consente di pervenire ad una descrizione molto dettagliata del moto, anche quando non è possibile fornire una soluzione esplicita.

Fissato il dato iniziale, si può calcolare il valore dell'energia al tempo  $t = t_0$  e senza perdita di generalità assumeremo  $t_0 = 0$ , visto che la legge di forza non dipende da  $t$ . Usiamo la notazione  $E(x_0, v_0) = E$ . La conservazione dell'energia assicura che per ogni  $t$  risulta  $E(x(t), \dot{x}(t)) = E$ . Più esplicitamente,

$$m \frac{\dot{x}(t)^2}{2} + V(x(t)) = E.$$

Da questa equazione può dedursi

$$|\dot{x}(t)| = \sqrt{\frac{2[E - V(x(t))]}{m}}, \tag{4.4}$$

che fissa il valore di  $\dot{x}$  ad ogni tempo, a meno del segno. Tale segno può facilmente determinarsi come segue: se  $v_0 = 0$ , il segno di  $\dot{x}(t)$  per  $t > 0$  ma sufficientemente prossimo a 0 è determinato dal segno di  $f(x_0)$ . Se  $f(x_0) > 0$ , allora  $\dot{x}(t)$  deve crescere e quindi  $\dot{x}(t)$  sarà positiva per  $t > 0$ , fino al primo istante  $t_1$  per il quale risulti  $\dot{x}(t_1) = 0$ . In  $t_1$  si ripete la procedura con  $x_0$  sostituito da  $x(t_1)$ . In modo analogo si procede se  $f(x_0) < 0$ . Se  $v_0 \neq 0$ , per tempi successivi a  $t = 0$ , ma sufficientemente prossimi a 0, per continuità il segno di  $\dot{x}(t)$  coincide con quello iniziale di  $v_0$ . Ciò resta valido fino al primo istante  $t_1$  per il quale risulti  $\dot{x}(t_1) = 0$ . Per tempi successivi si procede come nel caso  $v_0 = 0$ . L'unico caso in cui questo procedimento fallisce è quello corrispondente a  $v_0 = 0$  e  $f(x_0) = 0$ . Questo caso è speciale e verrà discusso in seguito.

Osserviamo che, grazie alla (4.4) si può concludere che la soluzione del problema (4.2) esiste globalmente nel tempo se il potenziale  $V$  è inferiormente limitato. Sia infatti

$$\inf_{x \in \mathbb{R}} V(x) = -B > -\infty.$$

Allora

$$|\dot{x}| \leq \sqrt{\frac{2}{m}(E + B)}$$

e quindi, per ogni tempo finito, il moto avviene in un intervallo limitato dove la forza è Lipschitziana.

**4.2 Analisi qualitativa del moto.** Una volta determinato  $\dot{x}$ , incluso il suo segno, mediante (4.4) e le considerazioni precedenti, si ha, ad esempio nella zona di moto *progressivo* (cioè con velocità  $\dot{x} > 0$ )

$$\dot{x}(t) = \sqrt{\frac{2[E - V(x(t))]}{m}} \quad (4.5).$$

Questa è un'equazione a variabili separabili, la cui integrazione conduce alla relazione

$$t = \int_{x_0}^{x(t)} \frac{dx'}{\sqrt{\frac{2[E - V(x')]}{m}}}, \quad (4.6)$$

valida per ogni  $t < t_1$ , ove  $t_1$  è il primo istante d'arresto, cioè

$$t_1 = \sup\{\tau > 0 : \dot{x}(t) > 0 \quad \forall t < \tau\} \quad (4.7)$$

La funzione integranda nel secondo membro di (4.6) è positiva. Pertanto la funzione

$$G(x) = \int_{x_0}^x \frac{dx'}{\sqrt{\frac{2[E - V(x')]}{m}}}$$

è crescente e quindi invertibile. La sua inversa determina  $t \rightarrow x(t)$  per  $t < t_1$ . Nella pratica tale calcolo non è in generale realmente fattibile, ma le considerazioni precedenti consentono di analizzare il moto in grande dettaglio.

A questo scopo premettiamo alcune definizioni. Esse sono illustrate dalla figura che segue.

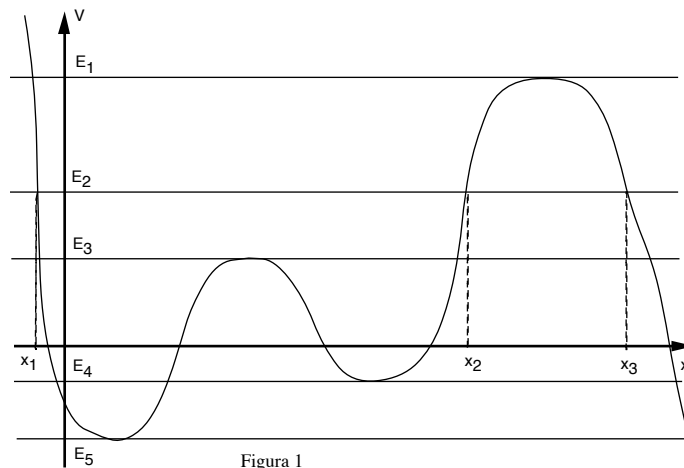


Figura 1

Supposta  $x \rightarrow V(x)$  una funzione continua e dotata di derivata continua nell'interno del suo insieme di definizione, diciamo *critico* ogni punto  $x_c$  tale che  $V'(x_c) = 0$  e diciamo *livello di energia critica* ogni numero reale  $E_c$  tale che  $E_c = V(x_c)$ . Nella figura 1, i valori dell'energia  $E_1$ ,  $E_3$ ,  $E_4$  ed  $E_5$  corrispondono a livelli critici, mentre il valore  $E_2$  corrisponde ad un livello non critico.

#### Moto su livelli di energia non critici.

Supponiamo ora che il dato iniziale  $(x_0, v_0)$  sia tale che il livello di energia corrispondente sia non critico, come ad esempio  $E_2$  nella figura 1. Supponiamo inoltre che l'equazione

$$E = V(x),$$

abbia un numero finito,  $n$  di soluzioni e si denotino con  $x_i, i = 1, \dots, n$  tali soluzioni ordinate in ordine crescente. Nel caso della figura 1, in corrispondenza del livello di energia  $E_2$  non critico, queste sono  $x_1, x_2$  ed  $x_3$ . Esse individueranno  $n + 1$  intervalli, due dei quali non limitati, in alcuni dei quali risulterà  $V(x) > E$  e negli altri  $V(x) < E$ . Nel caso in figura 1,  $(x_1, x_2)$  è un intervallo ove  $E > V(x)$  mentre  $(x_2, x_3)$  è un intervallo dove  $E < V(x)$ . Dalla definizione di  $E$  segue che il moto è possibile soltanto negli intervalli in cui  $V(x) < E$  e che, se il punto materiale vi si trova inizialmente deve rimanervi ad ogni tempo. Difatti il punto materiale non potrebbe raggiungere un altro intervallo con  $V(x) < E$  senza attraversarne uno in cui  $V(x) > E$ . Perché ciò avvenga dovrebbe esserci un salto che è invece vietato dalla continuità del moto.

Sia  $x_- < x_+$  una coppia di soluzioni dell'equazione  $V(x) = E$ , per cui risulta

$$V(x_-) = E = V(x_+), \quad V(x) < E \quad \forall x \in (x_-, x_+).$$

Poiché il livello è non critico, si ha  $V'(x_-) < 0, V'(x_+) > 0$ .

**Teorema 4.1.** *Sia  $V$  una funzione derivabile due volte in  $\mathbb{R}$ , con derivata seconda continua. Se  $E$  è non critico ed  $x_0 \in [x_-, x_+]$ , allora il moto susseguente,  $t \rightarrow x(t)$  è periodico<sup>(1)</sup> di periodo*

$$T = 2 \int_{x_-}^{x_+} \frac{dx'}{\sqrt{\frac{2[E - V(x')]}{m}}} \quad (4.8)$$

Dim. Si è già osservato che il moto può avvenire soltanto nell'intervallo  $[x_-, x_+]$ . Supponiamo, per fissare le idee,  $v_0 > 0$  e definiamo  $t_1$  in accordo con la (4.7).

**Lemma 4.2:** *Sia  $t_1$  definito da (4.7). Risulta:*

$$\lim_{t \rightarrow t_1} x(t) = x_+. \quad (4.9)$$

Il tempo  $t_1$  si può valutare usando la (4.6) come

$$t_1 = \int_{x_0}^{x_+} \frac{dx'}{\sqrt{\frac{2[E - V(x')]}{m}}}. \quad (4.10)$$

**Lemma 4.3:** *Nelle ipotesi del Teorema 4.1 risulta:*

$$t_1 < +\infty.$$

Prima di provare i due lemmi, diamo l'argomento che conclude la prova del Teorema 4.1. Poiché il tempo  $t_1$  calcolato mediante la (4.10) risulta finito, il punto materiale al tempo  $t_1$  si trova in  $x_+$  con velocità nulla, e a partire da questa inizia una fase di moto retrogrado (cioè con  $\dot{x} < 0$ ) che si conclude al tempo

$$t_2 = \sup\{\tau > t_1 : \dot{x}(t) < 0 \quad \forall t_1 < t < \tau\}. \quad (4.11)$$

Lo stesso argomento di prima mostrerà che  $\lim_{t \rightarrow t_2} x(t) = x_-$  e che  $t_2$  può anch'esso valutarsi mediante un'espressione simile alla (4.6) ed è finito. Al tempo  $t_2$  il punto materiale si trova in  $x_-$  con velocità nulla, e a partire da questa inizia una nuova fase di moto progressivo che si conclude al tempo

$$t_3 = \sup\{\tau > t_2 : \dot{x}(t) > 0 \quad \forall t_2 < t < \tau\}. \quad (4.12)$$

---

<sup>(1)</sup> Cioè esiste  $T > 0$  tale che  $x(t) = x(t + T)$  per ogni  $t \in \mathbb{R}$ . Il più piccolo numero  $T > 0$  per il quale tale proprietà è verificata si dice *periodo* del moto periodico.

Per simmetria,  $t_3 - t_2 = t_2 - t_1$ . Pertanto il punto materiale compie oscillazioni tra gli estremi dell'intervallo  $[x_-, x_+]$ , e quindi di ampiezza  $x_+ - x_-$ , e si trova in  $x_+$  con velocità nulla ai tempi  $t_1$  e  $t_1 + 2(t_2 - t_1)$ . Tale circostanza basta a concludere che il moto è periodico<sup>(2)</sup> ed il periodo è  $T = 2(t_2 - t_1)$ , dato da (4.8). Questo conclude la dimostrazione del Teorema 4.1.  $\square$

Occorre ancora provare i Lemmi 4.2 e 4.3

Dim. del Lemma 4.2: Per controllare la (4.9), cominciamo con l'osservare che il limite esiste per monotonia in quanto  $x(t)$  è non decrescente in  $(0, t_1)$  poiché per definizione di  $t_1$ , in tale intervallo risulta  $\dot{x}(t) > 0$ . Pertanto si tratta di mostrare che il limite coincide con  $x_+$ . Si supponga invece, per assurdo, che sia

$$\lim_{t \rightarrow t_1} x(t) = \bar{x}, \text{ con } \bar{x} < x_+. \quad (4.13)$$

Essendo  $V$  una funzione continua, risulterebbe

$$\bar{v} := \lim_{t \rightarrow t_1} \dot{x}(t) = \sqrt{\frac{2[E - V(\bar{x})]}{m}} > 0, \quad (4.14)$$

poiché  $E > V(\bar{x})$  per definizione di  $x_+$ . Poiché non sappiamo ancora se  $t_1$  è finito, dobbiamo esaminare sia il caso

- a)  $t_1 = +\infty$   
che il caso
- b)  $t_1 < +\infty$ .

Ma nel caso a) la (4.14) è incompatibile con l'esistenza del limite (4.13). Difatti, se  $\bar{v} > 0$  e  $t_1 = +\infty$ , deve essere  $\bar{x} = +\infty$ <sup>(3)</sup>. Nel caso b) la (4.14) è incompatibile con la definizione di  $t_1$  in quanto, se  $t_1$  è finito,  $0 < \bar{v} = \dot{x}(t_1)$  per continuità. Sempre per continuità risulterebbe  $\dot{x}(t) > 0$  in un intorno destro di  $t_1$  mentre la definizione di  $t_1$  ed il fatto che esso è finito implicano che in un intorno destro di  $t_1$  la velocità sia non positiva.  $\square$

(2) Infatti, se la soluzione  $t \rightarrow x(t)$  dell'equazione differenziale non dipendente dal tempo

$$\dot{x} = f(x) \quad (*)$$

con dato iniziale  $x(0) = x_0$  è tale che esistano  $T > 0$  e  $t_*$  tali che  $x(t_* + T) = x(t_*)$ , allora il moto è periodico di periodo  $T$ . Per verificarlo basta osservare che la funzione  $t \rightarrow y(t) = x(t + T)$  è anch'essa soluzione dell'equazione differenziale (\*) e soddisfa la condizione  $y(t_*) = x(t_*)$ . Pertanto, per il teorema di unicità non può differire da  $t \rightarrow x(t)$ . Risulta quindi  $x(t + T) = x(t)$  per ogni  $t \in \mathbb{R}$ .

(3) Se  $x \rightarrow f(x)$  è monotona non decrescente e la sua derivata ammette limite per  $x \rightarrow +\infty$ ,  
o  $f' \rightarrow 0$  o  $f \rightarrow +\infty$

Dim. del Lemma 4.3: Le considerazioni precedenti assicurano che vale la (4.10). Poiché la funzione integranda è non limitata soltanto per  $x'$  prossimo a  $x_+$ , basta far vedere che

$$\int_{x_+-\delta}^{x_+} \frac{dx'}{\sqrt{\frac{2[E-V(x')]}{m}}} < +\infty \quad (4.15)$$

per  $\delta > 0$  sufficientemente piccolo. Per il teorema di Lagrange, nell'intorno sinistro di  $x_+$  dato da  $\{x' | 0 < x_+ - x' < \delta\}$  risulta

$$E - V(x') = E - V(x_+) - V'(x_+)(x' - x_+) - \frac{1}{2}V''(\xi)(x' - x_+)^2$$

per  $\xi$  opportunamente scelto in  $(x', x_+)$ . Per ipotesi  $V'(x_+) > 0$ , mentre  $|V''|$  è limitato da una costante  $M$  nell'intervallo  $[x_-, x_+]$ . Pertanto, scegliendo  $\delta < V'(x_+)/M$ , si ha

$$|V''(\xi)(x' - x_+)^2| \leq |V''(\xi)|(x_+ - x')\delta \leq V'(x_+)(x_+ - x').$$

Pertanto

$$E - V(x') \geq \frac{1}{2}V'(x_+)(x_+ - x')$$

Ciò mostra che la funzione integranda in (4.15) è maggiorata dalla funzione integrabile  $C(x_+ - x')^{-1/2}$  e quindi l'integrale è finito.  $\square$

Il Teorema 4.1 fornisce la descrizione qualitativa completa del moto di un punto materiale su un livello di energia non critico, quando esso si trovi inizialmente nell'intervallo  $[x_-, x_+]$  compreso tra due radici consecutive dell'equazione  $V(x) = E$ , nel quale risulta  $V(x) \leq E$ . Esso compie oscillazioni periodiche di ampiezza  $x_+ - x_-$  con un periodo di oscillazione fornito dalla (4.8). Resta da considerare il caso in cui  $x_0$  è a sinistra della più piccola o a destra della più grande delle radici, e quindi in un intervallo non limitato. Nel caso mostrato dalla figura 1 si può considerare  $x_0 \geq x_3$  e quindi a destra della radice più grande. L'altro caso, non presente in figura 1, si discute in modo analogo.

Supponiamo che  $x_*$  sia la più grande delle radici di  $V(x) = E$  e che per  $x > x_*$  sia  $V(x) < E$ . Sia  $x_0 = x_*$ . Nei tempi successivi il moto è certamente progressivo, poiché  $f(x_*) > 0$ . Essendo  $x_*$  la più grande delle radici, non vi sono istanti di arresto e quindi il moto rimane progressivo. Ne consegue che al crescere di  $t$ ,  $x(t)$  cresce indefinitamente. Infatti, per monotonia, il limite deve coincidere con il suo estremo superiore e questo non può essere finito perché in corrispondenza la velocità tenderebbe a 0, mentre non vi sono istanti di arresto finiti. Il tempo necessario per "raggiungere l'infinito" è dato da

$$t_* = \int_{x_*}^{+\infty} \frac{dx'}{\sqrt{\frac{2[E-V(x')]}{m}}}$$

Se il potenziale  $V(x)$  è inferiormente limitato, e  $-B$  ne è l'estremo inferiore, si ha  $E - V(x) \leq E + B$  e quindi

$$t_* \geq \int_{x_*}^{+\infty} \frac{dx'}{\sqrt{\frac{2[E+B]}{m}}} = +\infty$$

Pertanto il tempo necessario per giungere all'infinito è infinito e quindi il problema ammette anche in questo caso una soluzione globale nel tempo, tale che

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = +\infty.$$

Se il potenziale non è inferiormente limitato e tende a  $-\infty$  per  $x \rightarrow +\infty$ , a seconda dell'ordine di infinito,  $t_*$  può essere finito o infinito. Esso risulterà infinito a meno che non sia

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{V(x)}{x^2} = -\infty$$

In quest'ultimo caso la soluzione esiste solo nell'intervallo  $[0, t_*)$  e pertanto è solo locale nel futuro.

Se  $x_0 > x_*$  e  $v_0 > 0$ , la situazione è la stessa già discussa. Se  $v_0 < 0$  il moto è inizialmente retrogrado fino al primo istante di arresto  $t_-$  nel quale il punto materiale raggiunge  $x_*$  (per questa parte la discussione è identica a quella fatta per provare il Teorema 4.1). A partire da questo istante siamo nel caso discusso in precedenza.

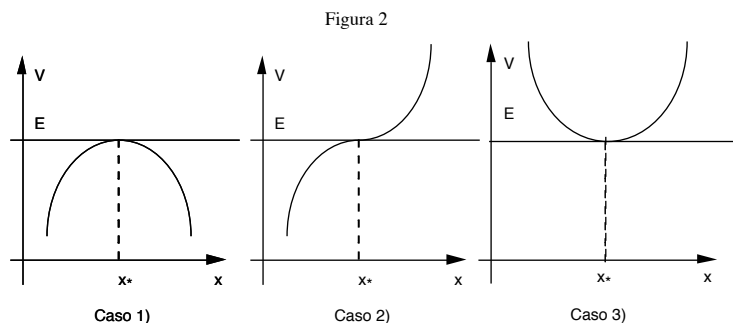
#### Moto su livelli di energia critici.

Se il livello di energia  $E$  è critico, come i livelli  $E_1, E_3, E_4$  ed  $E_5$  nella figura 1, per definizione vi sono alcune delle soluzioni  $x_i$  dell'equazione  $E = V(x)$ , che sono anche punti critici, in corrispondenza dei quali  $V'$  si annulla. Nella figura 1, per i livelli  $E_1$  ed  $E_3$  vi è un punto di massimo, mentre per i livelli  $E_4$  ed  $E_5$  vi è un punto di minimo. Non è rappresentato in figura 1 il caso in cui si abbia un punto di flesso a tangente orizzontale. Naturalmente, per tutti gli intervalli ai cui estremi non vi sono punti critici, la discussione fatta per i livelli non critici continua ad essere valida. Supporremo pertanto di considerare intervalli aventi un estremo che sia un punto critico.

Sia  $x_*$  un tale punto. Distingueremo tre casi:

- 1)  $E = V(x_*)$ ,  $V'(x_*) = 0$  ed  $E > V(x)$  in un intorno completo di  $x_*$ ,  $\{x \mid 0 < |x - x_*| < \delta\}$ .
- 2)  $E = V(x_*)$ ,  $V'(x_*) = 0$  ed  $E > V(x)$  in un intorno sinistro (risp. destro) di  $x_*$ ,  $\{x \mid 0 < x_* - x < \delta\}$  (risp.  $\{x \mid 0 < x - x_* < \delta\}$ ).
- 3)  $E = V(x_*)$ ,  $V'(x_*) = 0$  ed  $E < V(x)$  in un intorno completo di  $x_*$ ,  $\{x \mid 0 < |x - x_*| < \delta\}$ .

Essi sono illustrati nella figura 2 qui sotto.



*Caso 1:* Se  $x_0 = x_*$ , necessariamente  $v_0 = 0$  perché

$$E = \frac{mv_0^2}{2} + V(x_0) = V(x_*) = V(x_0).$$

La funzione  $t \rightarrow x(t) = x_*$  per ogni  $t$  soddisfa ovviamente i dati iniziali e l'equazione, poiché  $f(x_*) = -V'(x_*) = 0$ . Per il teorema di unicità essa è l'unica soluzione e pertanto il moto successivo è la quiete in  $x_*$ . Una posizione  $x_*$  tale che, posto il punto materiale inizialmente in  $x_*$  con velocità nulla, esso vi rimane per sempre, viene detto *posizione di equilibrio*. Ne consegue che il punto  $x_*$  è una posizione di equilibrio.

Supponiamo ora  $x_0 \neq x_*$ . Sia, per fissare le idee,  $x < x_*$ . La velocità iniziale è non nulla poiché  $E = V(x_*) > V(x_0)$ . Se  $v_0 < 0$ , il moto è inizialmente retrogrado. Se l'estremo sinistro dell'intervallo è un punto non critico, il moto diviene progressivo dopo un istante di arresto in tale estremo e siamo ricondotti al caso  $v_0 > 0$ . Se l'estremo sinistro dell'intervallo è  $-\infty$ , è valida l'analisi fatta nel caso di livello di energia non critico. Infine, se l'estremo sinistro è anch'esso un punto critico, la discussione è ricondotta al caso  $x_0 > x_*$ . Discutiamo quindi il caso  $v_0 > 0$ . Il Lemma 4.2 continua ad essere valido, con  $x_+$  rimpiazzato da  $x_*$ , nella (4.9). Il tempo  $t_1$  necessario a raggiungere  $x_*$  è dato da (4.10) con  $x_+$  sostituito da  $x_*$ . Il Lemma 4.3 non è più valido in questo caso ed è sostituito dal seguente

**Lemma 4.4:** *Nelle stesse ipotesi del Teorema 4.1 si ha:*

$$t_1 = +\infty.$$



Dim. Abbiamo  $E = V(x_*)$  e  $V'(x_*) = 0$ . Per il teorema di Lagrange, per un'opportuna scelta di  $\xi \in (x_* - \delta, x_*)$ , risulta

$$E - V(x) = -\frac{1}{2}V''(\xi)(x - x_*)^2 \leq \frac{1}{2}A(x - x_*)^2 \quad (4.16)$$

ove  $A > 0$  è un maggiorante di  $-V''(x)$  nell'intorno considerato<sup>(4)</sup>. Pertanto

$$t_1 \geq \int_{x_* - \delta}^{x_*} \frac{dx'}{\sqrt{\frac{2[E - V(x')]}{m}}} \geq \int_{x_* - \delta}^{x_*} \frac{dx'}{\sqrt{\frac{A(x - x_*)^2}{m}}} = +\infty.$$

□

In conclusione il punto  $x_*$  rappresenta la posizione limite di  $t \rightarrow x(t)$  per  $t \rightarrow +\infty$ , che non viene però raggiunta a nessun tempo finito. Un moto con questa proprietà è denominato *moto a meta asintotica*.

Il caso  $x_0 > x_*$  si discute in modo analogo.

*Caso 2:* Supponiamo per fissare le idee che sia verificato il caso in figura 2, e cioè che sia  $V(x) < E$  per  $x < x_*$  e  $V(x) > E$  per  $x > x_*$ . Il moto è possibile solo per  $x_0 \leq x_*$  e i casi  $x_0 = x_*$  e  $x_0 < x_*$  sono analoghi a quelli discussi in precedenza.

*Caso 3:* L'unica possibilità è che sia  $x_0 = x_*$  e il moto si riduce alla quiete in  $x_*$ .

Riassumendo, in tutti i casi il punto  $x_*$  è una posizione di equilibrio, ma il comportamento del punto materiale nei casi 1) e 2) è molto diverso da quello del caso 3). Nei primi due casi, se il punto viene posto inizialmente in una posizione prossima ad  $x_*$ , con velocità diretta verso  $x_*$ , raggiunge  $x_*$  solo dopo un tempo infinito. Se la velocità iniziale è nella direzione opposta a  $x_*$  il punto materiale si allontana da  $x_*$ . Nel caso 3) invece, il punto materiale è bloccato in  $x_*$ , non essendovi altre posizioni compatibili con l'energia critica che il punto materiale ha. Se tuttavia gli si fornisce una piccola quantità di energia supplementare, il moto è una oscillazione di ampiezza tanto più piccola quanto più è piccola l'energia addizionale fornita. Le posizioni di equilibrio con queste caratteristiche hanno un'importanza fondamentale nella pratica, in quanto il moto manifesta la tendenza a restare confinato nelle loro vicinanze. È per questo che si introduce la fondamentale nozione di stabilità.

### 4.3 Stabilità

Le considerazioni che seguono sono valide in un contesto molto più generale che quello dei moti unidimensionali. Per il momento limiteremo l'analisi a tale caso,

<sup>(4)</sup> Si osservi che la (4.16) vale anche nel caso  $V''(x_*) = 0$ , in quanto  $V''(x)$  non è identicamente nulla nell'intorno di  $x_*$ .

rinviano ad un capitolo successivo lo studio generale della stabilità delle posizioni di equilibrio.

Ricordiamo che un punto  $x_* \in \mathbb{R}$  è una *posizione di equilibrio* se, posto il punto materiale inizialmente in  $x_0 = x_*$  con velocità  $v_0 = 0$ , il moto susseguente è la quiete in  $x_*$ . Cioè

$$x_0 = x_* \text{ e } v_0 = 0 \implies x(t) = x_* \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Abbiamo già osservato che, nel caso di forze posizionali i punti critici, cioè i punti  $x_c$  tali che  $V'(x_c) = 0$ , sono posizioni di equilibrio. La proposizione che segue assicura che non ve ne sono altri. Essa vale anche per forze non posizionali. Sia  $(x, v, t) \rightarrow f(x, v, t)$  una legge di forza non necessariamente posizionale, che supponiamo per semplicità definita in tutto  $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ .

**Proposizione 4.5** *Il punto  $x_* \in \mathbb{R}$  è una posizione di equilibrio se e solo se*

$$f(x_*, 0, t) = 0 \quad \text{per ogni } t \in \mathbb{R}. \quad (4.17)$$

Dim. Se  $x_*$  è una posizione di equilibrio, allora  $t \rightarrow x(t) = x_*$  è soluzione dell'equazione (4.1). Ma in tal caso  $\dot{x} = 0$  e  $\ddot{x} = 0$  e pertanto vale la (4.17).

Viceversa, se vale la (4.17) la funzione  $t \rightarrow x(t) = x_*$  per ogni  $t \in \mathbb{R}$  risolve la (4.1) e soddisfa la condizione iniziale  $x(0) = x_*$ ,  $\dot{x}(0) = 0$ . Essa è unica per il teorema di unicità e quindi  $x_*$  è una posizione di equilibrio.  $\square$

In particolare, nel caso di forza posizionale, la (4.17) stabilisce che  $x_*$  è di equilibrio se e solo se è critico.

Come osservato prima, i punti critici dell'energia potenziale  $V$  si possono classificare in due tipi, a seconda che il moto nelle loro vicinanze tenda ad allontanarsi da essi o a rimanere vicino. La precisazione di questa idea conduce alla nozione di stabilità. Anche questa nozione può essere data per forze non necessariamente posizionali.

**Definizione 4.1:** Una posizione di equilibrio  $x_*$  è detta *stabile (nel futuro)* se, una volta scelta la posizione iniziale  $x_0$  sufficientemente vicina ad  $x_*$  e la velocità iniziale  $v_0$  sufficientemente piccola, il moto susseguente,  $t \rightarrow x(t)$  si mantiene arbitrariamente prossimo a  $x_*$  per  $t > t_0$ . Più precisamente:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \text{ tale che } |x_0 - x_*| < \delta, |v_0| < \delta \implies \sup_{t \geq t_0} \{|x(t) - x_*| + |\dot{x}(t)|\} < \varepsilon.$$

*Osservazione 1:* La condizione di stabilità è solo apparentemente simile a quella di continuità rispetto ai dati iniziali che in questo contesto si scrive

$$\forall t > t_0, \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \text{ tale che } |x_0 - x_*| < \delta, |v_0| < \delta \implies |x(t) - x_*| + |\dot{x}(t)| < \varepsilon.$$

Infatti nel caso della continuità rispetto ai dati iniziali il numero  $\delta$  da determinare, può dipendere anche da  $t$ , mentre nel caso della stabilità la scelta di  $\delta$  deve essere valida per tutti i tempi nell'intervallo non limitato  $[t_0, +\infty)$ .

*Osservazione 2:* Che la nozione di stabilità sia molto piú forte di quella di continuità rispetto ai dati iniziali è mostrato dal fatto che quest'ultima vale non appena la legge di forza è Lipshitziana, mentre la proprietà di stabilità è ovviamente non verificata dalla posizione di equilibrio di una forza posizionale corrispondente ad un punto critico che sia un massimo isolato. Piú esplicitamente, si consideri la legge di forza  $f(x) = a^2x$ , di potenziale  $V(x) = -a^2x^2/2$ . L'equazione relativa ad un punto di massa  $m = 1$ ,

$$\ddot{x} = a^2x, \quad x(0) = x_0, \quad \dot{x}(0) = v_0,$$

ha per soluzione

$$x(t) = \frac{1}{2}\left(x_0 + \frac{v_0}{a}\right)e^{at} + \frac{1}{2}\left(x_0 - \frac{v_0}{a}\right)e^{-at}.$$

Pertanto il punto si allontana indefinitamente da  $x_* = 0$  a meno di non scegliere i dati iniziali in modo tale che 0 sia la meta asintotica. Naturalmente la forza è Lipshitziana e la proprietà di continuità rispetto ai dati iniziali è verificata, come segue anche direttamente dalla soluzione esplicita.

La proposizione seguente stabilisce che effettivamente i punti di minimo sono posizioni di equilibrio stabile. Tale affermazione continua a essere corretta in un contesto piú generale, che verrà discusso in seguito.

**Proposizione 4.6:** *Si supponga  $x \rightarrow V(x)$  dotata di derivate seconde continue in  $\mathbb{R}$ . Se  $x_*$  è un punto di minimo stretto per  $V$ , allora la posizione  $x_*$  è una posizione di equilibrio stabile.*

Dim. Senza perdita di generalità si assume  $V(x_*) = 0$ . Poiché  $x_*$  è un punto di minimo stretto, esiste  $\delta_1 > 0$  tale che  $V(x) > 0$  per ogni  $x$  tale che  $0 < |x - x_*| < \delta_1$ . Fissati  $x_0$  soddisfacente tale condizione e  $v_0$ , sia  $E > 0$  l'energia corrispondente e siano  $x_{+,E}$  ed  $x_{-,E}$  la piú piccola soluzione di  $V(x) = E$  con  $x > x_*$  e la piú grande soluzione di  $V(x) = E$  con  $x < x_*$  rispettivamente. Consideriamo  $x_{+,E}$  per fissare le idee.

La funzione  $E \rightarrow x_{+,E}$  è monotona crescente. Questo segue dalla definizione di  $x_{+,E}$ . Difatti, se per qualche coppia di valori  $0 < E_1 < E_2$  fosse  $x_{+,E_1} > x_{+,E_2}$ , si avrebbe un assurdo perché, per la continuità,  $V$  dovrebbe assumere nell'intervallo  $(x_*, x_{+,E_2})$  tutti i valori compresi tra 0 ed  $E_2$ . Esisterebbe allora  $\hat{x} \in (x_*, x_{+,E_2})$  tale che  $V(\hat{x}) = E_1$ . Ma in tal caso  $x_{+,E_1} > \hat{x}$  e quindi  $x_{+,E_1}$  non sarebbe la piú piccola soluzione di  $V(x) = E_1$ .

Pertanto il limite  $\lim_{E \rightarrow 0} x_{+,E}$  esiste per monotonia. Esso deve coincidere con  $x_*$ , poiché, se fosse  $\lim_{E \rightarrow 0} x_{+,E} = \bar{x} > x_*$ , la continuità di  $V$  implicherebbe

$$0 = \lim_{E \rightarrow 0} E = \lim_{E \rightarrow 0} V(x_{+,E}) = V(\bar{x}),$$

che è in contrasto con il fatto che  $V(x) > 0$  se  $0 < |x - x_*| < \delta_1$ . In conclusione esiste il limite

$$\lim_{E \rightarrow 0} x_{+,E} = x_*.$$

In modo analogo si ottiene il limite

$$\lim_{E \rightarrow 0} x_{-,E} = x_*.$$

Sia  $h(E) = \max\{|x_{+,E} - x_*|, |x_{-,E} - x_*|\}$ .

Poiché il moto è confinato nell'intervallo  $[x_{-,E}, x_{+,E}]$ , ne segue che, prefissato  $\varepsilon > 0$ , esiste  $\theta > 0$  tale che, se  $E < \theta$ ,  $h(E) < \varepsilon$  e quindi  $|x(t) - x_*| < \varepsilon$ . Si scelga ora  $\delta_2$  in modo che, se  $|v_0| < \delta_2$ ,  $mv_0^2/2 < \theta/2$  e se  $|x_0 - x_*| < \delta_2$  allora  $V(x_0) < \theta/2$ . Ne segue la disuguaglianza  $|x(t) - x_*| < \varepsilon$  con  $\delta(\varepsilon)$  scelto come il più piccolo tra  $\delta_1$  e  $\delta_2$ . Per ottenere la disuguaglianza sulle velocità, basta ricordare che  $|v| < \sqrt{2E/m}$  e scegliere  $\theta$  in modo che risulti anche  $\sqrt{2\theta/m} < \varepsilon$ .  $\square$

*Osservazione:* La stima esplicita di  $|x_{\pm,E} - x_*|$  è resa delicata dal fatto che, nelle ipotesi fatte, l'energia potenziale  $V$  potrebbe avere un comportamento molto complicato, ad esempio, oltre al minimo in  $x_*$  potrebbe avere nell'intorno di  $x_*$  una successione di massimi e minimi che hanno  $x_*$  come punto di accumulazione, in modo che la convessità cambia infinite volte in ogni intorno di  $x_*$ . Un esempio di funzione con tale comportamento patologico è il seguente:

$$V(x) = \begin{cases} e^{-1/|x|} \left( x^2 + \sin^2 \frac{1}{x} \right) & \text{se } x \neq 0, \\ 0 & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

Essa ha ovviamente un minimo in  $x = 0$ , ma ne ha infiniti altri nell'intorno di 0.

La stima è molto più semplice quando vi sia una derivata di ordine pari positiva in un intorno di  $x_*$ .

Supponiamo ad esempio che esista un intorno di  $x_*$  ove sia  $V''(x) > 0$  e siano  $a > 0$  ed  $A$  il minimo ed il massimo di  $V''$  in tale intorno. Usando il teorema di Lagrange, in un intorno di  $x_*$  si ha

$$V(x) = \frac{1}{2} V''(\xi)(x - x_*)^2,$$

con  $\xi$  opportunamente scelto in funzione di  $x$ . In particolare,

$$E = V(x_{\pm,E}) = \frac{1}{2} V''(\xi_{\pm,E})(x_{\pm,E} - x_*)^2 \geq \frac{1}{2} a (x_{\pm,E} - x_*)^2$$

e quindi

$$|x_{\pm, E} - x_*| \leq \left(\frac{2}{a}E\right)^{1/2} = \left(\frac{1}{a}[mv_0^2 + 2V(x_0)]\right)^{1/2} = \\ \left(\frac{1}{a}[mv_0^2 + V''(\xi_0)(x_0 - x_*)^2]\right)^{1/2} \leq \left(\frac{1}{a}[mv_0^2 + A(x_0 - x_*)^2]\right)^{1/2}.$$

Quindi

$$|x(t) - x_*| \leq \left(\frac{1}{a}[mv_0^2 + A(x_0 - x_*)^2]\right)^{1/2}.$$

#### 4.4 Oscillatore armonico.

I calcoli precedenti mostrano che l'approssimazione quadratica dell'energia potenziale in prossimità di un punto di minimo semplifica notevolmente la trattazione. Infatti il caso di energia potenziale quadratica ha un ruolo privilegiato nello studio qualitativo del moto dei sistemi unidimensionali. Consideriamo pertanto un'energia potenziale della forma

$$V(x) = \frac{1}{2}kx^2, \quad k > 0,$$

che corrisponde ad una forza<sup>(5)</sup>

$$f(x) = -kx.$$

Tale forza tende a richiamare il punto materiale dalla posizione  $x$  ove si trova verso l'origine con una forza che è tanto più grande quanto più il punto è lontano dall'origine. Per tale motivo questa forza viene interpretata come quella prodotta da una molla in approssimazione lineare ed è detta *forza di richiamo elastica*.  $k > 0$  si dice costante elastica della molla. L'origine risulta un punto di minimo per l'energia potenziale e quindi una posizione di equilibrio stabile. In questo caso è possibile completare il calcolo in (4.6) ed ottenere esplicitamente la soluzione.

Intanto, la determinazione di  $x_{\pm, E}$  è immediata: dall'equazione  $E = (1/2)kx^2$  si ha

$$x_{\pm, E} = \pm \sqrt{\frac{2E}{k}}.$$

---

<sup>(5)</sup> La soluzione di questo problema è già stata ottenuta per altra via attraverso la risoluzione diretta dell'equazione differenziale. Tuttavia è istruttivo ottenerla con il metodo studiato in questo capitolo.

Inoltre il denominatore della (4.6) può scriversi

$$\frac{2}{m} \left( E - \frac{1}{2} k x^2 \right) = \frac{k}{m} (x_{+,E} - x)(x - x_{-,E}).$$

Posto

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}},$$

la (4.6) diviene

$$t = \frac{1}{\omega} \int_{x_0}^{x(t)} \frac{dx'}{\sqrt{(x_{+,E} - x)(x - x_{-,E})}}.$$

Per completare il calcolo occorre determinare la forma esplicita dell'integrale

$$\mathcal{I} = \int_{x_1}^{x_2} \frac{dz}{\sqrt{(b-z)(z-a)}}$$

con  $a \leq x_1 < x_2 \leq b$ . Si tratta di un integrale noto. Tuttavia, data l'importanza che esso assume in Meccanica se ne fornisce il calcolo esplicito. Esso è basato su due cambiamenti di variabili. Il primo

$$u = \frac{z-a}{b-a}$$

trasforma l'intervallo  $[a, b]$  nell'intervallo  $[0, 1]$ ,  $x_i$  in  $u_i$ ,  $dz$  in  $du = (b-a)^{-1} dz$  e

$$(b-z)(z-a) = (b-a)^2 u(1-u).$$

pertanto

$$\mathcal{I} = \int_{u_1}^{u_2} \frac{du}{\sqrt{u(1-u)}}, \quad u_i = \frac{x_i - a}{b - a}.$$

Posto poi  $y = 2u - 1$ ,  $y$  varia in  $[-1, 1]$  al variare di  $u$  in  $[0, 1]$ . Inoltre  $u = (y+1)/2$ ,  $(1-u) = (1-y)/2$ ,  $u(1-u) = (1-y^2)/4$ .  $dy = 2du$ . Infine

$$y_i = 2u_i - 1 = \frac{2x_i - (a+b)}{b-a}.$$

Quindi

$$\begin{aligned} \mathcal{I} &= \frac{1}{2} \int_{y_1}^{y_2} \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)4^{-1}}} = \arccos y_2 - \arccos y_1 \\ &= \arccos \frac{2x_2 - (a+b)}{b-a} - \arccos \frac{2x_1 - (a+b)}{b-a} \end{aligned}$$

In particolare, se  $x_1 = a$  ed  $x_2 = b$ ,

$$\int_a^b \frac{dz}{\sqrt{(b-z)(z-a)}} = \arccos 1 - \arccos(-1) = \pi. \quad (4.18)$$

Se  $x_1 = x_0$ ,  $x_2 = x(t)$ ,  $a = x_{-,E}$ ,  $b = x_{+,E}$ , risulta

$$\omega t = \arccos \frac{x(t)}{x_{+,E}} - \arccos \frac{x_0}{x_{+,E}}.$$

Ricordando che

$$x_{\pm,E} = \pm \sqrt{\frac{2E}{k}} = \pm \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega^2}},$$

si ha quindi

$$x(t) = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega^2}} \cos(\omega t + \phi), \quad \phi = \arccos \frac{x_0}{x_{\pm,E}}. \quad (4.19)$$

Pertanto il moto di un punto materiale soggetto ad una forza di richiamo elastica è un moto armonico, cioè un moto oscillatorio periodico con periodo

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}.$$

Il periodo di oscillazione non dipende dalle condizioni iniziali, ma solo dalla massa e dalla costante elastica. Oscillazioni di questo tipo si dicono **oscillazioni isocrone**.

È chiaro che è conveniente dal punto di vista pratico<sup>(6)</sup> avere oscillazioni che non dipendono dal modo con cui si avvia il sistema. Se occorressero procedure speciali per avviare gli orologi, sarebbe molto difficile avere orologi sincronizzati. Se invece le oscillazioni sono isocrone, basta fissare la massa e la costante elastica e due qualsiasi oscillatori oscilleranno con lo stesso periodo indipendentemente dalle condizioni iniziali. È ragionevole domandarsi se la proprietà di avere oscillazioni isocrone sia una proprietà generica o specifica dell'oscillatore armonico. Una risposta è possibile, con qualche ipotesi aggiuntiva ed è fornita dalla successiva proposizione.

---

<sup>(6)</sup> In realtà questa discussione ha molto poco a che fare con problemi pratici, poiché nei casi concreti è inevitabile la presenza di qualche forma di attrito e le oscillazioni armoniche divengono in tal caso smorzate.

Ricordiamo che, dato il livello di energia non critico  $E$  e le soluzioni  $x_{\pm,E}$  dell'equazione  $V(x) = E$ , il periodo di oscillazione dipende *a priori* dall'energia ed è dato da

$$T(E) = \sqrt{2m} \int_{x_{-,E}}^{x_{+,E}} \frac{dx}{\sqrt{E - V(x)}}.$$

Per discutere se esistano altre energie potenziali, oltre  $x \rightarrow V(x) = kx^2/2$ , per le quali le oscillazioni risultino isocrone, occorre restringere la classe delle funzioni  $x \rightarrow V(x)$  ammesse. Supporremo:

- i)  $V \in C^2[\mathbb{R}]$ ,
- ii)  $\lim_{|x| \rightarrow \infty} V(x) = +\infty$ ,
- iii) esiste un unico punto critico, che si assume senza perdita di generalità coincidente con l'origine:  $V'(0) = 0$ . Ancora senza perdere generalità si può assumere  $V(0) = 0$ .
- iv)  $V(x) = V(-x)$  per ogni  $x \in \mathbb{R}$ .

Solo l'ultima è una restrizione effettiva alla classe dei potenziali considerati. Infatti la i) è una condizione di regolarità quasi minimale perché il problema sia ben posto. La ii) è resa necessaria dal fatto che, se l'energia potenziale non diverge all'infinito, per energie sufficientemente alte vi sono certamente moti non periodici, che renderebbero impossibile la proprietà di isocronia cercata. Analoga motivazione ha l'ipotesi iii). Se vi fossero più minimi, e tra loro qualche massimo, esisterebbero livelli di energia in corrispondenza dei quali il moto non sarebbe periodico. La condizione iv) permette di ottenere una risposta semplice e viene assunta essenzialmente per questa ragione.

In queste condizioni si prova la seguente

**Proposizione 4.7.** *Se le condizioni i), ..., iv) sono soddisfatte e  $T(E)$  è indipendente da  $E$ , allora esiste  $k > 0$  tale che*

$$V(x) = \frac{1}{2}kx^2.$$

Dim. La restrizione di  $x \rightarrow V(x)$  ad  $\mathbb{R}^+$  è monotona crescente, poiché l'origine è l'unico punto critico. Denotiamo con  $v \rightarrow \xi(v)$  l'inversa di tale restrizione. Cioè

$$\xi : v \in \mathbb{R}^+ \rightarrow \xi(v) \in \mathbb{R}^+, \quad \xi(V(x)) = x, \quad x > 0$$

Tale funzione è differenziabile per  $v > 0$  in quanto

$$\xi'(v) = \frac{1}{V'(\xi(v))}$$

e  $V' = 0$  solo in  $x = 0$ . Ha quindi senso il cambio di variabile  $x \rightarrow v$ . Si ha infatti  $dx = \xi'(v)dv$ . In tale cambio di variabili, 0 è trasformato in 0 e  $x_{+,E}$  in  $E$ .



Pertanto

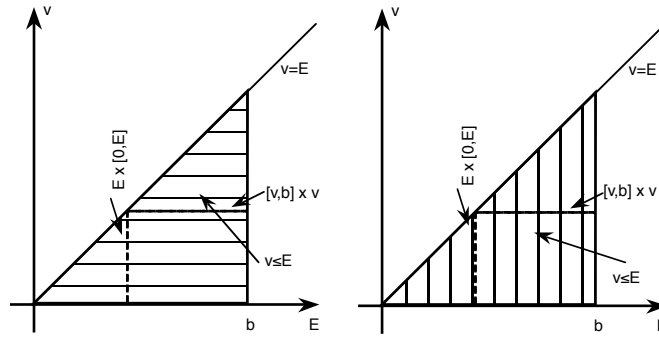
$$T_+(E) := \sqrt{2m} \int_0^{x_+, E} \frac{dx}{\sqrt{E - V(x)}} = \sqrt{2m} \int_0^E \frac{\xi'(v)dv}{\sqrt{E - v}}. \quad (4.20)$$

Si fissi ora  $b > 0$ , si divida (4.20) per  $\sqrt{b - E}$  e si integri sull'intervallo  $[0, b]$ . Si ha

$$\int_0^b \frac{T_+(E)dE}{\sqrt{b - E}} = \sqrt{2m} \int_0^b dE \int_0^E \frac{\xi'(v)dv}{\sqrt{(b - E)(E - v)}}.$$

Poiché il dominio in figura 3

Figura 3



$$\{(E, v) | E \in [0, b], v \in [0, E]\}$$

può rappresentarsi anche come

$$\{(E, v) | v \in [0, b], E \in [v, b]\},$$

scambiando l'ordine di integrazione si ha anche

$$\int_0^b \frac{T_+(E)dE}{\sqrt{b - E}} = \sqrt{2m} \int_0^b dv \xi'(v) \int_v^b \frac{dE}{\sqrt{(b - E)(E - v)}}.$$

L'integrale in  $E$  vale  $\pi$ , come mostrato in precedenza, e pertanto

$$\int_0^b \frac{T_+(E)dE}{\sqrt{b - E}} = \sqrt{2m} \pi \xi(b).$$

Usiamo ora la condizione iv). Essa implica che

$$T(E) = 2T_+(E)$$

e quindi

$$\int_0^b \frac{T(E)dE}{\sqrt{b-E}} = 2\sqrt{2m}\pi\xi(b). \quad (4.21)$$

Ma  $T(E)$  non dipende da  $E$  e quindi il membro di sinistra vale  $2T\sqrt{b}$ . In conseguenza

$$\xi(b) = \frac{T}{\pi\sqrt{2m}}\sqrt{b},$$

invertendo la quale si ha

$$V(x) = 2m\frac{\pi^2}{T^2}x^2 = \frac{1}{2}kx^2,$$

con

$$k = m\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 = m\omega^2.$$

□

*Osservazione 1:* Si osservi che in assenza della condizione iv), in luogo della  $v \rightarrow \xi(v)$  si sarebbero dovute introdurre due funzioni inverse, una per  $x < 0$  ed una per  $x > 0$ , e le equazioni ottenute non sarebbero state sufficienti a determinarle entrambe. L'assunzione iv) riducendo il numero di incognite permette una soluzione ben definita.

*Osservazione 2:* Si osservi inoltre che quello appena discusso è un esempio di *problema inverso*: assegnata la classe di moti, cioè le oscillazioni isocrone, calcolare la legge di forza che li determina.

*Osservazione 3:* Il metodo è applicabile piú in generale. Sotto l'assunzione che il potenziale sia pari, la (4.21) fornisce il potenziale qualunque sia la funzione  $E \rightarrow T(E)$ , a patto che l'integrale abbia senso. Ad esempio, si supponga che essa sia data da,

$$E \rightarrow T(E) = aE^\alpha,$$

per  $a > 0$  ed  $\alpha$  reale. Si ha

$$\xi(b) = \frac{1}{2\sqrt{2m}\pi} \int_0^b \frac{T(E)dE}{\sqrt{b-E}} = \frac{a}{2\sqrt{2m}\pi} \int_0^b \frac{E^\alpha dE}{\sqrt{b-E}}. \quad (4.22)$$

Ponendo  $y = E/b$  nell'integrale,  $\sqrt{b-E} = \sqrt{b}\sqrt{1-y}$ ,  $dE = bdy$ ,  $E^\alpha = b^\alpha y^\alpha$  e quindi

$$\xi(b) = \frac{a}{2\sqrt{2m}\pi} b^{\alpha+1/2} \int_0^1 \frac{y^\alpha dy}{\sqrt{1-y}} = \frac{aC_\alpha}{2\sqrt{2m}\pi} b^{\alpha+1/2}, \quad (4.23)$$

con

$$C_\alpha = \int_0^1 \frac{y^\alpha dy}{\sqrt{1-y}}.$$

Pertanto

$$V(x) = \left[ \frac{2\sqrt{2m\pi}}{aC_\alpha} \right]^{2/(2\alpha+1)} x^{2/(2\alpha+1)}.$$

Il caso  $\alpha = 0$  è quello già discusso. Il caso  $\alpha = -1/2$  è singolare in quanto  $\xi(v)$  è costante e non monotono. Allo stesso modo i casi  $\alpha < -1/2$  sono singolari poiché  $\xi(v)$  risulta decrescente, mentre deve essere crescente per ipotesi. Se

$$\alpha = \frac{1}{k} - \frac{1}{2},$$

il risultato è

$$V(x) = C|x|^k.$$

In particolare, per  $\alpha = -1/4$ , si ha  $k = 4$ .

Il procedimento usato si presta alternativamente al calcolo del periodo di un assegnato potenziale, tramite l'uso della (4.20), quando l'integrale è valutabile esplicitamente. Ad esempio, se  $V(x) = |x|^n$  e quindi  $\xi(v) = v^{1/n}$  e

$$\xi'(v) = \frac{1}{n} v^{(1-n)/n}.$$

Si ha

$$T(E) = 2\sqrt{2m} \int_0^E \frac{\xi'(v) dv}{\sqrt{E-v}} = \frac{2\sqrt{2m}}{n} \int_0^E \frac{v^{(1-n)/n} dv}{\sqrt{E-v}}.$$

Posto  $y = v/E$ , si ha

$$T(E) = \frac{2\sqrt{2m}}{n} E^\alpha C_n$$

dove

$$C_n = \int_0^1 dy \frac{1}{y^{(n-1)/n} (1-y)^{1/2}}$$

e

$$\alpha = 1 - \frac{1}{2} - \frac{n-1}{n} = \frac{1}{n} - \frac{1}{2}.$$

In particolare, per  $n = 2$  si riottiene l'isocronia delle oscillazioni armoniche, per  $n = 4$ ,  $\alpha = -1/4$ , come si era già visto.

L'argomento precedente è in grado di determinare l'andamento di  $T$  in funzione dell'energia con accuratezza. Il calcolo effettivo di  $T(E)$  richiede però la conoscenza di  $C_n$ , che è finita per ogni  $n > 0$ , ma il cui valore è il valore di una funzione speciale, la funzione  $\Gamma$ , che è tabulata sui manuali di funzioni speciali.

#### 4.5 Potenziali singolari.

In precedenza si è sempre assunto il potenziale definito in tutto  $\mathbb{R}$ . Spesso nelle applicazioni il potenziale presenta delle singolarità, nel senso che esso non è definito in alcuni punti di  $\mathbb{R}$ . Per fissare le idee supponiamo che  $x_* \in \mathbb{R}$  sia uno di questi punti, che  $V$  sia dotata di derivate seconde limitate in ogni insieme che esclude  $x_*$  e che in  $x_*$  i limiti destro o sinistro di  $V$  in  $x_*$  sono non finiti e possono essere distinti.

Naturalmente questo non esaurisce le possibili singolarità di  $V$ , ma esse rappresentano i casi più significativi. In entrambi i casi è chiaro che il problema ai valori iniziali è mal posto per  $x_0 = x_*$ , in quanto la forza risulta non definita in  $x_*$  e quindi l'equazione non ha senso, almeno nelle variabili usate. Supponiamo pertanto che  $x_0 \neq x_*$ . Il problema è in questo caso ben posto, ma resta da stabilire se la soluzione sia globale o locale nel tempo. Fissato un livello di energia  $E$ , sia  $I$  l'intervallo ove  $V(x) \leq E$  cui appartiene  $x_0$ . Se  $x_*$  non è in  $I$ , per il moto valgono le stesse conclusioni tratte nel caso di potenziali regolari. Difatti, poiché il moto è confinato nell'intervallo  $I$ , la presenza della singolarità in  $x_*$  è irrilevante ai fini del moto del sistema. Più esplicitamente, sia  $\hat{V}$  una funzione dotata di due derivate limitate in  $\mathbb{R}$ , definita come segue:

$$\hat{V}(x) = \begin{cases} V(x) & \text{se } x \in I \\ \text{arbitrariamente} & \text{se } x \notin I \end{cases}.$$

Il moto corrispondente al livello di energia  $E$  con  $x_0$  in  $I$  è lo stesso sotto l'azione del potenziale  $V$  e del potenziale  $\hat{V}$ , poiché sotto l'azione di entrambi esso si svolge in  $I$  dove i due potenziali coincidono.

La situazione è diversa se  $x_* \in I$ . In tal caso infatti, salvo situazioni particolari<sup>(7)</sup>, esisterà un tempo  $t_e > 0$  tale che

$$\lim_{t \rightarrow t_e} x(t) = x_*.$$

Se, ad esempio,  $x_0 > x_*$ , il tempo  $t_e$  è dato da

$$t_e = -\sqrt{\frac{m}{2}} \int_{x_0}^{x_*} \frac{dx}{\sqrt{E - V(x)}}.$$

In tal caso l'equazione perde di senso a tempi successivi e ne consegue la sola esistenza locale.

Un esempio tipico di potenziale singolare è dato dalla funzione potenziale

$$V(x) = \frac{k}{|x|}, \quad x \neq 0.$$

---

<sup>(7)</sup> Se ad esempio vi è un punto critico  $x_c > x_*$ ,  $E = V(x_c)$  e  $v_0 > 0$ , allora il moto è a meta asintotica verso  $x_c$  e la presenza di una singolarità in  $x_*$  non altera le considerazioni fatte a tale proposito.

Il comportamento è molto diverso nei due casi  $k < 0$  e  $k > 0$ .

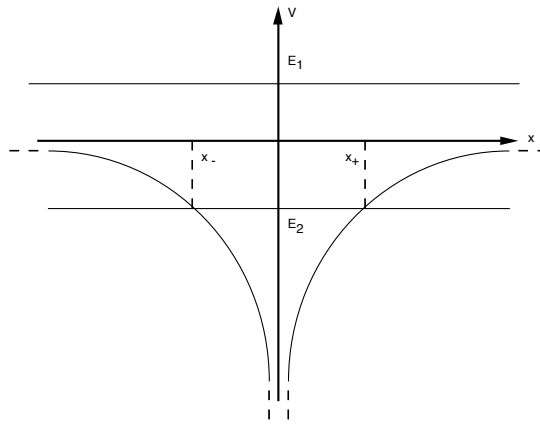
*Caso  $k < 0$ .*

Assumiamo un'energia  $E > 0$ , come nel caso del livello  $E_1$ . Per fissare le idee, sia  $x_0 > 0$ .

Se  $v_0 > 0$ , il moto è progressivo perché non vi sono istanti di arresto e raggiunge l'infinito in un tempo infinito, dal momento che

$$t = \sqrt{\frac{m}{2}} \int_{x_0}^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{E - k|x|^{-1}}} = +\infty$$

in quanto la funzione integranda non è infinitesima per  $x \rightarrow +\infty$ .



Se  $v_0 < 0$ , il moto è inizialmente retrogrado e tale rimane, poiché non vi sono istanti di arresto, fino all'eventuale tempo  $t_1$  in corrispondenza del quale il punto raggiunge l'origine. Per valutarlo, notiamo che

$$t_1 = -\sqrt{\frac{m}{2}} \int_{x_0}^0 \frac{dx}{\sqrt{E - k|x|^{-1}}}$$

è limitato in quanto la funzione integranda è limitata in  $[0, x_0]$ . Pertanto la soluzione perde di senso dopo un tempo finito.

Assumiamo ora  $E < 0$ , come nel caso del livello  $E_2$ , ed  $x_0 > 0$ . In tal caso il moto per  $v_0 < 0$  ha le stesse caratteristiche del caso precedentemente trattato, mentre per  $v_0 > 0$  il moto inizialmente progressivo ha un istante di arresto  $t_1$  quando raggiunge  $x_+$ . Successivamente il moto diviene retrogrado e siamo di nuovo nella situazione precedente. Quindi la soluzione perde in ogni caso di senso dopo un tempo finito.

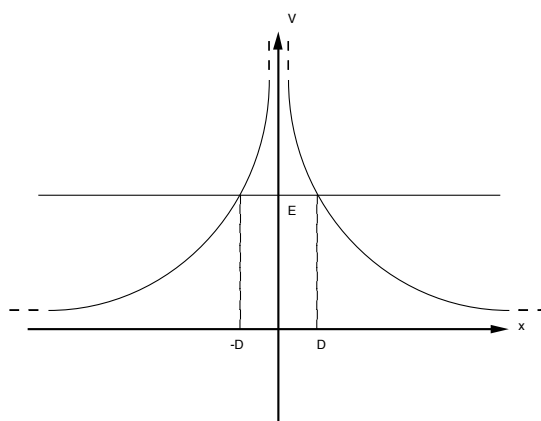
Il caso  $E = 0$  separa i due regimi. In corrispondenza di  $E = 0$  il moto ha le stesse caratteristiche del caso  $E > 0$ , salvo il fatto che, nel caso  $v_0 > 0$ , il

punto materiale raggiunge l'infinito con velocità nulla, per cui l'energia  $E = 0$  è la minima energia necessaria per raggiungere l'infinito. Per avere  $E = 0$  è necessario scegliere  $v_0$  pari a  $\sqrt{2|k|/m|x_0|}$ . È per questo motivo che la quantità

$$v_f = \sqrt{\frac{2|k|}{m|x_0|}}$$

prende il nome di *velocità di fuga*, cioè la più piccola velocità positiva che occorre imprimere inizialmente al punto materiale perché possa raggiungere l'infinito.

Caso  $k > 0$ .



Gli unici livelli di energia possibile sono  $E > 0$ . Supponiamo  $x_0 > 0$ .

Se  $v_0 > 0$ , il moto non ammette istanti di arresto e pertanto raggiunge l'infinito in un tempo infinito, essendo inferiormente limitato.

Se  $v_0 < 0$ , il moto inizialmente retrogrado ha un istante di arresto  $t_1$  finito quando raggiunge  $x = D$ , dove il moto si inverte e ritorniamo alla situazione precedente. Si ha

$$D = \frac{2k}{mv_0^2 + k/x_0}.$$

Il numero  $D$  prende il nome di *distanza di massimo avvicinamento* all'origine.

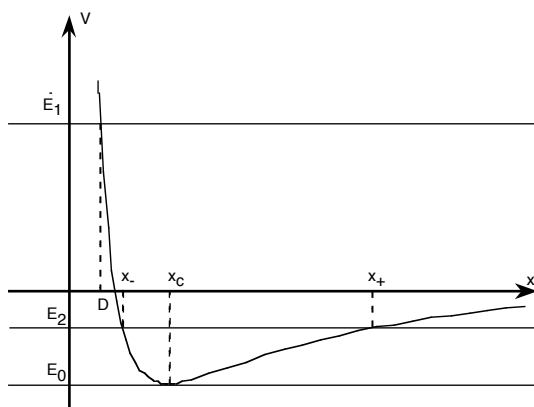
Un altro potenziale che è spesso studiato è quello che si ottiene combinando una parte repulsiva con una attrattiva.

Sia ad esempio,

$$V(x) = -\frac{k}{|x|} + \frac{d}{|x|^2}.$$

Supponiamo  $k > 0$  e  $d > 0$ , visto che  $d \leq 0$  non comporta modifiche significative rispetto ai casi già discussi. Per simmetria basta discutere il caso  $x > 0$ . Il grafico del potenziale per  $x > 0$  è qualitativamente dato nella figura che segue.

Infatti, per  $x \rightarrow 0$ ,  $V(x) \rightarrow +\infty$ , mentre per  $x \rightarrow +\infty$ ,  $V(x) < 0$  e  $\lim_{x \rightarrow +\infty} V(x) = 0$ . Pertanto deve esistere un punto di minimo  $x_c$ . Il calcolo della derivata prima mostra che  $x_c = 2d/k$  e che la derivata seconda è in tal punto strettamente positiva. Risulta inoltre  $V(x_c) = -k^2/4d$ . Pertanto gli unici livelli di energia ammissibili sono  $E \geq -k^2/4d$ . In particolare,  $E_0 = -k^2/4d$  è l'unico livello critico, corrispondente ad un minimo dell'energia potenziale e quindi si tratta di una posizione di equilibrio stabile.



Se  $E > 0$ , il punto raggiunge l'infinito dopo un eventuale istante di arresto ed inversione del moto (se  $v_0 < 0$ ). La distanza di massimo avvicinamento  $D$  è data in questo caso dalla soluzione positiva dell'equazione

$$-\frac{k}{D} + \frac{d}{D^2} = E$$

e quindi

$$ED^2 + kD - d = 0,$$

che implica

$$D = \frac{-k + \sqrt{k^2 + 4Ed}}{2E}.$$

Il livello  $E = 0$  è il piú basso per il quale il moto raggiunge l'infinito. In tal caso la distanza di massimo avvicinamento è  $D = d/k$ . La velocità corrispondente ad  $E = 0$  è la velocità di fuga

$$v_f = \sqrt{\frac{2(kx_0 - d)}{mx_0^2}}.$$

Se  $E \in (E_0, 0)$ , il moto è periodico ed avviene tra  $x_-$  ed  $x_+$ , dati rispettivamente da

$$x_- = \frac{k - \sqrt{k^2 - 4|E|d}}{2|E|}, \quad x_+ = \frac{k + \sqrt{k^2 - 4|E|d}}{2|E|}.$$

L'ampiezza delle oscillazioni è

$$\frac{x_+ - x_-}{2} = \frac{\sqrt{k^2 - 4|E|}d}{2|E|}.$$

Per  $E \rightarrow E_0 = -k^2/4d$ , l'ampiezza di oscillazione va a 0.

Il periodo di oscillazione è

$$\begin{aligned} T(E) &= 2\sqrt{\frac{m}{2}} \int_{x_-}^{x_+} \frac{dx}{\sqrt{E - V(x)}} = 2\sqrt{\frac{m}{2}} \int_{x_-}^{x_+} \frac{xdx}{\sqrt{x^2(E - V(x))}} \\ &= 2\sqrt{\frac{m}{2}} \int_{x_-}^{x_+} \frac{xdx}{\sqrt{|E|(x_+ - x)(x - x_-)}}. \end{aligned}$$

Poiché  $x_- \leq x \leq x_+$ , risulta

$$\begin{aligned} 2\sqrt{\frac{m}{2}}x_- \int_{x_-}^{x_+} \frac{dx}{\sqrt{|E|(x_+ - x)(x - x_-)}} &\leq T(E) \\ &\leq 2\sqrt{\frac{m}{2}}x_+ \int_{x_-}^{x_+} \frac{dx}{\sqrt{|E|(x_+ - x)(x - x_-)}}. \end{aligned}$$

Usando il calcolo dell'integrale (4.18), si ha pertanto

$$2\pi\sqrt{\frac{m}{2|E|}}x_- \leq T(E) \leq 2\pi\sqrt{\frac{m}{2|E|}}x_+.$$

Quando  $E \rightarrow E_0$ ,  $x_{\pm} \rightarrow x_c = 2d/k$  e pertanto

$$\lim_{E \rightarrow E_0} T(E) = \frac{4\pi d}{k} \sqrt{\frac{m}{2|E_0|}} = \frac{4\pi\sqrt{2md^3}}{k^2}.$$



## 5. Problemi con attrito.

### 5.1 Dissipazione dell'energia.

Nell'analisi dei moti reali, l'assunzione di forze conservative è poco realistica poiché il punto materiale interagisce con l'ambiente, dando luogo a fenomeni di dissipazione dell'energia. Le forze che corrispondono a tali effetti sono dette *forze di attrito*. L'interazione tra il punto materiale e l'ambiente è molto complicata e dipende da molti fattori ed in particolare dalla struttura microscopica dei corpi che costituiscono l'ambiente, dalle loro temperature e da molti altri elementi che non possono essere descritti in modo soddisfacente da una teoria puramente meccanica. È quindi necessario introdurre un *modello* di forza di attrito. Con ciò si intende una legge di forza di carattere empirico, che in situazioni concrete approssimi sufficientemente bene le azioni effettive ed in ogni caso manifesti le caratteristiche principali degli attriti reali. Le situazioni che abbiamo in mente corrispondono alla resistenza esercitata dall'aria al moto di un punto materiale. Un buon modello di una tale forza di attrito deve essere costituito da una legge di forza con la proprietà che essa si oppone al moto e quindi è diretta nel verso opposto alla velocità. Assumeremo inoltre che essa si annulli quando il punto materiale è a riposo. Diremo *forza viscosa* una tale forza. Assumendo, come ragionevole, proprietà di isotropia del mezzo nel quale avviene il moto, sceglieremo la legge di forza

$$f_a(x, v) = -A(x, |v|)v, \quad (5.1)$$

ove la funzione  $A(x, |v|)$  è positiva. Il più semplice esempio di questa natura (ed anche l'unico che tratteremo in dettaglio) è quello dell'*attrito lineare*, che corrisponde ad assumere  $A(x, |v|) = h$ , con  $h > 0$ , indipendente da  $x$  e  $|v|$ , detto *coefficiente di viscosità*. Una tale assunzione fornisce un modello soddisfacente quando sono coinvolte velocità sufficientemente basse, mentre ad alte velocità occorre utilizzare potenze più alte della velocità.

Modificheremo pertanto la legge di forza assumendo

$$f = -\nabla V - hv. \quad (5.2)$$

e quindi le equazioni del moto si scrivono:

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= -\nabla V(x) - h\dot{x}, \\ x(0) &= x_0, \quad \dot{x}(0) = v_0, \end{aligned} \quad (5.3)$$

con  $x, x_0, v, v_0 \in \mathbb{R}^3$  ed  $h > 0$ . In tale situazione l'energia non è più conservata. Infatti, moltiplicando scalarmente la prima delle (5.3) per  $\dot{x}$  e ricordando che

$$E(x, v) = \frac{1}{2}mv^2 + V(x), \quad (5.4)$$

e che

$$\frac{d}{dt}E(x(t), \dot{x}(t)) = m\dot{x}(t) \cdot \ddot{x}(t) + \nabla V(x(t)) \cdot \dot{x}(t),$$

si ha

$$\frac{d}{dt}E(x(t), \dot{x}(t)) = -h(\dot{x}(t))^2. \quad (5.5)$$

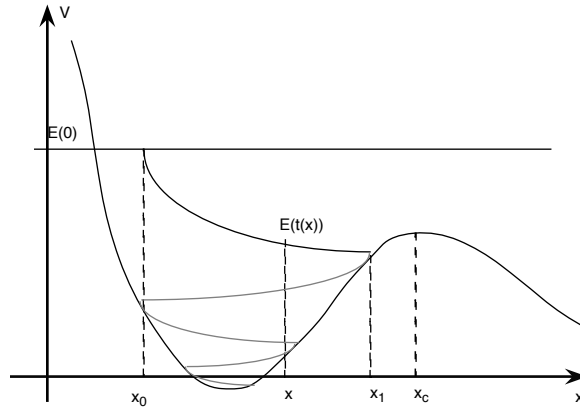
Ne consegue che la funzione  $E(t) = E(x(t), \dot{x}(t))$  è monotona non crescente e strettamente decrescente quando  $\dot{x} \neq 0$ .

Nel caso unidimensionale è possibile discutere più dettagliatamente il comportamento dell'energia.

Fissiamo le idee supponendo ad esempio  $v_0 > 0$  e limitiamoci a considerare il moto nella prima fase, quella di moto progressivo. Sia  $t_1$  come al solito il primo istante di arresto e, dato  $x > x_0$ , sia  $t(x)$  il tempo necessario per raggiungere  $x$  nella fase di iniziale moto progressivo. Poiché l'energia non è conservata, denoteremo con  $\tilde{E}(x)$  l'energia del punto materiale quando raggiunge  $x$  al tempo  $t(x)$ . Pertanto

$$\tilde{E}(x) = E(t(x)).$$

Il significato della funzione  $\tilde{E}(x)$  è illustrato dalla figura che segue.



Denotiamo con  $x_1$  il più piccolo  $x > x_0$  tale che  $\tilde{E}(x) = V(x)$ . In corrispondenza di  $x_1$  si avrà un istante di arresto ed un'inversione del moto. Per determinare un'equazione per la funzione  $x \rightarrow \tilde{E}(x)$  per  $x \in (x_0, x_1)$ , notiamo che

$$\frac{d}{dx}\tilde{E}(x) = \frac{dE}{dt}(t(x))t'(x).$$

D'altra parte, nell'intervallo  $(x_0, x_1)$  la funzione  $x \rightarrow t(x)$  è monotona crescente ed è l'inversa della funzione  $t \rightarrow x(t)$  ristretta all'intervallo  $(0, t_1)$ . Pertanto si ha

$$t'(x) = \frac{1}{\dot{x}(t(x))}.$$

Conseguentemente, usando (5.5),

$$\frac{d}{dx}\tilde{E}(x) = -h\dot{x}(t(x)).$$

D'altra parte

$$\dot{x}(t(x)) = \sqrt{\frac{2}{m}(E(t(x)) - V(x))} = \sqrt{\frac{2}{m}(\tilde{E}(x) - V(x))}$$

e quindi

$$\frac{d}{dx}\tilde{E}(x) = -h\sqrt{\frac{2}{m}(\tilde{E}(x) - V(x))}. \quad (5.6)$$

In forma integrale

$$\tilde{E}(x) = E_0 - h \int_{x_0}^x dx' \sqrt{\frac{2}{m}(\tilde{E}(x') - V(x'))}, \quad x \in (x_0, x_1). \quad (5.7)$$

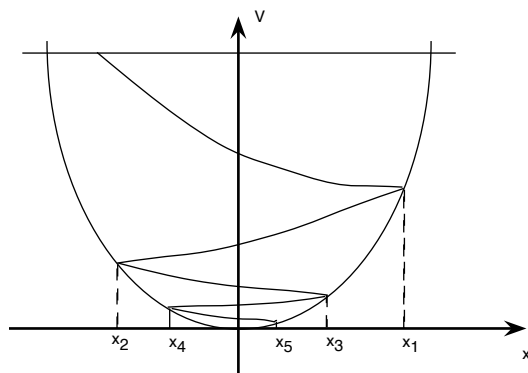
Naturalmente, se inizialmente  $v_0 < 0$ , l'argomento rimane corretto a meno di riaggiustamenti di segno e l'equazione (5.7) si scrive in generale

$$\tilde{E}(x) = E_0 - h \left| \int_{x_0}^x dx' \sqrt{\frac{2}{m}(\tilde{E}(x') - V(x'))} \right|, \quad x \in (x_0, x_1). \quad (5.8)$$

Prendendo  $x_1$  e  $t_1$  come nuovi punti iniziali, l'argomento può essere ripetuto fino alla costruzione della curva tratteggiata che rappresenta l'andamento dell'energia nel secondo passaggio ecc...

## 5.2 Stabilità asintotica.

Si osservi che la situazione della figura corrisponde ad una particolare scelta del valore di  $h$ , a seguito della quale l'energia decresce piuttosto rapidamente. Scegliendo  $h$  opportunamente piccolo si potrebbe d'altra parte fare in modo che  $\tilde{E}(x)$  si mantenga maggiore di  $V(x_c)$  per ogni  $x \in (x_0, x_c)$ . In tal caso il moto successivo potrà risultare molto diverso dal caso precedente. In conclusione il comportamento del punto materiale dipende in generale molto dall'energia iniziale e dal valore del coefficiente di viscosità. D'altra parte, se l'energia iniziale è sufficientemente piccola, è da attendersi che il punto materiale si trovi per tempi lunghi nella posizione di minimo. Questa situazione è illustrata dalla figura seguente.



Una precisa formulazione di tale argomento intuitivo è fornito dalla seguente

**Proposizione 5.1** *Sia  $x \rightarrow V(x)$  inferiormente limitata e dotata di derivata seconda continua in  $\mathbb{R}$ . Sia inoltre  $x_*$  un punto di minimo stretto ed esista  $\delta > 0$  tale che  $V'(x) \neq 0$  per  $x \in (x_* - \delta, x_* + \delta)$ . Allora, per  $x_0$  e  $v_0$  sufficientemente piccoli e per ogni  $h > 0$  esiste il limite*

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = x_*. \quad (5.9)$$

Dim. Supporremo, senza perdita di generalità  $x_* = 0$  e  $V(0) = 0$ . La prima osservazione è che, se  $x_0$  e  $v_0$  sono sufficientemente piccoli, possiamo restringere la nostra attenzione all'intervallo  $(-\delta, \delta)$ . Infatti, fissato  $R < \delta$  e detta  $\Sigma = \{(x, v) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + v^2 = R^2\}$  ed

$$e = \min_{(x,v) \in \Sigma} E(x, v),$$

per la non crescita dell'energia, l'insieme  $\{(x, v) \in \mathbb{R}^2 \mid E(x, v) < e\}$  è invariante per il moto. Detta  $W$  la sua componente connessa che contiene  $(0, 0)$ , assumeremo  $(x_0, v_0) \in W$ . Questo assicura che  $x(t) \in (-\delta, \delta)$  per ogni  $t > 0$ . Per brevità denotiamo con  $\xi$  la coppia  $(x, v)$  e con  $T_t \xi = \xi(t)$  la coppia  $(x(t; \xi), v(t; \xi))$  che rappresenta il moto conseguente al dato iniziale  $\xi$ . Poniamo

$$L(\xi) = \int_0^1 ds E(T_s \xi).$$

Notiamo che

$$L(T_t \xi) = \int_0^1 ds E(T_{t+s} \xi).$$

Inoltre risulta  $L(\xi) \geq 0$  per ogni  $\xi \in W$  e l'unico punto di  $W$  ove  $L(\xi) = 0$  è  $\xi = 0$ .  
Per ottenere la Proposizione 5.1 basta provare il seguente

**Lemma 5.2:** *Nelle ipotesi della Proposizione 5.1, per ogni  $h > 0$  risulta*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} L(\xi(t)) = 0 \quad (5.10)$$

Infatti, se si verifica la (5.10), per la positività di  $E$  in  $W$ , risulta

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} E(T_{t+s}\xi) = 0$$

per quasi tutti gli  $s \in [0, 1]$ . Tale condizione implica  $\xi(t) \rightarrow (0, 0)$  per  $t \rightarrow +\infty$  in quanto  $x = 0$  è il minimo in  $(-\delta, \delta)$  e questo conclude la prova della Proposizione 5.1.  $\square$

Dim. del Lemma 5.2. Si noti che

$$\sigma(\xi) := \left. \frac{d}{dt} L(T_t \xi) \right|_{t=0} = \int_0^1 ds \left. \frac{d}{dt} E(T_{t+s} \xi) \right|_{t=0} = -h \int_0^1 ds v(s; \xi)^2. \quad (5.11)$$

Il membro di destra di (5.11) è negativo per ogni  $\xi \in W - \{(0, 0)\}$ . Per provarlo, anzitutto ricordiamo che, se  $\xi \neq (0, 0)$ , allora  $T_t \xi \neq (0, 0)$  per ogni  $t$ . D'altra parte, se esiste  $s \in (0, 1)$  tale che  $v(s) = 0$ , risulta  $\dot{v}(s) \neq 0$  in quanto  $\dot{v}(s) = -m^{-1}V'(x(s))$  e  $V'(x(s)) \neq 0$  essendo  $x(s) \in (-\delta, \delta) - \{0\}$ . Vi è quindi  $s' > s$  tale che  $v(s') \neq 0$  e, per continuità,  $v$  è non nulla in un intorno di  $s'$ . Quindi l'integrale di  $v^2$  è strettamente positivo.  $L(\xi(t))$  è allora decrescente in  $t$  e, essendo non negativa, ammette certamente limite non negativo per  $t \rightarrow +\infty$ . Supponiamo per assurdo che  $\lim_{t \rightarrow +\infty} L(\xi(t)) = a > 0$ . Sempre per la monotonia, il moto avviene nell'insieme  $A = \{\xi \in W \mid L(\xi) \geq a\}$ . Si osservi inoltre che  $(0, 0) \notin \bar{A}$  in quanto, se ad un istante  $\bar{t}$  il punto  $\xi(\bar{t})$  fosse in un intorno arbitrariamente piccolo di  $(0, 0)$ , per la continuità e la non decrescenza di  $E$ , sarebbe  $E(T_s \xi(\bar{t})) < a$  per ogni  $s \geq 0$  e quindi  $L(\xi(\bar{t})) < a$ , contro la definizione dell'insieme  $A$ . Per la compattezza di  $\bar{A}$ , essendo  $\sigma(\xi)$  continua su  $\bar{A}$ , esiste  $\kappa > 0$  tale che

$$\sup_{\xi \in A} \sigma(\xi) = -\kappa < 0.$$

Infatti,  $\sup_{\xi \in A} \sigma(\xi) = \max_{\xi \in \bar{A}} \sigma(\xi)$  ed il massimo è certamente negativo poiché  $(0, 0) \notin \bar{A}$ . Si ha quindi

$$L(\xi(t)) - L(\xi(0)) = \int_0^t ds \sigma(\xi(s)) \leq -\kappa t.$$

Pertanto  $L(\xi(t))$  tende a  $-\infty$ , per  $t \rightarrow +\infty$  e questo è assurdo perché  $L(\xi) \geq 0$  in  $W$ . Questo completa la dimostrazione del Lemma 5.2.  $\square$

*Osservazione:* L'ipotesi sul non annullarsi della derivata prima in un intorno del minimo, che si può esprimere richiedendo che il minimo sia *isolato*, è cruciale nella dimostrazione. La funzione potenziale, definita da

$$V(x) = \begin{cases} e^{-1/|x|} \left( x^2 + \sin^2 \frac{1}{x} \right) & \text{se } x \neq 0, \\ 0 & \text{se } x = 0, \end{cases}$$

fornisce un esempio di punto di minimo ( $x = 0$ ) non isolato, in quanto esiste una successione  $x_n$  di minimi che converge a  $x = 0$ . In tal caso non è possibile trovare  $\delta > 0$  tale che  $V'(x) \neq 0$  per  $x \in (-\delta, \delta)$ . È chiaro che a seconda della scelta di  $h$  ed  $E(0)$ , il punto potrà rimanere ad un certo istante intrappolato nella buca tra due massimi che circondano un minimo secondario e quindi  $x(t)$  convergerà a tale minimo e non ad  $x = 0$ .

Un punto  $x_*$  tale che, se  $(x_0, v_0) \in A$ ,  $\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = x_*$  si dice *attraattivo* per l'insieme  $A$ . La Proposizione 5.1 asserisce pertanto che se  $x_*$  è un punto di minimo isolato, esso è attraattivo per un insieme di dati iniziali corrispondenti ad un'energia sufficientemente bassa. Si è anche visto in precedenza che in corrispondenza di un punto di minimo stretto del potenziale si ha una posizione di equilibrio stabile. Quando tale posizione è anche attraattiva per un suo intorno, si dice che è *asintoticamente stabile*. Pertanto una posizione di minimo stretto isolato è stabile ed è anche asintoticamente stabile in presenza di un attrito arbitrariamente piccolo.

### 5.3 Oscillatore armonico smorzato e forzato.

Come si è visto, il caso del potenziale quadratico, che dà luogo all'oscillatore armonico, è suscettibile di soluzione esplicita. Ciò è vero anche nel caso in cui sia presente un attrito lineare, nel qual caso si parla di *oscillatore armonico smorzato*. Nelle applicazioni è poi presente anche una forza preassegnata come funzione del tempo, spesso periodica, che dà luogo al problema di un *oscillatore armonico smorzato e forzato*. Tale problema costituisce spesso una approssimazione adeguata per più complessi problemi non lineari e pertanto è utile disporre di una descrizione completa del moto in tale caso. Considereremo pertanto il problema ai valori iniziali

$$\begin{aligned} m\ddot{x} + h\dot{x} + kx &= f(t), \\ x(t_0) &= x_0, \quad \dot{x}(t_0) = v_0. \end{aligned} \tag{5.12}$$

Tale problema si riconduce ad un sistema del primo ordine ponendo  $\dot{x} = v$ . Si ha quindi

$$\begin{aligned} \dot{x} &= v, \\ \dot{v} &= -\frac{h}{m}v - \frac{k}{m}x + \frac{f(t)}{m}, \\ x(t_0) &= x_0, \quad v(t_0) = v_0. \end{aligned} \tag{5.13}$$

Il problema (5.13) è un sistema di equazioni lineari che può risciversi nella forma

$$\begin{aligned} \dot{u} &= Au + \phi(t), \\ u(t_0) &= u_0 \end{aligned} \quad (5.14)$$

con  $u \in \mathbb{R}^2$  dato da  $(u_1, u_2) = (x, v)$ ,  $u_0 = (x_0, v_0)$ ,  $\phi(t) = (0, f(t)/m)$  e

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -k/m & -h/m \end{pmatrix}.$$

La soluzione generale del problema è data da

$$u(t) = \exp[A(t - t_0)]u_0 + \int_{t_0}^t ds \exp[A(t - s)]\phi(s). \quad (5.15)$$

Un'espressione più esplicita può ottenersi risolvendo il problema agli autovalori per  $A$ . Esso è

$$\det(A - z \mathbf{I}) = \det \begin{pmatrix} -z & 1 \\ -k/m & -z - h/m \end{pmatrix} = z(z + \frac{h}{m}) + \frac{k}{m} = 0,$$

che fornisce l'equazione caratteristica

$$mz^2 + hz + k = 0. \quad (5.16)$$

Posto  $\Delta = h^2 - 4km$ , le radici dell'equazione (5.16) sono reali se  $\Delta \geq 0$  e distinte se  $\Delta > 0$ . Pertanto se il coefficiente di viscosità è sufficientemente grande, le soluzioni dell'equazione caratteristica sono reali. Esse sono date da

$$z_- = -\frac{h}{2m} - \frac{\sqrt{h^2 - 4km}}{2m}, \quad z_+ = -\frac{h}{2m} + \frac{\sqrt{h^2 - 4km}}{2m}, \quad (5.17)$$

e sono entrambe negative. Siamo quindi in presenza di un nodo stabile. Detti  $u_+$  ed  $u_-$  gli autovettori corrispondenti, la soluzione si scrive

$$u(t) = \exp[A(t - t_0)]u_0 = a_1 e^{z_+(t-t_0)}u_+ + a_2 e^{z_-(t-t_0)}u_-, \quad (5.18)$$

con  $a_1$  ed  $a_2$  componenti di  $u_0$  nella base  $\{u_+, u_-\}$ . Non è però necessario determinare esplicitamente gli autovettori. È sufficiente infatti la loro esistenza per scrivere la (5.18). Per trovare l'espressione della soluzione in funzione dei dati iniziali basta procedere come segue: dalla (5.18) segue che

$$u_1(t) = x(t) = c_1 e^{z_+(t-t_0)} + c_2 e^{z_-(t-t_0)}, \quad (5.19)$$

con  $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$  opportunamente scelti. Perché le condizioni iniziali siano soddisfatte, basta imporre che l'espressione (5.19) soddisfi le condizioni iniziali, e cioè

$$\begin{aligned}x_0 &= c_1 + c_2, \\v_0 &= z_+ c_1 + z_- c_2.\end{aligned}$$

Quando  $z_+ \neq z_-$ , e quindi se  $\Delta > 0$ , tale sistema lineare è risolubile in modo unico e si trova:

$$c_1 = \frac{v_0 - z_- x_0}{z_+ - z_-}, \quad c_2 = \frac{z_+ x_0 - v_0}{z_+ - z_-}$$

e quindi

$$x(t) = \frac{(z_+ e^{z_-(t-t_0)} - z_- e^{z_+(t-t_0)})}{z_+ - z_-} x_0 + \frac{e^{z_+(t-t_0)} - e^{z_-(t-t_0)}}{z_+ - z_-} v_0.$$

Poiché sia  $z_+$  che  $z_-$  sono negative, si tratta in ogni caso di una soluzione che decade a 0 per  $t \rightarrow +\infty$ . Il moto, in assenza del termine forzante è quindi a meta asintotica verso l'origine. Derivando rispetto al tempo si ottiene l'espressione di  $u_2(t)$  e quindi si ha

$$\exp[At] = \frac{1}{z_+ - z_-} \begin{pmatrix} z_+ e^{z_- t} - z_- e^{z_+ t} & e^{z_+ t} - e^{z_- t} \\ z_+ z_- (e^{z_- t} - e^{z_+ t}) & z_+ e^{z_+ t} - z_- e^{z_- t} \end{pmatrix} \quad (5.20)$$

Usando poi la (5.15), si ottiene una soluzione particolare del problema non omogeneo nella forma

$$\hat{x}(t) = \frac{1}{m(z_+ - z_-)} \int_{t_0}^t ds f(s) [e^{z_+(t-s)} - e^{z_-(t-s)}] \quad (5.21)$$

e pertanto la soluzione generale del problema (5.12), nel caso  $\Delta > 0$  è data da

$$\begin{aligned}x(t) &= \frac{(z_+ e^{z_-(t-t_0)} - z_- e^{z_+(t-t_0)})}{z_+ - z_-} x_0 + \frac{e^{z_+(t-t_0)} - e^{z_-(t-t_0)}}{z_+ - z_-} v_0 \\ &+ \frac{1}{m(z_+ - z_-)} \int_{t_0}^t ds f(s) [e^{z_+(t-s)} - e^{z_-(t-s)}]\end{aligned}$$

Se  $\Delta = 0$ ,  $z_+ = z_- = z$ , cioè le due soluzioni coincidono e siamo nella situazione in cui la matrice  $A$  è dotata di un solo autovalore di molteplicità 2. In questo caso, detti  $h_1$  ed  $h_2$  i due vettori di base, certamente esistenti per il teorema di Jordan, tali che  $Ah_1 = zh_1$  e  $Ah_2 = zh_2 + h_1$ , ed  $a_1, a_2$  le componenti di  $u_0$  in  $\{h_1, h_2\}$ , risulta

$$u(t) = \exp[A(t-t_0)]u_0 = e^{z(t-t_0)} a_1 h_1 + e^{z(t-t_0)} a_2 h_2 (t-t_0). \quad (5.22)$$



Anche in questo caso non è necessario trovare esplicitamente  $h_1$  ed  $h_2$ . Basta infatti procedere come prima. La (5.22) implica

$$u_1(t) = x(t) = (c_1 + c_2(t - t_0))e^{z(t-t_0)}$$

per  $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$  opportunamente scelti. Imponendo le condizioni iniziali si ottiene

$$c_1 = x_0, \quad c_2 + zc_1 = v_0$$

e quindi

$$x(t) = x_0(1 - z(t - t_0))e^{z(t-t_0)} + v_0(t - t_0)e^{z(t-t_0)}.$$

La velocità  $v(t)$  è data da

$$v(t) = -x_0z^2(t - t_0)e^{z(t-t_0)} + v_0(1 + (t - t_0)z)e^{z(t-t_0)}.$$

Anche in questo caso si tratta di un decadimento verso 0 per  $t \rightarrow +\infty$ . Il moto è quindi a meta asintotica, verso l'origine, con al più un istante di arresto.

Si ha la seguente espressione per  $\exp[At]$ :

$$\exp[At] = \begin{pmatrix} 1 - zt & t \\ -z^2t & 1 + zt \end{pmatrix} e^{zt} \quad (5.23)$$

e la soluzione del problema non omogeneo è data da

$$x(t) = x_0(1 - z(t - t_0))e^{z(t-t_0)} + v_0(t - t_0)e^{z(t-t_0)} + \frac{1}{m} \int_{t_0}^t ds f(s)(t - s)e^{z(t-s)}. \quad (5.24)$$

Attrito debole.

Il caso più interessante si ha quando l'attrito è sufficientemente piccolo da rendere  $\Delta < 0$ . In questo caso l'equazione caratteristica ha due soluzioni complesse coniugate:

$$z_- = \alpha - i\sigma, \quad z_+ = \alpha + i\sigma,$$

con

$$\alpha = -\frac{h}{2m}, \quad \sigma = \frac{\sqrt{4km - h^2}}{2m}.$$

Detti come prima  $u_+$  ed  $u_-$  i due autovettori (complessi) della matrice  $A$ , corrispondenti agli autovalori  $z_+$  e  $z_-$ , e  $a_1, a_2$  le componenti di  $u_0$  nella base  $\{u_+, u_-\}$ , la soluzione è data dall'espressione

$$\begin{aligned} u(t) &= \exp[A(t - t_0)]u_0 = a_1e^{(\alpha+i\sigma)(t-t_0)}u_+ + a_2e^{(\alpha-i\sigma)(t-t_0)}u_- \\ &= a_1e^{\alpha(t-t_0)}[\cos \sigma(t - t_0) + i \sin \sigma(t - t_0)]u_+ \\ &\quad + a_2e^{\alpha(t-t_0)}[\cos \sigma(t - t_0) - i \sin \sigma(t - t_0)]u_-. \end{aligned}$$

Procedendo come prima, si ha pertanto

$$u_1(t) = x(t) = c_1 e^{(\alpha+i\sigma)(t-t_0)} + c_2 e^{(\alpha-i\sigma)(t-t_0)}, \quad (5.25)$$

con  $c_1$  e  $c_2$  numeri complessi opportuni. Poiché  $A$  è reale,  $u_+$  ed  $u_-$  sono complessi coniugati:  $\overline{u_+} = u_-$ , ove  $\bar{z}$  denota il complesso coniugato di  $z$ . D'altra parte,  $u_0$  è anch'esso reale e pertanto deve essere anche  $\overline{c_1} = c_2$ . Questo assicura che  $u_1(t)$  è reale per ogni  $t$ . Per soddisfare le condizioni iniziali è sufficiente imporre

$$c_1 + c_2 = x_0, \quad c_1(\alpha + i\sigma) + c_2(\alpha - i\sigma) = v_0.$$

Con la condizione che  $c_1$  e  $c_2$  siano complessi coniugati, posto  $c_1 = a + ib$ ,  $c_2 = a - ib$ , queste divengono:

$$2a = x_0, \quad 2(a\alpha - b\sigma) = v_0.$$

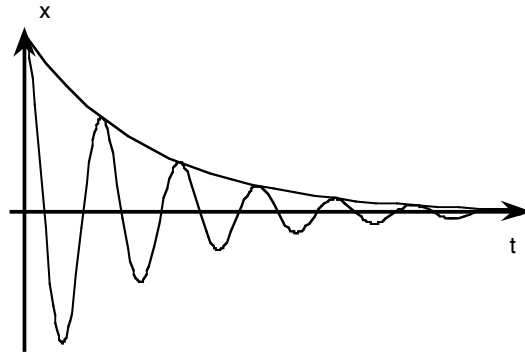
Si ha pertanto

$$a = \frac{x_0}{2}, \quad b = \frac{\alpha x_0 - v_0}{2}.$$

Quindi

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{\alpha(t-t_0)} \left[ \left( \frac{x_0}{2} + i \frac{\alpha x_0 - v_0}{2} \right) e^{i\sigma(t-t_0)} + \left( \frac{x_0}{2} - i \frac{\alpha x_0 - v_0}{2} \right) e^{-i\sigma(t-t_0)} \right] \\ &= e^{\alpha(t-t_0)} \left[ x_0 (\cos \sigma(t-t_0) - \frac{\alpha}{\sigma} \sin \sigma(t-t_0)) + \frac{v_0}{\sigma} \sin \sigma(t-t_0) \right] \end{aligned} \quad (5.26)$$

La seconda delle espressioni (5.26) mostra che il moto in assenza del termine forzante è oscillatorio anche in presenza di attrito. Tuttavia l'ampiezza delle oscillazioni decade esponenzialmente per  $t \rightarrow +\infty$ . L'andamento qualitativo è mostrato nella figura seguente.



L'espressione di  $\exp[At]$  è

$$\exp[At] = \frac{1}{\sigma} e^{\alpha t} \begin{pmatrix} \sigma \cos \sigma t - \alpha \sin \sigma t & \sin \sigma t \\ -(\sigma^2 + \alpha^2) \sin \sigma t & \alpha \sin \sigma t + \sigma \cos \sigma t \end{pmatrix} \quad (5.27)$$

Infine una soluzione particolare dell'equazione non omogenea si scrive

$$\hat{x}(t) = \frac{1}{m\sigma} \int_{t_0}^t ds f(s) e^{\alpha(t-s)} \sin \sigma(t-s).$$

Pertanto la soluzione generale, nel caso di attrito debole,  $\Delta < 0$  è

$$\begin{aligned} x(t) = & \frac{1}{\sigma} e^{\alpha(t-t_0)} [x_0(\sigma \cos \sigma(t-t_0) - \alpha \sin \sigma(t-t_0)) + v_0 \sin \sigma(t-t_0)] \\ & + \frac{1}{m\sigma} \int_{t_0}^t ds f(s) e^{\alpha(t-s)} \sin \sigma(t-s) \end{aligned} \quad (5.28)$$

#### 5.4 Forzante periodica.

Nelle applicazioni il termine forzante è una funzione periodica del tempo, di periodo  $T > 0$ . In altri termini, esiste  $T > 0$  tale che

$$f(t+T) = f(t) \quad \text{per ogni } t \in \mathbb{R}.$$

Il più piccolo  $T$  per cui tale relazione è verificata si dice periodo di  $f$ .

Nel caso di forzante periodica, è possibile analizzare il moto in modo più completo di quanto consenta in generale la (5.28), usando una tecnica detta *Analisi di Fourier*. Come si vede dalla (5.28), la soluzione è costituita da due termini: il primo, dipendente dai dati iniziali, diventa piccolo al tendere di  $t$  all'infinito, a causa del fattore  $e^{\alpha(t-t_0)}$ , con  $\alpha < 0$ . Pertanto il moto perde rapidamente memoria del dato iniziale e la soluzione si riduce alla parte dovuta al termine forzante. Nel seguito ci limiteremo alla discussione della soluzione particolare conseguente ad un termine forzante  $t \rightarrow f(t)$ , potendosi ricostruire la soluzione generale con l'aggiunta del *transiente* rappresentato dal primo termine della (5.28).

Per motivare l'introduzione dell'analisi di Fourier, cominciamo a considerare una particolare scelta della funzione  $t \rightarrow f(t)$ . Sia  $a \in \mathbb{R}$  e

$$f(t) = a \cos \frac{2\pi}{T} t.$$

Posto per brevità

$$\omega = \frac{2\pi}{T},$$

è opportuno considerare, invece della precedente  $f(t)$  la legge di forza

$$f(t) = ae^{i\omega t}, \quad (5.29)$$

convenendo di conservare, al termine del calcolo, solo la parte reale della soluzione. Si consideri ora la funzione  $t \rightarrow x(t) = ce^{i\omega t}$  con  $c \in \mathbb{C}$ . Poiché  $\dot{x} = i\omega x$ ,  $\ddot{x} = -\omega^2 x$ , si avrà che  $t \rightarrow x(t)$  è una soluzione particolare di (5.12) con  $f$  data da (5.29) se e solo se

$$(-m\omega^2 + ih\omega + k)ce^{i\omega t} = ae^{i\omega t}.$$

Poiché  $h > 0$  implica  $-m\omega^2 + ih\omega + k \neq 0$ , si può risolvere l'equazione precedente rispetto a  $c$  ottenendo:

$$c = \frac{a}{k + ih\omega - m\omega^2} \quad (5.30)$$

Ciò mostra che nel caso particolare (5.29) di un termine forzante periodico di forma sinusoidale, il comportamento asintotico della soluzione per tempi grandi, che è dato dalla soluzione particolare del problema, è anch'esso periodico con lo stesso periodo, anzi è sinusoidale, con ampiezza di oscillazione  $c$  data dalla (5.30), con un eventuale sfasamento dovuto al fatto che  $c$  non è reale.

Poiché per ogni  $n \in \mathbb{Z}$  la funzione  $e^{i\omega nt}$  è ancora periodica di periodo  $T$ , per ogni intero  $N > 0$ , la funzione

$$f_N(t) = \sum_{n=-N}^N \hat{f}_n e^{i\omega nt} \quad (5.31)$$

è periodica di periodo  $T$ . Poiché d'altra parte il problema (5.12) è *lineare*, l'argomento precedente può estendersi a ciascuno dei termini della somma (5.31) e produce la seguente espressione per la soluzione particolare di (5.12):

$$x(t) = \sum_{n=-N}^N \frac{\hat{f}_n}{k + in\omega h - m\omega^2 n^2} e^{i\omega nt}. \quad (5.32)$$

Ne consegue che *se il termine forzante è una somma finita di armoniche di periodo  $T$ , con coefficienti  $\hat{f}_n$ , data dalla (5.31), allora anche la soluzione particolare della (5.12) è dello stesso tipo, con coefficienti  $\hat{x}_n$  dati da*

$$\hat{x}_n = \frac{\hat{f}_n}{k + in\omega h - m\omega^2 n^2}. \quad (5.33)$$

## 5.5 Teorema di Fourier.

La conclusione precedente vale piú in generale grazie al teorema di Fourier, che consente di affermare che ogni funzione periodica dotata di sufficiente regolarità può approssimarsi con un'espressione del tipo (5.31) e che la convergenza è sufficientemente forte da permettere lo scambio di somme e derivate ogni volta che è necessario. Diamo qui di seguito l'enunciato del teorema di Fourier e la sua dimostrazione.

**Teorema 5.3 (di Fourier).** *Sia  $t \rightarrow f(t)$  una funzione periodica di periodo  $T$  e di classe  $C^\infty(1)$ . Allora esiste un'unica successione di numeri complessi  $\{\hat{f}_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ , detti **coefficienti di Fourier**, tali che la serie*

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}_n e^{i\omega n t}, \quad (5.34)$$

detta **serie di Fourier di  $f$** , converge assolutamente ed uniformemente per  $t \in \mathbb{R}$ . Inoltre, per ogni  $t \in \mathbb{R}$  la sua somma coincide con  $f(t)$ :

$$f(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}_n e^{i\omega n t}. \quad (5.35)$$

Se per ogni  $s$  intero positivo  $f^{(s)}$  denota la derivata  $s$ -esima di  $f$ , anche  $f^{(s)}$  ammette serie di Fourier convergente assolutamente ed uniformemente, con coefficienti  $(i\omega n)^s \hat{f}_n$  e risulta

$$\frac{d^s}{dt^s} f(t) = f^{(s)}(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} (i\omega n)^s \hat{f}_n e^{i\omega n t}. \quad (5.36)$$

I coefficienti  $\hat{f}_n$  hanno le seguenti proprietà:

i)

$$\hat{f}_n = \frac{1}{T} \int_0^T dt f(t) e^{-i\omega n t}; \quad (5.37)$$

ii) Per ogni  $p > 0$  si ha

$$\lim_{|n| \rightarrow \infty} (1 + |n|)^p |\hat{f}_n| = 0; \quad (5.38)$$

iii)

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} |\hat{f}_n|^2 = \frac{1}{T} \int_0^T dt |f(t)|^2; \quad (5.39)$$

---

(1) Si osservi che alcune parti del Teorema di Fourier valgono sotto ipotesi piú deboli. Qui si presenta per semplicità una versione meno generale che è però sufficiente per le applicazioni in Meccanica.

iv) Se  $f$  è reale, allora

$$\overline{\hat{f}_n} = \hat{f}_{-n}. \quad (5.40)$$

Dim. Notiamo anzitutto l'identità

$$\frac{1}{T} \int_0^T dt e^{i\omega(n-m)t} = \delta_{n,m}. \quad (5.41)$$

Essa segue immediatamente dal fatto che

$$\int_0^T dt \sin k\omega t = 0, \quad \int_0^T dt \cos k\omega t = 0,$$

per ogni intero  $k \neq 0$ .

Proveremo la (5.35) in seguito. Supponiamo per il momento che essa sia verificata, ed identifichiamo i coefficienti di Fourier in accordo alla i). Moltiplicando i due membri della (5.35) per  $e^{-i\omega mt}$  ed integrando sull'intervallo  $[0, T]$ , si ottiene:

$$\frac{1}{T} \int_0^T dt f(t) e^{-i\omega mt} = \frac{1}{T} \int_0^T dt e^{-i\omega mt} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}_n e^{i\omega nt}.$$

La convergenza uniforme consente di integrare termine a termine la somma e quindi, usando l'identità (5.41),

$$\frac{1}{T} \int_0^T dt f(t) e^{-i\omega mt} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}_n \frac{1}{T} \int_0^T dt e^{i\omega(n-m)t} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}_n \delta_{n,m} = \hat{f}_m,$$

che prova la i). Mostriamo ora che i coefficienti di Fourier verificano le ii), ..., iv).

Poiché la funzione  $f$  è dotata di derivata prima continua, si ha

$$\begin{aligned} \hat{f}_n &= \frac{1}{T} \int_0^T dt f(t) e^{-i\omega nt} = \frac{1}{-i\omega n} \frac{1}{T} \int_0^T dt f(t) (-i\omega n) e^{-i\omega nt} \\ &= \frac{1}{-i\omega n} \frac{1}{T} \int_0^T dt f(t) \frac{d}{dt} e^{-i\omega nt} \\ &= \frac{1}{-i\omega n} \frac{1}{T} f(t) e^{-i\omega nt} \Big|_0^T - \frac{1}{-i\omega n} \frac{1}{T} \int_0^T dt f'(t) e^{-i\omega nt} \\ &= \frac{1}{i\omega n} \frac{1}{T} \int_0^T dt f'(t) e^{-i\omega nt}, \end{aligned} \quad (5.42)$$

avendo integrato per parti ed usato la periodicità di  $f$ . Se  $f$  ha  $k$  derivate continue, iterando la (5.42)  $k$  volte, si ottiene

$$\hat{f}_n = \left(\frac{1}{i\omega n}\right)^k \frac{1}{T} \int_0^T dt f^{(k)}(t) e^{-i\omega n t}.$$

Detto

$$C_k = \sup_{t \in [0, T]} |f^{(k)}(t)|,$$

ne consegue

$$|\hat{f}_n| \leq C_k \left(\frac{1}{\omega|n|}\right)^k.$$

Poiché  $C_k$  è finito per ogni  $k$ , segue la ii)<sup>(2)</sup>.

Per provare iii) basta osservare che usando la (5.35), si ha

$$\frac{1}{T} \int_0^T dt |f(t)|^2 = \frac{1}{T} \int_0^T dt \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}_n e^{i\omega n t} \sum_{m \in \mathbb{Z}} \overline{\hat{f}_m} e^{-i\omega m t}.$$

Integrando termine a termine,

$$\frac{1}{T} \int_0^T dt |f(t)|^2 = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \sum_{m \in \mathbb{Z}} \hat{f}_n \overline{\hat{f}_m} \frac{1}{T} \int_0^T dt e^{i\omega(n-m)t}.$$

Usando di nuovo l'identità (5.41), si ha

$$\frac{1}{T} \int_0^T dt |f(t)|^2 = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \sum_{m \in \mathbb{Z}} \hat{f}_n \overline{\hat{f}_m} \delta_{n,m} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} |\hat{f}_n|^2.$$

Tutte le somme sono convergenti per ii) e ciò prova la iii).

Per ottenere la iv) basta considerare il complesso coniugato di (5.37):

$$\begin{aligned} \overline{\hat{f}_n} &= \overline{\frac{1}{T} \int_0^T dt f(t) e^{-i\omega n t}} = \frac{1}{T} \int_0^T dt \overline{f(t) e^{-i\omega n t}} \\ &= \frac{1}{T} \int_0^T dt f(t) e^{i\omega n t} \quad (f \text{ è reale}) \\ &= \frac{1}{T} \int_0^T dt f(t) e^{i\omega n t} = \frac{1}{T} \int_0^T dt f(t) e^{-i\omega(-n)t} = \hat{f}_{-n}. \end{aligned}$$

<sup>(2)</sup> Se invece di assumere  $f \in C^\infty([0, T])$ , si assume solo  $f \in C^k([0, T])$ , allora la ii) è vera solo per tutti i  $p < k$ . Una maggiore regolarità di  $f$  implica una maggiore velocità di convergenza degli  $\hat{f}_n$  per grandi  $|n|$ . In particolare, se  $f$  è infinitamente differenziabile, i coefficienti di Fourier vanno a 0 *più velocemente di qualunque potenza*

Useremo nel seguito l'espressione (5.37) che è stata derivata usando la (5.35), che ci prepariamo a dimostrare. Tuttavia l'argomento non è circolare in quanto esso ha solo valore euristico. Infatti, partendo dalla (5.35) si *suggerisce* l'espressione (5.37) per i coefficienti di Fourier. Indipendentemente da come tale espressione si è ottenuta, ha senso considerare la serie in (5.34) con gli  $\hat{f}_n$  dati dalla (5.37), anche se la (5.35) non è verificata. Si noti in particolare, che nella dimostrazione della ii), che è cruciale nel seguito della dimostrazione, non si è usata la (5.35) ma solo l'espressione (5.37). Poiché  $|e^{i\omega nt}| = 1$ , la ii) e l'infinita differenziabilità di  $f$  implicano che la serie (5.34) è assolutamente ed uniformemente convergente, in quanto il suo termine generale è maggiorato in modulo da una serie convergente. Resta pertanto da dimostrare che la somma della serie coincide con  $f(t)$  per ogni  $t \in [0, T]$ , e più precisamente

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{n=-N}^N \hat{f}_n e^{i\omega nt} = f(t) \quad \forall t \in [0, T].$$

Sia

$$f_N(t) := \sum_{n=-N}^N \hat{f}_n e^{i\omega nt}.$$

Si ha

$$\begin{aligned} f_N(t) &= \frac{1}{T} \sum_{n=-N}^N e^{i\omega nt} \int_0^T d\tau f(\tau) e^{-i\omega n\tau} \\ &= \frac{1}{T} \int_0^T d\tau f(\tau) \left( \sum_{n=-N}^N e^{i\omega n(t-\tau)} \right) = \frac{1}{T} \int_0^T d\tau f(\tau) z_N(t, \tau), \end{aligned} \quad (5.43)$$

con

$$z_N(t, \tau) := \sum_{n=-N}^N e^{i\omega n(t-\tau)} \quad (5.44)$$

**Lemma 5.4.** *Per ogni intero  $N \geq 0$*

$$z_N(t, \tau) = \begin{cases} \frac{\sin(N + 1/2)\omega(t - \tau)}{\sin(1/2)\omega(t - \tau)}, & \text{se } \tau \neq t + mT, \quad m \in \mathbb{Z}, \\ 2N + 1, & \text{se } \tau = t + mT, \quad m \in \mathbb{Z} \end{cases} \quad (5.45)$$

$$\frac{1}{T} \int_0^T d\tau z_N(t, \tau) = 1. \quad (5.46)$$

*Inoltre  $z_N(t, \tau)$  è una funzione infinitamente differenziabile.*



Dim. La (5.46) segue ovviamente dalla (5.41). La differenziabilità è ovvia poiché  $z_N(t, \tau)$  è una somma finita di funzioni differenziabili. Quando  $\tau = t + mT$ ,

$$e^{i\omega n(t-\tau)} = e^{inm2\pi} = 1$$

per ogni  $n$  e quindi il valore di  $z_N$  in corrispondenza di tali  $\tau$  è  $2N+1$ . Per ottenere la prima delle espressioni (5.45), ricordiamo che qualunque sia  $x \in \mathbb{C}$ ,  $x \neq 1$ ,

$$\sum_{n=1}^N x^n = \frac{x(1-x^N)}{1-x}.$$

Usando questa con  $x = e^{i\omega t}$ , oppure  $x = e^{-i\omega t}$  si ha

$$\begin{aligned} \sum_{n=-N}^N e^{i\omega n t} &= 1 + \sum_{n=1}^N e^{i\omega n t} + \sum_{n=1}^N e^{-i\omega n t} \\ &= \frac{e^{i\omega t}(1 - e^{i\omega N t})}{(1 - e^{i\omega t})} + \frac{e^{-i\omega t}(1 - e^{-i\omega N t})}{(1 - e^{-i\omega t})} + \frac{1 - e^{-i\omega t}}{1 - e^{-i\omega t}} \\ &= \frac{e^{i\omega t/2}(e^{i\omega t/2} - e^{i\omega(N+1/2)t})}{e^{i\omega t/2}(e^{-i\omega t/2} - e^{i\omega t/2})} + \frac{e^{-i\omega t/2}(e^{-i\omega t/2} - e^{-i\omega(N+1/2)t})}{e^{-i\omega t/2}(e^{i\omega t/2} - e^{-i\omega t/2})} \\ &\quad + \frac{e^{-i\omega t/2}(e^{i\omega t/2} - e^{-i\omega t/2})}{e^{-i\omega t/2}(e^{i\omega t/2} - e^{-i\omega t/2})} \\ &= \frac{e^{i\omega t/2} - e^{i\omega(N+1/2)t}}{e^{-i\omega t/2} - e^{i\omega t/2}} + \frac{e^{-i\omega t/2} - e^{-i\omega(N+1/2)t}}{e^{i\omega t/2} - e^{-i\omega t/2}} + \frac{e^{i\omega t/2} - e^{-i\omega t/2}}{e^{i\omega t/2} - e^{-i\omega t/2}} \\ &= \frac{e^{i\omega(N+1/2)t} - e^{i\omega t/2} + e^{-i\omega t/2} - e^{-i\omega(N+1/2)t} + e^{i\omega t/2} - e^{-i\omega t/2}}{e^{i\omega t/2} - e^{-i\omega t/2}} \\ &= \frac{e^{i\omega(N+1/2)t} - e^{-i\omega(N+1/2)t}}{e^{i\omega t/2} - e^{-i\omega t/2}} = \frac{\sin(N + 1/2)\omega t}{\sin(1/2)\omega t} \end{aligned}$$

Questo conclude la prova del Lemma 5.4.  $\square$

In conseguenza del Lemma 5.4 si ha

$$\begin{aligned} f_N(t) &= \frac{1}{T} \int_0^T d\tau f(\tau) z_N(t, \tau) = \\ &= \frac{1}{T} \int_0^T d\tau f(t) z_N(t, \tau) + \frac{1}{T} \int_0^T d\tau [f(\tau) - f(t)] z_N(t, \tau). \end{aligned}$$

Per la (5.46) il primo termine vale  $f(t)$  e quindi occorre far vedere che il secondo contributo è infinitesimo:

$$\mathcal{I}_N := \frac{1}{T} \int_0^T d\tau [f(\tau) - f(t)] z_N(t, \tau) \rightarrow 0.$$

Poiché

$$\sin(N+1/2)\omega(t-\tau) = \sin N\omega(t-\tau) \cos(1/2)\omega(t-\tau) + \cos N\omega(t-\tau) \sin(1/2)\omega(t-\tau),$$

per  $\tau \neq t + mT$ ,

$$z_N(t, \tau) = \cos N\omega(t-\tau) + \sin N\omega(t-\tau) \frac{\cos(1/2)\omega(t-\tau)}{\sin(1/2)\omega(t-\tau)}.$$

$$\mathcal{I}_N = \frac{1}{T} \int_0^T d\tau [f(\tau) - f(t)] \cos N\omega(t-\tau) + \mathcal{J}_N,$$

con

$$\mathcal{J}_N = \frac{1}{T} \int_0^T d\tau [f(\tau) - f(t)] \frac{\cos(1/2)\omega(t-\tau)}{\sin(1/2)\omega(t-\tau)} \sin N\omega(t-\tau).$$

Il primo contributo è

$$\frac{1}{T} \int_0^T d\tau [f(\tau) - f(t)] \cos N\omega(t-\tau) = \frac{\hat{f}_N + \hat{f}_{-N}}{2} - f(t) \frac{1}{T} \int_0^T d\tau \cos N\omega(t-\tau).$$

Il secondo termine si annulla per la periodicità ed il primo tende a 0 per la ii).

Posto

$$\psi_t(\tau) = \begin{cases} [f(\tau) - f(t)] \frac{\cos(1/2)\omega(t-\tau)}{\sin(1/2)\omega(t-\tau)}, & \tau \neq t + mT, \quad m \in \mathbb{Z}, \\ -\frac{T}{\pi} f'(t), & \tau = t + mT, \quad m \in \mathbb{Z}, \end{cases}$$

si ha il seguente

**Lemma 5.5.** *La funzione  $\tau \rightarrow \psi_t(\tau)$  è periodica di periodo  $T$  e di classe  $C^\infty$ .*

Il Lemma 5.5 consente di concludere subito che  $\mathcal{J}_N$  è infinitesimo, in quanto

$$\mathcal{J}_N = \frac{(\hat{\psi}_t)_N - (\hat{\psi}_t)_{-N}}{2i}$$

e pertanto va a 0 per la ii), in quanto  $\psi_t$  è differenziabile e periodica.

Dim. La periodicità e la differenziabilità per  $\tau \neq t + mT$  è ovvia. Proviamo la continuità in  $\tau = t$ .

$$\begin{aligned}\lim_{\tau \rightarrow t} \psi_t(\tau) &= \lim_{\tau \rightarrow t} [f(\tau) - f(t)] \frac{\cos(1/2)\omega(t - \tau)}{\sin(1/2)\omega(t - \tau)} \\ &= \lim_{\tau \rightarrow t} \frac{f(\tau) - f(t)}{(1/2)\omega(t - \tau)} \lim_{\tau \rightarrow t} \frac{(1/2)\omega(t - \tau)}{\sin(1/2)\omega(t - \tau)} \lim_{\tau \rightarrow t} \cos(1/2)\omega(t - \tau) \\ &= -\frac{1}{(1/2)\omega} f'(t).\end{aligned}$$

Mostriamo ora la derivabilità calcolando il limite

$$\lim_{\tau \rightarrow t} \frac{\psi_t(\tau) - \psi_t(t)}{\tau - t} = -\frac{1}{\omega} f''(t).$$

Risulta

$$\begin{aligned}& \frac{1}{\tau - t} \left( [f(\tau) - f(t)] \frac{\cos(1/2)\omega(t - \tau)}{\sin(1/2)\omega(t - \tau)} + \frac{1}{(1/2)\omega} f'(t) \right) \\ &= \frac{1}{\tau - t} \left( \frac{f(\tau) - f(t)}{(1/2)\omega(t - \tau)} + \frac{1}{(1/2)\omega} f'(t) \right) \frac{(1/2)\omega(t - \tau)}{\sin(1/2)\omega(t - \tau)} \cos(1/2)\omega(t - \tau) \\ &+ \frac{1}{\tau - t} \frac{1}{(1/2)\omega} f'(t) \left( 1 - \frac{(1/2)\omega(t - \tau)}{\sin(1/2)\omega(t - \tau)} \cos(1/2)\omega(t - \tau) \right).\end{aligned}$$

Usando la formula di Taylor fino al secondo ordine,

$$f(\tau) = f(t) + f'(t)(\tau - t) + \frac{1}{2} f''(\eta)(\tau - t)^2$$

con  $\eta$  opportuno nell'intervallo di estremi  $t$  e  $\tau$ , il primo termine tende a

$$-\frac{1}{\omega} f''(t),$$

quando  $\tau \rightarrow t$ , mentre non è difficile controllare che il secondo va a 0<sup>(3)</sup>. Questo prova che  $\psi_t$  è derivabile. In modo analogo si studiano le derivate successive.  $\square$

<sup>(3)</sup> Infatti

$$\left| \frac{1}{x} \left( 1 - \frac{x}{\sin x} \cos x \right) \right| \leq \left| \frac{\sin x - x}{x \sin x} \right| + \left| \frac{1}{x} \right| |1 - \cos x| \left| \frac{x}{\sin x} \right|.$$

Si ha  $\sin x = x - (1/3!)x^3 \sin \xi$ , con  $\xi$  opportuno. Quindi

$$\left| \frac{\sin x - x}{x \sin x} \right| \leq (1/3!) \frac{|x|^3}{|x| |\sin x|} \leq |x| \frac{|x|}{|\sin x|}.$$

Il secondo fattore è limitato nell'intorno di  $x = 0$ , mentre il primo va a 0. Analogamente si tratta il secondo termine, usando  $1 - \cos x = (1/2)x^2 \cos \eta$ , con  $\eta$  opportuno.

Si noti che il controllo della derivata prima è già sufficiente per asserire in base alla nota <sup>(2)</sup> che

$$|(\hat{\psi}_t)_N| \leq \frac{1}{\omega|n|} \sup_{\tau \in [0, T]} |\psi'_t(\tau)| \leq \frac{1}{\omega N} \frac{1}{\omega} \sup_{\tau \in [0, T]} |f''(\tau)|,$$

da cui segue che  $\mathcal{J}_N \rightarrow 0$ .

La assoluta uniforme convergenza della serie per le derivate segue ancora da ii) mentre il fatto che la somma della serie coincide con la derivata segue dagli stessi argomenti appena esposti.  $\square$

Il Teorema di Fourier consente di determinare la soluzione particolare di (5.12) con forzante periodica, di classe  $C^\infty$ . Infatti, se  $f$  è periodica di periodo  $T$ , per il Teorema di Fourier,

$$f(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}_n e^{i\omega n t},$$

ed analoghe espressioni valgono per le derivate. In conseguenza, scelto  $\hat{x}_n$  in accordo alla (5.33), la funzione periodica  $t \rightarrow x_p(t)$  definita dalla serie

$$x_p(t) := \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{\hat{f}_n}{k + in\omega h - m\omega^2 n^2} e^{i\omega n t} \quad (5.47)$$

è reale e risolve la (5.12). Pertanto la soluzione generale del problema ai valori iniziali risulta:

$$x(t) = e^{\alpha(t-t_0)} (a \cos \sigma(t-t_0) + b \sin \sigma(t-t_0)) + x_p(t), \quad (5.48)$$

con  $a$  e  $b$  determinati dalle condizioni

$$a = x_0 - x_p(t_0), \quad b = \sigma^{-1}[v_0 - \dot{x}_p(t_0) - \alpha(x_0 - x_p(t_0))].$$

In particolare, nel limite  $t \rightarrow +\infty$ ,  $x(t)$  differisce per termini esponenzialmente piccoli da  $x_p(t)$ . Quindi il comportamento asintotico è un moto periodico di periodo  $T$  pari a quello del termine forzante. Tale comportamento dipende in modo esponenzialmente piccolo dai dati iniziali e pertanto il sistema *perde rapidamente memoria* dello stato di partenza.

La scala di tempo su cui ciò avviene è però tanto piú grande quanto piú  $-\alpha = h/2m$  è piccolo. Infatti, detto  $\tau = ht/2m$ , cioè il tempo misurato in unità di misura  $|\alpha|$ , la differenza  $|x(t) - x_p(t)|$  è dell'ordine di  $e^{-\tau}$ .

Come si vede, il tempo necessario a perdere memoria del dato iniziale e stabilire il comportamento asintotico tende all'infinito quando  $h$  tende a 0. Si pone quindi il problema della soluzione della (5.12) in tale limite.

## 5.6 Limite di attrito nullo.

Nel limite  $h \rightarrow 0$ , si ha  $\alpha \rightarrow 0$  e  $\sigma \rightarrow \omega_0 = \sqrt{k/m}$ . Pertanto la parte della soluzione data in (5.48) che dipende dai dati iniziali, converge ad un moto armonico con pulsazione  $\omega_0$  e quindi con periodo  $T_0 = 2\pi\sqrt{m/k}$ . La funzione  $t \rightarrow x_p(t)$  richiede maggiore attenzione. Infatti, nel limite  $h \rightarrow 0$  il denominatore della (5.47),  $k + in\omega h - m\omega^2 n^2$  tende a  $m(\omega_0^2 - \omega^2 n^2)$ . Esso può quindi annullarsi se esiste  $\bar{n} \in \mathbb{Z}_+$  tale che

$$\omega_0 = \bar{n}\omega \quad \text{condizione di risonanza} \quad (5.49)$$

e cioè se

$$T = \bar{n} T_0,$$

ovvero, se il periodo del termine forzante è un multiplo intero del periodo di oscillazione proprio dell'oscillatore armonico.

### Caso non risonante

Se la condizione di risonanza non è soddisfatta per nessun  $\bar{n} \in \mathbb{Z}_+$ , si dice che i periodi  $T$  e  $T_0$  sono *irrazionali*. In questo caso, poiché  $|\omega_0^2 - \omega^2 n^2|$  tende all'infinito, detto  $n_0$  un intero tale che  $|\omega_0^2 - \omega^2 n^2| > 1$  per ogni  $n > n_0$ , esiste il

$$\min\{|\omega_0^2 - \omega^2 n^2|, |n| \leq n_0\} = \gamma > 0$$

In conseguenza  $|\hat{x}_n| \leq |\hat{f}_n|/m\gamma$  e quindi la serie per  $h = 0$  è ben definita e fornisce la soluzione limite:

$$x(t) = a_0 \cos \omega_0(t - t_0) + b_0 \sin \omega_0(t - t_0) + \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{\hat{f}_n}{k - m\omega^2 n^2} e^{i\omega n t} \quad (5.50)$$

Essa è la sovrapposizione di due moti periodici con periodi irrazionali. Le costanti  $a_0$  e  $b_0$  sono i limiti delle costanti  $a$  e  $b$  che figurano nella (5.48) quando  $h \rightarrow 0$

### Caso risonante.

Supponiamo che esista  $\bar{n}$  soddisfacente la (5.49). È chiaro che per  $n \neq \pm\bar{n}$  risulta  $|\omega_0^2 - \omega^2 n^2| > 0$ . Pertanto scriviamo  $f$  nella forma

$$f(t) = f_1(t) + f_2(t)$$

con

$$f_1(t) = \sum_{n \neq \bar{n}} \hat{f}_n e^{i\omega n t},$$

$$f_2(t) = \hat{f}_{\bar{n}} e^{i\omega \bar{n} t} + \hat{f}_{-\bar{n}} e^{-i\omega \bar{n} t}.$$

La soluzione della (5.12) potrà scriversi come

$$x(t) = e^{\alpha(t-t_0)} (a \cos \sigma(t-t_0) + b \sin \sigma(t-t_0)) + x_1(t) + x_2(t),$$

con

$$x_1(t) = \sum_{n \neq \bar{n}} \frac{\hat{f}_n}{k + in\omega h - m\omega^2 n^2} e^{i\omega n t},$$

$$x_2(t) = \frac{1}{m\sigma} \int_{t_0}^t ds f_2(s) e^{\alpha(t-s)} \sin \sigma(t-s),$$

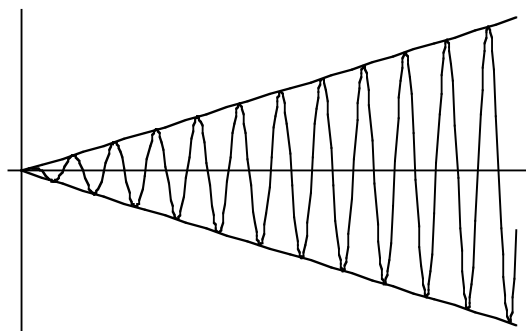
mentre  $a$  e  $b$  sono determinati dalle condizioni

$$a = x_0 - x_1(t_0), \quad b = \sigma^{-1} [v_0 - \dot{x}_1(t_0) - \alpha(x_0 - x_1(t_0))],$$

in quanto  $x_2(t_0) = 0 = \dot{x}_2(t_0)$ . La parte di  $x(t)$  che non include  $x_2(t)$  si comporta come nel caso non risonante. Passando al limite si ha

$$\lim_{h \rightarrow 0} x_2(t) = \frac{1}{2m\omega_0} \Im \left[ \hat{f}_{\bar{n}} e^{i\omega_0 t} (t-t_0) \right] - \frac{1}{2m\omega_0} \int_{t_0}^t ds \Im \left[ \hat{f}_{\bar{n}} e^{i\omega_0(t-2s)} \right].$$

Il secondo termine è limitato uniformemente in  $t$ , mentre il primo ha modulo crescente linearmente in  $t$ . In altri termini, l'ampiezza delle oscillazioni cresce indefinitamente. Tale fenomeno è noto come *risonanza* e la sua presenza si presenta in parecchi problemi applicativi con esiti a volte catastrofici per la tenuta delle strutture. L'andamento di tale termine è mostrato nella figura seguente.



## 5.7 Piccole oscillazioni.

Consideriamo adesso il problema non lineare

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= -V'(x) - h\dot{x} + f(t), \\ x(0) &= x_0, \quad \dot{x}(0) = v_0, \end{aligned} \tag{5.51}$$

e supponiamo che il potenziale  $V$  sia dotato di infinite derivate limitate ed abbia un minimo stretto con derivata seconda positiva in un punto che identifichiamo con l'origine, che sarà pertanto una posizione di equilibrio stabile ed attrattivo nel caso  $f = 0$ . Si potrà inoltre assumere che sia  $V(0) = 0$ . Supponiamo inoltre che il termine forzante  $t \rightarrow f(t)$  sia periodico di periodo  $T > 0$ . Le ipotesi fatte sul potenziale comportano che

$$V(0) = 0, \quad V'(0) = 0, \quad V''(0) = k > 0.$$

In conseguenza, per il teorema di Taylor,

$$V(x) = \frac{1}{2}kx^2 + R(x),$$

con

$$|R(x)| \leq \tilde{\theta}|x|^3, \quad |R'(x)| \leq \theta x^2,$$

per opportuni  $\tilde{\theta}, \theta > 0$ . Si consideri inoltre il problema di un oscillatore armonico smorzato e forzato

$$\begin{aligned} m\ddot{y} &= -ky - h\dot{y} + f(t), \\ y(0) &= x_0, \quad \dot{y}(0) = v_0, \end{aligned} \tag{5.52}$$

con costante elastica pari alla derivata seconda di  $V$  in 0. Il problema (5.52) è detto problema delle *piccole oscillazioni* associato al problema (5.51), nell'intorno della posizione di equilibrio stabile  $x = 0$ .

In sostanza il problema delle piccole oscillazioni corrisponde a considerare il problema (5.51) con gli stessi dati iniziali e lo stesso termine forzante, ma con il potenziale  $V$  sostituito dalla sua approssimazione quadratica  $(1/2)kx^2$  che, nell'intorno di  $x = 0$ , comporta un errore di ordine superiore nel calcolo del potenziale, almeno se il moto è confinato in un piccolo intorno dell'origine. È ragionevole aspettarsi che l'errore commesso poi si rifletta in un errore piccolo sulle soluzioni, e cioè che in un'opportuna norma il moto  $t \rightarrow x(t)$  ed il moto  $t \rightarrow y(t)$  siano molto prossimi. Tali affermazioni sono tutt'altro che ovvie e sono necessarie alcune ipotesi sui dati iniziali e sul termine forzante per stabilire un enunciato che possa essere provato.

Cominciamo col ricordare che, data una funzione  $t \rightarrow F(t)$ , l'oscillatore armonico smorzato e forzato con termine forzante  $F(t)$  ha per soluzione

$$x(t) = \bar{x}(t) + \frac{1}{m\sigma} \int_{t_0}^t ds F(s) e^{\alpha(t-s)} \sin \sigma(t-s) \tag{5.53}$$

con

$$\alpha = -\frac{h}{2m}, \quad \sigma = \sqrt{\frac{k}{m} - \alpha^2}$$

ed  $\bar{x}$  opportuna soluzione dell'equazione omogenea corrispondente, tale da soddisfare le condizioni iniziali.

Riscriviamo l'equazione per  $x$  come

$$m\ddot{x} + h\dot{x} + kx = f(t) - R'(x(t)).$$

Identificando  $F(t)$  con  $f(t) - R'(x(t))$  ed usando la (5.53), si ha

$$x(t) = \bar{x}(t) + \frac{1}{m\sigma} \int_0^t ds [f(s) - R'(x(s))] e^{\alpha(t-s)} \sin \sigma(t-s). \quad (5.54)$$

Naturalmente, la (5.54) non è una *soluzione* del problema ma soltanto una sua formulazione equivalente, che risulta però utile per le stime che seguono. Infatti essa consente di provare la seguente

**Proposizione 5.6.** *Esistono  $\gamma > 0$  e  $C > 0$  tali che, se*

$$|x_0| + |v_0| + \sup_{t \geq 0} |f(t)| \leq \gamma$$

*allora, posto*

$$M(t) = \sup_{s \in [0, t]} |x(s)|,$$

*risulta*

$$M(t) \leq C [|x_0| + |v_0| + \sup_{t \geq 0} |f(t)|]$$

*per ogni  $t > 0$*

Dim. La soluzione soddisfa la (5.54). Poiché

$$|\bar{x}(t)| \leq C_1 [|x_0| + |v_0|],$$

posto

$$\|f\| = \sup_{t \geq 0} |f(t)|,$$

si ha

$$|x(s)| \leq C_1 [|x_0| + |v_0|] + (\|f\| + \theta M(s)^2) \frac{1}{m\sigma} \int_0^s ds' e^{\alpha(s-s')}$$

Ma

$$\frac{1}{m\sigma} \int_0^s e^{\alpha(s-s')} ds \leq -\frac{1}{m\alpha\sigma} = \frac{2m}{h} \frac{2}{\sqrt{4km - h^2}}$$



e quindi

$$|x(s)| \leq C_1[|x_0| + |v_0|] + (\|f\| + \theta M(s)^2) \frac{2m}{h} \frac{2}{\sqrt{4km - h^2}}.$$

Prendendo l'estremo superiore dei due membri,

$$M(t) \leq c + aM(t)^2, \quad (5.55)$$

con

$$c = C_1[|x_0| + |v_0|] + \|f\| \frac{2m}{h} \frac{2}{\sqrt{4km - h^2}}, \quad a = \theta \frac{2m}{h} \frac{2}{\sqrt{4km - h^2}}. \quad (5.56)$$

La disuguaglianza (5.55) è sempre soddisfatta se  $\Delta = 1 - 4ac \leq 0$ . In tal caso essa non rappresenta alcuna restrizione utile su  $M(t)$ . Se invece risulta  $1 - 4ac > 0$ , essa è verificata soltanto quando  $M(t)$  non è contenuto nell'intervallo  $(x_-, x_+)$  con

$$x_{\pm} = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4ac}}{2a}.$$

Si supponga pertanto  $c < 1/(8a)$  ed  $M(0) < x_-$ . Poiché  $M(t)$  è una funzione continua, risulta in conseguenza

$$M(t) \leq x_-$$

per ogni  $t > 0$ . Ricordando le espressioni di  $a$  e  $c$  segue la Proposizione 5.6. In particolare, si noti che

$$x_- \leq 2c = 2 \left[ C_1[|x_0| + |v_0|] + \|f\| \frac{2m}{h} \frac{2}{\sqrt{4km - h^2}} \right] := \delta \quad (5.57)$$

□

**Corollario 5.7.** *Nelle stesse ipotesi della Proposizione 5.6, con  $\delta$  definito dalla (5.57) ed  $a$  definito dalla seconda delle (5.56), risulta*

$$|x(t) - y(t)| \leq a\delta^2. \quad (5.58)$$

Dim.

Si ponga  $z(t) = x(t) - y(t)$ . Derivando due volte e sostituendo si ha

$$m\ddot{z} = -h\dot{z} - V'(x) - ky = -h\dot{z} - kz - R'(x(t)).$$

Poiché  $z$  ha dati iniziali nulli, si ha

$$z(t) = -\frac{1}{m\sigma} \int_0^t ds R'(x(s)) e^{\alpha(t-s)} \sin \sigma(t-s)$$

e quindi

$$|z(t)| \leq \theta M(t)^2 \frac{1}{\sigma} \int_0^t e^{\alpha(t-s)} \leq a\delta^2.$$

□

*Osservazione:* Le condizioni di piccolezza sono essenziali, come mostrato dal seguente controesempio:

$$\ddot{x} + h\dot{x} + \sin x = h\omega + \sin \omega t.$$

Tale equazione ammette la funzione  $t \rightarrow \omega t$  come soluzione ed essa cresce indefinitamente al crescere del tempo.

In conclusione se i dati iniziali e il termine forzante sono sufficientemente piccoli, il moto si mantiene in un intorno di raggio  $\delta$  dell'origine. La differenza tra il moto effettivo ed le piccole oscillazioni è molto più piccola, di ordine  $\delta^2$ . Si noti che questa è l'affermazione realmente significativa sull'approssimazione del moto con le piccole oscillazioni. Difatti la Proposizione 5.6 di per se implica che entrambi i moti sono di ordine  $\delta$  e quindi tale è la loro differenza. Il corollario invece implica che l'*errore relativo* è piccolo, e quindi l'approssimazione è realmente utile.

Va sottolineato che le stime uniformi nel tempo che si sono qui ottenute dipendono dalla stima dell'integrale a secondo membro della (5.54), che è finito in quanto  $h > 0$ . Nel caso  $h = 0$  alcune delle costanti dei calcoli precedenti divergono e il risultato perde di validità. In particolare, anche se per altra via si pervenisse ad un'affermazione simile a quella della Proposizione 5.6, il Corollario non risulterebbe più verificato.

## 6. Problemi tridimensionali. Forze centrali.

### 6.1 Conservazione dell'energia.

Quando la legge di forza non soddisfa le condizioni di simmetria del Capitolo 4, lo studio del moto richiede la soluzione di un problema tridimensionale, cioè di un sistema di tre equazioni differenziali del secondo ordine. Tale problema è in generale di difficile soluzione e pertanto si ricercano metodi per ridurre il numero delle incognite ed il numero di variabili indipendenti.

La conoscenza di integrali primi può agevolare tale compito. In particolare, in presenza di forze conservative sussiste l'integrale dell'energia che assicura che la quantità

$$E(x, v) = \frac{1}{2}mv^2 + V(x)$$

si mantiene costante durante ogni moto del sistema soggetto ad una forza  $f$  la cui legge è conservativa di potenziale  $V$ ,

$$f(x) = -\nabla V(x).$$

Un esempio particolarmente importante di forze conservative è fornito dalle forze centrali, già introdotte nel Capitolo 3, delle quali ricordiamo la definizione.

Si dice *forza centrale* una forza che in ogni punto  $x \in \mathbb{R}^3$  è diretta verso un punto prefissato, detto *centro* che si può assumere coincidente con l'origine senza perdita di generalità, e il cui modulo è una funzione della sola distanza dal centro.

Nel nostro contesto ciò equivale a supporre che esista una funzione  $\phi : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ , tale che, per ogni  $x \neq 0$  si abbia

$$f(x) = \phi(|x|)\frac{x}{|x|}. \quad (6.1)$$

Detta  $\Phi(\rho)$  una primitiva di  $-\phi(\rho)$ ,

$$\Phi'(\rho) = -\phi(\rho),$$

la funzione

$$V(x) = \Phi(|x|)$$

è un'energia potenziale per  $f$ . Difatti,

$$-\nabla V(x) = -\Phi'(|x|)\nabla|x| = \phi(|x|)\frac{x}{|x|} = f(x),$$

in quanto

$$\frac{\partial|x|}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i}(x \cdot x)^{1/2} = x_i(x \cdot x)^{-1/2} = \frac{x_i}{|x|}.$$

Il piú famoso esempio di forza centrale è fornito dal potenziale della forza di attrazione gravitazionale che un corpo, detto centro attrattore, esercita su una particella:

$$\Phi(|x|) = -\frac{\mathcal{G}qQ}{|x|}, \quad (6.2)$$

dove  $\mathcal{G}$  prende il nome di *costante di gravitazione universale*,  $q > 0$  rappresenta la *carica gravitazionale* della particella attratta, usualmente detta *massa gravitazionale*, in quanto, come si vedrà piú avanti, essa coincide con la massa con un'opportuna scelta delle unità di misura<sup>(1)</sup>. Analogamente  $Q > 0$  è la carica gravitazionale del centro attrattore.

Un altro importante esempio di forza centrale è fornito dalla forza Coulombiana tra due particelle cariche. Essa è simile alla (6.2), ma in questo caso

$$\Phi(|x|) = \frac{CqQ}{|x|}, \quad (6.3)$$

ove  $C$  è la *costante di Coulomb* e  $q, Q$ , che stavolta possono essere sia positive che negative, sono le cariche elettriche delle due particelle. In particolare, se le cariche hanno segno opposto, la forza è attrattiva come quella gravitazionale, mentre se le cariche hanno uguale segno, la forza è repulsiva.

Un ulteriore esempio di forza centrale è fornito dalla forza elastica, di potenziale

$$\Phi(|x|) = \frac{1}{2}k|x|^2, \quad (6.4)$$

con  $k > 0$  *costante elastica*.

Notiamo che negli esempi (6.2) e (6.3), la forza  $f$  è ben definita e Lipschitziana in ogni sottoinsieme di  $\mathbb{R}^3$  che escluda l'origine  $x = 0$ . In  $x = 0$  vi è una singolarità per cui l'esistenza della soluzione non è globale per tutti i dati iniziali, ma solo sotto certe condizioni.

Per includere gli esempi (6.2) e (6.3) nella trattazione supponiamo pertanto che la funzione potenziale  $V$  sia definita in  $\mathbb{R}^3 - \{0\}$  e che sia ivi differenziabile due volte con derivata seconda continua.

Cominciamo con il discutere le proprietà che valgono per una qualsiasi forza centrale.

## 6.2 Conservazione del momento angolare.

Oltre all'energia, per le forze centrali sussistono tre altri integrali primi, e cioè le tre componenti del vettore

$$K = mx \wedge \dot{x}. \quad (6.5)$$

---

<sup>(1)</sup> La carica gravitazionale si definisce in modo analogo alla carica elettrica e nella sua definizione, *a priori* non vi è nessuna relazione con la nozione di massa, che interviene nella legge di Newton ed è detta anche *massa inerziale* per distinguerla dalla massa gravitazionale.

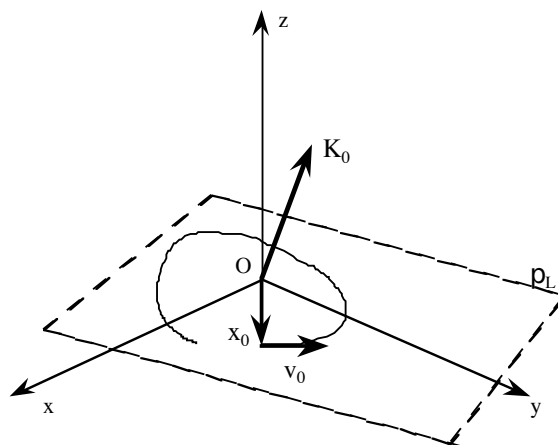
Difatti, la derivata di  $K$  rispetto al tempo vale

$$\frac{d}{dt}K = m\dot{x} \wedge \dot{x} + mx \wedge \ddot{x}$$

Il primo termine si annulla mentre usando la legge di Newton nel secondo si ottiene

$$\frac{d}{dt}K = x \wedge f = -x \wedge \nabla\Phi(|x|) = -x \wedge \left( \Phi'(|x|) \frac{x}{|x|} \right) = 0.$$

La conservazione del momento angolare ha alcune notevoli conseguenze. La prima di esse è che *il moto in un campo di forze centrali è piano*.



Difatti, detto  $K_0$  il valore di  $K$  valutato per  $t = 0$ ,  $K_0 = mx_0 \wedge v_0$ , il vettore  $K_0$  individua il piano  $\pi_L$  ad esso perpendicolare, passante per l'origine, che prende il nome di *piano di Laplace*. Esso contiene il punto  $x_0$  in quanto il segmento congiungente l'origine con  $x_0$  è perpendicolare a  $K_0$ . Inoltre esso è parallelo al vettore  $v_0$  perché questo è perpendicolare a  $K_0$ . Ad ogni tempo  $t \neq 0$  si ha che  $x(t) \in \pi_L$  e  $v(t)$  parallelo a  $\pi_L$ . Infatti, se  $x(t) \notin \pi_L$ , il segmento congiungente l'origine con  $x(t)$  non sarebbe perpendicolare a  $K_0$  e quindi  $mx(t) \wedge \dot{x}(t)$  non potrebbe coincidere con  $K_0$ , come invece deve per la conservazione del momento angolare. In modo analogo si vede che la velocità è parallela a  $\pi_L$  per ogni  $t \in \mathbb{R}$ .

Una prova analitica è immediatamente ottenuta osservando che se si moltiplicano ambo i membri dell'equazione

$$mx(t) \wedge \dot{x}(t) = K_0$$

scalarmente per  $x(t)$ , il primo membro si annulla in quanto il prodotto misto  $a \cdot b \wedge c = 0$  se due dei tre vettori  $a, b, c$  sono paralleli. Pertanto si ottiene

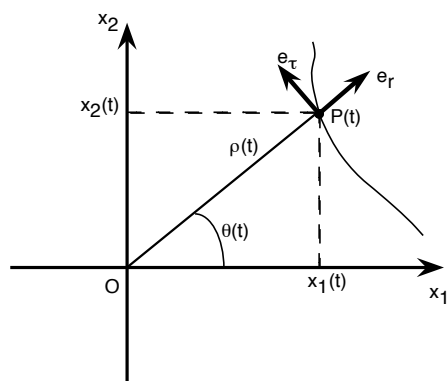
$$K_0 \cdot x = 0,$$

che è l'equazione di un piano passante per l'origine e perpendicolare a  $K_0$ , cioè il piano di Laplace, cui  $x(t)$  deve appartenere.

L'osservazione precedente consente un'immediata riduzione del problema ad uno bidimensionale. Difatti, assegnati i dati iniziali e determinato in conseguenza il piano di Laplace  $\pi_L$ , non vi è perdita di generalità nell'assumere un sistema di riferimento avente il piano di Laplace come uno dei piani coordinati. Ciò è vero perché tale piano è costante nel tempo per quanto visto in precedenza, e quindi il riferimento è inerziale come quello di partenza. Supponiamo che in tale riferimento  $\pi_L$  sia il piano  $x_3 = 0$ . In base alle osservazioni precedenti, per ogni  $t \in \mathbb{R}$  risulta  $x_3(t) = 0$  e  $v_3(t) = 0$ . Si tratta quindi di determinare soltanto  $x_1(t)$  ed  $x_2(t)$  e quindi si è ridotto il problema ad uno bidimensionale.

### 6.3 Coordinate polari.

È conveniente introdurre nel piano di Laplace un sistema di coordinate polari come quello in figura.



Con  $\rho > 0$  si denoterà la lunghezza del segmento che congiunge il punto  $P$  di coordinate  $(x_1, x_2)$  con l'origine, mentre  $\theta$  è l'angolo che la semiretta che va dall'origine a  $P$  forma con l'asse  $x_1$ .

Si noti che nel caso  $P = O$  l'angolo  $\theta$  non è definito. Risulta quindi definita una trasformazione

$$\mathcal{P} : \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\} \rightarrow (0, +\infty) \times [0, 2\pi)$$

la cui forma esplicita è

$$\rho = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}, \quad \theta = \begin{cases} \arctan \frac{x_2}{x_1} & \text{se } x_1 \neq 0, \\ \frac{\pi}{2} & \text{se } x_1 = 0 \text{ e } x_2 > 0, \\ -\frac{\pi}{2} & \text{se } x_1 = 0 \text{ e } x_2 < 0. \end{cases} \quad (6.6)$$

Essa è invertibile in tale insieme, con inversa data dalle espressioni

$$x_1 = \rho \cos \theta, \quad x_2 = \rho \sin \theta.$$

Naturalmente la scelta di  $\theta$  in  $[0, 2\pi)$  è puramente convenzionale, poiché per un dato  $\rho$ , tutte le coppie  $(\rho, \theta)$  con  $\theta$  che differiscono di multipli interi di  $2\pi$  rappresentano lo stesso punto di  $\mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$ . Si darà pertanto significato a valori di  $\theta$  al di fuori dell'intervallo  $[0, 2\pi)$ , grazie a tale identificazione. Grazie a tale identificazione se la variabile  $\theta$  si incrementa di  $2\pi$  durante un moto, passando da un intervallo  $[2k\pi, 2(k+1)\pi)$  al successivo questo rappresenta l'indicazione del fatto che il punto ha percorso un giro completo attorno all'origine.

Siano ora  $t \rightarrow P(t) = (x_1(t), x_2(t))$  le equazioni parametriche di una traiettoria rispetto alle coordinate cartesiane del riferimento adottato. Posto

$$(\rho(t), \theta(t)) = \mathcal{P}(x_1(t), x_2(t)),$$

l'applicazione  $t \rightarrow (\rho(t), \theta(t))$  rappresenta le equazioni parametriche della traiettoria rispetto alle coordinate polari del riferimento. Poiché

$$(x_1(t), x_2(t)) = \mathcal{P}^{-1}(\rho(t), \theta(t)) = (\rho(t) \cos \theta(t), \rho(t) \sin \theta(t)),$$

differenziando si ottengono le seguenti espressioni per le componenti della velocità:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \dot{\rho} \cos \theta - \rho \sin \theta \dot{\theta}, \\ \dot{x}_2 &= \dot{\rho} \sin \theta + \rho \cos \theta \dot{\theta} \end{aligned} \quad (6.7)$$

ed il quadrato della velocità è dato da

$$|v|^2 = \dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\theta}^2. \quad (6.8)$$

Le componenti dell'accelerazione sono

$$\begin{aligned} \ddot{x}_1 &= \ddot{\rho} \cos \theta - 2\dot{\rho} \sin \theta \dot{\theta} - \rho \cos \theta \dot{\theta}^2 - \rho \sin \theta \ddot{\theta}, \\ \ddot{x}_2 &= \ddot{\rho} \sin \theta + 2\dot{\rho} \cos \theta \dot{\theta} - \rho \sin \theta \dot{\theta}^2 + \rho \cos \theta \ddot{\theta}. \end{aligned} \quad (6.9)$$

Risulterà utile nel seguito l'espressione delle componenti radiali e tangenziali della velocità e dell'accelerazione. Esse sono date dai prodotti scalari della velocità e dell'accelerazione con i vettori unitari

$$e_r = \frac{x}{|x|} = (\cos \theta, \sin \theta), \quad e_\tau = \frac{x^\perp}{|x|} = (-\sin \theta, \cos \theta). \quad (6.10)$$

Per la velocità si ha:

$$v_r = \dot{x} \cdot e_r = \dot{\rho}, \quad v_\tau = \dot{x} \cdot e_\tau = \rho \dot{\theta}. \quad (6.11)$$

Per l'accelerazione invece risulta

$$a_r = \ddot{x} \cdot e_r = \ddot{\rho} - \rho \dot{\theta}^2, \quad a_\tau = \ddot{x} \cdot e_\tau = \rho \ddot{\theta} + 2\dot{\rho}\dot{\theta} = \frac{1}{\rho} \frac{d}{dt}(\rho^2 \dot{\theta}). \quad (6.12)$$

In termini di tali quantità, tenendo conto che

$$f \cdot e_r = -\Phi'(\rho), \quad f \cdot e_\tau = 0, \quad (6.13)$$

le equazioni del moto si riscrivono come

$$ma_r = -\Phi'(\rho), \quad ma_\tau = 0. \quad (6.14)$$

#### 6.4 Conservazione della velocità areolare.

Una ulteriore conseguenza della conservazione del momento angolare è la *conservazione della velocità areolare*. Cominciamo con il definire tale quantità. Siano  $t \rightarrow P(t) = (x_1(t), x_2(t))$  le equazioni parametriche di una curva nel piano e siano  $t$  e  $t+h$  due istanti di tempo. Si considerino i segmenti  $\overline{OP(t)}$  ed  $\overline{OP(t+h)}$  e l'arco di curva tra  $P(t)$  e  $P(t+h)$ . Sia  $D(t, h)$  la parte limitata di piano contenuta tra i due segmenti e l'arco e  $|D(t, h)|$  la sua area. Il limite

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{|D(t, h)|}{h} = A(t)$$

se esiste, prende il nome di *velocità areolare* e rappresenta l'area spazzata nell'unità di tempo dalla congiungente il punto che si muove sulla curva con l'origine.

**Proposizione 6.1** *Se la curva  $t \rightarrow P(t)$  è differenziabile, allora la velocità areolare esiste e risulta*

$$A(t) = \frac{1}{2} \rho(t)^2 \dot{\theta}(t) \quad (6.15)$$



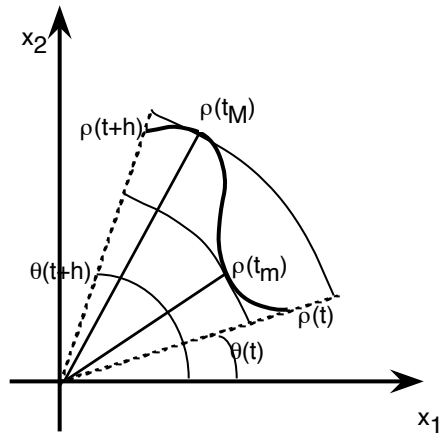
ed in coordinate cartesiane

$$A(t) = \frac{1}{2}[x_1(t)\dot{x}_2(t) - x_2(t)\dot{x}_1(t)]. \quad (6.16)$$

Dim. Siano  $t \rightarrow (\rho(t), \theta(t))$  le equazioni parametriche della traiettoria. Per la continuità esistono due istanti  $t_m$  e  $t_M$  nell'intervallo  $[t, t+h]$ , tali che

$$\inf_{s \in [t, t+h]} \rho(s) = \rho(t_m), \quad \sup_{s \in [t, t+h]} \rho(s) = \rho(t_M).$$

L'insieme  $D(t, h)$  contiene (si veda la figura)



il segmento di cerchio di raggio  $\rho(t_m)$  tra gli angoli  $\theta(t)$  e  $\theta(t+h)$ , la cui area è

$$B_1 = \frac{1}{2}\rho(t_m)^2[\theta(t+h) - \theta(t)]$$

ed è contenuto nel segmento di cerchio di raggio  $\rho(t_M)$  tra gli angoli  $\theta(t)$  e  $\theta(t+h)$ , la cui area è

$$B_2 = \frac{1}{2}\rho(t_M)^2[\theta(t+h) - \theta(t)].$$

Pertanto

$$B_1 \leq |D(t, h)| \leq B_2$$

Poiché la curva è differenziabile, esiste  $\tau \in (t, t+h)$  tale che

$$\theta(t+h) - \theta(t) = h\dot{\theta}(\tau).$$

Risulta quindi

$$\frac{1}{2}\rho(t_m)^2\dot{\theta}(\tau) \leq \frac{|D(t, h)|}{h} \leq \frac{1}{2}\rho(t_M)^2\dot{\theta}(\tau).$$

Nel limite  $h \rightarrow 0$ ,  $t_m \rightarrow t$ ,  $t_M \rightarrow t$  e  $\tau \rightarrow t$ . Questo implica la (6.15). Sostituendo in (6.16) le formule per  $x_1(t), x_2(t), \dot{x}_1(t), \dot{x}_2(t)$  date da (6.7), si verifica che la (6.16) è equivalente alla (6.15).  $\square$

Ricordando la definizione del momento angolare  $K$  si ottiene, con la scelta fatta del riferimento cartesiano, che la sua unica componente non nulla è la componente  $K_3$  data da

$$K_3 = m[x_1(t)\dot{x}_2(t) - x_2(t)\dot{x}_1(t)],$$

che pertanto risulta legata alla velocità areolare dalla relazione

$$K_3 = 2mA \tag{6.17}$$

Poiché il momento angolare si conserva, si ha la

Seconda legge di Keplero: *La velocità areolare è costante.*

Tale legge fu osservata sperimentalmente da Keplero nello studio del moto dei pianeti, ma essa risulta valida per il moto di un punto materiale in un qualsiasi campo di forza centrale, come semplice conseguenza della conservazione del momento angolare.

Sia

$$L = \frac{K_{0,3}}{m}$$

il rapporto tra il valore della terza componente del momento angolare, determinata all'istante iniziale, e la massa. La conservazione della velocità areolare implica

$$\frac{1}{2}\rho(t)^2\dot{\theta}(t) = \frac{1}{2}L. \tag{6.18}$$

È opportuno classificare i moti a secondo che  $L$  sia o non sia nullo.

### 6.5 Moti radiali.

I moti con  $L = 0$  si dicono *moti radiali*, in quanto la (6.18) implica  $\dot{\theta}(t) = 0$  e pertanto  $\theta(t) = \theta_0$ . Quindi il moto si svolge su un *raggio* e cioè sulla semiretta per l'origine di equazione  $\theta = \theta_0$ .

Si noti che  $L = 0$  se e solo se la velocità iniziale è parallela al segmento che congiunge l'origine con il punto iniziale (velocità radiale). Se tale circostanza non è verificata, se cioè la velocità iniziale ha una *componente tangenziale* allora il moto non è radiale.

Poiché la legge di forza potrebbe essere non ben definita nell'origine, rimane da discutere se il punto materiale possa o meno raggiungere l'origine.

Tale questione si riconduce allo studio dell'evoluzione di  $\rho(t)$  che può essere affrontata con i metodi utilizzati nel Capitolo 4 per i problemi unidimensionali.

La conservazione dell'energia, ricordando la (6.17), si scrive

$$E = \frac{1}{2}m(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\theta}^2) + \Phi(\rho). \quad (6.19)$$

Per i moti radiali  $\dot{\theta} = 0$  e quindi

$$E = \frac{1}{2}m\dot{\rho}^2 + \Phi(\rho). \quad (6.20)$$

A partire dalla (6.20) è possibile sviluppare tutte le considerazioni sul comportamento qualitativo di  $\rho$  in funzione del tempo che si sono viste nel Capitolo 4 ed in particolare quelle sui potenziali singolari.

Nel caso dell'attrazione gravitazionale (6.2), se  $E \geq 0$  e  $\dot{\rho}_0 > 0$ , allora  $\rho(t)$  cresce e il punto materiale si allontana indefinitamente dall'origine lungo la retta  $\theta = \theta_0$ , raggiungendo l'infinito in un tempo infinito, con una velocità residua se  $E > 0$  e con velocità nulla se  $E = 0$ . Quest'ultimo caso corrisponde all'energia minima necessaria per uscire dall'attrazione del centro. La velocità corrispondente

$$\dot{\rho}_0 = v_f = \sqrt{\frac{2\mathcal{G}qQ}{m\rho_0}} \quad (6.21)$$

è la *velocità di fuga*. La (6.21) mostra che gli assiomi della Meccanica implicano, nel caso di attrazione gravitazionale, una dipendenza della velocità di fuga dalla massa (inerziale) del punto materiale.

È un fatto *sperimentale* invece che la velocità di fuga nel campo di attrazione gravitazionale è la stessa per tutti i corpi, indipendentemente dalla loro massa (inerziale). Nella (6.21) le uniche grandezze dipendenti dal punto materiale sono la carica gravitazionale  $q$  e la massa inerziale  $m$ . L'unica assunzione che rende la (6.21) compatibile con i fatti sperimentali è che il rapporto

$$\frac{q}{m}$$

sia lo stesso per tutti i corpi materiali e cioè che è *una costante universale il rapporto tra la carica (massa) gravitazionale e la massa inerziale di ogni punto materiale*. In tali condizioni, con un'opportuna scelta delle unità di misura, il rapporto può rendersi pari ad 1 e questo conduce all'*identificazione tra massa inerziale e carica gravitazionale*. Rileviamo che tale identificazione è *estranea* alla Meccanica, nel senso che non è conseguenza delle sue definizioni e dei suoi assiomi.

È soltanto il confronto con l'esperienza che conduce a una tale identificazione. Va anche osservato che, da un punto di vista puramente teorico, non vi sarebbe alcuna difficoltà a sviluppare la Meccanica senza tale identificazione. Poiché d'altra parte questa è una realtà sperimentale, da questo momento in poi non distingueremo tra massa inerziale e carica gravitazionale di un punto materiale. Allo stesso modo si identificherà la carica gravitazionale  $Q$  del centro attrattore con la sua massa inerziale  $M$  e quindi si scriverà la (6.2) come

$$\Phi(|x|) = -\frac{\mathcal{G}mM}{|x|}. \quad (6.22)$$

Conclusa questa digressione sull'identificazione di massa inerziale e massa gravitazionale, torniamo allo studio dei moti radiali in un campo di attrazione Newtoniana. In tutti gli altri casi e cioè  $E \geq 0$  e  $\dot{\rho}_0 \leq 0$  oppure  $E < 0$ , il moto raggiunge dopo un tempo finito l'origine e da quell'istante l'equazione perde di senso. Si è pertanto in presenza della sola esistenza locale della soluzione per il problema ai valori iniziali in tale caso. Questo è dovuto alla singolarità della legge di forza nell'origine. È chiaro che nelle situazioni reali tale singolarità non si presenta. La singolarità della forza traduce, come sempre, una certa inadeguatezza del modello matematico a descrivere la situazione reale nelle vicinanze dell'origine. Ad esempio se il centro attrattore è un modello per la Terra, è chiaro che confondere la Terra con un punto è un'approssimazione ragionevole a grande distanza, ma cessa di essere valida a distanze prossime al raggio terrestre dove il modello va sostituito con uno più accurato, che tenga conto del fatto che la massa della Terra è distribuita, più o meno omogeneamente in una sfera.

Nel caso di forza di repulsione Coulombiana, corrispondente al potenziale (6.3) con cariche di uguale segno, l'energia può assumere solo valori positivi. Tutti i moti radiali si allontanano indefinitamente dall'origine, dopo un eventuale istante di arresto ed inversione del moto. Si tratta in ogni caso di moti che non toccano mai l'origine e per i quali si ha esistenza globale della soluzione.

Il caso del potenziale armonico (6.4) dà luogo ad un moto oscillatorio di periodo  $T = 2\pi\sqrt{m/k}$ , come può essere facilmente controllato attraverso l'analisi esplicita del moto in coordinate cartesiane. In questo caso non vi è singolarità nell'origine. Tuttavia, la singolarità delle coordinate polari in  $x = 0$  si traduce nel fatto che, quando  $\rho(t)$  raggiunge il valore 0,  $\theta(t)$  salta dal valore costante  $\theta_0$  al valore  $\theta_0 + \pi$ . La soluzione esiste globalmente nel tempo ed è una funzione continua del tempo, quando è vista nelle variabili cartesiane  $(x_1(t), x_2(t))$ .

*Esercizio 6.1:* Studiare il moto con potenziale

$$\phi(r) = \alpha^2 e^{-\alpha r}, \quad \alpha > 0$$

in corrispondenza dei dati iniziali  $x_0 = (1, 0)$ ,  $v_0 = (-1, 0)$ . Discutere il limite del moto quando  $\alpha$  tende a  $+\infty$ .

## 6.6 Moti generici.

Abbiamo visto che i moti radiali ( $L = 0$ ) corrispondono ad una scelta molto particolare dei dati iniziali, con la velocità iniziale parallela al raggio iniziale. La situazione generica è quella corrispondente ad  $L \neq 0$ . La (6.18) fornisce

$$\dot{\theta}(t) = \frac{L}{\rho(t)^2}. \quad (6.23)$$

Pertanto il segno di  $\dot{\theta}(t)$  è fissato e coincide con il segno di  $L$ . Ne consegue che  $\theta(t)$  è una funzione monotona, crescente o decrescente a seconda che sia  $L > 0$  o  $L < 0$ . Se  $\theta(t)$  è crescente diremo che il moto è *levogiro*, mentre diremo *destrogiro* il moto con  $\theta(t)$  decrescente. Una conseguenza della conservazione della velocità areolare è che tale caratteristica del moto non cambia nel tempo, cioè non vi sono inversioni del senso del moto. Quando  $\theta(t)$  si incrementa o decrementa di  $2\pi$ , il punto torna ad attraversare lo stesso raggio e quindi il punto ha percorso un giro completo intorno all'origine. Tale circostanza si ripete indefinitamente.

Per completare l'analisi del moto è necessario lo studio dell'evoluzione di  $\rho(t)$ . Anche in questo caso esso può essere condotto usando la conservazione dell'energia. Sostituendo la (6.23) nella (6.19) si ha

$$E = \frac{1}{2}m\dot{\rho}^2 + \frac{mL^2}{2\rho^2} + \Phi(\rho).$$

Si definisce il *potenziale efficace*

$$U_L(\rho) = \Phi(\rho) + \frac{mL^2}{2\rho^2}, \quad (6.24)$$

e in termini di questo, la conservazione dell'energia si esprime come

$$E = \frac{1}{2}m\dot{\rho}^2 + U_L(\rho).$$

Limitaremo lo studio successivo ai casi per i quali il potenziale soddisfa le condizioni seguenti:

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \rho^2 \Phi(\rho) = 0, \quad \inf_{\rho > a} \Phi(\rho) > -\infty \quad \forall a > 0. \quad (6.25)$$

In conseguenza della prima condizione, si ha

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} U_L(\rho) = +\infty, \quad (6.26)$$

e quindi esiste  $\rho_0 = \rho_0(E, L)$  tale che  $E = U_L(\rho_0)$  ed  $E < U_L(\rho)$  per  $\rho < \rho_0$ . Quindi, per  $t > 0$ , risulta

$$\rho(t) \geq \rho_0. \quad (6.27)$$

**Proposizione 6.2.** *La funzione  $t \rightarrow \rho(t)$  rappresenta il moto unidimensionale di un punto materiale di massa  $m$  soggetto ad una forza di potenziale  $U_L$ , con dati iniziali  $\rho(0) = |x_0|$  e  $\dot{\rho}(0) = v_r(0) = \dot{x}(0) \cdot e_r$ .*

Dim. Sostituendo nella prima delle (6.14) l'espressione (6.23) di  $\dot{\theta}$  che si ottiene dalla conservazione della velocità areolare (6.18), si ha

$$m\ddot{\rho} = -\Phi'(\rho) + \frac{mL^2}{\rho^3}. \quad (6.28)$$

La funzione  $t \rightarrow \rho(t)$  risulta pertanto soluzione dell'equazione

$$m\ddot{\rho} = -U_L'(\rho) \quad (6.29)$$

La (6.29) ha significato solo per  $\rho > 0$ , ma la condizione (6.27) assicura che  $\rho$  si mantiene positivo per tutti i tempi e quindi la Proposizione 6.2 è provata.  $\square$

Allo studio della (6.29) possono quindi applicarsi i metodi usati per i problemi unidimensionali. In particolare, la funzione  $t \rightarrow \rho(t)$  risulterà o periodica o non limitata superiormente.

Una volta nota  $t \rightarrow \rho(t)$ ,  $\dot{\theta}(t)$  si ottiene immediatamente sostituendo  $t \rightarrow \rho(t)$  nella (6.23) e quindi  $t \rightarrow \theta(t)$  segue da una semplice integrazione. La seconda delle condizioni (6.25) cioè che il potenziale sia inferiormente limitato al di fuori di un intorno dell'origine, assicura inoltre *l'esistenza globale della soluzione* per  $L \neq 0$ .

*Esercizio 6.2:* Con il potenziale dell'esercizio 6.1, si studi il moto con dato iniziale  $x_0 = (1, 0)$ ,  $v_0 = (0, 1)$ . Si discuta il limite del moto quando  $\alpha$  tende a  $+\infty$ .

Come si è visto nel Capitolo 4, diverse situazioni possono presentarsi in corrispondenza di differenti scelte di  $\Phi(\rho)$ . Nel seguito ne esamineremo solo due particolarmente significative.

Si supponga che  $\rho_0$  sia l'unica soluzione di  $E = U_L(\rho)$  e che sia non vuoto l'insieme dei  $\rho$  tali che  $E > U_L(\rho)$ . Ciò avviene ad esempio se  $\Phi(\rho) > 0$  è monotona e  $\phi(\rho) \rightarrow 0$  per  $\rho \rightarrow \infty$ . In particolare, il potenziale Coulombiano repulsivo verifica tali condizioni. In tal caso  $t \rightarrow \rho(t)$  tende a  $+\infty$  per  $t \rightarrow +\infty$ , dopo un eventuale inversione del moto in  $\rho_0$ . Per calcolare  $t \rightarrow \theta(t)$ , ricordiamo che, integrando la (6.23) nel tempo si ha

$$\theta(t) = \theta_0 + \int_0^t ds \frac{L}{\rho(s)^2}.$$

Supponendo per semplicità  $\rho(0) = \rho_0$  ed in conseguenza  $\dot{\rho}(0) = 0$ , la funzione  $t \rightarrow \rho(t)$  è monotona crescente e quindi si può effettuare il cambio di variabile  $s \rightarrow \rho$ , che fornisce

$$\theta(t) = \theta_0 + \int_{\rho_0}^{\rho(t)} \frac{L}{\rho^2} \frac{ds}{d\rho} d\rho.$$

Poiché

$$\frac{ds}{d\rho} = \frac{1}{\dot{\rho}(s)} = \frac{1}{\sqrt{\frac{2}{m}[E - U_L(\rho)]}},$$

si ha

$$\theta(t) = \theta_0 + \int_{\rho_0}^{\rho(t)} \frac{L}{\rho^2 \sqrt{\frac{2}{m}[E - U_L(\rho)]}} d\rho. \quad (6.30)$$

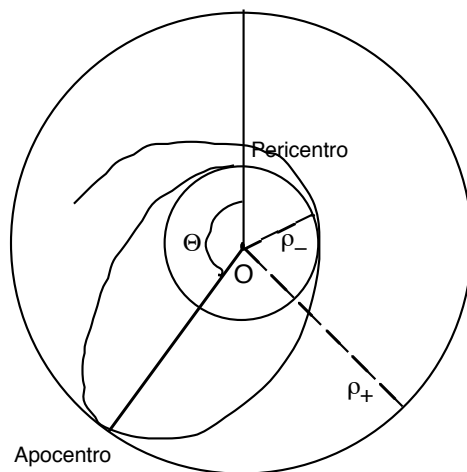
L'equazione (6.30) fornisce la legge oraria per  $\theta$ , quando è nota quella per  $\rho$ . Quando tale legge non è nota tuttavia, la stessa relazione fornisce comunque la relazione  $\rho \rightarrow \theta(\rho)$  tra i valori di  $\theta$  e  $\rho$  ad ogni istante. Essa rappresenta cioè l'equazione intrinseca in coordinate polari della traiettoria del punto materiale.

Si supponga ora che esistano solo due soluzioni,  $\rho_- < \rho_+$  dell'equazione  $E = U_L(\rho)$  e che sia  $E > U_L(\rho)$  per  $\rho \in (\rho_-, \rho_+)$ . Questo si verifica ad esempio per il potenziale armonico ed il potenziale Newtoniano, come si è visto nel Capitolo 4 a proposito di potenziali singolari. Se  $\rho \rightarrow \Phi(\rho)$  è negativo, crescente e va a 0 per  $\rho \rightarrow \infty$  più lentamente di  $\rho^{-2}$ , la prima delle assunzioni (6.25) è verificata.

In questo caso  $t \rightarrow \rho(t)$  oscilla periodicamente tra i valori  $\rho_-$  e  $\rho_+$ , con periodo

$$T = T(E, L) = 2 \int_{\rho_-}^{\rho_+} \frac{1}{\sqrt{\frac{2}{m}[E - U_L(\rho)]}} d\rho. \quad (6.31)$$

Ne consegue che il moto è confinato nella corona circolare tra i due cerchi di centro l'origine e rispettivi raggi  $\rho_-$  e  $\rho_+$ , (vedi figura).



Supponiamo, per fissare le idee,  $\rho(0) = \rho_-$  e  $\theta(0) = \pi/2$ . Un punto ove la particella si trova a distanza minima dall'origine è detto *pericentro*, mentre un punto ove la particella si trova a distanza massima è detto *apocentro*. Il tempo  $T$  è il doppio di quello che la particella impiega per andare dal pericentro all'apocentro. Fissiamo la nostra attenzione su questo primo tratto di moto. Per  $t \in (0, T/2)$  non vi sono istanti di arresto e quindi  $t \rightarrow \rho(t)$  è monotona crescente in tale intervallo e pertanto in esso si può calcolare  $t \rightarrow \theta(t)$  come in precedenza, usando la (6.30). In particolare, l'angolo  $\Theta$  tra la posizione del primo pericentro e quella dell'apocentro successivo è dato da

$$\Theta = \Theta(E, L) = \int_{\rho_-}^{\rho_+} \frac{L}{\rho^2 \sqrt{\frac{2}{m}[E - U_L(\rho)]}} d\rho. \quad (6.32)$$

Naturalmente la stessa analisi può essere applicata al successivo intervallo di tempo e l'angolo tra l'apocentro ed il successivo pericentro è ancora dato da  $\Theta$ , sicché l'angolo tra due successivi apocentri o due successivi pericentri è dato da  $2\Theta$ .

Se l'angolo  $2\Theta$  è commensurabile con  $2\pi$ , cioè se esistono due interi  $n$  ed  $m$  tali che

$$2n\Theta = 2m\pi,$$

l'orbita è *chiusa* e quindi il moto complessivo è periodico. Tale circostanza può verificarsi per opportune scelte di  $E$  ed  $L$ , ma non è in generale soddisfatta per tutti i valori di tali parametri. Vedremo che il caso del potenziale armonico e di quello Newtoniano danno luogo ad orbite chiuse per tutti i valori di  $E$  ed  $L$  in corrispondenza dei quali le orbite sono limitate. È possibile addirittura caratterizzare tali due potenziali come i soli per i quali tale proprietà è verificata. In altre parole:

**Proposizione 6.3.** *I soli potenziali centrali per i quali tutte le orbite limitate sono chiuse sono il potenziale armonico ed il potenziale Newtoniano.*

Lasciando per esercizio la dimostrazione di tale proposizione, che può essere trovata sul libro di Arnold a pag. 43, mostriamo esplicitamente, data l'importanza di tale caso, che *il potenziale Newtoniano ha orbite limitate chiuse*.

## 6.7 Moti Kepleriani.

Poniamo per brevità  $k = \mathcal{G}Mm$  per cui il potenziale Newtoniano è

$$\Phi(\rho) = -\frac{k}{\rho}.$$

Assegnate l'energia ed il momento angolare, supponiamo, senza perdita di generalità che al tempo  $t = 0$  sia  $\rho = \rho_-$  e  $\theta_0 = 0$  e cioè che il primo pericentro si trovi



sull'asse delle ascisse. Se  $E \geq 0$  vi è una sola soluzione positiva  $\rho_-$  dell'equazione  $E = U_L(\rho)$ . Se invece  $E < 0$  ve ne sono due,  $\rho_- < \rho_+$ . Determiniamo l'equazione intrinseca dell'orbita. Se  $E < 0$ , cominciamo con il determinarla nell'intervallo  $(0, T/2)$  ove  $\rho(t)$  è crescente, usando la relazione (6.30). Se  $E \geq 0$  invece la relazione vale per ogni  $t > 0$ . Si ha

$$\theta = \int_{\rho_-}^{\rho} dr \frac{L}{r^2 \sqrt{\frac{2}{m} [E - U_L(r)]}}$$

Effettuando la sostituzione  $z = 1/r$ , posto  $z_{\pm} = 1/\rho_{\pm}$ , si ha

$$\theta = \int_{1/\rho}^{z_-} dz \frac{L}{\sqrt{\frac{2}{m} [E - U_L(1/z)]}}$$

Calcoliamo le espressioni esplicite di  $z_{\pm}$ . Esse sono date dalle soluzioni dell'equazione

$$\frac{mL^2}{2} z^2 - kz - E = 0$$

e cioè:

$$z_{\pm} = \frac{k}{mL^2} \left( 1 \mp \sqrt{1 + \frac{2EmL^2}{k^2}} \right) = \frac{k}{mL^2} (1 \mp e),$$

con

$$e = \sqrt{1 + \frac{2EmL^2}{k^2}}. \quad (6.33)$$

Per  $E \geq 0$ ,  $e \geq 1$  e quindi  $z_+ < 0$ , per cui viene meno la sua interpretazione come inverso di  $\rho_+$ . Tuttavia, formalmente si può scrivere in ogni caso

$$\frac{2}{m} [E - U_L(\frac{1}{z})] = L^2 (z - z_+) (z_- - z).$$

Pertanto

$$\theta = \int_{1/\rho}^{z_-} \frac{dz}{\sqrt{(z - z_+) (z_- - z)}} \quad (6.34)$$

Tale integrale è stato già calcolato nel Capitolo 4 e vale:

$$\theta = \arccos \left( \frac{\frac{2}{\rho_-} - (z_+ + z_-)}{z_- - z_+} \right) - \arccos \left( \frac{\frac{2}{\rho} - (z_+ + z_-)}{z_- - z_+} \right).$$

Il primo termine è  $\arccos(1) = 0$ . Se  $E < 0$  e  $\rho = \rho_+$ , il secondo termine è  $\arccos(-1)$ . Pertanto risulta

$$\Theta(E, L) = \pi$$

e questo comporta che le orbite sono chiuse per ogni  $E < 0$  ed  $L \neq 0$ .

Per determinare la traiettoria occorre calcolare il secondo termine. Sostituendo le espressioni di  $z_{\pm}$  si ottiene

$$\frac{z_- - z_+}{2} = \frac{ek}{mL^2}, \quad \frac{z_- + z_+}{2} = \frac{k}{mL^2}$$

e quindi

$$\theta = -\arccos\left(\frac{\frac{1}{\rho} - \frac{k}{mL^2}}{\frac{ek}{mL^2}}\right).$$

Posto

$$\frac{1}{p} = \frac{k}{mL^2},$$

si ha pertanto

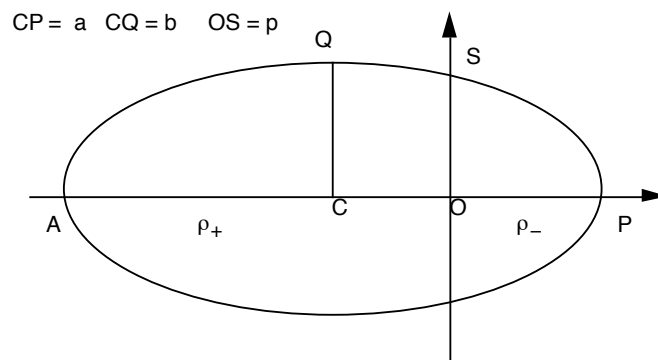
$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{p}(1 + e \cos \theta). \quad (6.35)$$

**Proposizione 6.4.** *L'equazione (6.35) è l'equazione intrinseca in coordinate polari di una conica avente un fuoco nell'origine. e è detta eccentricità della conica.*

- 1) Se  $e = 0$  ( $E = E_{min}$ ), si tratta di un cerchio di centro l'origine;
- 2) Se  $0 < e < 1$  ( $E_{min} < E < 0$ ), si tratta di un'ellisse con uno dei fuochi nell'origine ed asse maggiore coincidente con l'asse delle ascisse;
- 3) se  $e = 1$  ( $E = 0$ ), si tratta di una parabola con asse coincidente con l'asse delle ascisse;
- 4) Se  $e > 1$  ( $E > 0$ ), si tratta di un'iperbole con asse coincidente con l'asse delle ascisse.

Il numero  $p$  si dice parametro della conica.

Dim. La prima affermazione è ovvia. Verificheremo solo la seconda lasciando le altre come esercizio. La situazione è visualizzata nella figura



Scriviamo la (6.35) come

$$p = \rho(1 + e \cos \theta) = \rho + ex,$$

e quindi

$$\rho = p - ex.$$

Elevando al quadrato i due membri,

$$x^2 + y^2 = p^2 + e^2 x^2 - 2pex.$$

Raggruppando i termini, questa si scrive

$$x^2(1 - e^2) + 2pex + y^2 = p^2. \quad (6.36)$$

Chiaramente la precedente relazione è l'equazione di un'ellisse se  $e < 1$ , che si riduce ad una circonferenza per  $e = 0$ , mentre è una parabola per  $e = 1$  ed un'iperbole per  $e > 1$ .

In coordinate cartesiane, l'equazione di un'ellisse con centro in  $(x_0, 0)$  e semiassi  $a$  e  $b$  si scrive

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Sviluppando il quadrato e moltiplicando per  $b^2$ , si ha

$$\frac{b^2}{a^2}x^2 - 2\frac{b^2}{a^2}x_0x + y^2 = b^2 - \frac{b^2}{a^2}x_0^2.$$

Confrontata con la (6.36), questa fornisce le relazioni

$$\frac{b^2}{a^2} = 1 - e^2; \quad \frac{b^2}{a^2}x_0 = -pe; \quad b^2 - \frac{b^2}{a^2}x_0^2 = p^2.$$

Da tali relazioni si ottiene subito:

$$x_0 = -\frac{pe}{1 - e^2}. \quad (6.37)$$

$$p^2 = (1 - e^2)a^2 - \frac{p^2e^2}{1 - e^2},$$

che implica

$$a = \frac{p}{1 - e^2}, \quad b = \frac{p}{\sqrt{1 - e^2}}. \quad (6.38)$$

L'espressione di  $a$  poteva anche ottenersi usando le espressioni di  $z_{\pm}$ , che implicano

$$\rho_{\pm} = \frac{p}{1 \mp e},$$

e ricordando che

$$a = \frac{\rho_+ + \rho_-}{2} = \frac{p(1 + e) + p(1 - e)}{2(1 - e^2)} = \frac{p}{1 - e^2}.$$

Analogamente, la distanza  $|x_0|$  tra il centro  $C$  ed il fuoco  $O$  è data da

$$a - \rho_- = \frac{p}{1 - e^2} - \frac{p}{1 + e} = e \frac{p}{1 - e^2} = ea.$$

Tale relazione fornisce l'interpretazione di  $e$ .

Le precedenti osservazioni provano che i moti ad energia negativa e momento angolare non nullo di un punto in un potenziale Newtoniano soddisfano la

Prima legge di Keplero: *Le orbite sono ellissi aventi il centro attrattore come uno dei due fuochi.*

L'area dell'ellisse è data da  $\mathcal{A} = \pi ab$  e quindi, notando che  $b^2 = pa$ ,

$$\mathcal{A}^2 = \pi^2 a^3 p.$$

Detto  $T$  il periodo del moto, la conservazione della velocità areolare comporta inoltre

$$\mathcal{A} = AT = \frac{1}{2}LT$$

e quindi

$$\frac{a^3}{T^2} = \frac{L^2}{4\pi^2 p} = \frac{1}{4\pi^2} \frac{k}{m}.$$

Ricordando che  $k = \mathcal{G}Mm$  si ottiene pertanto la relazione

$$\frac{a^3}{T^2} = \frac{1}{4\pi^2} \mathcal{G}M,$$

che esprime la

Terza legge di Keplero: *Il rapporto tra il cubo del semiasse maggiore  $a$  dell'orbita ed il quadrato del periodo è indipendente dalla massa della particella attratta.*

*Osservazione:* Le tre leggi di Keplero furono ottenute dall'osservazione dei dati astronomici. La Meccanica ce le fornisce come conseguenza matematica degli assiomi della Meccanica, insieme con l'assunzione di attrazione Newtoniana e con l'identificazione della massa inerziale con la massa gravitazionale. Tale deduzione è uno dei principali successi della Meccanica.

## 7. Principio di minima azione: punto materiale.

### 7.1 Funzionali su spazi di traiettorie.

I moti di un punto materiale libero e soggetto ad una forza conservativa possono caratterizzarsi come soluzioni di un principio variazionale, il principio di minima azione. Tale principio è di validità molto più generale, come si vedrà nel seguito e rappresenta una formulazione unificata per tutti i problemi di Meccanica di tipo conservativo. L'introduzione di tale principio richiede la premessa di alcune definizioni.

#### Spazio delle traiettorie.

Fissiamo due punti  $x^{(1)}$  ed  $x^{(2)}$  entrambi contenuti in un aperto  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ , con  $d \geq 1$ . Fissiamo inoltre un numero reale  $T > 0$  e consideriamo l'insieme  $\mathcal{M}_{x^{(1)}, x^{(2)}, T}$ , che denoteremo semplicemente con  $\mathcal{M}$  quando non vi sia possibilità di equivoco,

$$\mathcal{M}_{x^{(1)}, x^{(2)}, T} = \{\gamma \mid \gamma : [0, T] \rightarrow \Omega \subset \mathbb{R}^d\}$$

costituito dalle funzioni  $t \rightarrow \gamma(t)$  tali che:

- 1)  $t \rightarrow \gamma(t)$  è una funzione infinitamente differenziabile in  $(0, T)$  continua con tutte le derivate continue in  $[0, T]$  e tale che

$$\sum_{i=1}^d (\dot{\gamma}_i(t))^2 > 0 \quad \forall t \in (0, T);$$

- 2)

$$\gamma(0) = x^{(1)}, \quad \gamma(T) = x^{(2)}.$$

L'insieme  $\mathcal{M}$  è l'insieme delle curve regolari (traiettorie) in  $\Omega$  che uniscono i punti  $x^{(1)}$  ed  $x^{(2)}$ , parametrizzate sull'intervallo  $[0, T]$ . Definiamo in esso una metrica mediante la norma: per ogni coppia  $\gamma$  ed  $\eta$  di traiettorie in  $\mathcal{M}$  si pone

$$\rho(\gamma, \eta) = \sup_{t \in [0, T]} [|\gamma(t) - \eta(t)| + |\dot{\gamma}(t) - \dot{\eta}(t)|].$$

È immediato verificare che  $\rho(\cdot, \cdot)$  è una metrica e che  $\mathcal{M}$ , munito di tale metrica è uno spazio metrico. Una funzione

$$\Phi : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$$

è denominata *funzionale* su  $\mathcal{M}$ . Useremo la notazione  $\Phi[\gamma]$  per denotare il valore assunto in corrispondenza della traiettoria  $\gamma$ . Se  $\gamma \rightarrow \Phi[\gamma]$  è continua, si parla di *funzionale continuo*.

*Osservazione 1:* La metrica appena introdotta non è l'unica possibile. Esempi di altre definizioni sono:

$$\rho_1(\gamma, \eta) = \sup_{t \in [0, T]} |\gamma(t) - \eta(t)|,$$

$$\rho_2(\gamma, \eta) = \int_0^T dt |\gamma(t) - \eta(t)|.$$

Due traiettorie sono vicine nella metrica  $\rho_1$  quando ad uguali istanti le due traiettorie occupano punti vicini, mentre perché siano vicine nella metrica  $\rho$  anche le derivate devono essere vicine. Due traiettorie sono vicine rispetto alla metrica  $\rho_2$  anche se vi è un insieme di istanti di misura piccola ove le traiettorie sono lontane, purché siano vicine nel resto dei punti. In corrispondenza di tali metriche si avranno altrettante nozioni di continuità del funzionale.

Esempi di funzionali.

Fissato  $t_0 \in [0, T]$  ed  $F : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  continua, si ponga

$$\Phi_1[\gamma] = F(\gamma(t_0)).$$

$$\Phi_2[\gamma] = \int_0^T dt F(\gamma(t)).$$

È chiaro che  $\Phi_1$  è un funzionale continuo rispetto alle metriche  $\rho$  e  $\rho_1$ , mentre non lo è rispetto alla metrica  $\rho_2$ .  $\Phi_2$  è un funzionale continuo anch'esso rispetto alle metriche  $\rho$  e  $\rho_1$ . Se  $F$  è Lipshitziana, allora  $\Phi_2$  è anche continuo rispetto alla metrica  $\rho_2$ .

Sia

$$\ell[\gamma] = \int_0^T dt \sqrt{(\dot{\gamma}_1(t))^2 + \dots + (\dot{\gamma}_d(t))^2}.$$

Il funzionale  $\ell$  rappresenta la *lunghezza* della traiettoria  $\gamma$ . È continuo rispetto alla metrica  $\rho$  ma non rispetto alle metriche  $\rho_1$  e  $\rho_2$ .

Un funzionale particolarmente importante in Meccanica è il funzionale Azione, che si definisce come segue: sia

$$L : \mathbb{R}^d \times \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

e si denoti con  $L(v, x, t)$  il suo valore in corrispondenza del punto  $(v, x, t) \in \mathbb{R}^d \times \Omega \times \mathbb{R}$ . Si supponga  $L$  continua e si ponga

$$\mathcal{A}[\gamma] = \int_0^T dt L(\dot{\gamma}(t), \gamma(t), t). \quad (7.1)$$

Il funzionale  $\mathcal{A}$  prende il nome di *Azione* e la funzione  $L$  prende il nome di *Lagrangiana*. L'azione è un funzionale continuo rispetto alla metrica  $\rho$  ma non rispetto a  $\rho_1$  e  $\rho_2$ . Il funzionale  $\ell$  è un caso particolare di azione corrispondente ad  $L(v, x, t) = |v|$ .

## 7.2 Punti stazionari di funzionali

Nel seguito, per fissare le idee considereremo fissata la metrica  $\rho$ .

**Definizione 7.1.** Una traiettoria  $\gamma \in \mathcal{M}$  è un *punto di minimo* (risp. *punto di massimo*) per il funzionale  $\Phi$  se

$$\Phi(\gamma) \leq \Phi(\eta) \quad (\text{risp. } \Phi(\gamma) \geq \Phi(\eta)) \quad \forall \eta \in \mathcal{M}.$$

Analogamente, una traiettoria  $\gamma \in \mathcal{M}$  è un *punto di minimo proprio* (risp. *punto di massimo proprio*) per il funzionale  $\Phi$  se

$$\Phi(\gamma) < \Phi(\eta) \quad (\text{risp. } \Phi(\gamma) > \Phi(\eta)) \quad \forall \eta \in \mathcal{M}, \eta \neq \gamma.$$

Una traiettoria  $\gamma \in \mathcal{M}$  è un *punto di minimo locale* (risp. *punto di massimo locale*) per il funzionale  $\Phi$  se esiste una sfera di centro  $\gamma$ ,  $B(\gamma, r) = \{\eta \in \mathcal{M} \mid \rho(\eta, \gamma) < r\}$ , tale che risulti

$$\Phi(\gamma) \leq \Phi(\eta) \quad (\text{risp. } \Phi(\gamma) \geq \Phi(\eta)) \quad \forall \eta \in B(\gamma, r).$$

Analogamente, una traiettoria  $\gamma \in \mathcal{M}$  è un *punto di minimo locale proprio* (risp. *punto di massimo locale proprio*) per il funzionale  $\Phi$  se esiste una sfera di centro  $\gamma$ ,  $B(\gamma, r) = \{\eta \in \mathcal{M} \mid \rho(\eta, \gamma) < r\}$ , tale che risulti

$$\Phi(\gamma) < \Phi(\eta) \quad (\text{risp. } \Phi(\gamma) > \Phi(\eta)) \quad \forall \eta \in B(\gamma, r), \eta \neq \gamma.$$

Al fine di formulare condizioni equivalenti alle definizioni precedenti, fissata una traiettoria  $\gamma$ , diamo la seguente

**Definizione 7.2.** Si dice *famiglia di traiettorie variate* un insieme di curve

$$\{\gamma_\varepsilon, \varepsilon \in [-1, 1]\},$$

caratterizzato come segue: si fissi una funzione continua ed infinite volte differenziabile

$$u : [-1, 1] \times [0, T] \rightarrow u(\varepsilon, t) \in \Omega,$$

tale che



1)

$$u(0, t) = \gamma(t), \forall t \in [0, T];$$

2)

$$u(\varepsilon, 0) = x^{(1)}, \quad u(\varepsilon, T) = x^{(2)}, \quad \forall \varepsilon \in [-1, 1].$$

La curva  $\gamma_\varepsilon$  è data da

$$t \rightarrow \gamma_\varepsilon(t) = u(\varepsilon, t).$$

Si noti che in corrispondenza di ogni scelta della funzione infinitamente differenziabile  $u$ , si ha una famiglia di traiettorie variate.

**Proposizione 7.1.** *Se la traiettoria  $\gamma$  è un punto di minimo (risp. massimo) locale per il funzionale  $\Phi$ , per ogni famiglia di traiettorie variate  $\{\gamma_\varepsilon, \varepsilon \in [-1, 1]\}$ , la funzione di variabile reale  $\phi: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  definita come*

$$\phi(\varepsilon) = \Phi[\gamma_\varepsilon], \forall \varepsilon \in [-1, 1]$$

*ha un minimo (risp massimo) locale in  $\varepsilon = 0$ .*

Dim. Sia  $\gamma$  un punto di minimo locale, e  $B(\gamma, r)$  la relativa sfera. Scelta ad arbitrio una famiglia di traiettorie variate, esiste  $\varepsilon_0 > 0$  tale che  $\gamma_\varepsilon \in B(\gamma, r)$  per ogni  $\varepsilon$  tale che  $|\varepsilon| \leq \varepsilon_0$ . In conseguenza  $\phi(\varepsilon) \geq \phi(0)$  se  $\varepsilon < \varepsilon_0$  e quindi  $\varepsilon \rightarrow \phi(\varepsilon)$  ha un minimo locale.  $\square$

**Definizione 7.3.** Diremo che il funzionale  $\Phi$  è *derivabile* in  $\gamma$  se per ogni famiglia di traiettorie variate  $\{\gamma_\varepsilon, \varepsilon \in [-1, 1]\}$  la funzione  $\varepsilon \rightarrow \phi(\varepsilon) = \Phi[\gamma_\varepsilon]$  è derivabile in un intorno di  $\varepsilon = 0$ .

In conseguenza di tale definizione si ha

**Proposizione 7.2.** *Se la traiettoria  $\gamma$  è un punto di minimo (risp massimo) locale per il funzionale  $\Phi$  ed inoltre  $\Phi$  è derivabile in  $\gamma$ , allora per ogni famiglia di traiettorie variate  $\{\gamma_\varepsilon, \varepsilon \in [-1, 1]\}$ , risulta*

$$\left. \frac{d}{d\varepsilon} \Phi[\gamma_\varepsilon] \right|_{\varepsilon=0} = 0. \quad (7.2)$$

Come per le funzioni di variabili reali, la condizione (7.2) non è in generale sufficiente all'esistenza di punti di minimo o massimo. Daremo pertanto la seguente definizione:

**Definizione 7.4.** Una traiettoria  $\gamma \in \mathcal{M}$  è un *punto stazionario* per il funzionale derivabile  $\Phi$  se per ogni famiglia di traiettorie variate  $\{\gamma_\varepsilon, \varepsilon \in [-1, 1]\}$  risulta soddisfatta la (7.2).

### 7.3 Equazioni di Eulero-Lagrange.

Nel seguito fisseremo l'attenzione sul funzionale Azione. Supponiamo che la funzione Lagrangiana sia differenziabile due volte. In questa ipotesi

**Proposizione 7.3.** *Per ogni traiettoria  $\gamma \in \mathcal{M}$  il funzionale Azione  $\mathcal{A}[\gamma]$  è derivabile in  $\gamma$  e per ogni famiglia di traiettorie variate  $\{\gamma_\varepsilon, \varepsilon \in [-1, 1]\}$  risulta*

$$\frac{d}{d\varepsilon} \mathcal{A}[\gamma_\varepsilon] \Big|_{\varepsilon=0} = - \int_0^T dt \sum_{i=1}^d \left[ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial v_i} \right) (\dot{\gamma}(t), \gamma(t), t) - \frac{\partial L}{\partial x_i} (\dot{\gamma}(t), \gamma(t), t) \right] z_i(t), \quad (7.3)$$

dove

$$z_i(t) = \frac{\partial u_i(\varepsilon, t)}{\partial \varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0}. \quad (7.4)$$

Dim. Fissata la famiglia di traiettorie variate  $\{\gamma_\varepsilon, \varepsilon \in [-1, 1]\}$  e usando per brevità la notazione

$$\dot{u}(\varepsilon, t) = \frac{\partial u(\varepsilon, t)}{\partial t},$$

per definizione

$$\phi(\varepsilon) = \mathcal{A}[\gamma_\varepsilon] = \int_0^T dt L(\dot{u}(\varepsilon, t), u(\varepsilon, t), t).$$

Con le assunzioni fatte, tale funzione è certamente differenziabile e quindi resta solo da calcolare la derivata. Sussistono inoltre le condizioni per la derivazione sotto il segno di integrale e pertanto

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\varepsilon} \mathcal{A}[\gamma_\varepsilon] = & \\ & \int_0^T dt \sum_{i=1}^d \left[ \frac{\partial L}{\partial v_i} (\dot{u}(\varepsilon, t), u(\varepsilon, t), t) \frac{\partial^2 u_i(\varepsilon, t)}{\partial \varepsilon \partial t} + \frac{\partial L}{\partial u_i} (\dot{u}(\varepsilon, t), u(\varepsilon, t), t) \frac{\partial u_i(\varepsilon, t)}{\partial \varepsilon} \right]. \end{aligned} \quad (7.5)$$

Poiché

$$\frac{\partial^2 u_i(\varepsilon, t)}{\partial \varepsilon \partial t} = \frac{\partial^2 u_i(\varepsilon, t)}{\partial t \partial \varepsilon}$$

e  $(\partial L / \partial v_i)(\dot{u}(\varepsilon, t), u(\varepsilon, t), t)$  è differenziabile rispetto a  $t$ , il primo termine può essere integrato per parti fornendo (si omettono gli argomenti di  $L$  per brevità)

$$\int_0^T dt \frac{\partial L}{\partial v_i} \frac{\partial^2 u_i(\varepsilon, t)}{\partial \varepsilon \partial t} = - \int_0^T dt \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial v_i} \right) \frac{\partial u_i(\varepsilon, t)}{\partial \varepsilon} + \frac{\partial L}{\partial v_i} \frac{\partial u_i(\varepsilon, t)}{\partial \varepsilon} \Big|_{t=0}^{t=T}. \quad (7.6)$$

Ricordando che  $u(\varepsilon, 0) = x^{(1)}$  ed  $u(\varepsilon, T) = x^{(2)}$ , si ha

$$\frac{\partial u_i(\varepsilon, 0)}{\partial \varepsilon} = 0 = \frac{\partial u_i(\varepsilon, T)}{\partial \varepsilon}.$$

Pertanto l'ultimo termine di (7.6) è nullo. Sostituendo la relazione così ottenuta in (7.5) e ponendo  $\varepsilon = 0$ , si ottiene la (7.3).  $\square$

**Proposizione 7.4.** *Condizione necessaria e sufficiente affinché  $\gamma$  sia un punto stazionario per l'Azione  $\mathcal{A}$  è che  $\gamma$  soddisfi le equazioni di Eulero-Lagrange*

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial v_i} \right) (\dot{\gamma}(t), \gamma(t), t) - \frac{\partial L}{\partial x_i} (\dot{\gamma}(t), \gamma(t), t) = 0, \quad i = 1, \dots, d. \quad (7.7)$$

Dim. È evidente che, se  $\gamma$  soddisfa le (7.7), da (7.3) segue

$$\left. \frac{d}{d\varepsilon} \mathcal{A}[\gamma_\varepsilon] \right|_{\varepsilon=0} = 0$$

per ogni famiglia di traiettorie variate  $\{\gamma_\varepsilon, \varepsilon \in [-1, 1]\}$ . Per mostrare il viceversa occorre preliminarmente provare il seguente

**Lemma 7.5.** *Sia  $t \rightarrow f(t)$  una funzione in  $C^0([0, T] \rightarrow \mathbb{R}^d)$ , tale che*

$$\int_0^T dt f(t) \cdot h(t) = 0 \quad (7.8)$$

per ogni funzione  $t \rightarrow h(t)$  in  $C^1([0, T] \rightarrow \mathbb{R}^d)$  tale che  $h(0) = h(T) = 0$ . Allora  $f(t) = 0 \forall t \in [0, T]$ .

Dim. Per assurdo, sia  $\bar{t} \in (0, T)$  tale che  $f(\bar{t}) \neq 0$ . Per continuità esistono  $t_1 < \bar{t} < t_2$  tali che  $f(t) \neq 0$  per ogni  $t \in (t_1, t_2)$ . Per  $n$  intero, si consideri la funzione

$$h_n(t) = \begin{cases} f(t), & t \in (t_1, t_2), \\ 0, & t \notin (t_1 - 1/n, t_2 + 1/n), \end{cases}$$

e negli intervalli  $[t_1 - 1/n, t_1]$  e  $[t_2, t_2 + 1/n]$  in modo arbitrario, a patto che  $h_n$  sia in  $C^1([0, T] \rightarrow \mathbb{R}^d)$  e risulti

$$\sup_{t \in [0, T]} |h_n(t)| \leq \sup_{t \in [0, T]} |f(t)|.$$

Risulta

$$\int_0^T dt f(t) \cdot h_n(t) \geq \int_{t_1}^{t_2} dt |f(t)|^2 - \frac{2}{n} \left( \sup_{t \in [0, T]} |f(t)| \right)^2.$$

Scegliendo  $n$  tanto grande che

$$\frac{2}{n} \left( \sup_{t \in [0, T]} |f(t)| \right)^2 < \frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_2} dt |f(t)|^2,$$

si ottiene

$$\int_0^T dt f(t) \cdot h_n(t) > \frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_2} dt |f(t)|^2 > 0,$$

contro l'ipotesi.  $\square$

Useremo questo lemma con  $f(t) = (f_1(t), \dots, f_d(t))$  definite come

$$f_i(t) = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial v_i} \right) (\dot{\gamma}(t), \gamma(t), t) - \frac{\partial L}{\partial x_i} (\dot{\gamma}(t), \gamma(t), t)$$

e  $h(t) = (h_1(t), \dots, h_d(t))$  definite come

$$h_i(t) = z_i(t) = \left. \frac{\partial u_i(\varepsilon, t)}{\partial \varepsilon} \right|_{\varepsilon=0}.$$

La condizione di stazionarietà si traduce nella richiesta che la (7.8) sia soddisfatta per ogni  $h$  differenziabile e nulla agli estremi. Infatti  $h$  è, a parte questo, completamente arbitraria in quanto, comunque fissata  $h(t)$ , è sempre possibile costruire una famiglia di traiettorie variate corrispondenti scegliendo  $u(\varepsilon, t)$  in modo tale che sia verificata la (7.4). Ad esempio, ponendo  $u(\varepsilon, t) = \gamma(t) + \varepsilon h(t)$ , si definisce una famiglia di traiettorie variate. Il lemma implica quindi le equazioni di Eulero-Lagrange.  $\square$

*Osservazione: Problema ai limiti.* Il sistema (7.7) si presenta come un sistema di  $d$  equazioni differenziali del secondo ordine. Tuttavia, a differenza dei sistemi trattati nel capitolo 2, per i quali si ricercavano le soluzioni del problema ai valori iniziali di Cauchy, nella risoluzione del sistema (7.7) si è interessati alla determinazione di traiettorie  $\gamma$  per le quali la posizione iniziale è specificata come per il problema ai valori iniziali, ma, invece della velocità iniziale, si specifica la posizione finale. Tale problema è detto *problema ai limiti* per il sistema (7.7). Il problema ai valori iniziali ed il problema ai limiti non sono in generale equivalenti, come verrà mostrato più avanti con un esempio. È però intuitivamente ovvio che i due problemi non possono essere troppo dissimili se il tempo  $T$  è sufficientemente piccolo, e la posizione iniziale e finale sono corrispondentemente prossime in quanto, per  $T$  sufficientemente piccolo,  $x^{(2)} - x^{(1)} \approx T\dot{\gamma}(0)$ .

In termini più precisi, proveremo la seguente

**Proposizione 7.6.** *Se il sistema (7.7) è riducibile a forma normale con secondo membro continuo e Lipshitziano, fissato  $x^{(1)}$  esistono  $\delta$  e  $T_0$  tali che, se  $|x^{(2)} - x^{(1)}| < \delta$  e  $T < T_0$ , esiste ed è unica la soluzione derivabile  $t \rightarrow \gamma(t)$  del sistema (7.7), soddisfacente le condizioni ai limiti*

$$\gamma(0) = x^{(1)}, \quad \gamma(T) = x^{(2)}.$$

Dim. Infatti, per le ipotesi fatte, il sistema (7.7) può essere ridotto, in un intorno di  $x^{(1)}$ , alla forma

$$\ddot{\gamma}^i = g_i(\dot{\gamma}, \gamma, t), \quad i = 1, \dots, d,$$

con le  $g_i$  funzioni Lipshitziane e differenziabili. Si fissi arbitrariamente  $v^{(1)}$  e si denoti con  $t \rightarrow \gamma_{x^{(1)}, v^{(1)}}(t)$  la soluzione del problema ai valori iniziali del sistema (7.7), con

$$\gamma_{x^{(1)}, v^{(1)}}(0) = x^{(1)}, \quad \dot{\gamma}_{x^{(1)}, v^{(1)}}(0) = v^{(1)},$$

la cui esistenza ed unicità è stabilita dai risultati del capitolo 2. Per poter ricondurre la soluzione del problema ai limiti a quella del problema ai valori iniziali, basta far vedere che scelto  $x^{(2)}$  è possibile determinare  $v^{(1)}$  in modo tale che

$$\gamma_{x^{(1)}, v^{(1)}}(T) = x^{(2)}.$$

Questa condizione può interpretarsi come un sistema di equazioni nell'incognita  $v^{(1)}$ . Per stabilire la sua risolubilità, a norma del teorema della funzione implicita, è sufficiente controllare l'invertibilità della matrice

$$\frac{\partial \gamma_{x^{(1)}, v^{(1)}}^i(T)}{\partial v_j^{(1)}}.$$

È immediato controllare che  $t \rightarrow \gamma_{x^{(1)}, v^{(1)}}(t)$  soddisfa il sistema integrale

$$\gamma_{x^{(1)}, v^{(1)}}^i(t) = x_i^{(1)} + v_i^{(1)}t + \int_0^t ds(t-s)g_i(\gamma_{x^{(1)}, v^{(1)}}(s), \dot{\gamma}_{x^{(1)}, v^{(1)}}(s), s).$$

Infatti, differenziando rispetto al tempo si ottiene

$$\dot{\gamma}_{x^{(1)}, v^{(1)}}^i(t) = v_i^{(1)} + \int_0^t ds g_{i'}(\gamma_{x^{(1)}, v^{(1)}}(s), \dot{\gamma}_{x^{(1)}, v^{(1)}}(s), s),$$

$$\ddot{\gamma}_{x^{(1)}, v^{(1)}}^i(t) = g_i(\gamma_{x^{(1)}, v^{(1)}}(t), \dot{\gamma}_{x^{(1)}, v^{(1)}}(t), t).$$

Differenziando l'espressione integrale di  $\gamma_{x^{(1)},v^{(1)}}(T)$  rispetto a  $v^{(1)}$  si ottiene

$$\frac{\partial \gamma_{x^{(1)},v^{(1)}}^i(T)}{\partial v_j^{(1)}} = T\delta_{i,j} + \int_0^T ds(T-s) \frac{\partial g_i(\gamma_{x^{(1)},v^{(1)}}(s), \dot{\gamma}_{x^{(1)},v^{(1)}}(s), s)}{\partial v_j^{(1)}}.$$

La Lipschitzianità di  $g$  e la limitatezza delle derivate di  $\gamma$  rispetto ai dati iniziali mostrano che

$$\frac{\partial \gamma_{x^{(1)},v^{(1)}}^i(T)}{\partial v_j^{(1)}} = T\delta_{i,j} + O(T^2).$$

Pertanto, per  $T$  piccolo, tale matrice è non singolare e ciò prova l'esistenza della soluzione del problema ai limiti. L'unicità per  $|x^{(2)} - x^{(1)}|$  piccolo segue poi dall'unicità locale della funzione implicitamente definita.  $\square$

Un primo esempio di applicazione delle equazioni di Eulero-Lagrange è fornito dal funzionale  $\ell[\gamma]$ , la lunghezza della traiettoria tra i due punti  $x^{(1)}$  ed  $x^{(2)}$ . Come si è visto si tratta di un particolare funzionale Azione, corrispondente alla Lagrangiana

$$L(v, x, t) = \sqrt{v_1^2 + \dots + v_d^2}.$$

Poiché la Lagrangiana non dipende dalla variabile  $x$ , dalle equazioni di Eulero-Lagrange segue

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial v_i} \right) (\dot{\gamma}(t), \gamma(t), t) = 0.$$

Esplicitando le derivate

$$\left( \frac{\partial L}{\partial v_i} \right) (\dot{\gamma}(t), \gamma(t), t) = \frac{\dot{\gamma}_i(t)}{\sqrt{\dot{\gamma}_1^2 + \dots + \dot{\gamma}_d^2}}.$$

Pertanto il vettore unitario  $\tau(t)$  tangente alla curva  $\gamma$  nel punto  $\gamma(t)$ , di componenti

$$\tau_i(t) = \frac{\dot{\gamma}_i(t)}{\sqrt{\dot{\gamma}_1^2 + \dots + \dot{\gamma}_d^2}},$$

deve essere costante nel tempo e questo caratterizza, tra tutte le curve differenziabili che congiungono i punti  $x^{(1)}$  ed  $x^{(2)}$ , la retta come quella che rende stazionaria la lunghezza. In realtà, in questo caso, le rette addirittura minimizzano la lunghezza, ma ciò richiede ulteriore analisi, in quanto non segue dalle equazioni di Eulero-Lagrange.

## 7.4 Principio di minima azione di Hamilton.

L'applicazione delle considerazioni variazionali alla Meccanica si riduce a trovare una Lagrangiana tale che le equazioni di Eulero-Lagrange corrispondenti coincidano con l'equazione di Newton che esprime la seconda legge della Meccanica.

Supponiamo  $d = 3$  e denotiamo con  $t \rightarrow \gamma(t)$  il moto di un punto materiale di massa  $m$  che si muove sotto l'azione di una forza conservativa di potenziale  $V$  e al tempo  $t = 0$  si trova nel punto  $x^{(1)}$ . Abitualmente fissiamo anche la velocità del punto materiale al tempo  $t = 0$  in modo da ricondurre la determinazione del moto alla soluzione del problema di Cauchy per l'equazione

$$m\ddot{\gamma}(t) = -\nabla V(\gamma(t)). \quad (7.9)$$

Nel contesto dei principi variazionali come si è visto, si preferisce specificare invece la posizione  $x^{(2)}$  assunta dal punto materiale al tempo  $t = T$ . Per evitare la difficoltà della non equivalenza del problema ai limiti e del problema ai valori iniziali o supponiamo il tempo  $T$  sufficientemente piccolo oppure, fissato  $x^{(1)}$  ed una arbitraria velocità  $v_0$ , e detta  $t \rightarrow \gamma(t)$  la soluzione del problema ai valori iniziali corrispondente, fissiamo  $x^{(2)} = \gamma(T)$  una volta per tutte.

Se si introduce la Lagrangiana

$$L(v, x, t) = \frac{1}{2}mv^2 - V(x), \quad (7.10)$$

si ha:

$$\frac{\partial L}{\partial v_i} = mv_i, \quad \frac{\partial L}{\partial x_i} = -\frac{\partial V}{\partial x_i}.$$

Pertanto le equazioni di Eulero-Lagrange coincidono con le (7.9). In conseguenza:

Principio dell'Azione Stazionaria (di Hamilton): *La traiettoria  $t \rightarrow \gamma(t)$  è il moto di un punto materiale di massa  $m$  sotto l'azione del potenziale  $V$  con punto iniziale  $\gamma(0) = x^{(1)}$  e punto finale  $\gamma(T) = x^{(2)}$  se e solo se essa è un punto stazionario per il funzionale azione corrispondente alla Lagrangiana (7.10).*

*Osservazione 1:* L'enunciato precedente va comunemente sotto il nome di principio di minima azione, in quanto spesso la traiettoria che rappresenta un punto stazionario è anche un punto di minimo per il funzionale azione. Tale affermazione non è però valida in condizioni così generali e le condizioni sotto le quali si ha un minimo per l'azione saranno discusse in seguito.

*Osservazione 2:* La Meccanica fornisce un semplice esempio di non equivalenza tra il problema ai valori iniziali ed il problema ai limiti, in assenza di ipotesi di località. Si consideri infatti un problema unidimensionale con potenziale  $V(x) = |x|^{-1}$ . È evidente che se  $x^{(1)} < 0$  ed  $x^{(2)} > 0$ , non esiste nessun moto che congiunge  $x^{(1)}$  ed

$x^{(2)}$ , a causa della conservazione dell'energia. In questo caso quindi il problema ai limiti non ha soluzione con le prescritte condizioni, mentre il problema ai valori iniziali ammette un'unica soluzione che è globale nel tempo. Naturalmente, se anche  $x^{(2)} < 0$  ed è sufficientemente prossimo a  $x^{(1)}$  esiste unica la soluzione del problema ai limiti almeno per  $T$  sufficientemente piccolo, in base alla Proposizione 7.6.

*Osservazione 3:* Quella scelta in (7.10) non è l'unica Lagrangiana che dà luogo alle equazioni di Newton. Consideriamo ad esempio il caso  $d = 1$ .

$$L'(v, x) = L + vV,$$

si ha

$$\frac{\partial}{\partial v}(L' - L) = V, \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial}{\partial v}(L' - L) \right) (\dot{\gamma}, \gamma) = \dot{\gamma}V'(\gamma),$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(L' - L)(\dot{\gamma}, \gamma) = \dot{\gamma}V'(\gamma)$$

e quindi le equazioni di Eulero-Lagrange non cambiano.

*Esercizio:* Sia  $d = 1$  ed  $m = 1$ . Fissata una funzione differenziabile  $r \rightarrow F(r)$  con  $F' \neq 0$ , sia  $L^*$  la seguente funzione:

$$L^*(v, x) = v \int_1^v \frac{F[z^2/2 + V(x)]}{z^2} dz.$$

Verificare che le equazioni di Eulero-Lagrange corrispondenti sono le stesse che si ottengono a partire dalla Lagrangiana  $L$ .

Basta calcolare

$$\frac{\partial}{\partial v}L^* = \int_1^v \frac{F[z^2/2 + V(x)]}{z^2} dz + \frac{F[v^2/2 + V(x)]}{v}.$$

Posto  $\dot{\gamma} = v$ ,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial v}L^* &= \dot{v} \frac{F[v^2/2 + V(x)]}{v^2} + V'v \int_1^v \frac{F'[z^2/2 + V(x)]}{z^2} dz \\ &+ F'[v^2/2 + V(x)] \frac{v\dot{v} + vV'}{v} - \dot{v} \frac{F[v^2/2 + V(x)]}{v^2} \\ &= V'v \int_1^v \frac{F'[z^2/2 + V(x)]}{z^2} dz + F'[v^2/2 + V(x)] \frac{v\dot{v} + vV'}{v}. \end{aligned}$$

D'altra parte

$$\frac{\partial}{\partial x}L^* = V'v \int_1^v \frac{F'[z^2/2 + V(x)]}{z^2} dz$$



e pertanto l'equazione di Eulero-Lagrange è

$$F'[v^2/2 + V(x)][\dot{v} + V'] = 0$$

che è equivalente alla legge di Newton poiché  $F' \neq 0$ .

*Osservazione 4:* Il moto di un punto materiale in dimensione  $d = 1$  soggetto ad una forza di attrito lineare

$$f = -h\dot{x}$$

può anch'esso essere formulato con un principio di minima azione, adottando la Lagrangiana (ben definita per  $v > 0$ )

$$L(v, x) = v \log v - \frac{h}{m}x.$$

Infatti

$$\frac{\partial}{\partial v}L = 1 + \log v, \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial v} = \frac{\dot{v}}{v}, \quad \frac{\partial}{\partial x}L = -\frac{h}{m}$$

e quindi l'equazione di Lagrange diviene

$$m\dot{v} + hv = 0.$$

Tuttavia, non è possibile includere sia la forza d'attrito che una forza posizionale.

È però possibile scrivere le equazioni di Newton nella forma di equazioni di Eulero-Lagrange per un opportuno funzionale Azione, anche in presenza di forze dipendenti anche dalla velocità, purché di forma speciale. Anzitutto occorre introdurre una notazione: sia  $F(x, v, t)$  una funzione differenziabile su  $\Omega \times \mathbb{R}$ . Se si fissa una curva  $t \rightarrow \gamma(t)$  e si considera la funzione del tempo  $t \rightarrow F(\gamma(t), t)$ , la sua derivata temporale si scrive

$$\frac{d}{dt}F(\gamma(t), t) = \frac{\partial F}{\partial t}(\gamma(t), t) + \dot{\gamma}(t) \cdot (\nabla_x F)(\gamma(t), t).$$

Questa espressione suggerisce di usare la notazione

$$\frac{d}{dt}F = \frac{\partial F}{\partial t} + v \cdot \nabla F, \tag{7.11}$$

con l'intesa che essa andrà calcolata con  $x = \gamma(t)$  e  $v = \dot{\gamma}(t)$ .

Supponiamo che  $f$  sia una forza dipendente oltre che da  $x$  anche da  $v$  e  $t$ , ma la cui dipendenza sia tale che esista una funzione  $U(x, v, t)$  che permetta di esprimere  $f$  nella forma

$$f_i = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial U}{\partial v_i} \right) - \frac{\partial U}{\partial x_i}. \tag{7.12}$$

È chiaro che in questo caso l'equazione  $m\ddot{\gamma} = f(\gamma, \dot{\gamma}, t)$  può scriversi come equazione di Eulero-Lagrange corrispondente alla Lagrangiana

$$L(v, x, t) = \frac{1}{2}mv^2 - U(x, v, t).$$

Una forza per la quale vale la (7.12) si dice che ammette la funzione  $U$  come *potenziale generalizzato*. Un caso particolarmente importante di forza che ammette un potenziale generalizzato è la forza di Lorentz in Elettrodinamica. Essa si scrive come

$$f = q\left(E + \frac{1}{c}v \wedge B\right) \quad (7.13)$$

dove  $q$  è la carica elettrica,  $c$  la velocità della luce nel vuoto,  $E$  il campo elettrico e  $B$  il campo di induzione magnetica, la cui dipendenza spazio-temporale è regolata dalle equazioni di Maxwell

$$\begin{aligned} \nabla \cdot D &= 4\pi\rho, & \nabla \wedge E + \frac{1}{c} \frac{\partial B}{\partial t} &= 0 \\ \nabla \cdot B &= 0, & \nabla \wedge H - \frac{1}{c} \frac{\partial D}{\partial t} &= \frac{4\pi}{c} j, \end{aligned} \quad (7.14)$$

con  $H$  il campo magnetico,  $D$  l'induzione elettrica,  $\rho$  la densità di carica elettrica e  $j$  la densità di corrente. La condizione  $\nabla \cdot B = 0$  è automaticamente soddisfatta se si assume che esista una funzione vettoriale  $A(x, t)$ , detta *potenziale vettore*, tale che

$$B = \nabla \wedge A. \quad (7.15)$$

In conseguenza di ciò e della seconda delle (7.14),

$$\nabla \wedge \left( E + \frac{1}{c} \frac{\partial A}{\partial t} \right) = 0.$$

Pertanto esiste una funzione reale  $\phi$ , detta *potenziale scalare*, tale che

$$E + \frac{1}{c} \frac{\partial A}{\partial t} = -\nabla\phi.$$

Da tali relazioni si ottiene la seguente espressione per la forza di Lorentz:

$$f = q \left( -\nabla\phi - \frac{1}{c} \frac{\partial A}{\partial t} + \frac{1}{c} v \wedge (\nabla \wedge A) \right).$$

È immediato controllare che

$$[v \wedge (\nabla \wedge A)]_i = \frac{\partial}{\partial x_i} (v \cdot A) - (v \cdot \nabla) A_i = \frac{\partial}{\partial x_i} (v \cdot A) - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial (v \cdot A)}{\partial v_i} \right) + \frac{\partial A_i}{\partial t},$$

avendo usato la notazione (7.11). Quindi si ha

$$\begin{aligned} f_i &= q \left( -\frac{\partial}{\partial x_i} \phi + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial x_i} (v \cdot A) - \frac{1}{c} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial (v \cdot A)}{\partial v_i} \right) \right) \\ &= -\frac{\partial}{\partial x_i} U + \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial U}{\partial v_i} \right), \end{aligned}$$

con

$$U = q\phi - \frac{q}{c}(v \cdot A),$$

che risulta pertanto il potenziale generalizzato della forza di Lorentz.

### 7.5 Invarianza delle equazioni di Eulero-Lagrange.

La formulazione della seconda legge della Meccanica mediante il Principio di azione stazionaria è rilevante per la sua possibilità di generalizzazione ad altri contesti sia meccanici che non. Essa è tuttavia anche di grande utilità pratica in varie situazioni, in quanto è in larga misura indipendente dalla scelta delle variabili effettuate. Per chiarire questo aspetto, consideriamo una trasformazione invertibile e differenziabile

$$\mathcal{S}: \Omega \subset \mathbb{R}^d \rightarrow \Theta \subset \mathbb{R}^d.$$

Interpreteremo una tale trasformazione come un cambio di coordinate (locale) in  $\mathbb{R}^d$ . Un esempio di trasformazione di questo tipo è fornito dalle coordinate polari. Usiamo le notazioni

$$y = \mathcal{S}(x)$$

per denotare il punto corrispondente ad  $x$  mediante  $\mathcal{S}$ ,

$$\eta(t) = \mathcal{S}(\gamma(t))$$

per denotare la curva corrispondente a  $\gamma$ . Detta  $M$  la matrice

$$M_{i,j}(x) = \frac{\partial [\mathcal{S}(x)]_i}{\partial x_j},$$

Si avrà

$$\dot{\eta}(t) = M(\gamma(t))\dot{\gamma}(t),$$

ed in termini di componenti

$$\dot{\eta}(t)_i = \sum_{j=1}^d M_{i,j}(\gamma(t))\dot{\gamma}_j(t).$$

Fissati  $x^{(1)}$  ed  $x^{(2)}$ , siano  $y^{(1)}$  ed  $y^{(2)}$  i punti corrispondenti. Per ogni traiettoria differenziabile  $\gamma$ , con estremi  $\gamma(0) = x^{(1)}$  e  $\gamma(T) = x^{(2)}$ , la traiettoria corrispondente  $\eta = \mathcal{S}(\gamma)$  ha per estremi  $y^{(1)}$  ed  $y^{(2)}$ . In corrispondenza della Lagrangiana  $L(v, x, t)$ , si consideri la funzione  $\tilde{L}(w, y, t)$  definita come

$$\tilde{L}(w, y, t) = L(M^{-1}w, \mathcal{S}^{-1}(y), t)$$

e si definisca l'Azione  $\tilde{\mathcal{A}}$  per una traiettoria  $\eta$  come

$$\tilde{\mathcal{A}}[\eta] = \int_0^T dt \tilde{L}(\dot{\eta}(t), \eta(t), t).$$

Per costruzione risulta

$$\tilde{\mathcal{A}}[\mathcal{S}(\gamma)] = \mathcal{A}[\gamma].$$

Pertanto se  $\gamma$  è un punto stazionario per  $\mathcal{A}$ ,  $\eta = \mathcal{S}(\gamma)$  è un punto stazionario di  $\tilde{\mathcal{A}}$  e quindi soddisfa le equazioni di Eulero-Lagrange

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \tilde{L}}{\partial w_i} \right) (\dot{\eta}(t), \eta(t), t) - \frac{\partial \tilde{L}}{\partial y_i} (\dot{\eta}(t), \eta(t), t) = 0, \quad i = 1, \dots, d. \quad (7.16)$$

Tali equazioni forniscono pertanto le equazioni del moto nelle nuove coordinate.

A titolo di esempio consideriamo di nuovo il moto di un punto in un campo di forze centrali. Come si è visto, esso è descritto, nelle coordinate cartesiane del piano di Laplace dalle equazioni

$$\begin{aligned} m\ddot{x}_1 &= -\frac{x_1}{|x|} \Phi'(|x|), \\ m\ddot{x}_2 &= -\frac{x_2}{|x|} \Phi'(|x|) \end{aligned}$$

che corrispondono alla Lagrangiana

$$L(v, x) = \frac{1}{2}mv^2 - \Phi(|x|).$$

La trasformazione  $\mathcal{S}$  associa ad ogni punto non coincidente con l'origine la coppia

$$\rho = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}, \quad \theta = \arctan \frac{x_2}{x_1}$$

se  $x_1 \neq 0$  e  $\theta = \pi/2$  se  $x_1 = 0$  ed  $x_2 > 0$ ,  $\theta = -\pi/2$  se  $x_1 = 0$  ed  $x_2 < 0$ . Ricordando che

$$v_1 = \dot{\rho} \cos \theta - \rho \dot{\theta} \sin \theta, \quad v_2 = \dot{\rho} \sin \theta + \rho \dot{\theta} \cos \theta,$$

$$\tilde{L}(\dot{\rho}, \dot{\theta}, \rho, \theta) = \frac{1}{2}m[\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\theta}^2] - \Phi(\rho).$$

Le equazioni di Eulero-Lagrange in queste coordinate si scrivono:

$$\begin{aligned} m\ddot{\rho} - m\rho\dot{\theta}^2 + \Phi'(\rho) &= 0, \\ \frac{d}{dt}(m\rho^2\dot{\theta}) &= 0. \end{aligned}$$

In particolare la seconda fornisce immediatamente la conservazione della velocità areolare in conseguenza dell'indipendenza di  $\tilde{L}$  da  $\theta$ .

## 7.6 Condizioni di minimo.

Concludiamo questo Capitolo con alcune considerazioni sulle condizioni affinché il punto stazionario sia effettivamente un punto di minimo. Supponiamo che il potenziale abbia derivate seconde limitate in  $\Omega$ . Si potrà pertanto scrivere, per ogni  $x \in \Omega$  e per ogni  $z$  tale che  $x + z \in \Omega$ ,

$$V(x + z) = V(x) + \nabla V(x) \cdot z + R(x, z) \quad (7.17)$$

con

$$|R(x, z)| \leq \frac{1}{2}Kz^2, \quad (7.18)$$

con  $K$  il massimo del modulo delle derivate. Sia ora  $\gamma$  una traiettoria che rappresenta un punto stazionario per l'Azione corrispondente alla Lagrangiana

$$L(v, x) = \frac{1}{2}mv^2 - V(x)$$

e sia  $\eta$  un'altra traiettoria in  $\mathcal{M}$ . Posto  $h(t) = \eta(t) - \gamma(t)$ ,  $h$  è una traiettoria differenziabile che ha l'origine come punto iniziale e finale. Usando la (7.17), calcoliamo ora

$$\mathcal{A}[\eta] - \mathcal{A}[\gamma] = \int_0^T dt \left[ \frac{1}{2}m\dot{h}(t)^2 + m\dot{\gamma}(t) \cdot \dot{h}(t) - \nabla V(\gamma(t)) \cdot h(t) - R(\gamma(t), h(t)) \right].$$

Ma

$$\int_0^T dt m\dot{\gamma}(t) \cdot \dot{h}(t) = - \int_0^T dt m\ddot{\gamma}(t) \cdot h(t) + m\dot{\gamma}(t) \cdot h(t) \Big|_{t=0}^{t=T}.$$

Poiché  $h(0) = 0 = h(T)$ , usando la condizione di stazionarietà per  $\gamma$  e cioè l'equazione di Newton, la differenza delle azioni si riduce a

$$\mathcal{A}[\eta] - \mathcal{A}[\gamma] = \int_0^T dt \left[ \frac{1}{2}m\dot{h}(t)^2 - R(\gamma(t), h(t)) \right]. \quad (7.19)$$

Usando la (7.18)

$$\int_0^T dt |R(\gamma(t), h(t))| \leq \frac{1}{2} K \int_0^T dt h(t)^2.$$

**Lemma 7.7.** *Sia  $t \rightarrow f(t)$  una funzione differenziabile in  $(0, T)$ , continua in  $[0, T]$  e nulla in un estremo. Si ha:*

$$\int_0^T dt f(t)^2 \leq \frac{T^2}{2} \int_0^T dt (\dot{f}(t))^2. \quad (7.20)$$

Dim. Poiché  $f(t)$  è differenziabile e nulla in un estremo, 0 per fissare le idee,

$$f(t) = \int_0^t ds \dot{f}(s)$$

e quindi, usando la disuguaglianza di Schwartz<sup>(1)</sup> con  $g = 1$ ,

$$|f(t)| \leq \left( \int_0^t ds (\dot{f}(s))^2 \right)^{1/2} \left( \int_0^t ds \right)^{1/2} = t^{1/2} \left( \int_0^t ds (\dot{f}(s))^2 \right)^{1/2}.$$

Pertanto

$$\int_0^T dt f(t)^2 \leq \int_0^T dt t \int_0^t ds (\dot{f}(s))^2 \leq \int_0^T dt t \int_0^T ds (\dot{f}(s))^2 = \frac{T^2}{2} \int_0^T ds (\dot{f}(s))^2.$$

□

---

(1)

$$\int_a^b fg \leq \left( \int_a^b f^2 \right)^{1/2} \left( \int_a^b g^2 \right)^{1/2}.$$

Infatti,

$$0 \leq \int_a^b (f + \lambda g)^2 = \int_a^b f^2 + \lambda^2 \int_a^b g^2 - 2\lambda \int_a^b fg$$

per ogni  $\lambda \in \mathbb{R}$ . È quindi non positivo il discriminante

$$\left( \int_a^b fg \right)^2 - \int_a^b f^2 \int_a^b g^2 \leq 0.$$

Usando il Lemma 7.7 si conclude pertanto che

$$\mathcal{A}[\eta] - \mathcal{A}[\gamma] \geq \int_0^T dt \frac{1}{2} \dot{h}(t)^2 \left[ m - K \frac{T^2}{2} \right].$$

In conseguenza

$$\mathcal{A}[\eta] - \mathcal{A}[\gamma] > 0$$

se

$$T^2 < \frac{2m}{K},$$

e  $\gamma \neq \eta$ . Si è quindi provata la seguente

**Proposizione 7.8.** (Principio di Minima Azione): *Se il potenziale è di classe  $C^2[\Omega]$  ed inoltre*

$$\sup_{x \in \Omega} \sum_{i,j=1}^d \left| \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} V(x) \right| = K,$$

e

$$T^2 < \frac{2m}{K},$$

*allora i punti stazionari per l'azione sono punti di minimo locale proprio.*

In conclusione, è possibile stabilire il carattere di minimo del punto stazionario solo quando si scelgono intervalli di tempo sufficientemente piccoli. La condizione di piccolezza di  $T$  è essenziale perché si possono costruire controesempi senza tale condizione. Uno di essi è fornito dall'oscillatore armonico unidimensionale

$$\ddot{\gamma} + \gamma = 0,$$

con massa e costante elastica unitarie per semplicità. La Lagrangiana è

$$L(v, x) = \frac{1}{2} v^2 - \frac{1}{2} x^2.$$

Le soluzioni sono periodiche di periodo  $2\pi$ . Si assuma  $T = 2\pi$  e si fissi ad esempio  $x^{(1)} = x^{(2)} = a$  con  $a \in \mathbb{R}$ . In questo caso, per ogni punto stazionario, l'Azione risulta nulla. È tuttavia possibile costruire funzioni  $t \rightarrow \eta(t)$  periodiche in  $[0, 2\pi]$ , soddisfacenti le stesse condizioni agli estremi, per le quali l'Azione è negativa. Si verifichi per esercizio che tale è ad esempio

$$\eta(t) = a \cos t + c(1 - \cos t)$$

per ogni  $c > 0$ .

## 8. Dinamica dei sistemi di punti materiali.

### 8.1 Equazioni di Newton.

Per *sistema di punti materiali* si intende un insieme di  $N$  punti materiali, le cui masse sono  $m_i > 0$ , per  $i = 1, \dots, N$ . Fissato un sistema di riferimento  $\mathcal{R}$ , denoteremo con  $P_i$  la posizione dell' $i$ -esima particella nello spazio.  $x_i$  sono le sue coordinate rispetto al riferimento  $R$  e  $x_{i,j}$  denota la  $j$ -esima coordinata del punto  $P_i$  nel riferimento  $\mathcal{R}$ .

Useremo anche la notazione compatta

$$X = (x_{1,1}, x_{1,2}, x_{1,3}, \dots, x_{N,1}, x_{N,2}, x_{N,3}).$$

Pertanto  $X$  è un elemento di  $\mathbb{R}^{3N}$ , la cui  $k$ -esima componente  $X_k$  rappresenta la  $j$ -esima coordinata del punto  $P_i$  rispetto ad  $\mathcal{R}$ , se  $k = 3(i-1) + j$ :

$$X_k = x_{i,j}.$$

Posto  $v_{i,j} = \dot{x}_{i,j}$ , il vettore

$$v_i = (v_{i,1}, v_{i,2}, v_{i,3})$$

rappresenta la velocità dell' $i$ -esima particella rispetto al riferimento  $R$  mentre  $V \in \mathbb{R}^{3N}$ , è dato da

$$V = (\dot{x}_{1,1}, \dots, \dot{x}_{1,3}, \dots, \dot{x}_{N,1}, \dots, \dot{x}_{N,3}).$$

In modo analogo, posto  $a_{i,j} = \ddot{x}_{i,j}$ , il vettore

$$a_i = (a_{i,1}, a_{i,2}, a_{i,3})$$

rappresenta l'accelerazione dell' $i$ -esima particella rispetto al riferimento  $R$ .

La Dinamica di un sistema di punti materiali, come quella del singolo punto materiale, è regolata dalla legge di Newton, la cui formulazione richiede la nozione di *forza*. Denoteremo con  $f_i$  la forza che viene esercitata dall'ambiente esterno sull' $i$ -esimo punto materiale. Mentre nel caso di un punto materiale la forza rappresenta le azioni che l'ambiente esterno esercita sul punto materiale, nel caso dei sistemi di punti materiali la forza  $f_i$  agente sull' $i$ -esima particella rappresenta l'azione di tutto ciò che è esterno al punto materiale in questione e quindi sia quella dei corpi che non fanno parte del sistema sia degli altri punti materiali del sistema. Per tale motivo la forza  $f_i$  non dipende soltanto dalla posizione e dalla velocità del punto  $P_i$ , ma anche dalle posizioni e dalle velocità degli altri punti materiali. Si supponrà quindi che, fissato il riferimento  $\mathcal{R}$ , in ogni punto  $X \in \mathbb{R}^{3N}$ , per ogni vettore  $V \in \mathbb{R}^{3N}$  e per ogni tempo  $t \in \mathbb{R}$  sia univocamente determinato il



vettore  $F \in \mathbb{R}^{3N}$ , la cui  $k$ -esima componente  $F_k$  con  $k = 3(i-1) + j$  rappresenta la  $j$ -esima componente  $f_{i,j}$  della forza  $f_i$  che agisce sul punto materiale  $P_i$ .

La funzione

$$F : (X, V, t) \in \mathbb{R}^{3N} \times \mathbb{R}^{3N} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{3N},$$

si dice *legge di forza*. In termini di componenti essa può rappresentarsi mediante le  $3N$  funzioni reali

$$f_{i,j} : (X, V, t) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad i = 1, \dots, N, j = 1, \dots, 3.$$

Si supponrà inoltre che la legge di forza  $F$  sia *covariante rispetto a cambiamenti di riferimento*. Con ciò si intende quanto segue: sia  $\mathcal{R}'$  un altro sistema di riferimento. Fissate le posizioni e le velocità delle particelle la forza  $f'_i$  agente sull' $i$ -esimo punto materiale nel riferimento  $\mathcal{R}'$ , è legata alla forza  $f_i$  relativa al riferimento  $\mathcal{R}$  dalla relazione

$$f_{i,j} = \sum_{k=1}^3 \Lambda_{j,k} f'_{i,k},$$

dove  $\Lambda_{i,k}$  sono i coefficienti di trasformazione dalla base  $\{e_i\}$  associata a  $\mathcal{R}$  alla base  $\{e'_k\}$  associata a  $\mathcal{R}'$ . In altri termini  $f_i$  e  $f'_i$  coincidono come vettori di  $\mathbb{V}_3$ . Naturalmente le posizioni e le velocità dei punti cambiano da un riferimento all'altro e le leggi di forza non coincidono, ma l'assunzione precedente assicura che i valori (vettoriali) delle funzioni  $F$  ed  $F'$  sono gli stessi nei punti corrispondenti.

Con le precedenti notazioni, scelto come riferimento  $\mathcal{R}$  un riferimento inerziale  $\mathcal{I}$ , la legge di Newton si scrive:

Secondo principio della Meccanica per un sistema di  $N$  punti materiali:

*In ogni riferimento inerziale  $\mathcal{I}$  il moto di un sistema di  $N$  punti materiali di masse  $m_i$  soggetti alla legge di forza  $F$  soddisfa le equazioni*

$$m_i a_i = f_i, \quad i = 1, \dots, N.$$

Conveniamo di porre

$$m^k = m_i \quad \text{se } k = 3(i-1) + j, \quad j = 1, \dots, 3$$

Con questa notazione, la legge di Newton si scrive come il seguente sistema di  $3N$  equazioni differenziali del secondo ordine,

$$\ddot{X}_k = \frac{1}{m^k} F_k(X_1, \dots, X_{3N}, \dot{X}_1, \dots, \dot{X}_{3N}, t), \quad (8.1)$$

nelle funzioni incognite  $t \rightarrow X_k(t)$ , cui andranno associate le condizioni iniziali

$$X_k(t_0) = X_k^{(0)}, \quad \dot{X}_k(t_0) = V_k^{(0)}, \quad k = 1 \dots, 3N. \quad (8.2)$$

Pertanto la struttura formale è la stessa del problema di un singolo punto materiale, con la sola differenza che il numero  $n$  di dimensioni dello spazio invece di 3 è in questo caso  $3N$  e quindi il problema da risolvere è in generale parecchio più complicato. Per quanto riguarda la buona posizione del problema (8.1)–(8.2), sono applicabili tutti i risultati della teoria delle equazioni differenziali ed in particolare il problema ammette un'unica soluzione se la legge di forza è Lipshitziana ed essa è globale nel tempo se la Lipshitzianità è verificata in tutto  $\mathbb{R}^{3N} \times \mathbb{R}^{3N} \times \mathbb{R}$ . Inoltre si ha dipendenza continua dai dati iniziali e la soluzione è infinitamente differenziabile sia rispetto al tempo che alle condizioni iniziali se tale è la legge di forza.

## 8.2 Principio di azione e reazione.

Dal punto di vista matematico una qualsiasi funzione differenziabile  $F(X, V, t)$  è una legge di forza accettabile. Tuttavia le leggi di forza rilevanti in Meccanica sono molto più particolari e rientrano tutte nella classe di leggi di forza che definiamo qui di seguito. Tale espressione è la formulazione matematica del *Principio di azione e reazione* o *Terzo principio della Meccanica*.

Abbiamo già notato che l' $i$ -esimo punto materiale risente dell'azione dell'ambiente esterno ed anche di quella degli altri punti materiali. Per azione dell'ambiente esterno si intende la forza che agirebbe sul punto materiale  $i$  se non vi fossero gli altri punti materiali, mentre l'azione del punto  $\ell$  sul punto  $i$  è la forza che agirebbe su  $i$  se non vi fossero altri punti materiali né l'ambiente esterno. Tali affermazioni sono in parte ambigue. Esse sono precisate affermando che la forza  $f_i$  agente sulla particella  $i$  può essere scritta come:

$$f_i(x_1, \dots, x_N, \dot{x}_1, \dots, \dot{x}_N, t) = f_i^e(x_i, \dot{x}_i, t) + \sum_{\ell=1}^N f_{\ell \rightarrow i}(x_\ell, x_i, \dot{x}_\ell, \dot{x}_i, t), \quad (8.3)$$

dove  $f_i^e$  è una forza dipendente solo dalla posizione e dalla velocità del punto  $i$  e che si interpreta come azione dell'ambiente esterno, mentre  $f_{\ell \rightarrow i}$  dipende solo dalle posizioni e dalle velocità dei punti  $i$  ed  $\ell$  e pertanto si interpreta come azione del punto  $\ell$  sul punto  $i$ . Conveniamo di porre

$$f_{i \rightarrow i} = 0$$

in quanto il punto  $i$  non può esercitare nessuna azione su se stesso.

Il principio di azione e reazione richiede inoltre che le funzioni  $f_{\ell \rightarrow i}$  soddisfino le seguenti condizioni:

Per ogni scelta di  $x, y, v$  e  $w$  in  $\mathbb{R}^3$  risulta:

1)

$$f_{\ell \rightarrow i}(x, y, v, w, t) = -f_{i \rightarrow \ell}(y, x, w, v, t), \quad (8.4)$$

2) esiste  $\lambda_{\ell \rightarrow i}(x, y, v, w, t) \in \mathbb{R}$  tale che

$$f_{\ell \rightarrow i}(x, y, v, w, t) = \lambda_{\ell \rightarrow i}(x, y, v, w, t) \frac{x - y}{|x - y|}. \quad (8.5)$$

La (8.4) esprime il fatto che la forza che la particella  $i$  esercita sulla particella  $\ell$  è opposta a quella che la particella  $\ell$  esercita sulla particella  $i$ . La (8.5) afferma che la direzione comune delle forze  $f_{i \rightarrow \ell}$  e  $f_{\ell \rightarrow i}$  è parallela alla retta che congiunge le posizioni  $x$  ed  $y$  dei punti  $l$  ed  $i$ .

**Definizione 8.1:** Diremo che una legge di forza  $F$  soddisfa il *Principio di azione e reazione* se valgono le (8.3), (8.4), (8.5).

Tali equazioni traducono in forma precisa l'enunciato tradizionale:

*ad ogni azione corrisponde una reazione uguale e contraria, lungo la stessa retta d'azione.*

Nel seguito, conformemente alla realtà empirica, assumeremo che valga il terzo principio della Meccanica ed in conseguenza restringeremo l'analisi a leggi di forza che verificano le (8.3), (8.4), (8.5)

Il Principio di azione e reazione ha alcune notevoli conseguenze, per illustrare le quali introduciamo le seguenti definizioni:

**Definizione 8.2:** Dato un insieme di  $n$  coppie costituite da un punto ed un vettore di  $\mathbb{R}^n$ ,  $(x_1, p_1), \dots, (x_n, p_n)$ , si dice *risultante* il vettore

$$R = \sum_{j=1}^n p_j \quad (8.6)$$

e *momento risultante (rispetto all'origine)*<sup>(1)</sup> il vettore

$$M = \sum_{j=1}^n x_j \wedge p_j. \quad (8.7)$$

---

<sup>(1)</sup> Se invece dell'origine si fissa come polo un punto  $Q$  di coordinate  $x_Q$ , in luogo di questa definizione si pone

$$M_Q = \sum_{j=1}^n (x_j - x_Q) \wedge p_j.$$

**Definizione 8.3:** Due insiemi di coppie

$$(x_1, p_1), \dots, (x_n, p_n) \quad \text{e} \quad (x'_1, p'_1), \dots, (x'_m, p'_m),$$

con  $n, m \geq 1$  si dicono *equivalenti* se hanno lo stesso risultante e lo stesso momento risultante. In particolare, un insieme di coppie si dice *equivalente a 0* se ha risultante e momento nullo.

Si consideri ora l'insieme di coppie  $\{(x_i, \tilde{f}_i), i = 1, \dots, N\}$  costituito dalle posizioni dei punti materiali e dalle forze interne agenti sui rispettivi punti,

$$\tilde{f}_i = \sum_{\ell=1}^N f_{\ell \rightarrow i}(x_\ell, x_i, \dot{x}_\ell, \dot{x}_i, t),$$

che denomineremo *sistema delle forze interne*

**Proposizione 8.1.** *Il sistema delle forze interne è equivalente a 0.*

Dim. Si ha:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N \tilde{f}_i &= \sum_{i=1}^N \sum_{\ell=1}^N f_{\ell \rightarrow i}(x_\ell, x_i, \dot{x}_\ell, \dot{x}_i, t) \\ &= \sum_{i < \ell=1}^N f_{\ell \rightarrow i}(x_\ell, x_i, \dot{x}_\ell, \dot{x}_i, t) + \sum_{i > \ell=1}^N f_{\ell \rightarrow i}(x_\ell, x_i, \dot{x}_\ell, \dot{x}_i, t) \\ &\quad \text{(scambiando i nomi degli indici muti } i \text{ ed } \ell \text{ nella seconda somma)} \\ &= \sum_{i < \ell=1}^N [f_{\ell \rightarrow i}(x_\ell, x_i, \dot{x}_\ell, \dot{x}_i, t) + f_{i \rightarrow \ell}(x_i, x_\ell, \dot{x}_i, \dot{x}_\ell, t)] \\ &\quad \text{(per la (8.4))} \\ &= \sum_{i < \ell=1}^N [f_{\ell \rightarrow i}(x_\ell, x_i, \dot{x}_\ell, \dot{x}_i, t) - f_{\ell \rightarrow i}(x_\ell, x_i, \dot{x}_\ell, \dot{x}_i, t)] = 0. \end{aligned}$$

Analogamente

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N x_i \wedge \tilde{f}_i &= \sum_{i=1}^N \sum_{\ell=1}^N x_i \wedge f_{\ell \rightarrow i}(x_\ell, x_i, \dot{x}_\ell, \dot{x}_i, t) \\ &= \sum_{i < \ell=1}^N x_i \wedge f_{\ell \rightarrow i}(x_\ell, x_i, \dot{x}_\ell, \dot{x}_i, t) + \sum_{i > \ell=1}^N x_i \wedge f_{\ell \rightarrow i}(x_\ell, x_i, \dot{x}_\ell, \dot{x}_i, t) \\ &\quad \text{(scambiando i nomi degli indici muti } i \text{ ed } \ell \text{ nella seconda somma)} \\ &= \sum_{i < \ell=1}^N [x_i \wedge f_{\ell \rightarrow i}(x_\ell, x_i, \dot{x}_\ell, \dot{x}_i, t) + x_\ell \wedge f_{i \rightarrow \ell}(x_i, x_\ell, \dot{x}_i, \dot{x}_\ell, t)] \\ &\quad \text{(per la (8.4))} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{i < \ell = 1}^N [x_i \wedge f_{\ell \rightarrow i}(x_\ell, x_i, \dot{x}_\ell, \dot{x}_i, t) - x_\ell \wedge f_{\ell \rightarrow i}(x_\ell, x_i, \dot{x}_\ell, \dot{x}_i, t)] \\
&= \sum_{i < \ell = 1}^N (x_i - x_\ell) \wedge f_{\ell \rightarrow i}(x_\ell, x_i, \dot{x}_\ell, \dot{x}_i, t) \\
&\text{(per la (8.5))} \\
&= \sum_{i < \ell = 1}^N (x_i - x_\ell) \wedge \lambda_{\ell \rightarrow i}(x_\ell, x_i, \dot{x}_\ell, \dot{x}_i, t) \frac{x_\ell - x_i}{|x_\ell - x_i|} = 0
\end{aligned}$$

□

*Osservazione* Il fatto che il sistema delle forze interne sia equivalente a 0 non significa che il moto non è influenzato dalle forze interne. Esse hanno in generale un'influenza determinante sul moto del sistema e solo nel caso limite dei corpi rigidi, come vedremo, la loro forma specifica non influenza il moto.

### 8.3 Equazioni cardinali della Meccanica.

Si definisce *impulso o quantità di moto* del sistema di punti materiali il vettore

$$P = \sum_{i=1}^N m_i \dot{x}_i.$$

Si definisce *momento angolare (rispetto all'origine)* del sistema di punti materiali il vettore

$$K = \sum_{i=1}^N x_i \wedge m_i \dot{x}_i.$$

La Proposizione precedente implica le *equazioni cardinali della Meccanica*:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} P &= R^e, \\
\frac{d}{dt} K &= M^e,
\end{aligned} \tag{8.8}$$

con  $R^e$  ed  $M^e$  il risultante ed il momento risultante delle forze esterne,

$$\begin{aligned}
R^e &= \sum_{i=1}^N f_i^e(x_i, \dot{x}_i, t), \\
M^e &= \sum_{i=1}^N x_i \wedge f_i^e(x_i, \dot{x}_i, t).
\end{aligned} \tag{8.9}$$

Un sistema di particelle si dice *isolato* se  $R^e = 0$  ed  $M^e = 0$ . Ne consegue che in un sistema isolato si conservano l'impulso ed il momento angolare.

Si definisce *centro di massa* di un sistema di  $N$  punti materiali di masse  $m_i$  nelle posizioni  $x_i$  rispetto al riferimento  $\mathcal{R}$  il punto  $G$  di coordinate  $x_G$  rispetto a  $\mathcal{R}$  date da

$$x_G = \frac{\sum_{i=1}^N m_i x_i}{m}, \quad (8.10)$$

con  $m$  la massa totale del sistema

$$m = \sum_{i=1}^N m_i.$$

Il centro di massa di un sistema è detto anche *baricentro* a causa di una notevole proprietà che esso presenta quando il sistema di punti materiali è in presenza della forza peso, cioè di una forza di direzione costante e intensità proporzionale alla massa. In questo caso le forze esterne  $f_i$  sono della forma

$$f_i = m_i g, \quad i = 1, \dots, N$$

con  $g$  accelerazione di gravità.

**Proposizione 8.2.** *Il sistema di forze  $\{(x_i, m_i g), i = 1, \dots, N\}$  è equivalente al sistema costituito dalla sola coppia  $(x_G, mg)$ .*

Dim. Difatti, si ha

$$R^e = \sum_{i=1}^N m_i g = mg,$$

e

$$M^e = \sum_{i=1}^N x_i \wedge m_i g = \left( \sum_{i=1}^N m_i x_i \right) \wedge g = x_G \wedge mg.$$

□

Differenziando la (8.10) si ottiene la *velocità del centro di massa*

$$v_G = \frac{\sum_{i=1}^N m_i \dot{x}_i}{m} = \frac{P}{m}. \quad (8.11)$$

Differenziando ancora si ottiene l'*accelerazione del centro di massa*

$$a_G = \frac{\sum_{i=1}^N m_i \ddot{x}_i}{m} = \frac{1}{m} \frac{d}{dt} P$$

e pertanto dalla prima equazione cardinale:

$$ma_G = R^e.$$

Tale relazione mostra che l'accelerazione del baricentro è indipendente dalle forze interne<sup>(2)</sup>.

Poiché  $R^e = 0$  implica che  $a_G = 0$ , per un sistema isolato vale il

**Teorema 8.3 (del centro di massa):** *in un sistema isolato il centro di massa si muove di moto rettilineo uniforme.*

Una conseguenza di tale affermazione è che, quando si studia un sistema isolato, in luogo del riferimento inerziale  $\mathcal{I}$  si può considerare il riferimento  $\mathcal{I}'$  con gli stessi assi di  $\mathcal{I}$  ma l'origine coincidente con il centro di massa del sistema. Tale riferimento infatti è anch'esso inerziale a seguito del Teorema del centro di massa. Questa circostanza è di grande utilità per la riduzione del numero delle incognite nella risoluzione del problema del moto. Un esempio di tale riduzione è fornito dal

#### Problema dei due corpi.

Si tratta di un sistema costituito da due soli punti materiali, di masse  $m_1$  ed  $m_2$ , isolato e soggetto a sole forze interne che soddisfano il principio di azione e reazione. Siano  $x_1$  ed  $x_2$  le rispettive posizioni rispetto al riferimento  $\mathcal{I}$ . Si ha

$$x_G = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2}.$$

Posto  $x = x_1 - x_2$ , risulta

$$x_1 = x_G + \frac{m_2}{m_1 + m_2} x, \quad x_2 = x_G - \frac{m_1}{m_1 + m_2} x.$$

Pertanto, poiché  $x_G$  è costante, è sufficiente determinare il vettore  $x$  in funzione del tempo. D'altra parte

$$\begin{aligned} \ddot{x}_1 &= \frac{1}{m_1} f_{2 \rightarrow 1}(x_2, x_1, \dot{x}_2, \dot{x}_1, t), \\ \ddot{x}_2 &= \frac{1}{m_2} f_{1 \rightarrow 2}(x_1, x_2, \dot{x}_1, \dot{x}_2, t) = -\frac{1}{m_2} f_{2 \rightarrow 1}(x_2, x_1, \dot{x}_2, \dot{x}_1, t). \end{aligned}$$

---

<sup>(2)</sup> Ma il moto del baricentro dipende dalle posizioni dei punti del sistema che dipendono dalle forze interne, per cui non è in generale corretto affermare che il moto del baricentro non è influenzato dalle forze interne. Tale affermazione risulta corretta solo quando  $R^e$  non dipende dal moto dei singoli punti, come ad esempio accade se è nullo o costante.

Pertanto

$$\ddot{x} = \ddot{x}_1 - \ddot{x}_2 = \left( \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right) f_{2 \rightarrow 1}(x_2, x_1, \dot{x}_2, \dot{x}_1, t) = \frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2} f_{2 \rightarrow 1}(x_2, x_1, \dot{x}_2, \dot{x}_1, t).$$

La quantità

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$$

è detta *massa ridotta* e l'equazione per il vettore  $x$  si scrive

$$\mu \ddot{x} = f_{2 \rightarrow 1}(x_2, x_1, \dot{x}_2, \dot{x}_1, t). \quad (8.12)$$

Si supponga ad esempio che l'intensità  $\lambda_{2 \rightarrow 1}(x_2, x_1, \dot{x}_2, \dot{x}_1, t)$  della forza interna dipenda solo dalla distanza  $|x_1 - x_2|$ . La (8.12) è l'equazione di un punto materiale di massa  $\mu$  in un campo di forze centrali di potenziale  $\Phi(\rho)$  con  $\Phi' = -\lambda_{2 \rightarrow 1}$ . In conseguenza la soluzione del problema dei due corpi è ricondotta allo studio del moto in un campo di forze centrali, discusso nel Capitolo 6. Se ad esempio l'interazione è quella gravitazionale, con potenziale  $\Phi(\rho) = -k\rho^{-1}$  e  $k = \mathcal{G}m_1 m_2$ , tutte le conclusioni tratte nel Capitolo 6 si estendono a tale problema, con l'eccezione della terza legge di Keplero. Infatti, la sostituzione della massa del punto con la massa ridotta comporta che il rapporto tra il cubo del semiasse maggiore dell'ellissi ed il quadrato del periodo è dato da

$$\frac{a^3}{T^2} = \frac{1}{4\pi^2} \mathcal{G} \frac{m_1 m_2}{\mu} = \frac{1}{4\pi^2} \mathcal{G} m_2 \left( 1 + \frac{m_1}{m_2} \right),$$

relazione che mostra una dipendenza di tale rapporto anche dalla massa di entrambi i punti materiali. Quando tuttavia  $m_2$  rappresenta la massa del Sole ed  $m_1$  la massa del pianeta, il rapporto  $m_1/m_2$  è al più  $10^{-3}$  e quindi la terza legge di Keplero non è esattamente verificata, ma risulta corretta a meno di errori di questo ordine. In realtà le correzioni risultano in ottimo accordo coi i dati sperimentali.

#### 8.4 Legge di conservazione dell'energia.

Come nel caso di un solo punto materiale, si definisce *energia cinetica* di un sistema di  $N$  punti materiali la quantità

$$T(t) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i v_i(t)^2.$$

Fissata una legge di forza  $F = (f_1, \dots, f_n)$  si definisce *potenza* della forza  $F$  durante il moto  $t \rightarrow X(t)$  la quantità

$$P(t) = \sum_{i=1}^N f_i(X(t), \dot{X}(t), t) \cdot \dot{x}_i(t)$$



e si dice *lavoro* compiuto dalla forza  $F$  nell'intervallo  $[t_1, t_2]$  la quantità

$$\mathcal{L}_{t_1, t_2} = \int_{t_1}^{t_2} dt P(t).$$

La variazione dell'energia cinetica nel tempo è regolata dal seguente

**Teorema 8.4 (delle forze vive):** *In ogni moto  $t \rightarrow X(t)$  soddisfacente le equazioni di Newton con una legge di forza  $F$  si ha:*

$$\frac{d}{dt} T(t) = P(t)$$

e per ogni  $t_1, t_2$

$$T(t_2) - T(t_1) = \mathcal{L}_{t_1, t_2}.$$

Dim. Ricordando che

$$\dot{v}_i = a_i = \frac{f_i}{m_i},$$

si ha

$$\frac{d}{dt} T = \sum_{i=1}^N m_i v_i \cdot a_i = \sum_{i=1}^N v_i \cdot f_i = P.$$

□

In modo analogo al caso di un punto materiale, si dice che una legge di forza  $F = (f_1, \dots, f_N)$  è *conservativa* se dipende solo dalle posizioni dei punti materiali ed esiste una funzione differenziabile  $U$  su  $\mathbb{R}^{3N}$ , detta *energia potenziale* della forza  $F$ , tale che

$$f_{i,j}(x_1, \dots, x_N) = -\frac{\partial}{\partial x_{i,j}} U(x_1, \dots, x_N).$$

Denotando con  $\nabla_i U$  il vettore di  $\mathbb{R}^3$

$$\nabla_i U = \left( \frac{\partial U}{\partial x_{i,1}}, \frac{\partial U}{\partial x_{i,2}}, \frac{\partial U}{\partial x_{i,3}} \right),$$

la condizione precedente diventa

$$f_i(x_1, \dots, x_N) = -\nabla_i U(x_1, \dots, x_N).$$

Adottando invece la notazione compatta,

$$F_k(X) = -\frac{\partial}{\partial X_k} U(X)$$

e, denotando con  $\nabla U$  il vettore di  $\mathbb{R}^{3N}$

$$\nabla U = \left( \frac{\partial U}{\partial X_1}, \dots, \frac{\partial U}{\partial X_{3N}} \right),$$

$$F(X) = -\nabla U(X).$$

Si ha

$$P(t) = -\frac{d}{dt}U(x_1(t), \dots, x_n(t))$$

e quindi

$$\mathcal{L}_{t_1, t_2} = -[U(x_1(t_2), \dots, x_n(t_2)) - U(x_1(t_1), \dots, x_n(t_1))].$$

In conseguenza di ciò

$$\frac{d}{dt}[T + U] = 0$$

e pertanto, detta  $E$  l'energia totale del sistema,

$$E = T + U,$$

la relazione precedente esprime la *legge di conservazione dell'energia* in presenza di una legge di forza conservativa,

$$E(t_1) = E(t_2)$$

per ogni coppia  $t_1, t_2$ .

Concludiamo queste considerazioni sull'energia notando un'utile espressione dell'energia cinetica in termini di velocità del baricentro e velocità dei punti materiali relativamente al baricentro. Infatti, detta  $v_G$  la velocità del baricentro e

$$v'_i = v_i - v_G$$

le velocità dei punti materiali rispetto al riferimento baricentrale, si ha

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i v_i^2 &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i (v_G + v'_i)^2 \\ &= \frac{1}{2} m v_G^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i (v'_i)^2 + \sum_{i=1}^N m_i v'_i \cdot v_G. \end{aligned}$$

D'altra parte

$$\sum_{i=1}^N m_i v'_i = \sum_{i=1}^N m_i (v_i - v_G) = \sum_{i=1}^N m_i v_i - m v_G = m v_G - m v_G = 0.$$

Pertanto si ottiene la relazione

$$T = T' + \frac{1}{2} m v_G^2, \quad (8.13)$$

che mostra che *l'energia cinetica  $T$  nel riferimento  $\mathcal{I}$  è data dalla somma dell'energia cinetica del baricentro* (e cioè quella che competerebbe al baricentro se questo fosse un effettivo punto materiale, di massa pari alla massa totale del sistema) *e dell'energia cinetica  $T'$  del sistema nel riferimento baricentrale.*

### 8.5 Moto in un riferimento non inerziale.

Le equazioni di Newton

$$m_i a_i = f_i$$

regolano il moto di un sistema di punti materiali rispetto ad un sistema di riferimento inerziale  $\mathcal{I}$ . In molti casi è tuttavia utile riferire il moto ad un sistema di riferimento  $\mathcal{R}'$  non inerziale, come ad esempio un sistema di riferimento terrestre, che ruota uniformemente intorno all'asse polare. Si è visto in precedenza che le forze sono covarianti nel passaggio da un riferimento ad un altro anche non inerziale, e le masse non cambiano. Pertanto, per ottenere le equazioni del moto in tale riferimento basta riferirsi alle relazioni tra le velocità e le accelerazioni nei due riferimenti ottenute nel Capitolo 1. Con  $v^r$  ed  $a^r$  denotiamo la velocità e l'accelerazione rispetto ad  $\mathcal{R}'$  nel moto  $t \rightarrow x'(t)$  corrispondente al moto  $t \rightarrow x(t)$  rispetto al riferimento inerziale  $\mathcal{I}$ . Si ha:

$$v = v^\tau + v^r, \quad (8.14)$$

$$v^\tau = v^{(O')} + \omega \wedge \overrightarrow{O'P}, \quad (8.15)$$

$$a = a^\tau + a^c + a^r, \quad (8.16)$$

$$a^c = 2\omega \wedge v^r, \quad (8.17)$$

$$a^\tau = a^{(O')} + \dot{\omega} \wedge \overrightarrow{O'P} - \omega^2 \overrightarrow{QP}. \quad (8.18)$$

In queste formule  $O'$  è l'origine di  $\mathcal{R}'$  e  $Q$  la proiezione di  $P$  sulla retta parallela ad  $\omega$  passante per  $O'$ .

Sostituendo tali relazioni nelle equazioni di Newton, si ottiene

$$m_i a_i^r = f_i + f_i^\tau + f_i^c. \quad (8.19)$$

In (8.19) le forze  $f_i^r$  e  $f_i^c$  sono dette *forza di trascinamento* e *forza complementare* ed hanno le espressioni

$$f_i^r = -m_i a_i^r = -m_i a^{(O')} - m_i \dot{\omega} \wedge \overrightarrow{O'P} + m_i \omega^2 \overrightarrow{QP} \quad (8.20),$$

$$f_i^c = -m_i a_i^c = -2m_i \omega \wedge v_i^r. \quad (8.21)$$

In particolare, il terzo contributo alla (8.20) è detto *forza centrifuga*, mentre la forza  $f_i^c$  è anche detta *forza di Coriolis*. Questi sono gli unici termini presenti quando  $\mathcal{I}$  è un riferimento con origine nel centro della Terra ed assi rivolti verso tre stelle fisse, mentre  $\mathcal{R}'$  è un riferimento *terrestre* e cioè con origine nel centro della Terra ed assi solidali alla Terra.  $\mathcal{R}'$  si muove di moto rotatorio uniforme rispetto a  $\mathcal{I}$  e quindi  $\dot{\omega} = 0$  ed  $a^{(O')} = 0$ . Le forze  $f^r$  ed  $f^c$  sono dette a volte *forze apparenti*, in quanto esse non possono essere fatte risalire all'azione di altri corpi, ma il loro effetto sul moto è invece reale e i moti osservati in un riferimento non inerziale appaiono molto diversi dagli stessi moti osservati in riferimenti inerziali.

## 8.6 Principio di minima azione di Hamilton per un sistema di particelle.

La formulazione del Principio di minima azione di Hamilton nel caso di un sistema di particelle è un'estensione immediata di quello ottenuto per un punto materiale. In questo caso le curve  $\gamma$  da considerare sono traiettorie in  $\mathbf{R}^{3N}$ , con estremi fissati  $X^{(1)}$  ed  $X^{(2)}$ . Si assume cioè che  $t \rightarrow \gamma(t)$  sia differenziabile e tale che

$$\gamma(0) = X^{(1)}, \quad \gamma(T) = X^{(2)}.$$

Si considera l'azione

$$\mathcal{A}[\gamma] = \int_0^T dt L(\dot{X}(t), X(t)),$$

con

$$L(V, X) = T - U = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i v_i^2 - U(x_1, \dots, x_N).$$

Le equazioni di Eulero corrispondenti sono

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial v_{i,j}} \right) (\dot{X}(t), X(t)) - \frac{\partial L}{\partial x_{i,j}} (\dot{X}(t), X(t)) = 0, \quad i = 1, \dots, N, \quad j = 1, \dots, 3.$$

È immediato verificare che esse coincidono con le equazioni di Newton e pertanto si conclude che *il moto di un sistema di particelle con assegnate posizioni iniziali e finali è un punto stazionario per l'azione ed è minimo se  $T$  è sufficientemente piccolo.*

## 9. Sistemi di punti materiali vincolati.

### 9.1 Vincoli e loro classificazione.

In molte situazioni l'interazione di un sistema di punti materiali con l'ambiente esterno è convenientemente schematizzata mediante l'idea di *vincolo*, imponendo cioè delle restrizioni *a priori* sull'insieme dei moti possibili per il sistema. Diamo alcuni esempi di tali situazioni.

- 1) Un gas rinchiuso in un contenitore è un sistema di punti materiali vincolati a rimanere all'interno di una regione assegnata dello spazio fisico.
- 2) Un libro appoggiato su un tavolo è schematizzato come un punto materiale vincolato a non attraversare un piano assegnato.
- 3) Un treno che si muove sui binari è schematizzato come un punto materiale vincolato a muoversi lungo una curva assegnata.
- 4) Una ruota di bicicletta che rotola senza strisciare su una strada è schematizzato come un sistema di punti materiali (corpo rigido) che si muovono in modo tale che la velocità del suo centro sia pari alla velocità di rotazione intorno al centro moltiplicata per il raggio.

Naturalmente, tutte queste situazioni sono in linea di principio descrivibili mediante la dinamica dei sistemi di punti liberi. Nel caso 2), ad esempio, si potrebbe considerare il sistema costituito dal libro e dal tavolo. Il tavolo subisce una piccola deformazione per il peso del libro e le forze intermolecolari delle molecole del tavolo, a seguito di tale spostamento, determinano una forza che finisce con l'equilibrare il peso del libro. Tale descrizione è chiaramente molto complessa e ricca di dettagli *irrilevanti* per la maggior parte degli scopi pratici. In particolare, la deformazione del tavolo è così piccola che conviene schematizzare tale situazione assumendo che il tavolo non si deformi affatto, ma tuttavia sia presente la forza di reazione elastica del tavolo, che equilibra il peso del libro. È chiaro che la correttezza di tale approssimazione è legata al fatto che la deformazione del tavolo è realmente piccola. Se invece di un libro si mette su un tavolo un oggetto molto pesante la deformazione diventa sensibile, fino a portare eventualmente alla rottura del tavolo. La teoria dei sistemi vincolati che svilupperemo in questo capitolo non prenderà tuttavia mai in considerazione situazioni critiche di questo tipo.

Cominceremo con il formulare in modo assiomatico la teoria e svolgeremo solo alla fine alcune considerazioni utili alla giustificazione di tale teoria come valida asintoticamente per deformazioni infinitesime.

Consideriamo pertanto un sistema di  $N$  punti materiali, per i quali adottiamo le notazioni del Capitolo 8. Sia  $(X, V, t) \rightarrow \psi(X, V, t)$  una funzione reale definita e differenziabile infinite volte in un aperto di  $\mathbb{R}^{3N} \times \mathbb{R}^{3N} \times \mathbb{R}$ . Diremo che *il moto*  $t \rightarrow X(t)$  *soddisfa il vincolo*  $\psi$  *nell'intervallo*  $[0, T]$  se risulta

$$\psi(x_1(t), \dots, x_N(t), \dot{x}_1(t), \dots, \dot{x}_N(t), t) \geq 0 \quad (9.1)$$

o, piú brevemente

$$\psi(X(t)\dot{X}(t), t) \geq 0$$

per ogni  $t \in [0, T]$ . Naturalmente il segno della disuguaglianza è puramente convenzionale. Se la condizione (9.1) è nella forma di disuguaglianza, si parla di *vincolo unilaterale*, mentre se è nella forma di uguaglianza, si parla di *vincolo bilaterale*. Gli esempi 1) e 2) corrispondono a vincoli unilaterali, mentre gli esempi 3) e 4) corrispondono a vincoli bilaterali.

Nel seguito considereremo esclusivamente vincoli bilaterali.

L'esempio 3) rappresenta un vincolo che coinvolge solo la posizione del sistema, mentre nell'esempio 4) sono coinvolte anche le velocità. Un vincolo che coinvolge le sole posizioni ed eventualmente il tempo è detto *olonomo*. Talvolta un vincolo coinvolgente anche le velocità può ricondursi ad uno sulle sole posizioni mediante un'integrazione. In tal caso si parla di *vincolo integrabile*. Questo è ad esempio il caso dell'esempio 4), quando si assume che la ruota possa correre solo lungo una retta. Se invece la ruota può muoversi su un piano, il vincolo non è integrabile. Un vincolo che coinvolge anche le velocità e non è integrabile è detto *anolonomo*.

Nel seguito considereremo soltanto vincoli olonomi, includendo tra questi quelli integrabili, dopo aver effettuato le necessarie integrazioni. Brevissimi cenni alla teoria dei vincoli anolonomi saranno forniti alla fine di questo capitolo.

Riassumendo, intenderemo per vincolo un vincolo bilaterale olonomo, rappresentato da una funzione reale  $\psi$  differenziabile infinite volte in un aperto di  $\mathbb{R}^{3N} \times \mathbb{R}$ , tale che sia non vuoto per ogni  $t \in [0, T]$  l'insieme degli  $X \in \mathbb{R}^{3N}$  tali che

$$\psi(X, t) = 0. \quad (9.2)$$

Nel caso che la funzione  $\psi$  è indipendente da  $t$ , si parlerà di *vincolo indipendente dal tempo*.

In generale un sistema di punti materiali è soggetto ad  $\ell \geq 0$  vincoli

$$\psi_\alpha(X, t) = 0, \quad \alpha = 1, \dots, \ell. \quad (9.3)$$

Assunzione A: Supporremo che tali vincoli siano *compatibili*, cioè che per ogni  $t \in [0, T]$  sia *non vuoto* l'insieme

$$\mathcal{C}_t = \{X \in \mathbb{R}^{3N} | \psi_\alpha(X, t) = 0 \forall \alpha = 1, \dots, \ell\}.$$

L'insieme  $\mathcal{C}_t$ , che rappresenta tutte le configurazioni ammissibili per il sistema di punti materiali al tempo  $t$  è detto *spazio delle configurazioni* al tempo  $t$ .

Assunzione B: Supporremo inoltre che gli  $\ell$  vincoli siano *indipendenti*, e cioè che la matrice Jacobiana  $\ell \times 3N$  di coefficienti

$$J_{\alpha,k}(X, t) = \frac{\partial \psi_\alpha}{\partial X_k}(X, t),$$

e cioè

$$J(X, t) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \psi_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial \psi_1}{\partial X_{3N}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial \dot{\psi}_\ell}{\partial X_1} & \cdots & \frac{\partial \dot{\psi}_\ell}{\partial X_{3N}} \end{pmatrix} (X, t),$$

abbia rango  $\ell$  per ogni  $X \in \mathcal{C}_t$ , e cioè esista un minore di  $J(X, t)$  di ordine  $\ell$  con determinante non nullo. Per continuità, per ogni  $X \in \mathcal{C}_t$  esiste un intorno di  $X$  ove tale condizione è verificata.

È chiaro che l'assunzione A è indispensabile e non vi è perdita di generalità nell'accettare l'assunzione B in quanto, ove questa non fosse soddisfatta, ciò implicherebbe che alcune delle condizioni (9.3) sarebbero pleonastiche e basterebbe eliminarle e ridefinire il numero  $\ell$  in conseguenza per riportarsi alle condizioni richieste dall'assunzione B.

## 9.2 Spazio delle configurazioni e coordinate Lagrangiane.

Quando si accettino le assunzioni A e B, sono soddisfatte le condizioni di applicabilità del teorema della funzione implicita, grazie al quale si può concludere che è possibile determinare  $\ell$  delle  $3N$  variabili  $X_1, \dots, X_{3N}$  in funzione delle rimanenti

$$n = 3N - \ell$$

e del tempo  $t$ .

Il numero  $n$  così definito prende il nome di numero di gradi di libertà del sistema, in quanto esso rappresenta *il numero minimo di parametri* che occorre specificare per individuare completamente la configurazione del sistema al tempo  $t$ . Infatti, una volta specificati tali parametri, i rimanenti  $\ell$  sono determinati mediante il teorema della funzione implicita e pertanto il punto  $X \in \mathcal{C}_t$  è univocamente determinato.

Più precisamente il teorema della funzione implicita assicura che, fissato  $t \in [0, T]$ , per ogni  $X \in \mathcal{C}_t$  esiste un intorno  $A$  di  $X$ ,  $A \subset \mathbb{R}^{3N}$ , un aperto  $D \subset \mathbb{R}^n$  ed una trasformazione infinitamente differenziabile ed invertibile

$$S_t : D \rightarrow \mathcal{C}_t \cap A,$$

e cioè per ogni  $X \in \mathcal{C}_t \cap A$  esiste  $q \in D$  tale che

$$X = S_t(q).$$

Pertanto si ha

$$\psi_\alpha(S_t(q), t) = 0 \quad \forall \alpha = 1, \dots, \ell. \quad (9.4)$$

In luogo della notazione  $S_t(q)$  useremo piú semplicemente

$$X = S(q, t). \quad (9.5)$$

L'insieme  $\mathcal{C}_t$  precedentemente definito generalizza la nozione di superficie e pertanto si dirà anche *superficie delle configurazioni* o *varietà delle configurazioni*. Si parlerà anche di varietà ad  $n$  dimensioni poiché a ciascun punto della varietà delle configurazioni viene associato univocamente un' $n$ -pla di numeri reali  $q = (q_1, \dots, q_n) \in D$ , che possono essere utilizzati, almeno localmente, come coordinate della superficie. A tali coordinate viene dato il nome di *coordinate Lagrangiane* sullo spazio delle configurazioni. La loro costruzione mostra che esse sono in generale definite solo localmente e che esistono infinite scelte di possibili coordinate Lagrangiane. Nella pratica un'opportuna scelta delle coordinate Lagrangiane può portare notevoli semplificazioni nello studio del moto del sistema.

### 9.3 Equazioni del moto e reazioni vincolari.

Come nel caso dei sistemi liberi, anche per i sistemi vincolati, il problema fondamentale della Meccanica consiste nel determinare il moto del sistema quando sia assegnata la legge di forza. D'altra parte, le considerazioni iniziali mostrano che è necessario immaginare che vi siano delle forze agenti sul sistema che possono ricondursi alla presenza dei vincoli. Supporremo pertanto fissata una legge di forza  $F$  che denomineremo *forza attiva*, che rappresenta tutte le forze che agiscono sul sistema e non sono riconducibili alla presenza dei vincoli. Denoteremo inoltre con  $F^{(v)}$  le forze esercitate dai vincoli, che si denominano *reazioni vincolari*. Tali reazioni vincolari non sono fissate da noi come un dato del problema, ma vanno anch'esse determinate. Un moto  $t \rightarrow X(t)$  si dice *moto possibile* se risulta

$$\psi_\alpha(X(t), t) = 0 \quad \forall \alpha = 1, \dots, \ell. \quad (9.6)$$

**Definizione 9.1:** Un moto del sistema vincolato è un moto possibile per il quale risultano verificate, ad ogni istante  $t$  le equazioni di Newton

$$m_i \ddot{x}_i(t) = f_i(x_1(t), \dots, x_N(t), \dot{x}_1(t), \dots, \dot{x}_N(t), t) + f_i^{(v)}, \quad i = 1, \dots, N. \quad (9.7)$$

È facile convincersi che le  $f_i^{(v)}$  sono in generale effettivamente presenti nelle equazioni. Si consideri ad esempio un singolo punto materiale vincolato a muoversi su una sfera, in assenza di forze attive. È chiaro che, se non vi fossero reazioni vincolari, il moto del punto sarebbe caratterizzato da accelerazione nulla e pertanto, salvo il caso particolare di velocità nulla, il punto materiale si muoverebbe di moto rettilineo uniforme ed abbandonerebbe la sfera anche se fosse posto su di essa all'istante iniziale. La reazione vincolare invece curva la traiettoria del punto materiale forzandolo a restare sulla sfera.



Poiché le reazioni vincolari nelle (9.7) sono inevitabili, tali equazioni non sono più sufficienti, come nel caso libero, a determinare il moto del sistema. Infatti, si tratta di un sistema di  $3N$  equazioni. Le incognite sono invece gli  $n = 3N - \ell$  parametri che determinano la configurazione del sistema, cui vanno aggiunte le  $3N$  incognite reazioni vincolari, per un totale di  $6N - \ell$  incognite. Poiché  $6N - \ell > 3N$ , a meno che  $\ell = 3N$ , caso in cui nessun moto è possibile, a parte la quiete in uno degli eventuali punti permessi, il numero delle incognite supera sempre il numero di equazioni. La soluzione del problema risulta pertanto indeterminata in mancanza di ulteriori assunzioni sulle reazioni vincolari. Infatti, se tutte le reazioni vincolari sono possibili le (9.7) si possono rendere sempre identicamente soddisfatte, con un'opportuna scelta delle reazioni vincolari, qualunque sia il moto  $t \rightarrow X(t)$ .

Preliminare alla soluzione del problema del moto è infatti la determinazione delle *equazioni pure* per il sistema, cioè equazioni nelle quali non compaiono le reazioni vincolari e che per questo rappresentano delle restrizioni effettive al moto del sistema. Ciò si ottiene di solito con assunzioni di carattere empirico, la più semplice delle quali è quella di *vincolo ideale o liscio*, che illustreremo nel seguito con due esempi, prima di darne la definizione generale. Intuitivamente esso corrisponde all'idea che il vincolo esercita sul sistema soltanto quelle forze che impediscono la violazione del vincolo e per il resto non oppone al moto attriti o altre resistenze.

#### 9.4 Esempio 1: Moto vincolato ad una curva.

Si supponga assegnata una curva regolare  $\mathcal{C}$  in un aperto  $A \subset \mathbb{R}^3$ , come il luogo dei punti  $x \in A$  tali che

$$\begin{aligned}\psi_1(x) &= 0, \\ \psi_2(x) &= 0,\end{aligned}\tag{9.8}$$

con  $\psi_1$  e  $\psi_2$  funzioni infinitamente differenziabili. Le equazioni (9.8) rappresentano due vincoli olonomi indipendenti dal tempo. Un punto materiale di massa  $m$  soggetto alla forza attiva  $f(x, v, t)$  ed ai vincoli (9.8) si dice *vincolato alla curva*  $\mathcal{C}$ . Le equazioni del moto sono date da

$$m\ddot{x}(t) = f(x(t), \dot{x}(t), t) + f^{(v)}.\tag{9.9}$$

Il numero di gradi di libertà del sistema è  $n = 3 - 2 = 1$  e pertanto è sufficiente un solo parametro per individuare la posizione del punto materiale.

Sia  $\lambda \rightarrow \gamma(\lambda)$  una rappresentazione parametrica infinitamente differenziabile della curva  $\mathcal{C}$ , con  $\lambda \in I$ ,  $I$  intervallo aperto di  $\mathbb{R}$ . Poiché la curva  $\mathcal{C}$  è regolare, risulta

$$\sum_{i=1}^3 \left( \frac{d\gamma_i}{d\lambda} \right)^2 > 0.\tag{9.10}$$

Si fissi arbitrariamente un punto  $Q \in \mathcal{C}$  e si supponga che  $Q = \gamma(0)$ . La condizione (9.10) assicura che per ogni  $\lambda \in \mathbb{R}$  la funzione  $\lambda \rightarrow s(\lambda)$  definita come

$$s(\lambda) = \int_0^\lambda dr \sqrt{\sum_{i=1}^3 \left( \frac{d}{d\lambda} \gamma_i(r) \right)^2}$$

è una funzione differenziabile e strettamente crescente. Essa rappresenta la lunghezza dell'arco di curva dal punto  $Q$  al punto  $\gamma(\lambda)$ , contata con il segno positivo se  $\lambda > 0$  e negativo se  $\lambda < 0$ . La lunghezza  $s$  è usualmente detta *ascissa curvilinea* sulla curva. La monotonia assicura l'invertibilità della funzione  $\lambda \rightarrow s(\lambda)$  e pertanto l'ascissa curvilinea è utilizzabile come parametro per rappresentare parametricamente la curva. Infatti, denotando con  $s \rightarrow \lambda(s)$  l'inversa della funzione  $\lambda \rightarrow s(\lambda)$  e posto

$$\nu(s) = \gamma(\lambda(s)),$$

la  $s \rightarrow \nu(s)$  è una rappresentazione parametrica della curva. Essa risulta privilegiata rispetto alle altre rappresentazioni parametriche dalla seguente proprietà: denotiamo con  $\nu'$  la derivata di  $\nu$  rispetto ad  $s$ ; risulta

$$\sum_{i=1}^3 \nu'_i(s)^2 = 1. \quad (9.11)$$

Infatti

$$\nu' = \frac{d\gamma}{d\lambda} \lambda'.$$

Ma la definizione di  $s(\lambda)$  implica

$$\frac{1}{\lambda'} = \sqrt{\sum_{i=1}^3 \left( \frac{d\gamma_i}{d\lambda} \right)^2}$$

e quindi il vettore

$$\tau(s) = \nu'(s)$$

ha modulo unitario e la (9.11) è verificata. Il vettore  $\tau(s)$  è il *vettore tangente* alla curva nel punto di ascissa curvilinea  $s$ . Oltre a  $\tau$  vengono di solito introdotti altri due vettori unitari  $n(s)$  e  $b(s)$  detti rispettivamente *vettore normale* e *vettore binormale* alla curva nel punto di ascissa curvilinea  $s$ , e la terna  $\{\tau, n, b\}$  è detta *triedro di Frenét*.

Il vettore  $n(s)$  è definito come segue: si consideri la derivata di  $\tau(s)$ ,  $\tau'(s)$ . Tale vettore è ortogonale a  $\tau(s)$  in quanto, essendo  $\tau(s) \cdot \tau(s) = 1$ ,

$$0 = \frac{d}{ds} (\tau(s) \cdot \tau(s)) = 2\tau(s) \cdot \tau'(s).$$

Il vettore  $\tau'(s)$  non ha in generale modulo unitario. Si pone

$$n(s) = \frac{\tau'(s)}{|\tau'(s)|}.$$

La quantità  $|\tau'(s)|$  ha un importante significato geometrico che discuteremo tra breve: essa è l'inverso del *raggio di curvatura*  $r(s)$  della curva nel punto di ascissa curvilinea  $s$ , e cioè il raggio del *cerchio osculatore* alla curva in  $s$ . Pertanto

$$\tau'(s) = \frac{1}{r(s)}n(s).$$

Infine, si pone

$$b(s) = \tau(s) \wedge n(s).$$

La terna  $\{\tau, n, b\}$  è una base ortonormale che può essere usata in luogo della base del riferimento rispetto al quale si studia il moto.

Richiamiamo le nozioni di cerchio osculatore e raggio di curvatura per completezza. Siano  $P, P_1$  e  $P_2$  tre punti della curva  $\gamma$ , corrispondenti alle ascisse curvilinee  $s, s_1 = s-h$  ed  $s_2 = s+h$ , con  $h$  sufficientemente piccolo. Sia  $c_{s,h}$  il cerchio per  $P, P_1$  e  $P_2$ . Il cerchio limite per  $h \rightarrow 0$ ,  $c_s$ , se esiste, si dice *cerchio osculatore* in  $P = \gamma(s)$  ed il suo raggio  $r(s)$  si dice *raggio di curvatura*. Il piano che contiene il cerchio osculatore si dice *piano osculatore*.

Il cerchio limite esiste certamente se la curva regolare  $\gamma$  è infinitamente differenziabile. Infatti, possiamo determinarne le coordinate del centro come limite  $C_s$  del punto  $C_{s,h}$  centro del cerchio per  $P, P_1$  e  $P_2$ . Essendo il triedro di Frenét una base di  $\mathbb{R}^3$ , si ha

$$\overrightarrow{PC_{s,h}} = \alpha\tau + \beta n + \eta b,$$

con  $\alpha, \beta$  e  $\eta$  tali che

$$|\overrightarrow{P_1C_{s,h}}|^2 = |\overrightarrow{P_2C_{s,h}}|^2 = |\overrightarrow{PC_{s,h}}|^2 = \alpha^2 + \beta^2 + \eta^2. \quad (9.12)$$

Scriviamo i vettori  $\overrightarrow{PP_1}$  e  $\overrightarrow{PP_2}$  come

$$\overrightarrow{PP_1} = -h\tau + \frac{h^2}{2r(s)}n + O(h^3), \quad \overrightarrow{PP_2} = h\tau + \frac{h^2}{2r(s)}n + O(h^3).$$

Ogni punto  $Q$  del piano per  $P, P_1$  e  $P_2$  soddisfa

$$\overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{PP_1} \wedge \overrightarrow{PP_2} = 0. \quad (9.13)$$

Ma

$$\overrightarrow{PP_1} \wedge \overrightarrow{PP_2} = n \wedge \tau \frac{h^3}{r(s)} + O(h^4) = -b \frac{h^3}{r(s)} + O(h^4).$$

Quindi, essendo  $C_{s,h}$  un punto di tale piano, sostituendo la precedente relazione in (9.13) si conclude che  $\eta = 0$  nel limite  $h \rightarrow 0$ .

Le condizioni (9.12) divengono allora

$$(\alpha + h)^2 + \left(\beta - \frac{h^2}{2r(s)}\right)^2 + O(h^3) = (\alpha - h)^2 + \left(\beta - \frac{h^2}{2r(s)}\right)^2 + O(h^3) = \alpha^2 + \beta^2.$$

La prima di tali relazioni implica che  $\alpha = 0$  nel limite  $h \rightarrow 0$ , mentre la seconda implica che  $\beta = r(s)$ . Pertanto risulta

$$\overrightarrow{PC_s} = r(s)n.$$

Quindi il centro del cerchio osculatore si trova sulla retta per  $P$  parallela ad  $n$ , nel verso di  $n$  ed il suo raggio è  $r(s)$ . Questo prova l'esistenza del cerchio osculatore e fornisce l'interpretazione di  $r(s)$ .

È utile esprimere la velocità e l'accelerazione nella base costituita dal triedro di Frenét. Ciò si ottiene immediatamente notando che, poiché il moto è vincolato alla curva di equazione parametrica  $s \rightarrow \nu(s)$ , la configurazione del sistema al tempo  $t$  è individuata quando è nota l'ascissa curvilinea del punto sulla curva dove la particella transita all'istante  $t$ . Quindi, ogni moto  $t \rightarrow x(t)$  è in corrispondenza biunivoca con una funzione  $t \rightarrow s(t)$  tale che

$$x(t) = \nu(s(t)). \quad (9.14)$$

Differenziando rispetto al tempo tale relazione si ottiene per la velocità:

$$v = \nu'(s)\dot{s} = \tau(s)\dot{s}, \quad (9.15)$$

che mostra che la velocità ha componente solo lungo la direzione tangente alla curva, data da  $\dot{s}$ . Differenziando la (9.15) si ha

$$a = \ddot{s}\tau(s) + \dot{s}\tau'(s)\dot{s} = \ddot{s}\tau(s) + \frac{\dot{s}^2}{r(s)}n(s).$$

Ne consegue che

$$a \cdot \tau(s) = \ddot{s}, \quad a \cdot n(s) = \frac{\dot{s}^2}{r(s)}, \quad a \cdot b(s) = 0.$$

Pertanto, moltiplicando la (9.9) per  $\tau$ ,  $n$  e  $b$  rispettivamente, si ottiene

$$\begin{aligned} m\ddot{s} &= f \cdot \tau + f^{(v)} \cdot \tau, \\ m\frac{\dot{s}^2}{r(s)} &= f \cdot n + f^{(v)} \cdot n, \\ 0 &= f \cdot b + f^{(v)} \cdot b. \end{aligned} \quad (9.16)$$

Si tratta di un sistema di tre equazioni nelle quattro incognite  $t \rightarrow s(t)$ ,  $f^{(v)} \cdot \tau$ ,  $f^{(v)} \cdot n$  e  $f^{(v)} \cdot b$ . Occorre pertanto introdurre un'assunzione sulle reazioni vincolari che per un vincolo *ideale* corrisponde a supporre che la reazione vincolare non abbia componenti nella direzione tangente alla curva. Difatti, una componente in tale direzione non è indispensabile per mantenere il punto sulla curva, ma rappresenterebbe un ostacolo al moto. Pertanto si pone la seguente

**Definizione 9.2:** Il vincolo alla curva  $s \rightarrow \nu(s)$  si dice ideale (o liscio) se la reazione vincolare nel punto della curva di ascissa curvilinea  $s$  risulta sempre perpendicolare al vettore tangente la curva in tale punto,  $\tau(s)$ :

$$f^{(v)} \cdot \tau(s) = 0. \quad (9.17)$$

Assumendo il vincolo ideale, la prima delle (9.16) diventa

$$m\ddot{s} = f \cdot \tau. \quad (9.18)$$

Nella (9.18) non appaiono le reazioni vincolari. Si tratta quindi di un'equazione pura che rappresenta una restrizione sul moto del punto. Essa è in realtà da sola in grado di determinare il moto in quanto, ricordando che  $\dot{x} = \dot{s}\tau$ , la posizione

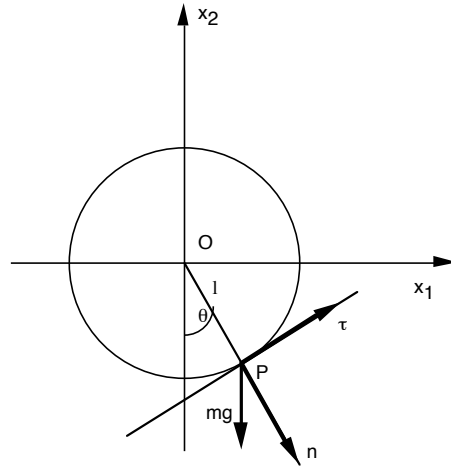
$$\phi(s, \dot{s}, t) = f(\nu(s), \dot{s}\tau(s), t) \cdot \tau(s)$$

definisce una funzione delle tre variabili  $s, \dot{s}$  e  $t$  in modo tale che la (9.18) si scrive

$$m\ddot{s} = \phi(s, \dot{s}, t).$$

Si tratta cioè di un'equazione differenziale del secondo ordine nella funzione incognita  $t \rightarrow s(t)$ . Scelto per  $s^{(0)}$  il valore dell'ascissa curvilinea corrispondente alla posizione iniziale  $x^{(0)}$  e  $\dot{s}^{(0)} = \dot{x}^{(0)} \cdot \tau(s^{(0)})$ , il corrispondente problema ai valori iniziali ammette una ed una sola soluzione se la forza è Lipshitziana. Pertanto la funzione  $t \rightarrow s(t)$  è completamente determinata, e con essa la posizione del punto nello spazio, mediante la (9.14). Una volta determinato il moto mediante la prima delle (9.16), le altre due equazioni (9.16) possono essere utilizzate per determinare le componenti di  $f^{(v)}$  lungo  $n$  e lungo  $b$  che, insieme alla (9.17) determinano completamente la reazione vincolare e quindi forniscono la soluzione completa del problema. Vedremo in seguito che l'assunzione di vincolo ideale conduce a tale conclusione in generale.

*Applicazione: Pendolo semplice.* Si consideri un punto materiale di massa  $m$  vincolato a muoversi su un cerchio di centro l'origine e raggio  $l$  posto in un piano verticale, sul quale agisce la forza peso  $f = mg$  diretta secondo la direzione negativa dell'asse  $x_2$  (vedi figura). Si supponga inoltre che il vincolo sia ideale.



Il parametro  $\theta \in [0, 2\pi)$ , può essere scelto come l'angolo che il raggio per la posizione  $P$  del punto materiale forma con la direzione negativa dell'asse  $x_2$ . La rappresentazione parametrica della curva è data da

$$x_1 = l \sin \theta, \quad x_2 = -l \cos \theta, \quad x_3 = 0.$$

L'ascissa curvilinea è  $s = l\theta$  e quindi la rappresentazione parametrica in termini di ascissa curvilinea è

$$x_1 = l \sin \frac{s}{l}, \quad x_2 = -l \cos \frac{s}{l}.$$

Il vettore tangente è

$$\tau(s) = \left( \cos \frac{s}{l}, \sin \frac{s}{l}, 0 \right).$$

Il vettore normale è

$$n(s) = \left( -\sin \frac{s}{l}, \cos \frac{s}{l}, 0 \right).$$

Il vettore binormale è diretto secondo l'asse  $x_3$ . La forza è data da

$$f = (0, -mg, 0). \tag{9.19}$$

Poiché il vincolo è ideale, l'equazione pura è

$$m\ddot{s} = -mg \sin \frac{s}{l}$$

che fornisce l'equazione del moto del pendolo semplice

$$\ddot{s} + g \sin \frac{s}{l} = 0.$$

Posto

$$U(s) = -mgl \cos \frac{s}{l},$$

la funzione  $U$  rappresenta l'energia potenziale per il pendolo semplice. Si tratta di un moto unidimensionale del tipo di quelli studiati nel Capitolo 4. In particolare, in corrispondenza del valore  $s = 0$  l'energia potenziale ha un minimo che corrisponde ad una posizione di equilibrio stabile. La frequenza di oscillazione per livelli di energia prossimi al minimo è data da

$$\omega = \sqrt{\frac{U''(0)}{m}} = \sqrt{\frac{g}{l}},$$

che mostra che la frequenza di oscillazione del pendolo (limitatamente alle piccole oscillazioni) dipende solo dall'accelerazione di gravità  $g$  e dalla lunghezza del pendolo.

### 9.5 Esempio 2: Moto di un punto su una superficie regolare.

Come secondo esempio consideriamo il moto di un punto materiale di massa  $m$  vincolato a restare su una superficie regolare di  $\mathbb{R}^3$ ,  $\mathcal{S}$  di equazione

$$\psi(x) = 0,$$

con  $x \rightarrow \psi(x)$  funzione infinitamente differenziabile. La condizione di regolarità è qui intesa nel senso che  $|\nabla\psi(x)| > 0$  per ogni punto  $x$  della superficie.

Le equazioni di Newton si scrivono anche in questo caso come

$$m\ddot{x} = f(x, \dot{x}, t) + f^{(v)}. \quad (9.20)$$

Per formulare la condizione di vincolo ideale, cominciamo con il definire i vettori tangenti alla superficie.

Diremo *vettore tangente* alla superficie  $\mathcal{S}$  in  $x$  un qualsiasi vettore  $\tau$  di  $\mathbb{R}^3$  tale che esista una curva  $\gamma$  sulla superficie  $\mathcal{S}$ , passante per  $x$  cui  $\tau$  è tangente in  $x$ .

Sia  $\lambda \rightarrow \gamma(\lambda)$  una qualsiasi curva sulla superficie  $\mathcal{S}$ . Poiché tutti i suoi punti sono punti della superficie, si ha

$$\psi(\gamma(\lambda)) = 0$$

per ogni valore del parametro. Differenziando rispetto a  $\lambda$  si ottiene:

$$0 = \nabla\psi(\gamma(\lambda)) \cdot \gamma'(\lambda). \quad (9.21)$$

Pertanto i vettori tangenti la superficie in un punto  $x \in \mathcal{S}$  sono tutti ortogonali al vettore  $\nabla\psi(x)$ . Per ogni  $x \in \mathcal{S}$ , il vettore

$$N(x) = \nabla\psi(x)$$

si dice pertanto *normale* alla superficie  $\mathcal{S}$  in  $x$ . L'ipotesi che la superficie sia regolare assicura che  $N(x) \neq 0$  in ogni punto della superficie.

La (9.21) mostra che l'insieme dei vettori tangenti la superficie in un punto è uno spazio vettoriale di dimensione 2, ortogonale alla normale alla superficie, che si denomina *piano tangente* in  $x$  e si denota  $T_x\mathcal{S}$ .

Come nel caso del moto su una curva, l'idea intuitiva di vincolo ideale suggerisce la seguente

**Definizione 9.3:** Il vincolo alla superficie  $\mathcal{S}$  si dice ideale (o liscio) se la reazione vincolare in ogni punto  $x \in \mathcal{S}$ , in ogni moto possibile risulta perpendicolare al piano tangente in  $x$ ,  $T_x\mathcal{S}$

$$f^{(v)}(x) \cdot \tau = 0, \quad \forall \tau \in T_x\mathcal{S}.$$

Sia  $A$  una sfera aperta di  $\mathbb{R}^3$  avente intersezione non vuota con  $\mathcal{S}$ ,  $D$  un aperto di  $\mathbb{R}^2$  e  $\nu: D \rightarrow \mathcal{S} \cap A$  una trasformazione infinitamente differenziabile ed invertibile che fornisce una rappresentazione parametrica (locale) della superficie. Per ogni  $q = (q_1, q_2) \in D$  risulta pertanto

$$\psi(\nu(q_1, q_2)) = 0.$$

Ogni curva  $\lambda \rightarrow \gamma(\lambda)$  su  $\mathcal{S}$  è in corrispondenza biunivoca, mediante  $\nu$ , con una curva  $\lambda \rightarrow q(\lambda) = \nu^{-1}(\gamma(\lambda))$ . Sia  $x$  un punto della curva, corrispondente a  $\lambda = \bar{\lambda}$  e sia  $q$  il punto corrispondente in  $D$ , tale che  $x = \nu(q)$ . Il vettore  $\tau$  tangente alla curva  $\gamma$  in  $x$  è quindi dato da

$$\tau = \sum_{k=1}^2 \frac{\partial \nu}{\partial q_k}(q) q'_k(\bar{\lambda}).$$

Sia  $x$  il generico punto di  $\mathcal{S}$  per cui transita la particella. Moltiplicando l'equazione del moto (9.20) scritta in  $x$  per il generico vettore tangente in  $x$  si ottiene, grazie all'assunzione di vincolo ideale

$$m\ddot{x} \cdot \sum_{k=1}^2 \frac{\partial \nu}{\partial q_k}(q) q'_k(\bar{\lambda}) = f \cdot \sum_{k=1}^2 \frac{\partial \nu}{\partial q_k}(q) q'_k(\bar{\lambda}).$$

Le quantità  $q'_k(\bar{\lambda})$  sono arbitrarie. Pertanto si ha:

$$m\ddot{x} \cdot \frac{\partial \nu}{\partial q_k}(q) = f \cdot \frac{\partial \nu}{\partial q_k}(q) \quad k = 1, 2. \quad (9.22)$$

Le equazioni (9.22) sono due *equazioni pure*, che rappresentano una restrizione al moto del sistema. Per riconoscere che esse determinano effettivamente il moto,



procediamo come segue. Per ogni moto  $t \rightarrow x(t)$ , sia  $t \rightarrow q(t)$  la curva corrispondente in  $D$ . La velocità del punto può scriversi

$$\dot{x} = \sum_{k=1}^2 \frac{\partial \nu}{\partial q_k}(q(t)) \dot{q}_k(t). \quad (9.23)$$

Le quantità  $\dot{q}_k$  sono dette *velocità generalizzate*. Posto  $\dot{q}_k = \eta_k$ , l'energia cinetica  $T = (1/2)m\dot{x}^2$  può essere riscritta come funzione delle  $q$  e delle  $\eta$  come

$$T(q, \eta) = \frac{1}{2} \sum_{h,k=1}^2 a_{h,k}(q) \eta_h \eta_k, \quad (9.24)$$

ove

$$a_{h,k} = m \frac{\partial \nu}{\partial q_h} \cdot \frac{\partial \nu}{\partial q_k}. \quad (9.25)$$

**Lemma 9.1:** *Si ha la seguente identità:*

$$m\ddot{x} \cdot \frac{\partial \nu}{\partial q_k}(q) = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \eta_k} \right) (q(t), \dot{q}(t)) - \frac{\partial T}{\partial q_k}(q(t), \dot{q}(t)). \quad (9.26)$$

Dim. Infatti, dalla (9.24) e (9.25) si ha

$$\frac{\partial T}{\partial \eta_k}(q(t), \dot{q}(t)) = m \frac{\partial \nu}{\partial q_k}(q) \cdot \sum_{h=1}^2 \frac{\partial \nu}{\partial q_h} \dot{q}_h = m\dot{x} \cdot \frac{\partial \nu}{\partial q_k}(q).$$

Differenziando rispetto al tempo si ha:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \eta_k} \right) (q(t), \dot{q}(t)) &= m\ddot{x} \cdot \frac{\partial \nu}{\partial q_k}(q) + m \sum_{h=1}^2 \frac{\partial \nu}{\partial q_h} \dot{q}_h \cdot \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \nu}{\partial q_k}(q) \right) \\ &= m\ddot{x} \cdot \frac{\partial \nu}{\partial q_k}(q) + m \sum_{h=1}^2 \frac{\partial \nu}{\partial q_h} \dot{q}_h \cdot \sum_{\ell=1}^2 \frac{\partial^2 \nu}{\partial q_k \partial q_\ell}(q) \dot{q}_\ell \end{aligned}$$

e l'ultimo termine è  $\partial T / \partial q_k$ .  $\square$

Le posizioni

$$Q_k(q, \dot{q}, t) = f \left( \nu(q), \sum_{l=1}^2 \frac{\partial \nu}{\partial q_l}(q(t)) \dot{q}_l(t), t \right) \cdot \frac{\partial \nu}{\partial q_k}(q)$$

definiscono due funzioni delle variabili  $q_1, q_2, \dot{q}_1, \dot{q}_2$  e  $t$  che prendono il nome di *componenti Lagrangiane della forza attiva*, in termini delle quali le equazioni pure (9.23) divengono

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{\eta}_k} \right) (q, \dot{q}) - \frac{\partial T}{\partial q_k} (q, \dot{q}) = Q_k(q, \dot{q}, t). \quad (9.27)$$

Le equazioni (9.27) sono dette *equazioni di Lagrange*. Sono state qui dedotte in un contesto molto particolare, ma la loro validità è molto piú generale. Esse rappresentano in questo caso *un sistema di due equazioni differenziali del secondo ordine riducibili a forma normale* e pertanto determinano univocamente le funzioni  $t \rightarrow q_1(t)$  e  $t \rightarrow q_2(t)$  quando sono fissate le condizioni iniziali. La prova di tale affermazione verrà fornita nel seguito quando si studieranno in generale le proprietà delle equazioni di Lagrange. Notiamo che, se le  $Q_h$  dipendono solo da  $q$  e non da  $\dot{q}$  e  $t$  ed esiste una funzione  $U(q)$ , *potenziale* tale che

$$Q_h = -\frac{\partial U}{\partial q_h}.$$

allora, introdotta la *Lagrangiana*

$$L(\eta, q) = T(\eta, q) - U(q),$$

le equazioni di Lagrange si scrivono

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\eta}_k} \right) (q, \dot{q}) - \frac{\partial L}{\partial q_k} (q, \dot{q}) = 0. \quad (9.28)$$

Esse sono formalmente analoghe alle equazioni ottenute per un sistema di punti liberi. Le (9.28) possono interpretarsi come le equazioni di Eulero-Lagrange per il funzionale azione corrispondente alla Lagrangiana  $L$ . Infatti si sarebbe potuto pervenire alle (9.28) adattando opportunamente gli argomenti del Capitolo 7. Questo metodo sarà utilizzato per la determinazione di equazioni pure nel caso generale di un sistema ad  $n$  gradi di libertà.

*Applicazione: Pendolo sferico.* Si consideri un punto materiale di massa  $m$  vincolato a muoversi su una sfera di centro l'origine e raggio  $l$ , sul quale agisce la forza peso  $f = mg$  diretta secondo la direzione negativa dell'asse  $x_3$ . Si supponga inoltre che il vincolo sia ideale.

Una scelta conveniente delle coordinate Lagrangiane  $(q_1, q_2)$  si ha come segue. Siano  $\rho, \theta, \phi$  le coordinate sferiche nello spazio  $\mathbb{R}^3$  (vedi figura) Esse sono definite mediante le posizioni

$$x_1 = \rho \sin \theta \cos \varphi, \quad x_2 = \rho \sin \theta \sin \varphi, \quad x_3 = \rho \cos \theta,$$

e quindi

$$\rho = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}.$$

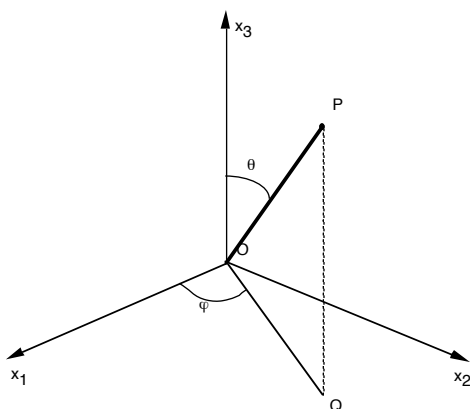
$\theta$  è ben definito in  $[0, \pi]$ , se  $\rho \neq 0$  come

$$\theta = \arccos \frac{x_3}{\rho},$$

e  $\varphi$  è ben definito se  $\sin \theta \neq 0$  come

$$\varphi = \arctan \frac{x_2}{x_1}$$

se  $x_1 \neq 0$ , mentre, se  $x_1 = 0$ , è posto a  $\pm\pi/2$  a seconda che  $x_2$  sia positivo o negativo. La trasformazione è quindi invertibile quando si escludono i punti dell'asse  $x_3$ .



In coordinate sferiche l'equazione della sfera di centro l'origine e raggio  $l$  è semplicemente

$$\rho = l.$$

Una rappresentazione parametrica della sfera è quindi fornita da

$$x_1 = l \sin \theta \cos \varphi, \quad x_2 = l \sin \theta \sin \varphi, \quad x_3 = l \cos \theta, \quad (9.29)$$

con  $(\theta, \varphi) \in (0, \pi) \times [0, 2\pi)$ . Essa esclude pertanto il polo nord ed il polo sud della sfera, dove  $\sin \theta = 0$ . Useremo pertanto  $(q_1, q_2) = (\theta, \varphi)$ . Gli angoli  $\varphi$  e  $\theta$  sono detti *longitudine* e *colatitudine* del punto sulla sfera.

Differenziando le (9.29) rispetto al tempo si ottengono le relazioni (9.23) relativamente a questo caso:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= l\dot{\theta} \cos \theta \cos \varphi - l\dot{\varphi} \sin \theta \sin \varphi, \\ \dot{x}_2 &= l\dot{\theta} \cos \theta \sin \varphi + l\dot{\varphi} \sin \theta \cos \varphi, \\ \dot{x}_3 &= -l\dot{\theta} \sin \theta.\end{aligned}$$

L'energia cinetica  $T$  è data, con  $\eta_1 = \dot{\theta}$  e  $\eta_2 = \dot{\varphi}$ , da

$$T(q, \eta) = \frac{1}{2}ml^2[\eta_1^2 + (\sin q_1)^2\eta_2^2].$$

L'energia potenziale della forza peso  $f = (0, 0, -mg)$  è

$$U(q) = mgx_3 = mgl \cos \theta = mgl \cos q_1.$$

La Lagrangiana è

$$L(q, \eta) = \frac{1}{2}ml^2[\eta_1^2 + (\sin q_1)^2\eta_2^2] - mgl \cos q_1.$$

Le equazioni di Lagrange sono pertanto:

$$\begin{aligned}ml^2\ddot{\theta} - ml\dot{\varphi}^2 \sin \theta \cos \theta - mgl \sin \theta &= 0 \\ \frac{d}{dt}[ml^2\dot{\varphi} \sin^2 \theta] &= 0.\end{aligned}$$

## 9.6 Principio dei lavori virtuali.

Ritorniamo ora allo studio del caso generale di un sistema di  $N$  particelle soggetto ad  $\ell$  vincoli bilaterali olonomi. Per pervenire ad equazioni pure occorre estendere a questo caso la nozione di vincolo ideale. La struttura formale è molto simile a quella discussa nel caso del moto di un punto vincolato ad una superficie, la maggiore differenza essendo legata alla dipendenza dei vincoli dal tempo. Essa richiede l'introduzione della nozione di velocità virtuali.

Cominciamo con il ricordare che un moto  $t \rightarrow X(t) = (x_1(t), \dots, x_N(t))$  è *possibile* nell'intervallo  $(t_1, t_2)$  se e solo se  $\psi_\alpha(X(t), t) = 0$  per ogni  $t \in (t_1, t_2)$  e per ogni  $\alpha = 1, \dots, \ell$ .

**Definizione 9.4:** Un elemento  $V \in \mathbb{R}^{3N}$ ,  $V = (v_1, \dots, v_N)$  si dice *atto di moto possibile al tempo  $t$ , nella configurazione  $X$*  se esiste un moto possibile  $s \rightarrow Y(s)$  in un intervallo  $(t_1, t_2)$  che contiene  $t$ , che passa per la configurazione  $X$  al tempo

$t$  e la cui derivata temporale a tale istante coincide con  $V$ . In altri termini, si verifica quanto segue:

$$\begin{aligned} Y(t) &= X, \\ \dot{Y}(t) &= V. \end{aligned} \quad (9.30)$$

**Proposizione 9.2:**  $V \in \mathbb{R}^{3N}$  è un atto di moto possibile al tempo  $t$  nella configurazione  $X$  se e solo se soddisfa le  $\ell$  equazioni lineari

$$\sum_{k=1}^{3N} V_k \frac{\partial \psi_\alpha}{\partial X_k}(X, t) + \frac{\partial \psi_\alpha}{\partial t}(X, t) = 0, \quad \alpha = 1, \dots, \ell. \quad (9.31)$$

Inoltre, l'atto di moto  $V$  è possibile al tempo  $t$  nella configurazione  $X$  se e solo se esiste  $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_n) \in \mathbb{R}^n$  tale che

$$V = \sum_{h=1}^n \frac{\partial S}{\partial q_h}(q, t) \theta_h + \frac{\partial S}{\partial t}(q, t), \quad (9.32)$$

ove  $q \in \mathbb{R}^n$  rappresenta le coordinate lagrangiane della configurazione  $X$ .

Dim. Differenziando la relazione

$$\psi_\alpha(Y(s), s) = 0,$$

e ponendo  $s = t$  si ottiene

$$\sum_{k=1}^{3N} \frac{\partial \psi_\alpha}{\partial X_k}(Y(t), t) \dot{Y}_k(t) + \frac{\partial \psi_\alpha}{\partial t}(Y(t), t) = 0. \quad (9.33)$$

Se  $V$  è una velocità possibile al tempo  $t$  nella configurazione  $X$ , allora (9.31) segue da (9.33) e (9.30).

Se invece  $V$  soddisfa la (9.31), per provare che  $V$  è un atto di moto possibile occorre costruire un moto possibile  $s \rightarrow Y(s)$  che soddisfa le (9.30). Un candidato naturale sarebbe  $Y(s) = X - V(t-s)$ , ma tale scelta non necessariamente definisce un moto possibile perché non è detto che soddisfi la (9.6) per  $s \neq t$ . Poniamo pertanto

$$Y(s) = X - V(t-s) + R(s)$$

con  $R(s)$  da determinare in modo che risulti

$$\psi_\alpha(X - V(t-s) + R(s), s) = 0, \quad \alpha = 1, \dots, \ell. \quad (9.34)$$

Poiché  $X$  è una configurazione del sistema al tempo  $t$ , la (9.34) è soddisfatta per  $s = t$  con  $R(t) = 0$ . Inoltre la matrice Jacobiana  $J$  ha rango  $\ell$  in  $(X, t)$ . Quindi

il teorema della funzione implicita assicura l'esistenza di  $\varepsilon > 0$  e infinite scelte di  $R(s)$  con  $s \in (t - \varepsilon, t + \varepsilon)$  soddisfacenti la (9.34). Per pervenire alla conclusione voluta, basta far vedere che esiste una scelta che permette di soddisfare la seconda delle (9.30) e cioè che è possibile scegliere  $R(s)$  in modo che  $\dot{R}(t) = 0$ . Supponiamo, senza perdita di generalità che il minore

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \frac{\partial \psi_1}{\partial X_{n+1}} & \cdots & \frac{\partial \psi_1}{\partial X_{n+\ell}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \psi_\ell}{\partial X_{n+1}} & \cdots & \frac{\partial \psi_\ell}{\partial X_{n+\ell}} \end{pmatrix} (X, t)$$

abbia determinante non nullo. Fissati arbitrariamente  $R_k(s)$  per  $k = 1, \dots, n$ , restano univocamente determinate le funzioni  $R_k(s)$  con  $k = n + 1, \dots, n + \ell$ . Si può pertanto fissare  $R_k(s) = 0$  per  $k = 1, \dots, n$ . Le restanti funzioni non saranno nulle. Tuttavia, esse soddisfano per ogni  $s \in (t - \varepsilon, t + \varepsilon)$  la (9.34). Differenziandola e ponendo  $t = s$  si ottiene:

$$0 = \frac{d}{ds} \psi_\alpha(X - V(t - s) + R(s), s) \Big|_{s=t} = \sum_{k=1}^{n+\ell} \frac{\partial \psi_\alpha}{\partial X_k}(X, t) [V_k + \dot{R}_k(t)] + \frac{\partial \psi_\alpha}{\partial t}(X, t).$$

Per la condizione (9.31) questa diviene

$$\sum_{k=1}^{n+\ell} \frac{\partial \psi_\alpha}{\partial X_k}(X, t) \dot{R}_k(t) = 0.$$

Avendo assunto  $R_k(s) = 0$  per  $k = 1, \dots, n$ , e quindi  $\dot{R}_k(t) = 0$  per gli stessi valori di  $k$ , essa si riduce a

$$\sum_{k=n+1}^{n+\ell} \frac{\partial \psi_\alpha}{\partial X_k}(X, t) \dot{R}_k(t) = 0.$$

La matrice dei coefficienti di tale relazione lineare ha determinante non nullo e pertanto è necessariamente  $\dot{R}_k(t) = 0$  anche per  $k = n + 1, \dots, n + \ell$  e ciò conclude la prima parte della Proposizione 9.2.  $\square$

Per quanto riguarda la seconda parte, se  $V$  è un atto di moto possibile e  $s \rightarrow Y(s)$  il moto possibile corrispondente, sia  $s \rightarrow q(s)$  la traiettoria in  $\mathbb{R}^n$  tale che  $Y(s) = S(q(s), s)$  e  $X = S(q(t), t)$ . Differenziando rispetto ad  $s$  e ponendo  $s = t$  si ottiene

$$\dot{Y}(t) = \sum_{h=1}^n \frac{\partial S}{\partial q_h}(q(t), t) \dot{q}_h(t) + \frac{\partial S}{\partial t}(q(t), t),$$

e quindi la (9.32), quando si scelga  $\theta_h = \dot{q}_h(t)$ .

Viceversa, se  $V$  soddisfa la (9.32) per qualche  $\theta \in \mathbb{R}^n$ , si ponga

$$q(s) = q - \theta(t - s).$$

Allora

$$Y(s) = S(q(s), s)$$

è certamente un moto possibile,  $Y(t) = X$  e  $\dot{Y}(t) = V$ . Questo completa la dimostrazione della Proposizione 9.2.

*Osservazione:* Si noti come la costruzione di un moto possibile in termini delle coordinate *naturali*  $X$  richiede l'uso del teorema della funzione implicita, mentre la costruzione in termini delle coordinate Lagrangiane  $q$  è immediata.

**Definizione 9.5:** Un elemento  $W \in \mathbb{R}^{3N}$ ,  $W = (w_1, \dots, w_N)$  si dice *atto di moto virtuale al tempo  $t$ , nella configurazione  $X$*  se esistono due atti di moto  $V_1$  e  $V_2$  possibili al tempo  $t$  nella configurazione  $X$ , tali che

$$W = V_1 - V_2.$$

La seguente proposizione, analoga alla Proposizione 9.2 è un'immediata conseguenza della definizione di atto di moto virtuale:

**Proposizione 9.3:**  $W \in \mathbb{R}^{3N}$  è un atto di moto virtuale al tempo  $t$  nella configurazione  $X$  se e solo se

$$\sum_{k=1}^{3N} W_k \frac{\partial \psi_\alpha}{\partial X_k}(X, t) = 0, \quad \alpha = 1, \dots, \ell. \quad (9.35)$$

Inoltre, l'atto di moto  $W$  è virtuale al tempo  $t$  nella configurazione  $X$  se e solo se esiste  $\zeta = (\zeta_1, \dots, \zeta_n) \in \mathbb{R}^n$  tale che

$$W = \sum_{h=1}^n \frac{\partial S}{\partial q_h}(q, t) \zeta_h, \quad (9.36)$$

ove  $q \in \mathbb{R}^n$  rappresenta le coordinate lagrangiane della configurazione  $X$ .

Infine l'insieme degli atti di moto virtuali al tempo  $t$  nel punto  $X$  coincide con lo spazio vettoriale  $n$ -dimensionale  $T_X \mathcal{C}_t$  costituito dai vettori tangenti alla varietà  $\mathcal{C}_t$  nel punto  $X$ . Gli  $n$  vettori  $E_k \in T_X \mathcal{C}_t$  definiti dalle posizioni

$$E_k = \frac{\partial S}{\partial q_h}(q, t),$$

costituiscono una base in  $T_X\mathcal{C}_t$ .

Dim. Se  $W$  è un atto di moto virtuale, esistono due atti di moto possibili  $V_1$  e  $V_2$  tali che  $W = V_1 - V_2$ . Scritte le (9.31) per  $V_1$  e  $V_2$  e sottraendole membro a membro si ottiene la (9.35). Se viceversa  $W$  soddisfa la (9.35), fissata arbitrariamente  $V_1$ , velocità possibile al tempo  $t$  in  $X$ , e posto  $V_2 = V_1 + W$ ,  $V_2$  soddisfa la (9.31) e quindi è anch'essa possibile e pertanto  $W$  è virtuale. Allo stesso modo si ottiene la seconda parte della Proposizione 9.3.

Per identificare gli atti di moto virtuali con i vettori tangenti, ricordiamo che, per definizione, un vettore di  $W \in \mathbb{R}^{3N}$  è tangente alla varietà  $\mathcal{C}_t$  in  $X$  se esiste una curva  $\gamma$  di  $\mathcal{C}_t$ , passante per  $X$ , cui  $W$  è tangente in  $X$ . Sia  $\lambda \rightarrow \gamma(\lambda)$  una rappresentazione parametrica della curva  $\gamma$  tale che  $\gamma(0) = X$  e  $\gamma'(0) = W$ . Poiché  $\gamma(\lambda) \in \mathcal{C}_t$ , si ha

$$\psi_\alpha(\gamma(\lambda), t) = 0, \quad \alpha = 1, \dots, \ell.$$

Differenziando rispetto a  $\lambda$  e ponendo  $\lambda = 0$  si ottiene

$$0 = \left. \frac{d}{d\lambda} \psi_\alpha(\gamma(\lambda), t) \right|_{\lambda=0} = \sum_{\kappa=1}^{3N} \frac{\partial \psi_\alpha}{\partial X_\kappa}(X, t) \gamma'_\kappa(0) = \sum_{\kappa=1}^{3N} \frac{\partial \psi_\alpha}{\partial X_\kappa}(X, t) W_\kappa,$$

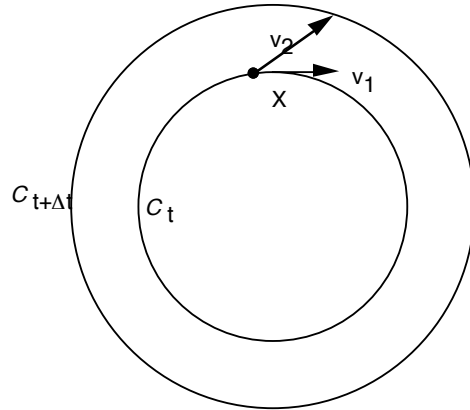
che coincide con la (9.35). Pertanto ogni vettore tangente è una velocità virtuale. Viceversa, si può vedere, come si è fatto nella prova della Proposizione 9.2, che se  $W$  soddisfa la (9.35), esiste una curva su  $\mathcal{C}_t$  passante per  $X$  cui  $W$  è tangente. La (9.35) afferma che lo spazio tangente  $T_X\mathcal{C}_t$  in  $X$  è lo spazio dei vettori di  $\mathbb{R}^{3N}$  ortogonali agli  $\ell$  vettori

$$N_\alpha(X, t) = \nabla \psi_\alpha(X, t), \quad \alpha = 1, \dots, \ell,$$

e pertanto ha dimensione  $n = 3N - \ell$ . Infine la (9.36) implica che  $\{E_k\}_{k=1}^n$  è una base in  $T_X\mathcal{C}_t$ , in quanto, se gli  $E_k$  fossero linearmente dipendenti, per la (9.36) lo spazio tangente avrebbe dimensione minore di  $n$ . Pertanto la Proposizione 9.3 è completamente dimostrata.  $\square$

*Osservazione:* Nel caso di vincoli indipendenti dal tempo le relazioni che caratterizzano gli atti di moto virtuali coincidono con quelle per gli atti di moto possibili, sicché per apprezzare la differenza occorre esaminare il caso di vincoli dipendenti dal tempo. La situazione è esemplificata nella figura seguente,





che rappresenta il caso di un punto vincolato ad una superficie sferica di raggio variabile nel tempo:

$$\psi(x, t) = |x|^2 - t^2 = 0.$$

Le curve  $\mathcal{C}_t$  e  $\mathcal{C}_{t+\Delta t}$  rappresentano la varietà delle configurazioni a due istanti prossimi  $t$  e  $t + \Delta t$ . Il vettore  $v_2$  rappresenta una velocità possibile al tempo  $t$ , mentre il vettore  $v_1$  rappresenta una velocità virtuale al tempo  $t$ . Mentre l'atto di moto virtuale è tangente alla varietà delle configurazioni al tempo  $t$ , l'atto di moto possibile non è tangente alla varietà delle configurazioni né al tempo  $t$  né al tempo  $t + \Delta t$ .

Si fissi ora un sistema di forze  $F = (f_1, \dots, f_N)$  agenti sugli  $N$  punti materiali nel moto  $s \rightarrow X(s)$  al tempo  $t$ .

**Definizione 9.6:** Fissato il moto  $s \rightarrow X(s)$ , si dice *potenza virtuale* al tempo  $t$  del sistema di forze  $F$  nell'atto di moto  $W = (w_1, \dots, w_N)$  virtuale in  $X(t)$  al tempo  $t$  il numero reale

$$\mathcal{P}(W) = \sum_{i=1}^N f_i \cdot w_i$$

I casi analizzati in precedenza e l'idea intuitiva di vincolo ideale suggeriscono la seguente definizione di *vincolo ideale*:

**Definizione 9.7 (Principio dei lavori virtuali):** Un insieme di vincoli bilaterali olonomi cui è sottoposto un sistema di  $N$  punti materiali si dice *ideale* se per ogni moto possibile  $s \rightarrow X(s)$  e per ogni tempo  $t$  il corrispondente sistema di reazioni

vincolari  $F^{(v)} = (f_1^{(v)}, \dots, f_N^{(v)})$ , per ogni atto di moto virtuale  $W$  al tempo  $t$  in  $X(t)$ , ha potenza virtuale  $\mathcal{P}^{(v)}(W)$  nulla:

$$\mathcal{P}^{(v)}(W) = 0. \quad (9.37)$$

La definizione precedente generalizza quelle date nel caso del moto vincolato ad una curva e ad una superficie ed ammette un'interpretazione simile in vista del fatto che gli atti di moto virtuali coincidono con i vettori tangenti alla varietà delle configurazioni. La definizione non ammette tuttavia ulteriori giustificazioni nell'ambito della teoria dei sistemi vincolati. La sua giustificazione effettiva è basata sulla costruzione di un modello *realistico* di vincolo e sulla dimostrazione che la (9.37) è verificata in opportune condizioni limite che corrispondono alla situazione descritta dal vincolo ideale. Tale teoria presenta notevoli difficoltà formali e ne verrà fornito solo un cenno alla fine di questo Capitolo, in un caso molto particolare, cioè nel caso del moto di un singolo punto materiale vincolato ad una curva.

### 9.7 Principio di D'Alambert.

Assumeremo quindi che i vincoli siano ideali nel senso della definizione precedente. Poiché il moto del sistema è regolato dalle equazioni di Newton (9.7), moltiplicando l' $i$ -esima delle (9.7) per la velocità virtuale dell' $i$ -esimo punto e sommando su tutti i punti del sistema, la (9.37) comporta:

$$\sum_{i=1}^N m_i \ddot{x}_i \cdot w_i = \sum_{i=1}^N f_i(X, \dot{X}, t) \cdot w_i, \quad (9.38)$$

per ogni atto di moto virtuale. Il membro destro della (9.38) rappresenta la potenza virtuale delle forze attive  $\mathcal{P}^{(a)}(W)$ . Poiché  $-m_i \ddot{x}_i$  ha le dimensioni di una forza, essa è a volte denotata con

$$f_i^{(in)} = -m_i \ddot{x}_i$$

ed è detta *forza inerziale* dell' $i$ -esimo punto materiale.

La potenza di  $F^{(in)} = (f_1^{(in)}, \dots, f_N^{(in)})$ ,  $\mathcal{P}^{(in)}(W)$  coincide con l'opposto del membro sinistro della (9.38).

Si conclude pertanto che i moti del sistema vincolato soddisfano, per ogni atto di moto virtuale, la relazione (*Principio di D'Alambert*)

$$\mathcal{P}^{(in)}(W) + \mathcal{P}^{(a)}(W) = 0, \quad (9.39)$$

per ogni atto di moto virtuale al tempo  $t$  nella configurazione  $X(t)$ . La (9.39) per ciascun atto di moto virtuale è una *relazione pura*. Al variare dell'atto di

moto virtuale tali relazioni sono tutte le relazioni pure che sussistono per il sistema e rappresentano tutte le restrizioni al moto. A partire da esse si potrebbe, come si è fatto nel caso del moto di un punto su una superficie, determinare un sistema di  $n$  equazioni differenziali, le equazioni di Lagrange, che risulteranno atte a determinare completamente il moto.

### 9.8 Principio di azione stazionaria per sistemi a vincoli ideali.

Discuteremo piú avanti tale procedimento mentre diamo invece ora una formulazione variazionale che estende il principio di azione stazionaria per i sistemi vincolati. Supponiamo pertanto che sul sistema agisca una forza attiva  $F$  che sia conservativa di potenziale  $\tilde{U}(X)$ :

$$f_i = -\nabla_i \tilde{U}(x_1, \dots, x_N).$$

Come si è fatto nel caso del moto di un punto materiale libero, introduciamo anzitutto lo spazio delle traiettorie del sistema.

Spazio delle traiettorie: Fissiamo due tempi  $0$  e  $T$  e due punti  $X^{(1)} \in \mathcal{C}_0$  ed  $X^{(2)} \in \mathcal{C}_T$ . Consideriamo l'insieme  $\mathcal{M}_{X^{(1)}, X^{(2)}, T}$ , o semplicemente  $\mathcal{M}$ ,

$$\mathcal{M}_{X^{(1)}, X^{(2)}, T} = \{\Gamma \mid \Gamma : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^{3N}\}$$

costituito dalle funzioni  $t \rightarrow \Gamma(t)$  tali che:

- 1)  $t \rightarrow \Gamma(t)$  è una funzione infinitamente differenziabile in  $(0, T)$ , continua con tutte le derivate continue in  $[0, T]$  e tale che

$$\sum_{i=1}^{3N} (\dot{\Gamma}_i(t))^2 > 0 \quad \forall t \in (0, T);$$

- 2)

$$\Gamma(0) = X^{(1)}, \quad \Gamma(T) = X^{(2)};$$

- 3)

$$\forall t \in [0, T], \quad \Gamma(t) \in \mathcal{C}_t, \quad \forall \Gamma \in \mathcal{M}.$$

La definizione precedente differisce da quella data nel Capitolo 7 per l'aggiunta del punto 3, che stabilisce che le traiettorie considerate sono traiettorie sullo spazio delle configurazioni, condizione questa che assicura che ognuna delle traiettorie di  $\mathcal{M}$  è un moto possibile per il sistema.

Per ogni curva  $\Gamma \in \mathcal{M}$ , che scriviamo come  $\Gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_N)$ ,  $V = (v_1, \dots, v_N) = (\dot{\gamma}_1, \dots, \dot{\gamma}_N)$ , definiamo la *Lagrangiana*

$$\tilde{L}(V, X) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i v_i^2 - \tilde{U}(X)$$

e l'azione

$$\tilde{\mathcal{A}}[\Gamma] = \int_0^T dt L(\dot{\Gamma}(t), \Gamma(t)) = \int_0^T dt \left[ \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \dot{\gamma}_i(t)^2 - \tilde{U}(\Gamma(t)) \right]. \quad (9.40)$$

**Definizione 9.8:** Si dice *famiglia di traiettorie variate*,  $\{\Gamma_\varepsilon, \varepsilon \in [-1, 1]\}$  un insieme di curve caratterizzato come segue: si fissi una funzione continua ed infinite volte differenziabile

$$u : [-1, 1] \times [0, T] \rightarrow u(\varepsilon, t) \in \mathbb{R}^{3N},$$

tale che

1)

$$u(0, t) = \Gamma(t), \forall t \in [0, T];$$

2)

$$u(\varepsilon, 0) = X^{(1)}, \quad u(\varepsilon, T) = X^{(2)}, \forall \varepsilon \in [-1, 1].$$

3)

$$u(\varepsilon, t) \in \mathcal{C}_t, \quad \forall (\varepsilon, t) \in [-1, 1] \times [0, T].$$

La curva  $\Gamma_\varepsilon$  è definita come

$$t \rightarrow \Gamma_\varepsilon(t) = u(\varepsilon, t).$$

In corrispondenza di ogni scelta della funzione infinitamente differenziabile  $u$ , si ha una famiglia di traiettorie variate. Si ha

$$\tilde{\mathcal{A}}[\Gamma_\varepsilon] = \int_0^T dt \left[ \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \left( \frac{\partial u_i(\varepsilon, t)}{\partial t} \right)^2 - \tilde{U}(u(\varepsilon, t)) \right].$$

Calcoliamo ora la derivata di  $\tilde{\mathcal{A}}[\Gamma_\varepsilon]$  rispetto ad  $\varepsilon$ .

$$\frac{d}{d\varepsilon} \tilde{\mathcal{A}}[\Gamma_\varepsilon] = \int_0^T dt \sum_{i=1}^N \left[ m_i \frac{\partial u_i(\varepsilon, t)}{\partial t} \cdot \frac{\partial^2 u_i(\varepsilon, t)}{\partial \varepsilon \partial t} - \nabla_i \tilde{U}(u(\varepsilon, t)) \cdot \frac{\partial u_i(\varepsilon, t)}{\partial \varepsilon} \right]. \quad (9.41)$$

il primo termine nel membro destro di (9.41) può essere integrato per parti come nel Capitolo 7 ed il termine finito si annulla in quanto

$$\frac{\partial u(\varepsilon, 0)}{\partial \varepsilon} = 0 = \frac{\partial u(\varepsilon, T)}{\partial \varepsilon}.$$

Si ha pertanto

$$\frac{d}{d\varepsilon} \tilde{\mathcal{A}}[\Gamma_\varepsilon] = - \int_0^T dt \sum_{i=1}^N \left[ m_i \frac{\partial^2 u_i(\varepsilon, t)}{\partial t^2} + \nabla_i \tilde{U}(u(\varepsilon, t)) \right] \cdot \frac{\partial u_i(\varepsilon, t)}{\partial \varepsilon}.$$

Ponendo  $\varepsilon = 0$ , questa diviene:

$$\frac{d}{d\varepsilon} \tilde{\mathcal{A}}[\Gamma_\varepsilon] \Big|_{\varepsilon=0} = - \int_0^T dt \sum_{i=1}^N \left[ m_i \ddot{\gamma}_i(t) + \nabla_i \tilde{U}(\Gamma(t)) \right] \cdot z_i(t).$$

con

$$Z(t) = (z_1(t), \dots, z_N(t)) = \frac{\partial u(\varepsilon, t)}{\partial \varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0}.$$

Usando la (9.7), la precedente relazione diviene

$$\frac{d}{d\varepsilon} \mathcal{A}[\Gamma_\varepsilon] \Big|_{\varepsilon=0} = - \int_0^T dt \sum_{i=1}^N f_i^{(v)} \cdot z_i(t).$$

Il vettore  $Z(t) \in \mathbb{R}^{3N}$  è un atto di moto virtuale al tempo  $t$  nella configurazione  $\Gamma(t)$ . Infatti  $u(\varepsilon, t) \in \mathcal{C}_t$  e pertanto

$$\psi_\alpha(u(\varepsilon, t), t) = 0, \quad \alpha = 1, \dots, \ell$$

per ogni  $\varepsilon \in [-1, 1]$ . Differenziando rispetto ad  $\varepsilon$  e ponendo  $\varepsilon = 0$  si ha quindi

$$\sum_{k=1}^{3N} \frac{\partial \psi_\alpha}{\partial X_k}(\Gamma(t), t) Z_k(t) = 0. \quad (9.42)$$

Tale relazione coincide con la (9.35) e questo prova che  $Z(t)$  è un atto di moto virtuale al tempo  $t$  nella configurazione  $\Gamma(t)$  e quindi l'ipotesi di vincolo ideale comporta

$$\frac{d}{d\varepsilon} \tilde{\mathcal{A}}[\Gamma_\varepsilon] \Big|_{\varepsilon=0} = 0$$

e cioè i moti del sistema, sotto l'azione di vincoli ideali, sono punti stazionari del funzionale azione. Viceversa, tutti i punti stazionari del funzionale azione sono moti del sistema corrispondenti ad un vincolo ideale. Tale affermazione è conseguenza del seguente lemma che generalizza il lemma 7.5 al caso di funzioni soddisfacenti condizioni aggiuntive.

**Lemma 9.4:** *Sia  $G$  una funzione in  $C^1([0, T] \rightarrow \mathbb{R}^d)$ , e sia  $\{\mathbb{V}_t, t \in (0, T)\}$  una famiglia di sottospazi vettoriali di  $\mathbb{R}^d$ . Se*

$$\int_0^T G(t) \cdot h(t) dt = 0 \quad (9.43)$$

per ogni  $h \in C^1([0, T] \rightarrow \mathbb{R}^d)$  tale che

$$h(0) = 0 = h(T),$$

$$h(t) \in \mathbb{V}_t,$$

allora, per ogni  $t \in [0, T]$  si ha

$$G(t) \in \mathbb{V}_t^\perp = \{y \in \mathbb{R}^d \mid y \cdot z = 0 \ \forall z \in \mathbb{V}_t\}.$$

Dim. Per assurdo, si supponga che esista un intervallo  $(t_1, t_2) \subset (0, T)$  tale che  $G(t) \notin \mathbb{V}_t^\perp$ . Per ogni  $t \in (t_1, t_2)$  esiste pertanto  $z(t) \in \mathbb{V}_t$  tale che  $G(t) \cdot z(t) \neq 0$ . In analogia con la prova del lemma 7.5, per  $n$  intero, si consideri la funzione vettoriale

$$h_n(t) = \begin{cases} (G(t) \cdot z(t))z(t)|z(t)|^{-2}, & t \in (t_1, t_2), \\ 0, & t \notin (t_1 - 1/n, t_2 + 1/n), \end{cases}$$

e negli intervalli  $[t_1 - 1/n, t_1]$  e  $[t_2, t_2 + 1/n]$  in modo arbitrario, a patto che  $h_n$  sia in  $C^1([0, T] \rightarrow \mathbb{R}^d)$  e risulti

$$\sup_{t \in [0, T]} |h_n(t)| \leq \sup_{t \in [0, T]} |G(t)|.$$

La funzione  $t \rightarrow h_n(t)$  così costruita soddisfa le condizioni del lemma e, per  $n$  sufficientemente grande risulta

$$\int_0^T G(t) \cdot h_n(t) dt > 0.$$

Il lemma 9.4 è quindi provato per contraddizione.  $\square$

Se la curva  $\Gamma$  è un punto stazionario per l'azione, si ha

$$\int_0^T dt \sum_{i=1}^N \left[ m_i \ddot{\gamma}_i(t) + \nabla_i \tilde{U}(\Gamma(t)) \right] \cdot z_i(t) = 0$$

per ogni  $Z(t)$  che soddisfa la (9.42). La (9.42) definisce, come si è visto nella Proposizione 9.3, lo spazio tangente la varietà  $\mathcal{C}_t$  nel punto  $\Gamma(t)$ . Applichiamo il lemma 9.4 con  $G(t) = (g_1(t), \dots, g_N(t))$ ,  $g_i(t) = m_i \ddot{\gamma}_i(t) + \nabla_i \tilde{U}(\Gamma(t))$ . Poniamo inoltre  $h(t) = Z(t)$ . Lo spazio  $\mathbb{V}_t$  coincide con lo spazio  $T_{\Gamma(t)}\mathcal{C}_t$  tangente a  $\mathcal{C}_t$  in

$\Gamma(t)$ . Il lemma 9.4 implica che  $G(t)$  è ortogonale a  $T_{\Gamma(t)}\mathcal{C}_t$ . Pertanto esistono  $N$  vettori di  $\mathbb{R}^3$ , che denotiamo con  $f_i^{(v)}$ ,  $i = 1 \dots, N$ , tali che

$$m_i \ddot{\gamma}_i(t) + \nabla_i \tilde{U}(\Gamma(t)) = f_i^{(v)}$$

ed inoltre

$$\sum_{i=1}^N f_i^{(v)} \cdot w_i = 0 \quad (9.44)$$

I vettori  $f_i^{(v)}$  sono quindi le reazioni vincolari nel moto  $t \rightarrow \Gamma(t)$ , soddisfacenti il principio dei lavori virtuali che caratterizza i vincoli ideali. Si è così provato il

Principio dell'azione stazionaria (di Hamilton):

*I moti di un sistema di  $N$  punti materiali soggetti ad  $\ell$  vincoli olonomi ed ideali sono tutti e soli i punti stazionari del funzionale azione (9.40), sullo spazio  $\mathcal{M}_{X^{(1)}, X^{(2)}, T}$ . Tali punti stazionari sono punti di minimo se  $T$  è sufficientemente piccolo.* ■

## 9.9 Equazioni di Lagrange.

A partire dal principio di azione stazionaria si ottiene facilmente un sistema di  $n$  equazioni differenziali che determina il moto. A questo scopo, ricordiamo che ad ogni traiettoria  $\Gamma \in \mathcal{M}_{X^{(1)}, X^{(2)}, T}$  si può associare una traiettoria  $t \rightarrow q(t) = (q_1(t), \dots, q_n(t))$  in  $\mathbb{R}^n$  tramite la trasformazione  $S$  definita dalla (9.5):

$$\Gamma(t) = S(q(t), t).$$

La traiettoria  $t \rightarrow q(t)$  è univocamente definita localmente, per l'invertibilità locale della trasformazione  $S$ . In corrispondenza la velocità dell' $i$ -esimo punto materiale nella traiettoria  $\Gamma$  al tempo  $t$  si scrive in accordo con la (9.32)

$$\dot{\gamma}_i(t) = \sum_{h=1}^n \frac{\partial S_i(q, t)}{\partial q_h} \eta_h + \frac{\partial S_i(q, t)}{\partial t},$$

se  $q = q(t)$  e  $\eta = \dot{q}(t)$ . In conseguenza di ciò, l'energia cinetica  $T$  associata alla curva  $\Gamma$  al tempo  $t$  si scrive

$$T(\eta, q, t) = \frac{1}{2} \sum_{h,k=1}^n a_{h,k}(q, t) \eta_h \eta_k + \sum_{h=1}^n b_h(q, t) \eta_h + c(q, t),$$

con

$$a_{h,k}(q, t) = \sum_{i=1}^N m_i \frac{\partial S_i(q, t)}{\partial q_h} \cdot \frac{\partial S_i(q, t)}{\partial q_k},$$

$$b_h(q, t) = \sum_{i=1}^N m_i \frac{\partial S_i(q, t)}{\partial q_h} \cdot \frac{\partial S_i(q, t)}{\partial t}, \quad c(q, t) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \frac{\partial S_i(q, t)}{\partial t} \cdot \frac{\partial S_i(q, t)}{\partial t}.$$

Anche l'energia potenziale  $\tilde{U}(X)$  può esprimersi in funzione delle  $q$ . Si definisce in tal modo  $U(q, t)$ :

$$U(q, t) = \tilde{U}(S(q, t)).$$

Definiamo la Lagrangiana

$$L(\eta, q, t) = T(\eta, q, t) - U(q, t). \quad (9.45)$$

È chiaro che, se  $\Gamma(t) = S(q(t), t)$  e  $\eta = \dot{q}(t)$ , si ha

$$\tilde{L}(\dot{\Gamma}(t), \Gamma(t)) = L(\dot{q}(t), q(t), t).$$

Posto

$$\mathcal{A}[q] = \int_0^T dt L(\dot{q}(t), q(t), t), \quad (9.46)$$

si ha pertanto

$$\tilde{\mathcal{A}}[\Gamma] = \mathcal{A}[q],$$

se  $\Gamma(t) = S(q(t), t)$  per  $t \in [0, T]$ .

Siano  $q^{(1)} = S^{-1}(X^{(1)}, 0)$  e  $q^{(2)} = S^{-1}(X^{(2)}, T)$  e sia  $\mathcal{N}_{q^{(1)}, q^{(2)}, T}$  l'insieme delle traiettorie regolari in  $\mathbb{R}^n$  che passano per  $q^{(1)}$  al tempo  $t = 0$  e per  $q^{(2)}$  al tempo  $t = T$ . La (9.46) definisce su  $\mathcal{N}$  un funzionale *Azione* associato alla Lagrangiana  $L$ , i cui punti stazionari sono tutti e soli i corrispondenti, tramite  $S$  dei punti stazionari di  $\tilde{\mathcal{A}}[\Gamma]$ .

Pertanto il principio di azione stazionaria implica che i moti del sistema vincolato sono tutte e sole le traiettorie corrispondenti alle soluzioni delle equazioni di Eulero-Lagrange associate alla Lagrangiana  $L$  e cioè

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \eta_k} \right) (\dot{q}(t), q(t), t) - \frac{\partial L}{\partial q_k} (\dot{q}(t), q(t), t) = 0, \quad k = 1, \dots, n \quad (9.47)$$

Le (9.47) sono dette *equazioni di Lagrange* e rappresentano un sistema di  $n$  equazioni pure per il sistema vincolato. Esse sono pertanto, in linea di principio sufficienti a determinare il moto del sistema. Mostriamo nel prossimo Capitolo che effettivamente esse rappresentano un sistema di  $n$  equazioni differenziali del secondo ordine riducibili a forma normale. Nelle ipotesi di regolarità assunte esse ammettono una ed una sola soluzione quando siano assegnati i valori iniziali. Esse generalizzano le analoghe equazioni ottenute nel caso di sistemi liberi al caso di sistemi vincolati, dove, in luogo delle coordinate cartesiane occorre usare le coordinate Lagrangiane  $q$  e occorre scrivere la Lagrangiana in accordo alla (9.45).



Le precedenti equazioni risolvono quindi completamente il problema del moto di un sistema vincolato soggetto a forze attive conservative. In presenza di forze non conservative le (9.47) possono essere generalizzate seguendo il procedimento usato nel caso di un punto materiale vincolato ad una superficie per ottenere le (9.27). Partiamo di nuovo dalla relazione (9.38), che rappresenta, al variare dell'atto di moto virtuale  $W$  l'insieme di tutte le relazioni pure. Usando l'espressione (9.36) per  $W$ , si ottiene

$$\sum_{h=1}^n \left[ \sum_{i=1}^N m_i \ddot{x}_i \cdot \frac{\partial S_i}{\partial q_h}(q(t), t) - \sum_{i=1}^N f_i(X, \dot{X}, t) \cdot \frac{\partial S_i}{\partial q_h}(q(t), t) \right] \zeta_h = 0.$$

Tale identità vale per ogni scelta di  $\zeta = (\zeta_1, \dots, \zeta_n) \in \mathbb{R}^n$ , per la Proposizione 9.3 e l'assunzione di vincolo ideale. Si ha pertanto

$$\sum_{i=1}^N m_i \ddot{x}_i \cdot \frac{\partial S_i}{\partial q_h}(q(t), t) - \sum_{i=1}^N f_i(X, \dot{X}, t) \cdot \frac{\partial S_i}{\partial q_h}(q(t), t) = 0, \quad h = 1, \dots, n \quad (9.48)$$

**Lemma 9.5:** *Vale l'analogo dell'identità (9.26), e cioè*

$$\sum_{i=1}^N m_i \ddot{x}_i \cdot \frac{\partial S_i}{\partial q_k}(q(t), t) = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \eta_k} \right) (\dot{q}(t), q(t), t) - \frac{\partial T}{\partial q_k} (\dot{q}(t), q(t), t). \quad (9.49)$$

Dim. È del tutto analoga alla prova di (9.26). Ricordando che

$$\dot{x}_i = \sum_{h=1}^n \frac{\partial S_i}{\partial q_h} \eta_h + \frac{\partial S_i}{\partial t}$$

e quindi

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \dot{x}_i^2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \left( \sum_{h=1}^n \frac{\partial S_i}{\partial q_h} \eta_h + \frac{\partial S_i}{\partial t} \right) \cdot \left( \sum_{k=1}^n \frac{\partial S_i}{\partial q_k} \eta_k + \frac{\partial S_i}{\partial t} \right),$$

si ottiene

$$\frac{\partial T}{\partial \eta_k} = \sum_{i=1}^N m_i \dot{x}_i \cdot \frac{\partial S_i}{\partial q_k}.$$

Si ha pertanto

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \eta_k} \right) (\dot{q}(t), q(t), t) = \sum_{i=1}^N m_i \ddot{x}_i \cdot \frac{\partial S_i}{\partial q_k} + \sum_{i=1}^N m_i \left( \sum_{h=1}^n \frac{\partial S_i}{\partial q_h} \eta_h + \frac{\partial S_i}{\partial t} \right) \cdot \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial S_i}{\partial q_k} \right). \quad (9.50)$$

La derivata nell'ultimo termine è

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial S_i}{\partial q_k} \right) = \sum_{l=1}^n \frac{\partial^2 S_i}{\partial q_k \partial q_l} \dot{q}_l + \frac{\partial^2 S_i}{\partial q_k \partial t}.$$

Sostituendo tale espressione nel secondo termine della (9.50), si ottiene:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \eta_k} \right) (\dot{q}(t), q(t), t) &= \sum_{i=1}^N m_i \ddot{x}_i \cdot \frac{\partial S_i}{\partial q_k} \\ &+ \sum_{i=1}^N m_i \left( \sum_{h=1}^n \frac{\partial S_i}{\partial q_h} \dot{q}_h + \frac{\partial S_i}{\partial t} \right) \cdot \left( \sum_{l=1}^n \frac{\partial^2 S_i}{\partial q_k \partial q_l} \dot{q}_l + \frac{\partial^2 S_i}{\partial q_k \partial t} \right). \end{aligned} \quad (9.51)$$

Il secondo termine può scriversi anche:

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^N m_i \left( \sum_{h=1}^n \frac{\partial S_i}{\partial q_h} \dot{q}_h + \frac{\partial S_i}{\partial t} \right) \cdot \left( \sum_{l=1}^n \frac{\partial^2 S_i}{\partial q_k \partial q_l} \dot{q}_l + \frac{\partial^2 S_i}{\partial q_k \partial t} \right) \\ &= \sum_{i=1}^N m_i \left( \sum_{h=1}^n \frac{\partial S_i}{\partial q_h} \dot{q}_h + \frac{\partial S_i}{\partial t} \right) \cdot \frac{\partial}{\partial q_k} \left( \sum_{l=1}^n \frac{\partial S_i}{\partial q_l} \dot{q}_l + \frac{\partial S_i}{\partial t} \right) \end{aligned}$$

e l'identità è provata.  $\square$

Se nel secondo termine della (9.48) si sostituiscono gli argomenti  $X$  e  $\dot{X}$  della legge di forza con le loro espressioni

$$X = S(q, t), \quad \dot{X} = \sum_{h=1}^n \frac{\partial S}{\partial q_h} \dot{q}_h + \frac{\partial S}{\partial t},$$

si ottiene un'espressione che dipende solo da  $q$ ,  $\dot{q}$  e da  $t$ , che denoteremo con  $Q_h(q, \dot{q}, t)$  e cioè

$$Q_h(q, \dot{q}, t) = \sum_{i=1}^N f_i \left( S(q, t), \sum_{h=1}^n \frac{\partial S}{\partial q_h} \dot{q}_h + \frac{\partial S}{\partial t}, t \right) \cdot \frac{\partial S_i}{\partial q_h}(q(t), t).$$

Le  $Q_h$  sono dette *componenti Lagrangiane della forza*. Fissate le coordinate lagrangiane  $q$ , la loro espressione è nota quando è nota la legge di forza. Con questa notazione e l'identità (9.49) le (9.48) divengono

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \eta_k} \right) (\dot{q}(t), q(t), t) - \frac{\partial T}{\partial q_k} (\dot{q}(t), q(t), t) = Q_k(q, \dot{q}, t) \quad (9.52)$$

che rappresentano le *equazioni di Lagrange* nel caso di forze non necessariamente conservative. Se poi  $F = \nabla \tilde{U}$ ,

$$Q_h = \sum_{i=1}^N f_i \cdot \frac{\partial S_i}{\partial q_h} = - \sum_{i=1}^N \nabla_i \tilde{U} \cdot \frac{\partial S_i}{\partial q_h} = - \frac{\partial U}{\partial q_h}(q, t)$$

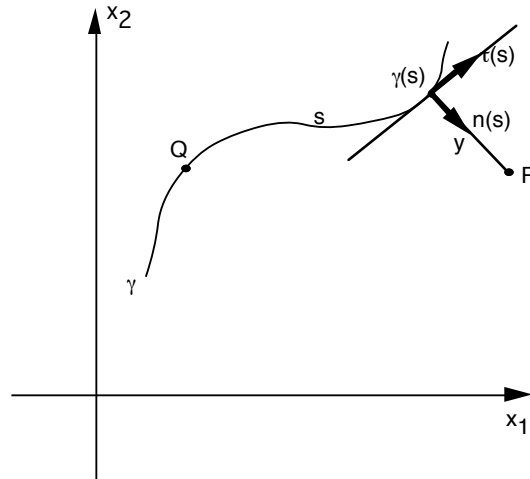
e quindi, ponendo  $L = T - U$  si ottengono di nuovo le (9.47), senza far uso del principio di azione stazionaria. Le considerazioni precedenti provano il seguente

**Teorema 9.6:** *Un sistema ad  $n$  gradi di libertà, costituito da  $N$  punti materiali soggetti ad  $\ell$  vincoli olonomi ideali e ad una legge di forza  $F$  ammette un sistema di  $n$  equazioni pure che (una volta scelte come coordinate per lo spazio delle configurazioni  $\mathcal{C}_t$  le coordinate Lagrangiane locali  $q = (q_1, \dots, q_n)$  in un aperto di  $\mathbb{R}^n$ ) sono rappresentate dalle equazioni di Lagrange (9.52). Se le componenti Lagrangiane della forza ammettono un potenziale, esse si riducono alle equazioni di Eulero-Lagrange per il funzionale Azione e pertanto vale il Principio di Azione Stazionaria (di Hamilton).*

### 9.10 Modello di vincolo ideale.

La validità del metodo qui esposto è legata alla correttezza dell'assunzione di vincoli ideali. Essa è stata introdotta, su base puramente empirica, come idealizzazione del comportamento di vincoli concreti poco deformati. Una giustificazione soddisfacente sarebbe ottenuta dallo studio del sistema complessivo costituito dagli  $N$  punti materiali e dai corpi che costituiscono i vincoli. Tale studio è in principio possibile, ma di notevole complessità. Formuleremo invece un *modello* di vincolo che, sebbene più soddisfacente dell'assunzione di vincolo ideale, richiede comunque assunzioni non dimostrate. Esse però appaiono più giustificabili dell'ipotesi di vincolo ideale.

Ci limiteremo a presentare un modello per il vincolo di un punto materiale obbligato a muoversi lungo una curva fissa  $\gamma$ , esempio che contiene la maggior parte delle difficoltà del problema generale, ma è notazionalmente molto più semplice. Il risultato che otterremo potrà essere esteso al caso generale di un sistema a vincoli olonomi, estensione per la quale rinviamo ai testi di Arnold e Gallavotti. Per rendere ancora più leggere le notazioni, supporremo che la curva  $\gamma$  giaccia nel piano  $x_1, x_2$  e ci disinteresseremo dell'inessenziale coordinata  $x_3$ . La situazione è illustrata nella figura che segue.



Consideriamo un punto materiale di massa  $m$  soggetto ad una forza conservativa di potenziale  $U$  dipendente solo da  $x_1$  ed  $x_2$ , in modo da poter ignorare la coordinata  $x_3$ . Supponiamo che  $U$  sia dotato di due derivate continue e limitate in  $\mathbb{R}^2$ . Supponiamo inoltre che  $U$  sia inferiormente limitato e denotiamo con  $-B$  il suo estremo inferiore. Fissiamo una curva regolare  $\gamma$  nel piano  $x_1, x_2$  e sia  $s$  l'ascissa curvilinea, calcolata a partire da un suo punto prefissato  $Q$ ,  $s \rightarrow \gamma(s)$  sia l'equazione parametrica della curva in termini dell'ascissa curvilinea, che varia in un intervallo  $[s_1, s_2]$ . Siano  $\tau(s) = \gamma'(s)$  il vettore tangente in un suo punto  $\gamma(s)$ ,  $n(s) = r(s)\tau'(s)$  il vettore normale e  $r(s)$  il raggio di curvatura. Fissata l'ascissa curvilinea  $s$  ed un numero reale  $y$ , sia  $P$  il punto di coordinate

$$x_1(s, y) = \gamma_1(s) + yn_1(s), \quad x_2(s, y) = \gamma_2(s) + yn_2(s). \quad (9.53)$$

La trasformazione  $G : (s, y) \rightarrow (x_1, x_2)$  ha matrice Jacobiana

$$J(s, y) = \begin{pmatrix} \gamma'_1(s) + yn'_1(s) & n_1(s) \\ \gamma'_2(s) + yn'_2(s) & n_2(s) \end{pmatrix}.$$

Essendo la curva  $\gamma$  piana,  $n'(s)$ , che è ortogonale a  $n(s)$ , è parallelo a  $\tau(s)$  e quindi esiste  $\alpha(s)$  tale che  $n'(s) = \alpha(s)\tau(s)$ . Pertanto il determinante vale

$$\det J(s, y) = \gamma'_1 n_2 - \gamma'_2 n_1 + y(n'_1 n_2 - n'_2 n_1) = (\tau \wedge n)_3 (1 + \alpha(s)y).$$

Esiste quindi  $y_0 > 0$  tale che la trasformazione  $G$  è invertibile se

$$|y| \leq y_0,$$

e cioè in una striscia  $S_{y_0}$  intorno alla curva  $\gamma$ .

Il vincolo alla curva  $\gamma$  viene modellato pensando che vi sia una forza elastica di richiamo che agisce sul punto  $P$  a distanza  $y$  da  $\gamma$  nella direzione  $n$ . Questo equivale ad assumere che, oltre al potenziale  $U$  agisca anche il potenziale *vincolare*

$$U^{(v)}(x_1, x_2) = \frac{1}{2}\mu y^2. \quad (9.54)$$

Il numero reale positivo  $\mu$  è l'intensità della reazione elastica del vincolo. Ricordando che vogliamo modellare un vincolo che si deforma poco sotto l'azione del punto materiale, e quindi una reazione elastica molto forte, considereremo valori di  $\mu$  molto grandi ed al limite infiniti. Le equazioni del moto per il sistema sono

$$m\ddot{x} = -\nabla(U + U^{(v)}).$$

Assegnamo un dato iniziale  $x^{(0)} \in \gamma$  e sia  $s^{(0)}$  la sua ascissa curvilinea. Sia inoltre  $v^{(0)}$  la velocità iniziale del punto materiale. La corrispondente energia totale del punto è

$$E = \frac{1}{2}m(v^{(0)})^2 + U(x^{(0)})$$

indipendente da  $\mu$  in quanto  $y(x^{(0)}) = 0$ . La conservazione dell'energia fornisce immediatamente la seguente

**Proposizione 9.7:** *Esiste  $\mu_0(E) > 0$  tale che se  $\mu > \mu_0(E)$ , per ogni  $t > 0$*

$$|y(t)| \leq \sqrt{\frac{2(E+B)}{\mu}} < y_0. \quad (9.55)$$

Dim. Dalla conservazione dell'energia

$$E = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + U(x) + U^{(v)}(x)$$

e dalla limitatezza inferiore di  $U$  segue

$$U^{(v)}(x) \leq E + B.$$

Per l'espressione di  $U^{(v)}$  si ha quindi

$$\frac{1}{2}\mu y(t)^2 \leq E + B$$

e cioè

$$|y(t)| \leq \sqrt{\frac{2(E+B)}{\mu}}.$$

Basta allora scegliere

$$\mu_0 > \frac{2(E+B)}{y_0^2}$$

per essere certi che la (9.55) vale per ogni  $t > 0$ .  $\square$

Pertanto, se  $\mu > \mu_0(E)$ , il moto si svolge a tutti i tempi nella striscia  $S_{y_0}$  ove la trasformazione  $G$  è invertibile. Si possono quindi adottare le variabili  $s$  ed  $y$  come coordinate Lagrangiane in luogo di  $x_1$  ed  $x_2$  e scrivere le equazioni del moto in queste nuove variabili mediante le equazioni di Lagrange. A tale scopo, occorre anzitutto esprimere la velocità in termini di  $\dot{s}$  e  $\dot{y}$ . Differenziando la (9.53) si ha

$$\dot{x} = \dot{s}[\tau(s) + yn'(s)] + \dot{y}n(s) = \dot{s}\tau(s)(1 + y\alpha(s)) + \dot{y}n(s).$$

Si ha quindi

$$T = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 = \frac{1}{2}m\beta(s, y)\dot{s}^2 + \frac{1}{2}m\dot{y}^2,$$

con

$$\beta(s, y) = (1 + y\alpha(s))^2.$$

Si ponga poi

$$\bar{U}(s, y) = U(G(s, y)).$$

La Lagrangiana si scrive quindi

$$L(\dot{s}, \dot{y}, s, y) = \frac{1}{2}m\beta(s, y)\dot{s}^2 + \frac{1}{2}m\dot{y}^2 - \bar{U}(s, y) - \frac{1}{2}\mu y^2$$

e le equazioni di Lagrange sono:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}[m\beta(s, y)\dot{s}] &= \frac{m}{2} \frac{\partial \beta}{\partial s}(s, y)\dot{s}^2 - \frac{\partial \bar{U}}{\partial s}(s, y), \\ m\ddot{y} &= \frac{m}{2} \frac{\partial \beta}{\partial y}(s, y)\dot{s}^2 - \frac{\partial \bar{U}}{\partial y}(s, y) - \mu y. \end{aligned} \quad (9.56)$$

I dati iniziali per tale sistema sono:

$$s(0) = s^{(0)}, \quad y(0) = 0, \quad \dot{s}(0) = \dot{s}^{(0)} = v^{(0)} \cdot \tau(s^{(0)}), \quad \dot{y}(0) = \dot{y}^{(0)} = v^{(0)} \cdot n(s^{(0)}).$$

Integrando sul tempo la prima delle (9.56) si ottiene:

$$\begin{aligned} m\beta(s(t), y(t))\dot{s}(t) &= m\beta(s^{(0)}, 0)\dot{s}^{(0)} + \\ &+ \int_0^t du \left[ \frac{m}{2} \frac{\partial \beta}{\partial s}(s(u), y(u))\dot{s}(u)^2 - \frac{\partial \bar{U}}{\partial s}(s(u), y(u)) \right]. \end{aligned}$$

Siamo interessati a considerare il limite  $\mu \rightarrow +\infty$ , limite nel quale per la Proposizione 9.7,  $y \rightarrow 0$ . Per questo motivo riscriviamo la precedente relazione come

$$m\dot{s}(t) = m\dot{s}^{(0)} + mh(s(t), y(t), \dot{s}(t)) + \int_0^t du \left[ -\frac{\partial \bar{U}}{\partial s}(s(u), 0) + F(s(u), y(u), \dot{s}(u)) \right],$$

dove abbiamo posto

$$h(s, y, \dot{s}) = m(1 - \beta(s, y))\dot{s},$$

$$F(s, y, \dot{s}) = \frac{m}{2} \frac{\partial \beta}{\partial s}(s, y)\dot{s}^2 - \frac{\partial \bar{U}}{\partial s}(s, y) + \frac{\partial \bar{U}}{\partial s}(s, 0).$$

ed abbiamo anche usato il fatto che  $\beta(s, 0) = 1$ . La conservazione dell'energia e la limitatezza inferiore del potenziale assicurano che  $\dot{s}$  è limitato ad ogni tempo e quindi, usando la Proposizione 9.7 e la regolarità della funzione  $U$  e della curva  $\gamma$ , si controlla immediatamente che

$$|h(s, y, \dot{s})| \leq \frac{C}{\mu^{1/2}}, \quad |F(s, y, \dot{s})| \leq \frac{C}{\mu^{1/2}},$$

ove  $C$  è un'opportuna costante.

Sia ora  $\eta(t)$  la soluzione dell'equazione differenziale

$$m\ddot{\eta}(t) = -\frac{\partial \bar{U}}{\partial s}(\eta, 0),$$

con dati iniziali

$$\eta(0) = s^{(0)}, \quad \dot{\eta}(0) = \dot{s}^{(0)} = v^{(0)} \cdot \tau(s^{(0)}).$$

Tale problema ai valori iniziali, come si è visto all'inizio di questo capitolo, si ottiene assumendo il punto materiale soggetto al vincolo *ideale* di muoversi sulla curva  $\gamma$ , sotto l'azione della forza attiva  $f$  di potenziale  $U$ .

Integrando tale equazione nel tempo si ha:

$$m\dot{\eta}(t) = m\dot{s}^{(0)} + \int_0^t du \left[ -\frac{\partial \bar{U}}{\partial s}(\eta(u), 0) \right].$$

Siamo interessati a confrontare il moto  $t \rightarrow s(t)$  del sistema soggetto al vincolo *reale* che esercita la forza di potenziale  $U^{(v)}$  con il moto  $t \rightarrow \eta(t)$  del punto soggetto al vincolo *ideale*. Abbiamo pertanto

$$m|\dot{s}(t) - \dot{\eta}(t)| \leq m|h(s(t), y(t), \dot{s}(t))| + \int_0^t du |F(s(u), y(u), \dot{s}(u))|$$

$$+ \int_0^t du \left| \frac{\partial \bar{U}}{\partial s}(s(u), 0) - \frac{\partial \bar{U}}{\partial s}(\eta(u), 0) \right|.$$

Fissiamo  $T > 0$  e supponiamo  $t < T$ . Le stime precedenti implicano

$$|\dot{s}(t) - \dot{\eta}(t)| \leq \frac{(1+T)C'}{\mu^{1/2}} + \int_0^t du K |s(u) - \eta(u)|, \quad (9.57)$$

ove  $K$  è la costante di Lipshitz di  $(\partial\bar{U}/\partial s)$ . D'altra parte,

$$|s(t) - \eta(t)| \leq \int_0^t du |\dot{s}(u) - \dot{\eta}(u)|. \quad (9.58)$$

Posto

$$z(t) = |s(t) - \eta(t)| + |\dot{s}(t) - \dot{\eta}(t)|,$$

sommando membro a membro le disuguaglianze (9.57) e (9.58), si ottiene

$$z(t) \leq (K+1) \int_0^t du z(u) + \frac{(1+T)C'}{\mu^{1/2}}.$$

Il Lemma di Gronwall implica quindi

$$z(t) \leq T \exp[(K+1)T] \frac{(1+T)C'}{\mu^{1/2}},$$

per ogni  $t < T$ . Tale disuguaglianza assicura che, nel limite  $\mu \rightarrow \infty$ ,  $z(t)$  diviene sempre più piccolo. Abbiamo quindi mostrato il seguente

**Teorema 9.8 :** *Il moto  $t \rightarrow (s(t), y(t))$  di un punto materiale soggetto al vincolo reale che esercita una forza di potenziale  $U^{(v)}$  converge, nel limite  $\mu \rightarrow +\infty$  al moto  $t \rightarrow (\eta(t), 0)$  soggetto al vincolo ideale sulla curva  $\gamma$ , con gli stessi dati iniziali. Inoltre la componente tangenziale della velocità,  $\dot{s}(t)$  converge ad  $\dot{\eta}(t)$ .*

*Osservazione:* La componente normale della velocità  $\dot{y}(t)$  non converge. La funzione  $t \rightarrow y(t)$  tende ad un moto oscillatorio la cui ampiezza tende a 0 come  $\mu^{-1/2}$ , ma la frequenza di oscillazione diverge come  $\mu^{1/2}$  e quindi la derivata prima non tende a 0.

### 9.11 Cenni sui vincoli anolonomi.

Concludiamo questo capitolo con qualche breve cenno alla teoria dei vincoli anolonomi. Cominciamo con il supporre che il sistema di  $N$  punti materiali sia soggetto alla sollecitazione attiva  $F = (f_1, \dots, f_N)$  ed esclusivamente a vincoli



anonomi. Per semplicità supponiamo che vi sia uno solo di questi vincoli e che sia indipendente dal tempo:

$$\psi(X, \dot{X}) = 0.$$

In corrispondenza le equazioni del moto del sistema saranno ancora date dalle (9.7), con opportune reazioni vincolari. Come nel caso dei vincoli olonomi si è associato a tali equazioni un principio, il *principio dei lavori virtuali*, che consente di eliminare le incognite reazioni vincolari, così nel caso dei vincoli anonomi occorre affiancare alle equazioni del moto un opportuno principio sulla natura dei vincoli utilizzando il quale sia possibile pervenire ad equazioni prive di reazioni vincolari. Tra le molte possibilità, ci limiteremo ad esaminare quella proposta da Gauss e che va sotto il nome di *principio di minimo sforzo*. Per enunciare tale principio, si consideri una fissata configurazione  $X$  ed un atto di moto possibile  $V$  tali che

$$\psi(X, V) = 0.$$

Un'accelerazione  $A = (a_1, \dots, a_N)$  si dice *possibile* in corrispondenza della configurazione  $X$  e dell'atto di moto  $V$  al tempo  $t$  se esiste un moto possibile  $s \rightarrow Y(s)$  tale che  $Y(t) = X$ ,  $\dot{Y}(t) = V$  e  $\ddot{Y}(t) = A$ . Poiché il moto  $s \rightarrow Y(s)$  è possibile, risulta  $\psi(Y(s), \dot{Y}(s)) = 0$  per ogni  $s$ . Differenziando tale relazione rispetto ad  $s$  e ponendo  $s = t$  si ottiene allora

$$\sum_{i=1}^N \nabla_{x_i} \psi(X, V) \cdot v_i + \sum_{i=1}^N \nabla_{v_i} \psi(X, V) \cdot a_i = 0 \quad (9.59)$$

Si dice *sforzo* associato al vincolo  $\psi$  in corrispondenza della posizione  $X$ , dell'atto di moto  $V$  e dell'accelerazione  $A$  al tempo  $t$ , la quantità

$$\sum_{i=1}^N \frac{1}{m_i} (f_i(X, V, t) - m_i a_i)^2.$$

**Definizione 9.9** : Si dice che il vincolo  $\psi$  soddisfa il *principio di minimo sforzo di Gauss* se l'accelerazione effettiva nel moto è quella che minimizza lo sforzo tra tutte le accelerazioni possibili.

Non forniremo alcuna giustificazione intuitiva di tale definizione, rinviando al testo di Levi-Civita ed Amaldi<sup>(1)</sup> per una discussione più approfondita. Ci limiteremo a mostrare che l'uso di tale definizione permette di pervenire a equazioni pure e che, nel caso particolare di vincoli olonomi si riottiene il principio dei lavori virtuali.

---

<sup>(1)</sup> T. Levi-Civita, E. Amaldi *Lezioni di Meccanica Razionale* Zanichelli, 1949

Per determinare l'accelerazione effettiva si tratta di minimizzare lo sforzo rispetto a tutte le accelerazioni che verificano la (9.59). A questo scopo basta introdurre un moltiplicatore Lagrangiano  $\alpha$  e cioè basta minimizzare incondizionatamente la funzione

$$\sum_{i=1}^N \frac{1}{m_i} (f_i(X, V, t) - m_i a_i)^2 + \alpha \left[ \sum_{i=1}^N \nabla_{x_i} \psi(X, V) \cdot v_i + \sum_{i=1}^N \nabla_{v_i} \psi(X, V) \cdot a_i \right].$$

Per imporre la condizione di estremo differenziamo tale espressione rispetto alle  $a_i$  ed imponiamo che il risultato si annulli. Otterremo così

$$f_i - m_i a_i + \alpha \nabla_{v_i} \psi = 0. \quad (9.60)$$

Tale relazione determina la reazione vincolare nella forma

$$f_i^{(v)} = \alpha \nabla_{v_i} \psi. \quad (9.61)$$

Per determinare il moltiplicatore incognito  $\alpha$  basta imporre che il moto soddisfi il vincolo  $\psi$  ad ogni tempo. Poiché il vincolo è soddisfatto al tempo  $t$  per la scelta di  $X$  e  $V$ , basta imporre che risulti

$$\frac{d}{ds} \psi(Y(s), \dot{Y}(s)) = 0.$$

Esplicitando tale condizione si ottiene

$$0 = \sum_{i=1}^N \nabla_{x_i} \psi \cdot v_i + \sum_{i=1}^N \nabla_{v_i} \psi \cdot \frac{1}{m_i} [f_i + \alpha \nabla_{v_i} \psi].$$

Da essa si ottiene per  $\alpha$  l'espressione

$$\alpha = - \frac{\sum_i [v_i \cdot \nabla_{x_i} \psi + m_i^{-1} f_i \cdot \nabla_{v_i} \psi]}{\sum_i m_i^{-1} (\nabla_{v_i} \psi)^2}.$$

La reazione vincolare risulta pertanto completamente determinata in termini della posizione e dell'atto di moto e quindi la (9.60) diviene un sistema di equazioni pure che determinano effettivamente il moto.

L'estensione di tale principio al caso di  $\ell$  vincoli anolonomi indipendenti dal tempo è ovvia. Se vi sono  $\ell$  vincoli anolonomi, basta introdurre  $\ell$  moltiplicatori Lagrangiani  $\alpha_\ell$ ,  $\ell = 1, \dots, k$ , in luogo di uno solo. Naturalmente occorrerà un'ipotesi di indipendenza dei  $k$  vincoli anolonomi per poter determinare i moltiplicatori lagrangiani. Si dovrà cioè assumere che la matrice  $k \times k$

$$\sum_i \nabla_{v_i} \psi_\ell \nabla_{v_i} \psi_{\ell'}, \quad \ell, \ell' = 1, \dots, k$$

sia non singolare.

Il caso di vincoli dipendenti dal tempo richiede una discussione un poco piú complessa come nel caso di vincoli ideali.

Concludiamo mostrando come i vincoli olonomi possono essere inclusi nello schema presente. Basta osservare che ogni vincolo olonomo può riguardarsi come una specie di vincolo anolonomo (in realtà un vincolo integrabile). Infatti, se

$$\varphi(X) = 0$$

è un vincolo olonomo indipendente dal tempo e  $s \rightarrow Y(s)$  è un moto possibile, risulta anche in corrispondenza, per  $X = Y(t)$  e  $V = \dot{Y}(t)$

$$\psi(X, V) = \sum_{i=1}^N \nabla_{x_i} \varphi(X) \cdot v_i = 0.$$

Applicando a tale vincolo la discussione precedente si ottiene

$$f_i^{(v)} = \alpha \nabla_{v_i} \psi = \alpha \nabla_{x_i} \varphi(X).$$

Tale condizione afferma che la reazione vincolare è ortogonale alla varietà delle configurazioni e pertanto implica, come si è visto in precedenza, il principio dei lavori virtuali. In questo senso il principio di minimo sforzo può considerarsi come una giustificazione del principio dei lavori virtuali alternativa a quella fornita in precedenza.

## 10. Proprietà dei sistemi Lagrangiani.

### 5.1 Nozione di sistema Lagrangiano.

Supponiamo assegnata una funzione  $(\eta, q, t) \rightarrow L(\eta, q, t)$  definita in un aperto  $A = \mathbb{R}^n \times W \times I$ , con  $W$  aperto di  $\mathbb{R}^n$  che identifichiamo con lo *spazio delle configurazioni*,  $I$  intervallo aperto di  $\mathbb{R}$ ,  $I \supset [0, T]$ , e infinitamente differenziabile in  $A$ . Diremo *Lagrangiana* una tale funzione.

Alla Lagrangiana  $L$  è associato il sistema delle *equazioni di Lagrange*

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \eta_k} \right) (\dot{q}(t), q(t), t) - \frac{\partial L}{\partial q_k} (\dot{q}(t), q(t), t) = 0, \quad k = 1, \dots, n \quad (10.1)$$

nelle funzioni incognite  $t \rightarrow q(t)$ .

L'insieme costituito dall'aperto  $A$ , dalla Lagrangiana  $L$  e dalle equazioni di Lagrange (10.1) si dice *sistema Lagrangiano*.  $W$  è detto *spazio delle configurazioni*,  $n$  numero di gradi di libertà e  $q = (q_1, \dots, q_n)$  *coordinate Lagrangiane* del sistema Lagrangiano.

Le equazioni (10.1) sono le equazioni di Eulero-Lagrange per il funzionale *Azione* associato alla Lagrangiana  $L$ ,

$$\mathcal{A}[q] = \int_0^T dt L(\dot{q}(t), q(t), t), \quad (10.2)$$

definito sull'insieme  $\mathcal{N}_{q^{(1)}, q^{(2)}, T}$  delle traiettorie infinitamente differenziabili  $t \rightarrow q(t)$  da  $[0, T]$  in  $W$ , tali che  $q(0) = q^{(1)}$ ,  $q(T) = q^{(2)}$ . In conseguenza si ha il

Principio di azione stazionaria: *Le soluzioni delle equazioni (10.1) sono tutti e soli i punti stazionari dell'Azione (10.2).*

Nel Capitolo 9 si è visto come sia possibile associare (in infiniti modi) ad un sistema di punti materiali soggetti a vincoli olonomi ideali e ad una forza attiva conservativa, un insieme di coordinate Lagrangiane locali ed una Lagrangiana, in modo tale che i moti del sistema siano le soluzioni delle corrispondenti equazioni di Lagrange. Il sistema così ottenuto è un sistema Lagrangiano nel senso prima definito, ma equazioni della forma (10.1) sono rilevanti in vari altri settori della Fisica e della Matematica. Non essendovi particolari vantaggi, non ci limiteremo pertanto ai sistemi Lagrangiani aventi origine in Meccanica, ma discuteremo in questo capitolo un sistema Lagrangiano generale.

Proprietà di invarianza per un sistema Lagrangiano.

Sia

$$\psi : W \times I \rightarrow W' \subset \mathbb{R}^n$$

una funzione infinitamente differenziabile a valori in un aperto  $W' \subset \mathbb{R}^n$ , tale che, per ogni  $t$  fissato,

$$q' = \psi(q, t)$$

definisca una trasformazione invertibile di  $W$  in  $W'$ . Per ogni  $t \in I$  si denoti con  $\psi^{-1}(q', t)$  l'inversa di tale trasformazione. Sia inoltre  $t \rightarrow q(t) \in W$  una traiettoria in  $W$ . La traiettoria  $t \rightarrow q'(t)$  con  $q'(t) = \psi(q(t), t)$  si dice *immagine* di  $t \rightarrow q(t)$ . La proprietà di *invarianza del sistema Lagrangiano* è contenuta nel seguente

**Teorema 10.1:** *Esiste una funzione  $L'$  definita su  $\mathbb{R}^n \times W \times I$  tale che l'immagine  $t \rightarrow q'(t) \in W'$  di ogni traiettoria  $t \rightarrow q(t) \in W$  che risolve le equazioni di Lagrange (10.1) è una soluzione delle equazioni di Lagrange corrispondenti alla Lagrangiana  $L'$ .*

Dim. Cominciamo con il costruire la funzione  $L'$ . Differenziando la relazione  $q'(t) = \psi(q(t), t)$  si ottiene

$$\dot{q}'_h(t) = \sum_{k=1}^n \frac{\partial \psi_h}{\partial q_k}(q(t), t) \dot{q}_k(t) + \frac{\partial \psi_h}{\partial t}(q(t), t).$$

La matrice

$$M_{hk}(t) = \frac{\partial \psi_h}{\partial q_k}(q(t), t)$$

è invertibile per ogni  $t \in I$  per ipotesi. Pertanto, posto

$$g_h(t) = \frac{\partial \psi_h}{\partial t}(q(t), t),$$

la relazione

$$\eta' = M(t)\eta + g$$

può essere invertita per ogni  $t \in I$ , fornendo

$$\eta = M^{-1}[\eta' - g(t)].$$

Questo permette di esprimere la Lagrangiana  $L$  in funzione di  $\eta'$  e  $q'$ :

$$L(\eta, q, t) = L(M^{-1}[\eta' - g(t)], \psi^{-1}(q', t), t).$$

Si *definisce* pertanto la funzione  $L'$  mediante la posizione

$$L'(\eta', q', t) \stackrel{\text{def}}{=} L(M^{-1}[\eta' - g(t)], \psi^{-1}(q', t), t).$$

Per costruzione, se  $t \rightarrow q(t)$  è una qualsiasi traiettoria e  $t \rightarrow q'(t)$  è la sua immagine mediante  $\psi$ , per ogni  $t \in I$  si ha

$$L(\dot{q}(t), q(t), t) = L'(\dot{q}'(t), q'(t), t).$$

Definita l'azione  $\mathcal{A}'$  come

$$\mathcal{A}'[q'] = \int_0^T dt L'(\dot{q}'(t), q'(t), t), \quad (10.3)$$

se la traiettoria  $q'$  è l'immagine della traiettoria  $q$ , si ha

$$\mathcal{A}'[q'] = \mathcal{A}[q]. \quad (10.4)$$

L'invarianza delle equazioni di Lagrange è allora conseguenza del principio di minima azione, in quanto la (10.4) implica che  $q$  è un punto stazionario per l'azione  $\mathcal{A}$  se e solo se  $q'$  è un punto stazionario per l'azione  $\mathcal{A}'$ , nello spazio delle traiettorie  $\mathcal{N}_{q'(1), q'(2), T}$ . In conseguenza, se  $t \rightarrow q(t)$  è soluzione delle (10.1), allora la sua immagine mediante  $\psi$ ,  $t \rightarrow q'(t)$  è soluzione delle equazioni di Eulero-Lagrange per  $\mathcal{A}'$  e cioè delle equazioni (10.1) per la Lagrangiana  $L'$ .  $\square$

**Definizione 10.1:** La Lagrangiana  $L$  si dice *regolare* in  $A$  se, per ogni  $(\eta, q, t) \in A$  la matrice Hessiana

$$\mathcal{H}(\eta, q, t) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 L}{\partial \eta_1 \partial \eta_1} & \cdots & \frac{\partial^2 L}{\partial \eta_1 \partial \eta_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial^2 \dot{L}}{\partial \eta_n \partial \eta_1} & \cdots & \frac{\partial^2 \dot{L}}{\partial \eta_n \partial \eta_n} \end{pmatrix} (\eta, q, t), \quad (10.5)$$

ha determinante non nullo:

$$\det \mathcal{H}(\eta, q, t) \neq 0, \quad \forall (\eta, q, t) \in A. \quad (10.6)$$

**Proposizione 10.2:** *La Lagrangiana*

$$L(\eta, q, t) = T(\eta, q, t) - U(q, t) \quad (10.7)$$

*associata ad un sistema meccanico a vincoli olonomi ideali è regolare.*

Dim. Infatti, in questo caso l'energia cinetica è una forma quadratica in  $\eta$  e quindi gli elementi della matrice Hessiana sono

$$\mathcal{H}_{i,k}(\eta, q, t) = a_{i,k}(q, t) = \sum_{i=1}^N m_i \frac{\partial S_i(q, t)}{\partial q_i} \cdot \frac{\partial S_i(q, t)}{\partial q_k}.$$

Per ogni  $q$  e  $t$  fissati, la forma quadratica

$$T_2(\eta) = \frac{1}{2} \sum_{l,k=1}^n a_{l,k} \eta_l \eta_k$$

è definita positiva, cioè

$$T_2(\eta) \geq 0 \quad \text{e} \quad T_2(\eta) = 0 \quad \text{se e solo se} \quad \eta = 0.$$

Infatti, posto

$$w_i = \sum_{l=1}^n \frac{\partial S_i(q, t)}{\partial q_l} \eta_l,$$

risulta

$$T_2(\eta) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i w_i^2 \geq 0.$$

Inoltre

$$T_2(\eta) = 0 \quad \text{se e solo se} \quad w_i = 0, i = 1, \dots, N. \quad (10.8)$$

Poiché i vettori

$$E_k = \frac{\partial S(q, t)}{\partial q_k}, \quad k = 1, \dots, n,$$

costituiscono una base nello spazio tangente alla varietà delle configurazioni  $\mathcal{C}_t$  in  $S(q(t), t)$ , la (10.8) implica  $\eta = 0$ . Per una forma quadratica definita positiva, il determinante della matrice di coefficienti è positivo e pertanto la matrice di coefficienti  $a_{l,k}(q, t)$  ha determinante non nullo e la Lagrangiana è regolare.  $\square$

Considereremo nel seguito esclusivamente sistemi Lagrangiani dotati di Lagrangiana regolare. Un'importante conseguenza della regolarità della Lagrangiana è il seguente

**Teorema 10.3:** *Si supponga la Lagrangiana  $L$  regolare. Allora il sistema delle equazioni di Lagrange è riducibile a forma normale e pertanto per ogni scelta di  $q^{(0)} \in W$ ,  $\eta^{(0)} \in \mathbb{R}^n$  e  $t_0 \in I$ , il problema ai valori iniziali*

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \eta_k} \right) (\dot{q}(t), q(t), t) - \frac{\partial L}{\partial q_k} (\dot{q}(t), q(t), t) &= 0, \\ q_k(t_0) = q_k^{(0)}, \quad \dot{q}_k(t_0) = \eta_k^{(0)}, \quad k = 1, \dots, n, \end{aligned} \quad (10.9)$$

ammette una ed una sola soluzione, almeno per  $|t - t_0|$  sufficientemente piccolo.

*Osservazione:* In ipotesi di Lipshitzianità globale, il problema (10.9) ammette soluzioni globali. Dato però il carattere locale di tutte le considerazioni che seguono, non analizzeremo tale aspetto.

Dim. È sufficiente mostrare che il sistema (10.1) è riducibile a forma normale, cioè risolvibile rispetto alle derivate di ordine massimo. Si ha:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\eta}_k} \right) = \sum_{l=1}^n \ddot{q}_l \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{\eta}_l \partial \dot{\eta}_k} + \sum_{l=1}^n \dot{q}_l \frac{\partial^2 L}{\partial q_l \partial \dot{\eta}_k} + \frac{\partial^2 L}{\partial t \partial \dot{\eta}_k}.$$

Pertanto le (10.1) possono riscriversi come

$$\sum_{l=1}^n \mathcal{H}_{k,l}(\dot{q}, q, t) \ddot{q}_l = \mathcal{R}_k(\dot{q}, q, t), \quad (10.10)$$

con

$$\mathcal{R}_k = \frac{\partial L}{\partial q_k} - \sum_{l=1}^n \dot{q}_l \frac{\partial^2 L}{\partial q_l \partial \dot{\eta}_k} - \frac{\partial^2 L}{\partial t \partial \dot{\eta}_k}.$$

L'espressione di  $\mathcal{R}$  mostra che essa dipende solo da  $\dot{q}$ ,  $q$ ,  $t$ . Quindi, fissati  $t$ ,  $q(t)$  e  $\dot{q}(t)$ , le equazioni (10.10) possono interpretarsi come un sistema di  $n$  equazioni lineari nelle  $n$  incognite  $\ddot{q}_l(t)$ ,  $l = 1, \dots, n$ , con matrice dei coefficienti  $\mathcal{H}_{l,k}$  che dipende solo da  $\dot{q}$ ,  $q$ ,  $t$  e con termine noto  $\mathcal{R}_k$ . La condizione di regolarità assicura che la matrice dei coefficienti è non singolare. Detta  $\mathcal{H}^{-1}$  la sua inversa, si ha

$$\ddot{q}_l = \sum_{k=1}^n \mathcal{H}_{l,k}^{-1}(\dot{q}, q, t) \mathcal{R}_k(\dot{q}, q, t) := \phi_l(\dot{q}, q, t). \quad (10.11)$$

Il sistema (10.11) è equivalente al sistema (10.1), ma è in forma normale. Si tratta di un sistema del secondo ordine cui si applica la teoria delle equazioni differenziali discussa nel Capitolo 2. Questo conclude la dimostrazione del teorema.  $\square$

*Osservazione:* Il sistema delle equazioni di Lagrange per un sistema di punti materiali soggetti a vincoli olonomi ideali e a forze attive non conservative, ottenuto nel Capitolo 9, e cioè

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{\eta}_k} \right) (\dot{q}, q, t) - \frac{\partial T}{\partial q_k} (\dot{q}, q, t) = Q_k(q, \dot{q}, t), \quad (10.12)$$

è in forma diversa dal sistema (10.1). L'argomento precedente può però essere esteso immediatamente al sistema (10.12) e pertanto il Teorema vale anche in questo caso.



## 10.2 Leggi di conservazione per un sistema Lagrangiano.

Come nel caso di un generico sistema di equazioni differenziali, diamo la seguente

**Definizione 10.2:** Una funzione reale  $g(\eta, q, t)$  differenziabile in  $A$  è un *integrale primo* per il sistema Lagrangiano di Lagrangiana  $L$  se per ogni soluzione  $t \rightarrow q(t)$  del sistema delle equazioni di Lagrange (10.1) la funzione numerica

$$h(t) = g(\dot{q}(t), q(t), t)$$

è costante in  $t$ .

In termini fisici, in presenza di un integrale primo, diremo che la grandezza fisica corrispondente è conservata e parleremo di legge di conservazione per la grandezza  $g$ . L'esempio più importante di grandezza conservata, per un sistema Lagrangiano è l'analogo dell'energia.

**Definizione 10.3:** Si dice *energia generalizzata* la quantità

$$E(\eta, q, t) = \sum_{k=1}^n \eta_k \frac{\partial L}{\partial \eta_k}(\eta, q, t) - L(\eta, q, t). \quad (10.13)$$

La giustificazione del nome è dovuta al fatto che, se si considera un sistema meccanico ad  $n$  gradi di libertà *con vincoli indipendenti dal tempo*, risulta pari alla somma dell'energia cinetica e dell'energia potenziale del sistema:

$$E(\eta, q, t) = T(\eta, q) + U(q). \quad (10.14)$$

Infatti, dall'espressione dell'energia cinetica ottenuta nel Capitolo 9 si deduce che, se il sistema ha vincoli indipendenti dal tempo, l'energia cinetica  $T$  si riduce alla sola parte quadratica  $T_2$ :

$$T(\eta, q) = T_2(\eta, q) = \frac{1}{2} \sum_{k,l=1}^n a_{l,k}(q) \eta_l \eta_k$$

ed

$$L(\eta, q) = T_2(\eta, q) - U(q) = \frac{1}{2} \sum_{k,l=1}^n a_{l,k}(q) \eta_l \eta_k - U(q).$$

L'energia cinetica è una funzione omogenea di grado 2 nelle variabili  $\eta$  e pertanto, per il teorema di Eulero sulle funzioni omogenee,

$$\sum_{k=1}^n \eta_k \frac{\partial T_2}{\partial \eta_k} = 2T_2.$$

Tale relazione può ottenersi anche con un calcolo diretto, che si lascia per esercizio. Ne consegue che

$$E(\eta, q) = 2T(\eta, q) - L(\eta, q) = T(\eta, q) + U(q).$$

In generale, se i vincoli dipendono dal tempo oppure se il sistema non è meccanico,  $E(\eta, q, t)$  non ha necessariamente l'interpretazione di energia. Tuttavia, se la Lagrangiana non dipende esplicitamente dal tempo,  $E$  si conserva. Si ha infatti:

**Proposizione 10.4:** *Sia  $t \rightarrow q(t)$  una soluzione del sistema (10.1). Risulta allora:*

$$\frac{d}{dt}E(\dot{q}(t), q(t), t) = -\frac{\partial L}{\partial t}(\dot{q}(t), q(t), t). \quad (10.15)$$

Dim. Si ha

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}E(\dot{q}(t), q(t), t) &= \frac{d}{dt} \left( \sum_{k=1}^n \dot{q}_k(t) \frac{\partial L}{\partial \eta_k}(\dot{q}(t), q(t), t) \right) - \frac{d}{dt}L(\dot{q}(t), q(t), t) \\ &= \sum_{k=1}^n \ddot{q}_k(t) \frac{\partial L}{\partial \eta_k}(\dot{q}(t), q(t), t) + \sum_{k=1}^n \dot{q}_k(t) \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \eta_k}(\dot{q}(t), q(t), t) \right) \\ &\quad - \sum_{k=1}^n \dot{q}_k \frac{\partial L}{\partial q_k}(\dot{q}(t), q(t), t) - \sum_{k=1}^n \ddot{q}_k \frac{\partial L}{\partial \eta_k}(\dot{q}(t), q(t), t) - \frac{\partial L}{\partial t}(\dot{q}(t), q(t), t) \\ &= \sum_{k=1}^n \dot{q}_k(t) \left[ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \eta_k}(\dot{q}(t), q(t), t) \right) - \frac{\partial L}{\partial q_k}(\dot{q}(t), q(t), t) \right] - \frac{\partial L}{\partial t}(\dot{q}(t), q(t), t) \end{aligned}$$

usando le equazioni di Lagrange

$$= -\frac{\partial L}{\partial t}(\dot{q}(t), q(t), t). \quad \square$$

In conseguenza della Proposizione 10.4, si ha

**Teorema 10.5 (Conservazione dell'energia generalizzata):** *Se la Lagrangiana  $L$  non dipende dal tempo, allora l'energia generalizzata, definita dalla (10.13) è conservata durante i moti che soddisfano le equazioni di Lagrange.*

Altre leggi di conservazione per il sistema Lagrangiano possono determinarsi immediatamente quando la Lagrangiana non dipende da alcune delle coordinate generalizzate. Si supponga, per fissare le idee che  $L$  non dipenda dalle prime  $j \leq n$  coordinate:

$$\frac{\partial L}{\partial q_l}(\eta, q, t) = 0, \quad l = 1, \dots, j, \quad \forall(\eta, q, t) \in A. \quad (10.16)$$

Le quantità

$$p_l(\eta, q, t) = \frac{\partial L}{\partial \eta_l}(\eta, q, t), \quad l = 1, \dots, j \quad (10.17)$$

sono allora conservate in quanto le prime  $j$  equazioni di Lagrange divengono

$$\frac{d}{dt} p_l(\dot{q}(t), q(t), t) = 0.$$

Le variabili per le quali la (10.16) si verificano sono dette *cicliche o ignorabili* e le corrispondenti quantità definite dalle (10.17), dette *momenti cinetici o impulsi generalizzati* sono conservate.

La presenza di  $j$  variabili cicliche permette di ridurre il sistema di  $n$  equazioni di Lagrange ad un sistema di  $n - j$  equazioni del secondo ordine nel modo che segue. Usiamo la notazione  $q = (\bar{q}, \tilde{q})$ , con  $\bar{q}$  l'insieme delle prime  $j$  coordinate e con  $\tilde{q}$  l'insieme delle rimanenti  $n - j$ . In modo analogo scriviamo  $\eta = (\bar{\eta}, \tilde{\eta})$ . Detti  $p_l^{(0)}$  i valori dei momenti cinetici determinati dai dati iniziali per  $l = 1, \dots, j$ , le relazioni

$$p_l(\bar{\eta}, \tilde{\eta}, \tilde{q}, t) = p_l^{(0)}, \quad l = 1, \dots, j$$

possono essere risolte rispetto alle  $\bar{\eta}$ , grazie alla regolarità della Lagrangiana, fornendo, per  $k = 1, \dots, j$

$$\bar{\eta}_k = \nu_k(\tilde{q}, \tilde{\eta}, p^{(0)}, t). \quad (10.18)$$

Le equazioni di Lagrange per le variabili  $\tilde{q}$  si scrivono allora:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\tilde{\eta}}_k}(\nu_k(\tilde{q}, \dot{\tilde{q}}, p^{(0)}, t), \dot{\tilde{q}}, \tilde{q}, t) \right) - \frac{\partial L}{\partial \tilde{q}_k}(\nu_k(\tilde{q}, \dot{\tilde{q}}, p^{(0)}, t), \dot{\tilde{q}}, \tilde{q}, t) = 0, \quad k = j+1, \dots, n.$$

Si tratta di un sistema di equazioni differenziali nelle sole variabili  $\tilde{q}$ , che può essere risolto indipendentemente dalle variabili  $\bar{q}$ . Introdotta la funzione

$$R(\tilde{\eta}, \tilde{q}, t) = L(\nu(\tilde{q}, \tilde{\eta}, p^{(0)}, t), \tilde{\eta}, \tilde{q}, t), \quad (10.19)$$

esse si riscrivono come

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial R}{\partial \dot{\tilde{\eta}}_k}(\dot{\tilde{q}}(t), \tilde{q}(t), t) \right) - \frac{\partial R}{\partial \tilde{q}_k}(\dot{\tilde{q}}(t), \tilde{q}(t), t) = 0, \quad k = j+1, \dots, n, \quad (10.20)$$

che è un sistema Lagrangiano ad  $n - j$  gradi di libertà con Lagrangiana  $R$  definita dalla (10.19). Una volta determinata la soluzione  $t \rightarrow \tilde{q}(t)$ , le (10.18) permettono di determinare le rimanenti variabili. Infatti esse forniscono

$$\dot{\tilde{q}}_l = \nu_l(\tilde{q}(t), \dot{\tilde{q}}(t), p^{(0)}, t) := g_l(t),$$

e le  $g_l(t)$  sono delle funzioni note del tempo quando è nota la soluzione  $t \rightarrow \tilde{q}(t)$ . Quindi le  $\tilde{q}_l$  si determinano mediante un'integrazione temporale (*quadratura*).

### 10.3 Teorema di Noether.

Una generalizzazione delle precedenti considerazioni sulle leggi di conservazione in presenza di coordinate cicliche è fornito dal Teorema di Noether, che permette di ricondurre la ricerca di integrali primi per le equazioni di Lagrange alla conoscenza di proprietà di simmetria della Lagrangiana. Per enunciare il teorema occorre premettere alcune definizioni.

**Definizione 10.4:** Una famiglia  $\{S^\lambda, \lambda \in \mathbb{R}\}$ , di trasformazioni di  $W \subset \mathbb{R}^n$ , parametrizzate da un parametro  $\lambda$ ,

$$S^\lambda : W \rightarrow W,$$

si dice *gruppo ad un parametro di trasformazioni* se

- 1) L'applicazione  $(q, \lambda) \rightarrow S^\lambda(q)$  è differenziabile in  $\lambda$  e  $q$ ;
- 2) Per ogni  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ , risulta

$$S^{\lambda_1} \circ S^{\lambda_2} = S^{\lambda_1 + \lambda_2};$$

3)

$$S^0 = \mathbf{I} \text{ (trasformazione identica) ;}$$

4) Per ogni  $\lambda \in \mathbb{R}$ ,  $S^\lambda$  è invertibile e

$$(S^\lambda)^{-1} = S^{-\lambda}.$$

Sia  $t \rightarrow q(t)$  una traiettoria. Fissato  $\lambda$  si denoti

$$q^\lambda(t) = S^\lambda(q(t)).$$

Differenziando  $q^\lambda$  si ottiene

$$\dot{q}_h^\lambda = \sum_{k=1}^n \frac{\partial S_h^\lambda}{\partial q_k} \dot{q}_k := \sum_{k=1}^n T_{hk}^\lambda(q) \dot{q}_k, \quad \dot{q}^\lambda := T^\lambda(q) \dot{q}.$$

Con abuso di notazione, per ogni coppia  $(\eta, q) \in \mathbb{R}^n \times W$ , denotiamo

$$S^\lambda(\eta, q) = (T^\lambda(q)\eta, S^\lambda(q)).$$

**Definizione 10.5:** Un gruppo di trasformazioni  $S^\lambda$  si dice *una simmetria* della Lagrangiana se per ogni  $\lambda \in \mathbb{R}$  risulta

$$L \circ S^\lambda = L \tag{10.21}$$

o, piú esplicitamente

$$L(T^\lambda(q)\eta, S^\lambda(q), t) = L(\eta, q, t) \quad \forall (\eta, q, t) \in \mathbb{R}^n \times W \times \mathbb{R}.$$

**Proposizione 10.6:** *Se  $S^\lambda$  è una simmetria della Lagrangiana e  $t \rightarrow q(t)$  è una soluzione delle equazioni di Lagrange, tale è anche  $t \rightarrow q^\lambda(t)$  per ogni  $\lambda \in \mathbb{R}$ .*

Dim. Infatti, poiché,

$$L(T^\lambda[q(t)]\dot{q}^\lambda(t), S^\lambda[q(t)], t) = L(\dot{q}(t), q(t), t),$$

$$\mathcal{A}[q^\lambda] = \int_0^T dt L(T^\lambda[q(t)]\dot{q}^\lambda(t), S^\lambda[q(t)], t) = \int_0^T dt L(\dot{q}(t), q(t), t) = \mathcal{A}[q].$$

Pertanto, se  $q$  è un punto stazionario per  $\mathcal{A}$ , anche  $q^\lambda$  è un punto stazionario e quindi risolve le equazioni di Eulero-Lagrange, che coincidono con le equazioni di Lagrange. Per ogni moto  $t \rightarrow q(t)$ , risulta quindi

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \eta_k} \right) (\dot{q}^\lambda(t), q^\lambda(t), t) = \frac{\partial L}{\partial q_k} (\dot{q}^\lambda(t), q^\lambda(t), t), \quad (10.22)$$

per ogni  $t$ .  $\square$

**Teorema 10.7 (di Noether):** *Se il gruppo ad un parametro  $S^\lambda$  è una simmetria per la Lagrangiana, allora la quantità*

$$G(\eta, q, t) = \sum_{k=1}^n \frac{\partial L}{\partial \eta_k}(\eta, q, t) \sigma_k(q) \quad (10.23)$$

con

$$\sigma_k(q) = \left. \frac{d}{d\lambda} S_k^\lambda(q) \right|_{\lambda=0}$$

è un integrale primo per le equazioni di Lagrange.

Dim. Differenziando rispetto a  $\lambda$  la relazione

$$L(\dot{q}^\lambda(t), q^\lambda(t), t) = L(\dot{q}(t), q(t), t),$$

che esprime l'invarianza della Lagrangiana, si ottiene

$$0 = \frac{d}{d\lambda} L(\dot{q}^\lambda(t), q^\lambda(t), t) =$$

$$\sum_{k=1}^n \frac{\partial L}{\partial q_k} (\dot{q}^\lambda(t), q^\lambda(t), t) \frac{dq_k^\lambda(t)}{d\lambda} + \sum_{k=1}^n \frac{\partial L}{\partial \eta_k} (\dot{q}^\lambda(t), q^\lambda(t), t) \frac{d\dot{q}_k^\lambda(t)}{d\lambda}.$$

Per  $\lambda = 0$  si ha quindi

$$\sum_{k=1}^n \frac{\partial L}{\partial q_k}(\dot{q}(t), q(t), t) \sigma_k(q(t)) + \sum_{k=1}^n \frac{\partial L}{\partial \eta_k}(\dot{q}(t), q(t), t) \frac{d}{dt} \sigma_k(q(t)) = 0, \quad (10.24)$$

in quanto, ovviamente

$$\frac{\partial}{\partial \lambda} \frac{\partial}{\partial t} S_k^\lambda(q(t)) \Big|_{\lambda=0} = \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial}{\partial \lambda} S_k^\lambda(q(t)) \Big|_{\lambda=0}.$$

Sostituendo al primo termine di (10.24) quanto si ottiene dalle equazioni di Lagrange per  $t \rightarrow q(t)$ , si ha

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{k=1}^n \sigma_k(q(t)) \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \eta_k} \right) (\dot{q}(t), q(t), t) + \sum_{k=1}^n \frac{\partial L}{\partial \eta_k}(\dot{q}(t), q(t), t) \frac{d}{dt} \sigma_k(q(t)) \\ &= \frac{d}{dt} \left[ \sum_{k=1}^n \frac{\partial L}{\partial \eta_k}(\dot{q}(t), q(t), t) \sigma_k(q(t)) \right] \end{aligned}$$

e quindi

$$\frac{d}{dt} G(\dot{q}(t), q(t), t) = 0$$

che prova il Teorema.  $\square$

*Osservazione* : Nella dimostrazione del teorema di Noether non si è usata in alcun modo la proprietà di gruppo. La sola differenziabilità di  $S^\lambda$ , insieme con la condizione  $S^0 = \mathbb{I}$  e la (10.21) sarebbero sufficienti per la dimostrazione qui presentata. La formulazione qui data del Teorema di Noether è quella tradizionale (cfr. Arnold).

Diamo un esempio di applicazione del Teorema di Noether, che ci fornisce peraltro un risultato già ottenuto nel Capitolo 6.

Consideriamo il moto di un punto materiale libero, sotto l'azione di un potenziale dipendente solo dalla distanza dall'origine. Si tratta cioè di un punto in un campo di forze centrali. La Lagrangiana è

$$L(v, x) = \frac{1}{2} m v^2 - V(|x|).$$

Si consideri il gruppo ad un parametro  $R_\varphi(x)$  definito da

$$R_\varphi(x) = A(\varphi)x, \quad A(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Esso rappresenta le rotazioni intorno all'asse  $x_3$ . La Lagrangiana è invariante rispetto a tali rotazioni. È immediato controllare che

$$\left. \frac{d}{d\varphi} R_\varphi(x) \right|_{\varphi=0} = (-x_2, x_1, 0).$$

Pertanto

$$G(x, v) = -m(v_1 x_2 - v_2 x_1) = m(x_1 v_2 - x_2 v_1)$$

è un integrale primo per il sistema Lagrangiano corrispondente ad  $L$ . Ma  $G$  coincide con la componente  $K_3$  del momento angolare. Ne concludiamo che l'invarianza della Lagrangiana rispetto a rotazioni intorno all'asse  $x_3$  implica la conservazione della componente del momento angolare sull'asse  $x_3$ . Poiché la scelta dell'asse  $x_3$  nel caso esaminato è arbitraria, si ha la conservazione del vettore momento angolare, risultato a cui eravamo già pervenuti nel Capitolo 6. Più in generale, sia  $L$  la Lagrangiana di un sistema di  $N$  punti materiali, vincolati o no. Se essa è invariante per rotazioni intorno ad un asse per l'origine di direzione  $e$ , allora il momento angolare totale nella direzione  $e$

$$K \cdot e = e \cdot \sum_{i=1}^N m_i x_i \wedge v_i$$

è conservato.

#### 10.4 Principio di azione stazionaria di Maupertuis.

Nella formulazione del principio di azione stazionaria di Hamilton le traiettorie rispetto alle quali si cerca l'estremo sono caratterizzate dal fatto di avere estremi fissati e di impiegare un tempo fissato  $T$  per percorrere le traiettorie. D'altra parte, quando la Lagrangiana non dipende esplicitamente dal tempo, l'energia generalizzata è conservata da tutte le traiettorie che soddisfano le condizioni di estremo, cioè le equazioni di Eulero-Lagrange. È evidente però che le traiettorie variate in generale non soddisfano la conservazione dell'energia in quanto devono percorrere alcuni tratti a velocità maggiore per impiegare lo stesso tempo a percorrere una traiettoria più lunga. È pertanto naturale chiedersi se sia possibile formulare un principio variazionale nel quale le traiettorie variate soddisfino anch'esse la conservazione dell'energia. Per quanto detto prima, occorrerà però rinunciare a fissare il tempo  $T$  impiegato a percorrere le traiettorie. Il principio di azione stazionaria di Maupertuis è basato su questa idea.

Per formularlo supponiamo che la Lagrangiana non dipenda esplicitamente dal tempo ed introduciamo, in luogo dello spazio delle traiettorie usato nei capitoli precedenti, lo spazio

$$\mathcal{M}_{x^{(1)}, x^{(2)}, e} = \{q \mid q : [t_1, t_2] \rightarrow \Omega \subset \mathbb{R}^n\}$$

costituito dalle funzioni  $t \rightarrow q(t)$  tali che:

- 1)  $t \rightarrow q(t)$  è una curva regolare in  $(t_1, t_2)$ ;
- 2)

$$q(t_1) = x^{(1)}, \quad q(t_2) = x^{(2)}.$$

- 3) Per ogni  $t \in [t_1, t_2]$ ,

$$E(\dot{q}(t), q(t)) = e.$$

Lo spazio  $\mathcal{M}_{x^{(1)}, x^{(2)}, e}$  si dice *spazio delle traiettorie isoenergetiche*.

Consideriamo poi il funzionale *azione* definito su tale spazio ponendo

$$\mathcal{A}[q] = \int_{t_1}^{t_2} dt L(\dot{q}(t), q(t)).$$

**Definizione 10.6:** Si dice *famiglia di traiettorie variate isoenergetiche* un insieme di curve

$$\{q_\varepsilon \mid \varepsilon \in (-1, 1)\},$$

costruito come segue: si fissino due funzioni differenziabili  $\varepsilon \rightarrow t_1(\varepsilon)$  e  $\varepsilon \rightarrow t_2(\varepsilon)$ ,  $\varepsilon \in (-1, 1)$  ed una funzione differenziabile  $(\varepsilon, t) \rightarrow u(\varepsilon, t)$ ,

$$u : \bigcup_{\varepsilon \in [-1, 1]} \{\varepsilon\} \times [t_1(\varepsilon), t_2(\varepsilon)] \rightarrow u(\varepsilon, t) \in \mathbb{R}^n,$$

tale che

- 1) 
$$u(0, t) = q(t), \quad \forall t \in [t_1(0), t_2(0)] = [t_1, t_2]; \quad (10.25)$$

- 2) 
$$u(\varepsilon, t_1(\varepsilon)) = x^{(1)}, \quad u(\varepsilon, t_2(\varepsilon)) = x^{(2)}, \quad \forall \varepsilon \in (-1, 1). \quad (10.26)$$

- 3) 
$$E\left(\frac{\partial u}{\partial t}(\varepsilon, t), u(\varepsilon, t)\right) = e \quad \forall (\varepsilon, t) \in \bigcup_{\varepsilon \in [-1, 1]} \{\varepsilon\} \times [t_1(\varepsilon), t_2(\varepsilon)]. \quad (10.27)$$

La curva  $q_\varepsilon$  è definita come

$$[t_1(\varepsilon), t_2(\varepsilon)] \ni t \rightarrow q_\varepsilon(t) = u(\varepsilon, t).$$

In corrispondenza di ogni scelta delle funzioni  $\varepsilon \rightarrow t_1(\varepsilon)$ ,  $\varepsilon \rightarrow t_2(\varepsilon)$  e  $(\varepsilon, t) \rightarrow u(\varepsilon, t)$  soddisfacenti la (10.25), (10.26) ed (10.27), si ha una famiglia di traiettorie variate isoenergetiche.

Fissiamo ora una traiettoria  $t \rightarrow q(t)$  soddisfacente le equazioni di Eulero-Lagrange e calcoliamo, come si è fatto in precedenza, la derivata di  $\mathcal{A}[q_\varepsilon]$  per



$\varepsilon = 0$ . Usando le notazioni  $z'$  e  $\dot{z}$  per denotare la derivata rispetto ad  $\varepsilon$  e a  $t$  rispettivamente, abbiamo

$$\begin{aligned}
\frac{d}{d\varepsilon}\mathcal{A}[q_\varepsilon] &= \frac{d}{d\varepsilon} \int_{t_1(\varepsilon)}^{t_2(\varepsilon)} dt L(\dot{q}_\varepsilon(t), q_\varepsilon(t)) = \\
&L(\dot{q}_\varepsilon(t_2(\varepsilon)), q_\varepsilon(t_2(\varepsilon)))t'_2(\varepsilon) - L(\dot{q}_\varepsilon(t_1(\varepsilon)), q_\varepsilon(t_1(\varepsilon)))t'_1(\varepsilon) \\
&+ \int_{t_1(\varepsilon)}^{t_2(\varepsilon)} dt \left[ \frac{\partial L}{\partial q}(\dot{q}_\varepsilon(t), q_\varepsilon(t)) \cdot u'(\varepsilon, t) + \frac{\partial L}{\partial \eta}(\dot{q}_\varepsilon(t), q_\varepsilon(t)) \cdot \frac{\partial^2 u(\varepsilon, t)}{\partial \varepsilon \partial t} \right] = \\
&L(\dot{q}_\varepsilon(t_2(\varepsilon)), q_\varepsilon(t_2(\varepsilon)))t'_2(\varepsilon) - L(\dot{q}_\varepsilon(t_1(\varepsilon)), q_\varepsilon(t_1(\varepsilon)))t'_1(\varepsilon) \\
&+ \left( \frac{\partial L}{\partial \eta}(\dot{q}_\varepsilon(t), q_\varepsilon(t)) \cdot u'(\varepsilon, t) \right) \Big|_{t_1(\varepsilon)}^{t_2(\varepsilon)} \\
&+ \int_{t_1(\varepsilon)}^{t_2(\varepsilon)} dt \left[ \frac{\partial L}{\partial q}(\dot{q}_\varepsilon(t), q_\varepsilon(t)) - \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial L}{\partial \eta}(\dot{q}_\varepsilon(t), q_\varepsilon(t)) \right) \right] \cdot u'(\varepsilon, t)
\end{aligned}$$

Differenziando le (10.26) rispetto ad  $\varepsilon$  si ottiene

$$u'(\varepsilon, t_i(\varepsilon)) + \dot{u}(\varepsilon, t_i(\varepsilon))t'_i(\varepsilon) = 0.$$

Utilizzando quest'ultima relazione, per  $\varepsilon = 0$  si ottiene allora

$$\frac{d}{d\varepsilon}\mathcal{A}[q_\varepsilon] \Big|_{\varepsilon=0} = -E(\dot{q}(t_2), q(t_2))\tau_2 + E(\dot{q}(t_1), q(t_1))\tau_1, \quad (10.28)$$

ove  $\tau_i = t'_i(0)$ . Per ottenere la (10.28) si è usata la definizione di energia generalizzata ed il fatto che la traiettoria  $t \rightarrow q(t)$  soddisfa le equazioni di Eulero-Lagrange. Ricordando poi la (10.27), il secondo membro della (10.28) può essere scritto

$$\begin{aligned}
E(\dot{q}(t_2), q(t_2))\tau_2 - E(\dot{q}(t_1), q(t_1))\tau_1 &= e \frac{d}{d\varepsilon} \int_{t_1(\varepsilon)}^{t_2(\varepsilon)} dt \Big|_{\varepsilon=0} \\
&= \int_{t_1(\varepsilon)}^{t_2(\varepsilon)} dt E(\dot{q}_\varepsilon(t), q_\varepsilon(t)) \Big|_{\varepsilon=0}
\end{aligned}$$

In conclusione, risulta

$$\frac{d}{d\varepsilon} \int_{t_1(\varepsilon)}^{t_2(\varepsilon)} dt [L(\dot{q}_\varepsilon(t), q_\varepsilon(t)) + E(\dot{q}_\varepsilon(t), q_\varepsilon(t))] \Big|_{\varepsilon=0} = 0. \quad (10.29)$$

Ricordiamo che, per definizione di energia generalizzata, risulta

$$L(\dot{q}, q) + E(\dot{q}, q) = \dot{q}(t) \cdot \frac{\partial L}{\partial \eta}(\dot{q}, q).$$

Pertanto, definita l'azione ridotta come

$$\mathcal{S}[q] = \int_{t_1}^{t_2} dt \dot{q}(t) \cdot \frac{\partial L}{\partial \eta}(\dot{q}(t), q(t)), \quad (10.30)$$

possiamo concludere che vale il seguente

**Teorema 10.8:** *Se la Lagrangiana  $L$  non dipende esplicitamente dal tempo, le soluzioni delle equazioni di Eulero-Lagrange rendono stazionaria l'azione ridotta, rispetto a tutte le traiettorie variate isoenergetiche.*

Tale affermazione va sotto il nome di *principio di azione stazionaria di Maupertuis*.

Consideriamo ora il caso di un sistema a vincoli olonomi ed indipendenti dal tempo: si ha allora  $L = T_2 - U$ , con

$$T_2(\eta, q) = \frac{1}{2} \sum_{h,k=1}^n a_{h,k}(q) \eta_h \eta_k.$$

Pertanto

$$\dot{q}(t) \cdot \frac{\partial L}{\partial \eta}(\dot{q}(t), q(t)) = 2T = 2(E - U(q)).$$

e quindi l'azione ridotta  $\mathcal{S}$  diviene

$$\mathcal{S}[q] = 2 \int_{t_1}^{t_2} dt T(\dot{q}(t), q(t)). \quad (10.31)$$

In questo caso è possibile dare una interessante interpretazione geometrica del principio di Maupertuis. Sia  $[0, 1] \ni \lambda \rightarrow \gamma(\lambda)$  una curva regolare di  $\mathbb{R}^n$ . Poniamo

$$s(\gamma) = \int_0^1 d\lambda \sqrt{\sum_{h,k=1}^n a_{h,k}(q) \gamma'_h(\lambda) \gamma'_k(\lambda)}.$$

La precedente definizione differisce da quella usuale di lunghezza di una curva in quanto la distanza tra due punti molto vicini,  $q$  e  $q'$ , anziché essere definita come al solito come  $\sqrt{\sum_{h=1}^n |q_h - q'_h|^2}$ , è definita, tramite la matrice  $a_{h,k}$ , come

$$d(q, q') = \sqrt{\sum_{h,k=1}^n a_{h,k}(q) (q_h - q'_h)(q_k - q'_k)}.$$

I punti  $q$  e  $q'$  vanno scelti molto vicini in quanto la matrice  $a_{h,k}$  dipende da  $q$ . Diremo  $s(\gamma)$  *lunghezza (generalizzata)* della curva  $\gamma$ .

Consideriamo una curva orientata  $\gamma : \lambda \rightarrow \tilde{q}(\lambda)$ , un punto arbitrario  $P_0$  su di essa e introduciamo l'*ascissa curvilinea (generalizzata)* del punto  $P \in \gamma$  come la lunghezza generalizzata dell'arco di curva che congiunge  $P_0$  con  $P$ , con segno positivo se  $P$  segue  $P_0$  nell'orientamento di  $\gamma$ , negativo nel caso opposto. Per ogni moto  $t \rightarrow q(t)$ , sia  $s \rightarrow \tilde{q}(s)$  la rappresentazione della curva corrispondente in funzione dell'ascissa curvilinea. Denotiamo con  $s(t)$  l'ascissa curvilinea del generico punto  $q(t)$  in modo tale che  $q(t) = \tilde{q}(s(t))$ . Con questa definizione, risulta

$$T = \frac{1}{2}\dot{s}^2.$$

Effettuiamo il cambio di variabili  $t \rightarrow s$  nell'integrale in (10.31). La relazione  $E = T + U$  implica

$$\dot{s}^2 = 2(E - U).$$

Pertanto

$$\frac{dt}{ds} = \frac{1}{\sqrt{2(E - U)}}.$$

Dette  $s_1$  ed  $s_2$  le ascisse curvilinee dei punti  $x^{(1)}$  ed  $x^{(2)}$ , si ottiene quindi la seguente espressione per l'azione ridotta:

$$\mathcal{S}[q] = \int_{s_1}^{s_2} ds \sqrt{2(E - U(\tilde{q}(s)))}. \quad (10.32)$$

Si noti che tale espressione dipende soltanto dalla traiettoria seguita dal moto, intesa come luogo geometrico, mentre è indipendente dalla legge oraria. Pertanto il principio di Maupertuis è esclusivamente una caratterizzazione della traiettoria. La legge oraria del moto corrispondente deve essere determinata alla fine mediante l'integrale dell'energia, con i metodi visti per i sistemi unidimensionali.

Un caso particolare di grande importanza si ha quando sul sistema vincolato non agiscono forze esterne. In questo caso  $U = 0$  e l'azione ridotta è proporzionale alla lunghezza generalizzata della traiettoria:

$$\mathcal{S}[q] = \sqrt{2E}s[q].$$

In conclusione, abbiamo provato il seguente

**Teorema 10.9:** *Se un sistema a vincoli olonomi indipendenti dal tempo non è soggetto a forze attive, la sua traiettoria tra due punti prefissati è quella che rende stazionaria la lunghezza (generalizzata) della curva con tali estremi.*

Ricordando che le  $q$  rappresentano le coordinate locali sulla varietà delle configurazioni,  $\mathcal{C}$  ed interpretando la matrice  $a_{h,k}$  come i coefficienti di una metrica Riemanniana su  $\mathcal{C}$ , si ha il seguente

**Corollario 10.10:** *Le traiettorie di un sistema a vincoli olonomi ed indipendenti dal tempo, non soggetto a forze attive sono le geodetiche della metrica Riemanniana determinata dai coefficienti  $a_{h,k}$ , cioè, le curve sulla varietà di minima (o massima) lunghezza  $s$ . La legge oraria con cui esse vengono percorse, per la conservazione dell'energia è tale che  $\dot{s} = \sqrt{2E}$ , e quindi la velocità ha modulo uniforme.*

Ricordiamo che le geodetiche rappresentano la generalizzazione alle varietà Riemanniane della nozione di retta. L'enunciato precedente può allora essere visto come una estensione ai sistemi vincolati dell'affermazione che un punto libero ed isolato si muove di moto rettilineo uniforme rispetto ai sistemi di riferimento inerziali. Basta infatti sostituire al punto libero ed isolato il sistema vincolato ed isolato ed al moto rettilineo uniforme il moto geodetico uniforme.

Si consideri ad esempio un punto vincolato a muoversi su una sfera e non soggetto a forze esterne. Le considerazioni precedenti mostrano allora che il suo moto avviene necessariamente lungo cerchi massimi.

## 10.5 Equilibrio e stabilità.

Nel resto di questo capitolo restringiamo la nostra attenzione al *caso meccanico* e per il momento consideriamo un sistema di forze attive non necessariamente conservative. Le equazioni di Lagrange si scrivono quindi in accordo con le (10.12). Supporremo inoltre che i vincoli cui è sottoposto il sistema siano *indipendenti dal tempo*. In questa ipotesi l'energia cinetica  $T$  si riduce alla sola parte quadratica  $T_2$ :

$$T(\eta, q) = T_2(\eta, q) = \frac{1}{2} \sum_{l,k=1}^n a_{l,k}(q) \eta_l \eta_k,$$

con i coefficienti  $a_{l,k}$  non dipendenti dal tempo.

**Definizione 10.7:** Una configurazione  $X^* \in \mathcal{C}$  corrispondente alle coordinate Lagrangiane  $q^*$  si dice *configurazione di equilibrio* per il sistema se

$$q(t_0) = q^*, \quad \dot{q}(t_0) = 0 \implies q(t) = q^* \quad \text{per ogni } t \in \mathbb{R}.$$

In altri termini,  $X^*$  è una posizione di equilibrio se ponendo inizialmente il sistema in  $X^*$ , con atto di moto nullo, il sistema si trova in  $X^*$  ad ogni altro istante.

Nel seguito non distingueremo tra la configurazione di equilibrio  $X^*$  e le sue coordinate Lagrangiane  $q^*$ , e pertanto parleremo di *configurazione di equilibrio*  $q^*$ .

**Proposizione 10.11:** *Una configurazione  $q^*$  è di equilibrio se e solo se*

$$Q_h(q^*, 0, t) = 0, \quad h = 1, \dots, n, \quad \text{per ogni } t \in \mathbb{R}. \quad (10.33)$$

Dim. Ricordiamo che le equazioni di Lagrange per un sistema a vincoli indipendenti dal tempo si scrivono esplicitamente come

$$\sum_{l=1}^n a_{h,l}(q)\ddot{q}_l = Q_h(q, \dot{q}, t) + \frac{1}{2} \sum_{k,l=1}^n \dot{q}_k \dot{q}_l \frac{\partial a_{k,l}}{\partial q_h}(q). \quad (10.34)$$

Se  $q^*$  è una posizione di equilibrio,  $t \rightarrow q(t) = q^*$  è soluzione delle equazioni di Lagrange. In corrispondenza,  $\dot{q}(t) = 0$  e  $\ddot{q}(t) = 0$ . Sostituendo in (10.34) segue la (10.33).

Viceversa, se è verificata la (10.33), le (10.34) ammettono  $t \rightarrow q(t) = q^*$  come soluzione. Essa soddisfa inoltre le condizioni iniziali

$$q(t_0) = q^*, \quad \dot{q}(t_0) = 0. \quad (10.35)$$

Il problema ai valori iniziali (10.34)-(10.35) ammette un'unica soluzione perché la Lagrangiana è regolare e la soluzione coincide con  $t \rightarrow q(t) = q^*$ . Questo prova che  $q^*$  è una posizione di equilibrio.  $\square$

Se le forze attive sono conservative di potenziale  $U(q)$ , allora la (10.33) diviene

$$\frac{\partial U}{\partial q_h}(q^*) = 0, \quad h = 1, \dots, n. \quad (10.36)$$

In base alla definizione precedente, si ha una configurazione di equilibrio se, posto inizialmente il sistema *esattamente* in una configurazione  $q^*$  con velocità nulla, esso vi permane. La difficoltà pratica di realizzare esattamente le condizioni richieste mostra tuttavia che le configurazioni di equilibrio che si presentano in pratica sono più particolari di quelle previste dalla definizione. Ad esempio, consideriamo il caso di un pendolo semplice, descritto mediante l'angolo  $\theta$  che esso forma con la verticale rivolta verso il basso. L'unica componente Lagrangiana della forza attiva è

$$Q_1(\theta) = -mgl \sin \theta.$$

In conseguenza, sia  $\theta = 0$  che  $\theta = \pi$  sono posizioni di equilibrio, ma la prima è facilmente verificabile in pratica, mentre la seconda è impossibile da realizzarsi perché non si può realmente fissare esattamente  $\theta = \pi$  e  $\dot{\theta} = 0$  e la minima deviazione da tale situazione porta il pendolo ad allontanarsi dalla posizione di

equilibrio. Le posizioni di equilibrio del primo tipo corrispondono all'idea intuitiva di posizione di equilibrio stabile, mentre quelle del secondo tipo esemplificano l'idea intuitiva di posizione di equilibrio instabile. È possibile in effetti dare varie definizioni ragionevoli di stabilità. Seguendo Liapunov, daremo la seguente

**Definizione 10.8:** Siano  $q^*$  le coordinate Lagrangiane di una configurazione di equilibrio. Diremo che essa è *stabile (nel futuro)* se per ogni moto  $t \rightarrow q(t)$ , che risolve le equazioni di Lagrange (10.34) accade quanto segue:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \text{ tale che, se } |q(0) - q^*| < \delta \text{ e } T(0) < \delta, \\ \text{allora } \sup_{t \in [0, +\infty)} |q(t) - q^*| < \varepsilon \text{ e } \sup_{t \in [0, +\infty)} T(t) < \varepsilon$$

In altri termini la stabilità dell'equilibrio corrisponde alla richiesta che il sistema resti *arbitrariamente* vicino alla configurazione di equilibrio e con energia cinetica *arbitrariamente* piccola, se inizialmente si trova *opportunamente* vicino alla posizione di equilibrio con energia cinetica *opportunamente* piccola.

In modo analogo si definisce la stabilità nel passato.

**Definizione 10.9:** Una configurazione di equilibrio di coordinate Lagrangiane  $q^*$  si dice *instabile (nel futuro)* se non è stabile nel futuro, e *instabile (nel passato)* se non è stabile nel passato.

È stato dimostrato nel Capitolo 4 che nell'esempio del pendolo semplice, la posizione  $\theta = 0$  è una posizione di equilibrio stabile sia nel futuro che nel passato, mentre  $\theta = \pi$  è instabile sia nel futuro che nel passato.

Un'altra proprietà rilevante delle configurazioni di equilibrio è il comportamento per grandi tempi, specialmente quando si è in presenza di effetti dissipativi.

**Definizione 10.10:** Una configurazione di equilibrio di coordinate Lagrangiane  $q^*$  si dice *asintotica (nel futuro)* se esiste un aperto

$$I = \{(q, \eta) \mid |q - q^*| < \varepsilon, T(\eta) < \varepsilon\}$$

tale che, se  $(q(0), \dot{q}(0)) \in I$ , allora

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} q(t) = q^*, \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} T(t) = 0.$$

Il più grande aperto  $I$  per cui le precedenti relazioni sono verificate si dice *bacino di attrazione* di  $q^*$ .

Si noti che una configurazione di equilibrio asintotica non è necessariamente stabile, in quanto il sistema potrebbe allontanarsi di una quantità finita per certi dati iniziali, e quindi ritornare alla configurazione  $q^*$ .

Analogamente una configurazione di equilibrio stabile non è necessariamente asintotica.

**Definizione 10.11:** Una configurazione di equilibrio di coordinate Lagrangiane  $q^*$  si dice *asintoticamente stabile (nel futuro)* se è stabile ed asintotica nel futuro.

Lo studio delle proprietà di stabilità richiede, in accordo alle definizioni date, la conoscenza dettagliata del moto su intervalli di tempo arbitrari. Tale problema è solitamente di difficile soluzione. Si pone pertanto l'esigenza di trovare condizioni sufficienti a stabilire tali proprietà senza determinare esplicitamente il moto. Le tecniche per risolvere tale problema sono state introdotte da Liapunov e si applicano al contesto più generale dei sistemi di equazioni differenziali del primo ordine. Discuteremo quindi tale contesto più generale.

### Stabilità per sistemi differenziali.

Sia  $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$  una funzione vettoriale differenziabile due volte e supponiamo le derivate uniformemente limitate per semplicità. Consideriamo il sistema di equazioni differenziali

$$\dot{x} = f(x) \quad (10.37)$$

nell'incognita  $t \rightarrow x(t) \in \mathbb{R}^d$ . L'assenza del tempo nel secondo membro di (10.37) dà luogo ad un cosiddetto *sistema autonomo*. Assumiamo tale condizione per semplicità, sebbene non sia strettamente indispensabile. Per il sistema (10.37) si danno le analoghe delle definizioni precedenti.

**Definizione 10.12:** Un punto  $x^*$  è di *equilibrio* se  $x(0) = x^*$  implica  $x(t) = x^*$  per ogni  $t \neq 0$ . Si dice *stabile* se per ogni  $\varepsilon > 0$  esiste  $\delta > 0$  tale che, se  $|x(0) - x^*| < \delta$  allora  $\sup_{t \in [0, +\infty)} |x(t) - x^*| < \varepsilon$ . Si dice *asintotico* se esiste  $\delta > 0$  tale che, se  $|x(0) - x^*| < \delta$  allora  $\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = x^*$ . Si dice che  $x^*$  è *asintoticamente stabile* se è stabile ed asintotico.

Come nel caso di un sistema meccanico, è immediato controllare che  $x^*$  è un punto di equilibrio se e solo se  $f(x^*) = 0$ .

Assumeremo pertanto che  $x^*$  sia un punto di equilibrio e  $f(x^*) = 0$ .

Il teorema seguente, noto come *Primo teorema di Liapunov* fornisce condizioni sufficienti per la stabilità asintotica. Esso è basato sulle proprietà degli autovalori della matrice

$$Df(x^*) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_d} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_d}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_d}{\partial x_d} \end{pmatrix} (x^*), \quad (10.38)$$

Denotiamo con  $\lambda_i$ , con  $i = 1, \dots, k \leq d$  i suoi autovalori, non necessariamente di molteplicità 1.

**Teorema 10.12:** *Se  $x^*$  è un punto di equilibrio e tutti gli autovalori  $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ , della matrice  $Df(x^*)$  hanno parte reale strettamente negativa, allora  $x^*$  è un punto di equilibrio asintoticamente stabile.*

Dim. Poiché  $f(x^*) = 0$ , ed  $f$  è differenziabile due volte con derivate uniformemente limitate, si ha

$$f(x) = A(x - x^*) + R(x - x^*)$$

con  $A = Df(x^*)$  ed esiste  $K > 0$  tale che

$$|R(x - x^*)| \leq K|x - x^*|^2.$$

Detta  $y = \exp[At](x_0 - x^*)$  la soluzione di

$$\dot{y} = Ay, \quad y(0) = x_0 - x^*, \quad (10.39)$$

la soluzione del sistema (10.37) si scrive

$$x(t) = x^* + \exp[At](x_0 - x^*) + \int_0^t ds \exp[A(t-s)]R(x(s) - x^*) \quad (10.40)$$

La dimostrazione è basata sul seguente

**Lemma 10.13:** *Se esiste  $\mu > 0$  tale che*

$$\operatorname{Re}(\lambda_i) < -\mu, \quad i = 1, \dots, k \quad (10.41)$$

*allora esiste  $C > 0$ , tale che*

$$|\exp[At]x| \leq C e^{-\mu t}|x|$$

Dim. La dimostrazione del Lemma 10.13 segue dal Teorema di Jordan, del quale ricordiamo l'enunciato, omettendone la dimostrazione.

**Teorema 10.14 (di Jordan):** *Siano  $\lambda_1, \dots, \lambda_k$  gli autovalori della matrice  $A$  con molteplicità  $n_1, \dots, n_k$ ,  $n_1 + \dots + n_k = d$ . Esiste una base  $\{h_1, \dots, h_d\}$  di  $\mathbb{C}^d$*



con le seguenti proprietà:

$$\begin{aligned}
Ah_1 &= \lambda_1 h_1, \\
Ah_2 &= \lambda_1 h_2 + h_1, \\
&\dots \\
Ah_{n_1} &= \lambda_1 h_{n_1} + h_{n_1-1}, \\
&\dots \\
Ah_{n_1+1} &= \lambda_2 h_{n_1+1}, \\
Ah_{n_1+2} &= \lambda_2 h_{n_1+2} + h_{n_1+1}, \\
&\dots \\
Ah_{n_1+n_2} &= \lambda_2 h_{n_1+n_2} + h_{n_1+n_2-1}, \\
&\dots \\
&\dots \\
Ah_{n_1+\dots+n_{k-1}+1} &= \lambda_k h_{n_1+\dots+n_{k-1}+1}, \\
Ah_{n_1+\dots+n_{k-1}+2} &= \lambda_k h_{n_1+\dots+n_{k-1}+2} + h_{n_1+\dots+n_{k-1}+1}, \\
&\dots \\
Ah_d &= \lambda_k h_d + h_{d-1}.
\end{aligned} \tag{10.42}$$

Le proprietà precedenti si riassumono nell'affermare che nella base  $h_1, \dots, h_n$  la matrice  $A$  si decompone in blocchi di Jordan.

Si osservi che, fissando per semplicità notazionale l'attenzione sul primo autovalore, risulta:

$$(A - \lambda_1)^\ell h_m = h_{m-\ell}, \quad m \leq n_1, \quad \ell \leq m, \tag{10.43}$$

avendo posto  $h_0 = 0$ .

Infatti, per  $\ell = 1$  la relazione (10.43) coincide con la  $m$ -esima delle (10.42). Per  $\ell > 1$  si ha

$$\begin{aligned}
(A - \lambda_1)^\ell h_m &= (A - \lambda_1)^{\ell-1} (A - \lambda_1) h_m = (A - \lambda_1)^{\ell-1} h_{m-1} \\
&= (A - \lambda_1)^{\ell-2} (A - \lambda_1) h_{m-1} = (A - \lambda_1)^{\ell-2} h_{m-2} \\
&= \dots = h_{m-\ell}.
\end{aligned}$$

La proprietà (10.43) implica che

$$\exp[At] h_m = e^{\lambda_1 t} \left( h_m + t h_{m-1} + \dots + \frac{t^{m-1}}{(m-1)!} h_1 \right) \tag{10.44}$$

Infatti, per definizione di esponenziale si ha, qualunque sia  $\lambda$

$$\exp[At] = e^{\lambda t} \sum_{\ell \geq 0} \frac{t^\ell}{\ell!} (A - \lambda)^\ell.$$

Pertanto, applicando  $\exp[At]$  ad  $h_m$  e scegliendo  $\lambda = \lambda_1$ , si ha

$$\begin{aligned}\exp[At]h_m &= e^{\lambda_1 t} \sum_{\ell \geq 0} \frac{t^\ell}{\ell!} (A - \lambda_1)^\ell h_m \\ &= e^{\lambda_1 t} \sum_{\ell=0}^{m-1} \frac{t^\ell}{\ell!} (A - \lambda_1)^\ell h_m = e^{\lambda_1 t} \sum_{\ell=0}^{m-1} \frac{t^\ell}{\ell!} h_{m-\ell}.\end{aligned}$$

La scelta dell'indice  $i = 1$  non è essenziale e pertanto si ha una relazione simile per tutti gli  $h_i$  della base di Jordan. Cioè

$$\exp[At]h_j = e^{\lambda_i t} P_j(t)$$

ove  $i$  è tale che  $n_1 + \dots + n_{i-1} < j \leq n_1 + \dots + n_i$  e  $P_j$  è un polinomio in  $t$  di grado al più  $n_i - 1$ .

Poiché  $\{h_1, \dots, h_d\}$  è una base di  $\mathbb{C}^d$ , dato  $x$  esistono  $c_1, \dots, c_d \in \mathbb{C}$  tali che

$$x = \sum_{j=1}^d c_j h_j,$$

ed esiste una costante  $C_0$  tale che

$$\sup_{j=1, \dots, d} |c_j| \leq C_0 |x|.$$

Preso  $x$  come dato iniziale, si ha

$$\exp[At]x = e^{-\mu t} \sum_{j=1}^d c_j h_j e^{(\lambda_i + \mu)t} P_j(t)$$

Poiché  $\operatorname{Re}(\lambda_i) < -\mu$ ,

$$|e^{(\lambda_i + \mu)t} P_j(t)| \leq C_1$$

per ogni  $t > 0$  e quindi

$$|\exp[At]x| \leq C e^{-\mu t} |x|.$$

Questo conclude la prova del Lemma 10.13.  $\square$

Torniamo ora alla dimostrazione del Teorema 10.12. Il Lemma 10.13 e la (10.40) comportano

$$|x(t) - x^*| \leq C e^{-\mu t} |x_0 - x^*| + CK \int_0^t ds e^{-\mu(t-s)} |x(s) - x^*|^2. \quad (10.45)$$

Per ogni  $T > 0$  si pone

$$z(T) = \sup_{t \in [0, T]} |x(t) - x^*| e^{\mu t}.$$

La (10.45) implica

$$z(T) \leq C|x_0 - x^*| + \frac{CK}{\mu} z(T)^2.$$

La disuguaglianza così ottenuta è simile alla (5.54) del Capitolo 5, con  $c = C|x_0 - x^*|$  e  $a = CK/\mu$ . Procedendo come nel Capitolo 5, se

$$C|x_0 - x^*| < \frac{\mu}{8CK},$$

si ottiene

$$z(T) < 2C|x_0 - x^*| \quad \text{per ogni } T > 0. \quad (10.46)$$

Dalla (10.46) si ottiene immediatamente la stabilità e la convergenza a  $x^*$  con velocità esponenziale. Questo conclude la dimostrazione del primo teorema di Liapunov.  $\square$

La stabilità asintotica dell'origine è quindi subordinata alla proprietà (10.41) degli autovalori della matrice  $A$ , e cioè alla stabilità asintotica del sistema (10.39). La proprietà (10.41) è per tale motivo riferita come proprietà di *stabilità lineare*. Si osservi che anche se un solo autovalore ha parte reale nulla, il teorema non è applicabile e non si può provare per questa via che l'origine è stabile per il sistema (10.37), mentre l'origine continua ad essere stabile per il sistema linearizzato (10.39). In generale la stabilità del sistema linearizzato non implica la stabilità del sistema non lineare, tranne che la stabilità del sistema linearizzato non sia conseguenza della più forte proprietà (10.41).

Nel Capitolo 5 si è visto che il metodo è applicabile ad esempio ai problemi unidimensionali soggetti ad una forza conservativa ed un attrito lineare. In assenza di attrito tuttavia gli autovalori hanno parte reale nulla e il primo teorema di Liapunov non può applicarsi. Questa situazione si verifica ogni volta che il sistema ha un integrale primo non costante in un intorno di  $x^*$ . Infatti, se  $G(x)$  è un integrale primo, si ha  $G(x_0) = G(x(t))$ . L'asintotica stabilità dell'origine implica

$$G(x_0) = \lim_{t \rightarrow +\infty} G(x(t)) = G(x^*)$$

e questa relazione è in contraddizione con la non costanza di  $G$  nell'intorno di  $x^*$ .

Il primo teorema di Liapunov non è quindi applicabile in molti casi meccanici, in presenza di leggi di conservazione. Liapunov ha provato un altro teorema, di applicabilità più generale che, in particolare, si applica in molti casi ai sistemi meccanici conservativi. Prima di enunciarlo occorre però dare la seguente

**Definizione 10.13:** Una funzione differenziabile  $G(x)$  a valori reali si dice *funzione di Liapunov* (relativamente al punto di equilibrio  $x^*$ ) per il sistema

$$\dot{x} = f(x), \quad f(x^*) = 0, \quad (10.47)$$

se verifica le seguenti condizioni:

i) Esiste  $\rho > 0$  tale che

$$G(x) \geq 0 \quad \forall x \in B_\rho = \{y \in \mathbb{R}^d \mid |y - x^*| < \rho\}.$$

ii) Per ogni  $x \in B_\rho$

$$G(x) = 0 \quad \text{se e solo se} \quad x = x^*.$$

iii) Posto

$$\sigma(x) = \nabla_x G(x) \cdot f(x),$$

risulta

$$\sigma(x) \leq 0 \quad \forall x \in B_\rho.$$

*Osservazione.* La condizione iii) è equivalente alla non crescita della funzione  $G$  lungo le soluzioni del sistema (10.47), almeno finché queste rimangono all'interno di  $B_\rho$ . Infatti, se  $t \rightarrow x(t)$  è una soluzione della (10.47) corrispondente ad un dato iniziale  $x_0 \in B_\rho$ , posto

$$t^* = \sup\{t > 0 \mid x(\tau) \in B_\rho \quad \forall \tau \in [0, t]\},$$

per ogni  $t \in (0, t^*)$  risulta

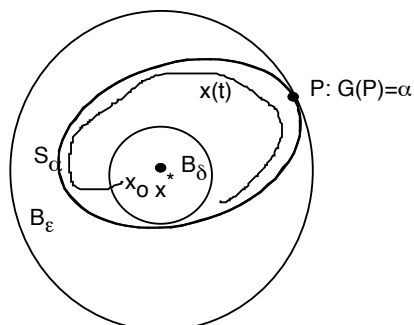
$$\frac{d}{dt}G(x(t)) = \nabla_x G(x(t)) \cdot \dot{x}(t) = \nabla_x G(x(t)) \cdot f(x(t)) = \sigma(x(t)) \leq 0. \quad (10.48)$$

Viceversa, qualunque sia  $x \in B_\rho$ , la soluzione che parte da  $x$  al tempo  $t = 0$  soddisfa la (10.48) e quindi  $\sigma(x) \leq 0$ .

Stabiliamo ora il *Secondo Teorema di Liapunov*:

**Teorema 10.15.** *Se esiste una funzione di Liapunov  $G$ , relativamente al punto di equilibrio  $x^*$ , per il sistema (10.47), allora il punto di equilibrio  $x^*$  è stabile.*

Dim. L'idea intuitiva della dimostrazione è fornita dalla figura che segue.



Supponiamo che esista  $G$  soddisfacente le condizioni i)–iii) della definizione di funzione di Liapunov. Fissiamo  $\varepsilon > 0$ . Senza perdita di generalità si può supporre  $\varepsilon \leq \rho$ . Sia  $\bar{B}_\varepsilon = B_\varepsilon \cup \partial B_\varepsilon$  la sfera chiusa  $\{y \in \mathbb{R}^d \mid |y - x^*| \leq \varepsilon\}$  mentre  $\partial B_\varepsilon = \{y \in \mathbb{R}^d \mid |y - x^*| = \varepsilon\}$  è la sua frontiera. Sia inoltre

$$\alpha = \min_{x \in \partial B_\varepsilon} G(x).$$

Certamente il minimo esiste perché  $G$  è continua e  $\partial B_\varepsilon$  è un chiuso. Si ha  $\alpha > 0$  per le ipotesi i) ed ii). Pertanto è non vuoto l'insieme

$$S_\alpha = \{x \in B_\varepsilon \mid G(x) < \alpha\}.$$

L'insieme  $S_\alpha$  è ovviamente contenuto in  $B_\varepsilon$ . Contiene inoltre  $x^*$  in quanto  $\alpha > 0$ .

Anzi,  $S_\alpha$  contiene un intorno di  $x^*$ . Infatti  $G$  è continua ed  $S_\alpha$  è aperto in quanto controimmagine dell'aperto di  $\mathbb{R}$  costituito da tutti i numeri reali più piccoli di  $\alpha$ . Esiste quindi  $\delta > 0$  tale che  $B_\delta \subset S_\alpha$ .

Infine se  $x_0 \in S_\alpha$ , allora  $x(t) \in S_\alpha$  per ogni  $t > 0$ . Infatti, per l'osservazione che segue la definizione di funzione di Liapunov,

$$G(x(t)) \leq G(x_0) < \alpha \quad \forall t < t^*. \quad (10.49)$$

Se esistesse  $t < t^*$  tale che  $x(t) \notin S_\alpha$ , per definizione di  $S_\alpha$ , o  $G(x(t)) \geq \alpha$ , il che è in contrasto con (10.49), oppure  $x(t) \notin B_\varepsilon$ . Dovrebbe allora esistere per continuità un  $\bar{t}$  tale che  $x(\bar{t}) \in \partial B_\varepsilon$  ed in questo caso, per definizione di  $\alpha$ , sarebbe  $G(x(\bar{t})) \geq \alpha$ , ancora in contrasto con la (10.49). Pertanto  $x(t) \in S_\alpha$  per ogni  $t < t^*$ . Ma  $S_\alpha \subset B_\varepsilon$  e quindi  $t^*$  non può essere finito per lo stesso argomento. Si ha quindi  $x(t) \in S_\alpha$  per ogni  $t \in [0, +\infty)$ .

In conclusione, se  $x_0 \in B_\delta$ , certamente  $x(t) \in S_\alpha \subset B_\varepsilon$  per ogni  $t > 0$  e quindi la stabilità di  $x^*$ .  $\square$

*Osservazione:* Se la proprietà iii) della definizione di funzione di Liapunov vale nella forma piú forte

$$\text{iii}') \quad \sigma(x) < 0 \quad \forall x \in B_\rho - \{x^*\},$$

allora oltre che la stabilità sussiste anche la stabilità asintotica. Infatti, usando la stessa dimostrazione data nella seconda parte del Lemma che segue la Proposizione 5.1, è facile vedere che in queste ipotesi risulta  $\lim_{t \rightarrow +\infty} L(x(t)) = 0$  e questo è compatibile solo con il fatto che  $\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = x^*$ .

Il primo teorema di Liapunov è di applicabilità molto piú semplice del secondo, in quanto si tratta di controllare una semplice condizione sulla linearizzazione del sistema, condizione che tuttavia non è verificata in presenza di quantità conservate. Il secondo teorema invece è basato sulla determinazione di una funzione di Liapunov, problema spesso molto arduo. Tuttavia, in alcuni problemi di Meccanica l'esistenza di una funzione di Liapunov è un'ovvia conseguenza della conservazione dell'energia ed il secondo teorema di Liapunov assicura la stabilità della posizione di equilibrio senza difficoltà.

Ritorniamo allo studio di un sistema meccanico con vincoli olonomi, ideali ed indipendenti dal tempo, avente  $n$  gradi di libertà ed il cui moto soddisfa le equazioni di Lagrange (10.12) con l'energia cinetica  $T$  che si riduce alla sola forma quadratica  $T_2$ . Supponiamo che le forze attive siano tali che esiste un'energia potenziale  $U(q)$  differenziabile in modo che

$$Q_h(q, \dot{q}, t) = -\frac{\partial U(q)}{\partial q_h}.$$

In tali condizioni l'energia

$$E(q, \eta) = T(\eta, q) + U(q)$$

è costante durante il moto:

$$\frac{d}{dt} E(q(t), \dot{q}(t)) = 0$$

Quindi è ragionevole tentare di usare l'energia totale come funzione di Liapunov. La non crescita dell'energia è però solo una delle condizioni che devono essere soddisfatte per poter assumere l'energia totale come funzione di Liapunov. Ulteriori ipotesi sono necessarie per verificare le altre condizioni.

Assumiamo che l'energia potenziale  $U$  abbia un minimo proprio in  $q^*$ . In queste ipotesi, la funzione

$$G(q, \eta) = E(q, \eta) - U(q^*) = T_2(\eta, q) + U(q) - U(q^*)$$

è una funzione di Liapunov relativamente al punto  $P^* \in \mathbb{R}^{2n}$  di coordinate

$$P^* = (q^*, 0)$$

per il sistema di  $2n$  equazioni differenziali del primo ordine

$$\begin{aligned}\dot{q}_h &= \eta_h \\ \dot{\eta}_h &= \phi_h(q, \eta, t),\end{aligned}$$

equivalente al sistema del secondo ordine (10.11).

Difatti, poiché  $U$  ha un minimo proprio in  $q^*$ , esiste  $\rho > 0$  tale che

$$U(q) > U(q^*), \quad \forall q \in \mathbb{R}^n \quad \text{tale che } |q - q^*| < \rho, q \neq q^*.$$

Pertanto, se  $P = (q, \eta) \in B_{\rho, P^*}$ , sfera di raggio  $\rho$  e centro in  $P^*$ , risulta

$$G(q, \eta) > 0$$

a meno che  $(q, \eta) = (q^*, 0)$ . Questo mostra che le prime due condizioni per le funzioni di Liapunov sono verificate. La terza condizione è la conservazione dell'energia discussa in precedenza. Pertanto il punto  $q^*$  è una posizione di equilibrio stabile<sup>(1)</sup>. Abbiamo pertanto dimostrato il seguente

**Teorema 10.16 (Criterio di Dirichlet):** *Se  $q^*$  sono le coordinate Lagrangiane di una configurazione di equilibrio per un sistema a vincoli olonomi, indipendenti dal tempo ed ideali, soggetto a forze attive conservative di energia potenziale  $U$  ed inoltre il potenziale  $U$  è dotato di un minimo locale stretto in  $q^*$ , allora  $q^*$  è una configurazione di equilibrio stabile.*

*Osservazione 1:* Il secondo teorema di Liapunov è applicabile anche quando le forze attive non si riducono alle sole forze conservative, ma è presente anche una parte dissipativa. Con ciò si intende che le componenti Lagrangiane delle forze sono date da

$$Q_h(q, \dot{q}, t) = -\frac{\partial U(q)}{\partial q_h} + Q_h^{(diss)}(q, \dot{q}, t),$$

<sup>(1)</sup> Dal teorema di Liapunov segue che  $|q(t) - q^*| < \varepsilon$  e  $|\eta(t)| < \varepsilon$ . Detta  $C$  una costante positiva tale che

$$\frac{1}{C} \leq \frac{1}{2}|a_{h,k}(q)| \leq C, \quad \text{per ogni } q \in B_\rho, \quad h, k = 1, \dots, n,$$

si ha

$$T(\eta(t), q) \leq Cn|\eta(t)|^2 < Cn\varepsilon^2,$$

che implica la condizione  $T(\eta, q) < \varepsilon$  richiesta dalla definizione di stabilità, a patto di scegliere  $\varepsilon < (Cn)^{-1}$ .

con  $Q_h^{(diss)}$  componenti Lagrangiane di eventuali forze *dissipative*, cioè forze che sono presenti solo se  $\eta \neq 0$  e la loro potenza è non positiva in ogni moto:

$$Q^{(diss)}(q, 0, t) = 0,$$

$$\mathcal{P}^{(diss)}(t) = \sum_{h=1}^n Q_h^{(diss)}(q(t), \dot{q}(t), t) \dot{q}_h(t) \leq 0.$$

In questo caso in luogo della conservazione dell'energia si ha

$$\frac{d}{dt} E(q(t), \dot{q}(t)) = \mathcal{P}^{(diss)}(t) \leq 0. \quad (10.50)$$

Tale disuguaglianza segue dallo stesso calcolo che fornisce la conservazione dell'energia generalizzata, osservando che, nelle ipotesi fatte, posto al solito  $L = T - U$ , le equazioni di Lagrange (10.12) si scrivono

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \eta_k} \right) (\dot{q}, q, t) - \frac{\partial L}{\partial q_k} (\dot{q}, q, t) = Q_h^{(diss)}(q, \dot{q}, t). \quad (10.51)$$

Si ha difatti,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} E(\dot{q}(t), q(t), t) &= \frac{d}{dt} \left( \sum_{k=1}^n \dot{q}_k(t) \frac{\partial L}{\partial \eta_k} (\dot{q}(t), q(t), t) \right) - \frac{d}{dt} L(\dot{q}(t), q(t), t) \\ &= \sum_{k=1}^n \ddot{q}_k(t) \frac{\partial L}{\partial \eta_k} (\dot{q}(t), q(t), t) + \sum_{k=1}^n \dot{q}_k(t) \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \eta_k} (\dot{q}(t), q(t), t) \right) \\ &\quad - \sum_{k=1}^n \dot{q}_k \frac{\partial L}{\partial q_k} (\dot{q}(t), q(t), t) - \sum_{k=1}^n \ddot{q}_k \frac{\partial L}{\partial q_k} (\dot{q}(t), q(t), t) - \frac{\partial L}{\partial t} (\dot{q}(t), q(t), t) \\ &= \sum_{k=1}^n \dot{q}_k(t) \left[ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \eta_k} (\dot{q}(t), q(t), t) \right) - \frac{\partial L}{\partial q_k} (\dot{q}(t), q(t), t) \right] - \frac{\partial L}{\partial t} (\dot{q}(t), q(t), t) \end{aligned}$$

usando le equazioni di Lagrange

$$= - \frac{\partial L}{\partial t} (\dot{q}(t), q(t), t) + \mathcal{P}^{(diss)}(t).$$

Se la Lagrangiana non dipende dal tempo segue la (10.50).

Il criterio di Dirichlet si estende allora immediatamente a questo caso, per il quale si enuncia nella forma:

**Teorema 10.17:** *Se  $q^*$  sono le coordinate Lagrangiane di una configurazione di equilibrio per un sistema a vincoli olonomi, indipendenti dal tempo ed ideali, soggetto a forze attive conservative di energia potenziale  $U$  e ad eventuali forze*



dissipative ed inoltre il potenziale  $U$  è dotato di un minimo locale stretto in  $q^*$ , allora  $q^*$  è una configurazione di equilibrio stabile.

*Osservazione 2:* Nel capitolo 5 si è visto che, nel caso unidimensionale, la presenza di un attrito lineare comporta la asintotica stabilità della posizione di equilibrio stabile. Condizioni simili si possono dare per  $n \geq 1$ . Supponiamo che  $L$  non dipenda esplicitamente dal tempo e che le componenti Lagrangiane delle forze dissipative corrispondano ad un attrito lineare:

$$Q_h^{(diss)} = - \sum_{k=1}^n \mu_{h,k} \dot{q}_k$$

e la matrice  $\mu$  soddisfa la seguente proprietà: esiste  $\mu_0 > 0$

$$\sum_{h,k=1}^n \mu_{h,k} \xi_h \xi_k \geq \mu_0 \sum_{h=1}^n \xi_h^2$$

per ogni  $\xi \in \mathbb{R}^n$ . In queste condizioni risulta

$$\mathcal{P}^{(diss)}(t) \leq -\mu_0 \sum_{h=1}^n \dot{q}_h^2.$$

Dette  $q(t; q_0, \dot{q}_0)$  e  $\dot{q}(t; q_0, \dot{q}_0)$  la posizione e l'atto di moto al tempo  $t$  conseguenti al dato iniziale  $(q_0, \dot{q}_0)$ , si definisca la funzione

$$\mathcal{L}(q_0, \dot{q}_0) = \int_0^1 ds E(q(s; q_0, \dot{q}_0), \dot{q}(s; q_0, \dot{q}_0)).$$

Se il punto  $q^*$  è un minimo isolato per il potenziale, la funzione  $\mathcal{L}$  soddisfa le condizioni della definizione di funzione di Liapunov, con la iii) nella versione rafforzata iii'). Per controllarlo basta usare gli stessi argomenti usati nella prova della Proposizione 5.1. Pertanto, in presenza di attrito lineare, si ha, oltre alla stabilità dei punti di minimo, la stabilità asintotica dei minimi isolati.

*Osservazione 3:* La condizione necessaria affinché il potenziale abbia un minimo nel punto  $q^*$  è che risulti

$$\frac{\partial U}{\partial q_h}(q^*) = 0,$$

condizione assicurata dall'ipotesi che  $q^*$  sia una configurazione di equilibrio. Una condizione sufficiente è che la matrice Hessiana di  $U$  in  $q^*$ ,  $B$  di componenti

$$b_{h,k} = \frac{\partial^2 U}{\partial q_h \partial q_k}(q^*)$$

sia definita positiva. Pertanto la verifica della stabilità di una posizione di equilibrio è anch'essa ridotta al controllo di una semplice condizione sugli autovalori della matrice  $B$ .

### 10.6 Piccole oscillazioni.

Sia  $q^*$  una configurazione di equilibrio stabile. Come nel caso unidimensionale discusso nel Capitolo 5, la stabilità assicura che, a patto di scegliere una configurazione iniziale sufficientemente prossima a  $q^*$  e un atto di moto iniziale sufficientemente piccolo, il moto si svolge in un intorno arbitrariamente piccolo di  $q^*$ , con atto di moto arbitrariamente piccolo.

Supponiamo che la stabilità della posizione di equilibrio  $q^*$  sia conseguenza del fatto che la matrice  $B$  è definita positiva. Sia  $\varepsilon > 0$  la dimensione dell'intorno nel quale il moto si svolge. Se il potenziale è dotato di derivate terze limitate in tale intorno, per ogni  $q$  tale che  $|q - q^*| < \varepsilon$  si ha

$$U(q) = \frac{1}{2} \sum_{h,k=1}^n b_{h,k}(q_h - q_h^*)(q_k - q_k^*) + R_U(q),$$

con

$$|R_U(q)| < K\varepsilon^3.$$

In modo analogo, si ha

$$T(\eta, q) = \frac{1}{2} \sum_{h,k=1}^n a_{h,k}(q^*)\eta_h\eta_k + R_T(\eta, q),$$

con

$$|R_T(\eta, q)| < K\varepsilon^3.$$

Pertanto, posto  $y_k = q_k - q_k^*$ , e  $\zeta_h = \dot{y}_h$ , la Lagrangiana  $L$  è approssimata, a meno di termini di ordine  $\varepsilon^3$  dalla Lagrangiana

$$\bar{L}(\zeta, y) = \frac{1}{2} \sum_{h,k=1}^n a_{h,k}(q^*)\zeta_h\zeta_k - \frac{1}{2} \sum_{h,k=1}^n b_{h,k}y_hy_k. \quad (10.52)$$

La Lagrangiana  $\bar{L}$  è quadratica nelle  $y$  e nelle  $\zeta$  ed in conseguenza di ciò, le equazioni del moto risultano lineari.

*Le equazioni di Lagrange corrispondenti a  $\bar{L}$  sono la linearizzazione delle equazioni di Lagrange corrispondenti ad  $L$ .*

È consuetudine, nelle applicazioni, sostituire ad  $L$  la Lagrangiana  $\bar{L}$ , detta *Lagrangiana delle piccole oscillazioni*. Occorre però rilevare che, tale sostituzione non necessariamente conduce ad una buona approssimazione del moto effettivo del sistema.

Anzitutto chiariamo cosa si intende con *buona approssimazione*. Per la stabilità, il moto effettivo del sistema si svolge in un intorno di raggio  $\varepsilon$  di  $q^*$  con atto di moto di ordine  $\varepsilon$ . Pertanto, ad ogni istante  $t$  risulta

$$|q(t) - q^*| \leq C\varepsilon, \quad |\eta(t)| \leq C\varepsilon.$$

D'altra parte la linearità delle equazioni delle piccole oscillazioni assicura che

$$|y(t)| \leq C\varepsilon, \quad |\zeta(t)| \leq C\varepsilon.$$

Essendo entrambi i moti di ordine  $\varepsilon$ , l'affermazione che il moto effettivo e le piccole oscillazioni differiscono per termini di ordine  $\varepsilon$  non è significativa relativamente alla bontà dell'approssimazione del moto effettivo con le piccole oscillazioni. Infatti, se si considerasse l'approssimazione data dalla quiete in  $q^*$  in luogo delle piccole oscillazioni, si otterrebbe una conclusione simile. È chiaro che una informazione più significativa è quella sull'errore relativo, cioè una stima del tipo

$$|q(t) - q^* - y(t)| \leq C\varepsilon^\beta, \quad |\eta(t) - \zeta(t)| \leq C\varepsilon^\beta,$$

con  $\beta > 1$ , che assicura un errore relativo di ordine  $\varepsilon^{\beta-1}$ . Si è visto nel Capitolo 5 che una tale stima si può effettivamente ottenere, uniformemente nel tempo, in presenza di forze dissipative, mentre in assenza di tali forze si mostra facilmente che una stima di questo tipo è valida per intervalli di tempo limitati ed a patto di prendere dati iniziali opportunamente vicini a  $(q^*, 0)$ , mentre non è provato che essa vale per intervalli di tempo arbitrari. Non vi è pertanto una giustificazione rigorosa alla sostituzione di  $L$  con  $\bar{L}$  nel caso conservativo. Tuttavia, nella pratica, piccole dissipazioni sono sempre presenti nei sistemi meccanici e in effetti la considerazione della Lagrangiana delle piccole oscillazioni conduce spesso a buoni risultati.

Il vantaggio principale dello studio delle piccole oscillazioni consiste nel fatto che in corrispondenza della Lagrangiana  $\bar{L}$  le equazioni di Lagrange si riducono ad un sistema lineare del quale siamo in grado di fornire una soluzione esplicita, una volta diagonalizzate *simultaneamente* la matrice  $B$  e la matrice  $A$  di componenti  $a_{h,k}(q^*)$ . Il procedimento per ottenere tale soluzione è basato sul seguente risultato valido per le matrici simmetriche e definite positive:

**Teorema 10.18:** *Sia  $B$  una matrice  $n \times n$  simmetrica, cioè*

$$(x, By) = (y, Bx), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n,$$

dove  $(x, y)$  denota l'usuale prodotto scalare in  $\mathbb{R}^n$ ,

$$(x, y) = \sum_{i=1}^n x_i y_i,$$

e definita positiva, cioè tale che esiste  $\mu(B) > 0$  in modo che risulti

$$(x, Bx) \geq \mu(B)(x, x), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Allora esiste una base ortonormale di autovettori  $\{v^{(i)}, i = 1, \dots, n\}$  di  $B$ ,

$$Bv^{(i)} = \lambda^{(i)}v^{(i)},$$

con  $\lambda^{(i)} > 0, i = 1, \dots, n$  soluzioni (non necessariamente distinte) dell'equazione secolare

$$\det(B - \lambda \mathbf{I}) = 0.$$

Esiste inoltre una matrice ortogonale  $J$  tale che

$$v^{(i)} = J e_i,$$

$\{e_i, i = 1, \dots, n\}$  essendo la base naturale di  $\mathbb{R}^n$  e

$$J B J^T = \Lambda, \quad \Lambda = \begin{pmatrix} \lambda^{(1)} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda^{(2)} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda^{(n)} \end{pmatrix},$$

Dim. L'insieme  $S = \{x \in \mathbb{R}^n \mid (x, x) = 1\}$  è compatto e la funzione su  $\mathbb{R}^n$

$$f(x) = (x, Bx)$$

è continua su  $S$ . Esiste pertanto il suo massimo in  $S$ . Sia

$$\lambda^{(1)} = \max_{x \in S} f(x)$$

e sia  $v^{(1)}$  un vettore di  $S$  tale che

$$f(v^{(1)}) = \lambda^{(1)}.$$

$\lambda^{(1)}$  è un autovalore di  $B$  e  $v^{(1)}$  un autovettore corrispondente a tale autovalore.

Infatti, detto  $w$  un qualsiasi elemento di  $S$  ortogonale a  $v^{(1)}$ ,  $(w, v^{(1)}) = 0$ , per ogni  $\theta \in [0, 2\pi]$  il vettore

$$x(\theta) = v^{(1)} \cos \theta + w \sin \theta$$

è in  $S$ . Pertanto

$$\varphi(\theta) = (x(\theta), Bx(\theta)) = \cos^2 \theta (v^{(1)}, Bv^{(1)}) + 2 \sin \theta \cos \theta (w, Bv^{(1)}) + \sin^2 \theta (w, Bw)$$

ha un massimo in  $\theta = 0$ . Per ottenere l'espressione di  $\varphi$  si è usata la simmetria di  $B$ . Risulta:

$$0 = \varphi'(0) = 2(w, Bv^{(1)}).$$

In conseguenza  $Bv^{(1)}$  è ortogonale a  $w$  per ogni  $w$  ortogonale a  $v^{(1)}$ . Esiste quindi  $\alpha \in \mathbb{R}$  tale che

$$Bv^{(1)} = \alpha v^{(1)}.$$

Ma

$$\lambda^{(1)} = (v^{(1)}, Bv^{(1)}) = (v^{(1)}, \alpha v^{(1)}) = \alpha$$

e quindi risulta provato che  $\lambda^{(1)}$  è il massimo autovalore e  $v^{(1)}$  un autovettore corrispondente. Posto  $u^{(1)} = v^{(1)}$ , scegliamo  $u^{(2)}, \dots, u^{(n)}$  in modo che  $\{u^{(i)} \mid i = 1, \dots, n\}$  sia una base ortonormale e poniamo

$$J_{ij}^{(1)} = (u^{(i)})_j,$$

In modo tale che la matrice  $J^{(1)}$  trasforma la base  $\{e_i, i = 1, \dots, n\}$  nella base  $\{u^{(i)} \mid i = 1, \dots, n\}$ . La matrice

$$B^{(1)} = J^{(1)} B (J^{(1)})^T$$

è simmetrica e definita positiva, in quanto

$$(x, B^{(1)}x) = ((J^{(1)})^T x, B (J^{(1)})^T x) \geq \mu(B) ((J^{(1)})^T x, (J^{(1)})^T x) = \mu(B)(x, x).$$

Essa ha per componenti

$$B_{ij}^{(1)} = \sum_{h,k=1}^n J_{ih}^{(1)} B_{hk} J_{jk}^{(1)} = \sum_{h=1}^n u_h^{(i)} \sum_{k=1}^n B_{hk} u_k^{(j)} = (u^{(i)}, Bu^{(j)}).$$

Pertanto

$$B_{i1}^{(1)} = (u^{(i)}, Bu^{(1)}) = \lambda^{(1)} \delta_{i,1},$$

$$B_{1j}^{(1)} = (u^{(1)}, Bu^{(j)}) = (u^{(j)}, Bu^{(1)}) = \lambda^{(1)} \delta_{1,j}.$$

Quindi la matrice  $B^{(1)}$  è della forma

$$B^{(1)} = \begin{pmatrix} \lambda^{(1)} & 0 \\ 0 & \tilde{B}^{(1)} \end{pmatrix},$$

con  $\tilde{B}^{(1)}$  matrice  $(n-1) \times (n-1)$  simmetrica e definita positiva, in quanto restrizione di  $B^{(1)}$  ad un sottospazio  $(n-1)$ -dimensionale, ortogonale a  $v^{(1)}$ .

Il procedimento appena esposto può essere iterato. Applicato a  $\tilde{B}^{(1)}$  permette di costruire un  $\lambda^{(2)}$  ed un corrispondente autovettore  $v^{(2)}$ , e quindi una matrice  $J^{(2)}$  che trasforma  $\tilde{B}^{(1)}$  in  $B^{(2)}$  della forma

$$B^{(2)} = \begin{pmatrix} \lambda^{(2)} & 0 \\ 0 & \tilde{B}^{(2)} \end{pmatrix},$$

con  $\tilde{B}^{(2)}$  matrice  $(n-2) \times (n-2)$  simmetrica e definita positiva. Procedendo allo stesso modo si perviene quindi alla costruzione di una base ortonormale di autovettori  $\{v^{(i)}, i = 1, \dots, n\}$ . Posto  $J_{ij} = (v^{(i)})_j$ , risulta

$$(JBJ^T)_{ij} = \sum_{h,k=1}^n J_{ih} B_{hk} J_{jk} = \sum_{h=1}^n v_h^{(i)} \sum_{k=1}^n B_{hk} v_k^{(j)} = (v^{(i)}, Bv^{(j)}) = \lambda^{(i)} \delta_{ij} = \Lambda_{ij}.$$

Questo conclude la dimostrazione del teorema, in quanto l'esistenza di  $v^{(i)}$  non nullo che soddisfa l'equazione agli autovalori

$$Bv^{(i)} = \lambda^{(i)} v^{(i)}$$

è equivalente alla condizione

$$\det(B - \lambda^{(i)} \mathbb{1}) = 0.$$

□

**Corollario 10.19:** *Sia  $B$  una matrice simmetrica e definita positiva. Esiste un'unica matrice simmetrica e definita positiva, che si denota con  $B^{1/2}$  tale che*

$$B = B^{1/2} B^{1/2}.$$

Dim. La matrice

$$\Lambda^{1/2} = \begin{pmatrix} (\lambda^{(1)})^{1/2} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & (\lambda^{(2)})^{1/2} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & (\lambda^{(n)})^{1/2} \end{pmatrix}$$

è ben definita in quanto tutti gli autovalori  $\lambda^{(i)}$  sono non negativi. Inoltre, posto

$$B^{1/2} = J^T \Lambda^{1/2} J,$$

la matrice  $B^{1/2}$  è simmetrica e definita positiva ed inoltre risulta

$$B^{1/2} B^{1/2} = J^T \Lambda^{1/2} J J^T \Lambda^{1/2} J = J^T \Lambda^{1/2} \Lambda^{1/2} J = J^T \Lambda J = B.$$

□

**Corollario 10.20:** *Siano  $A$  e  $B$  due matrici simmetriche e definite positive. Allora esiste una base “ortonormale” di “autovettori simultanei” delle due matrici, nel senso che esiste una base  $\{v^{(i)}, i = 1, \dots, n\}$  ed  $n$  numeri reali positivi, non necessariamente distinti, che risolvono il “problema agli autovalori”*

$$Bv^{(i)} = \lambda^{(i)} Av^{(i)},$$

con

$$(v^{(i)}, Av^{(j)}) = \delta_{ij}.$$

Gli autovalori sono soluzioni dell'equazione “secolare”

$$\det(B - \lambda A) = 0.$$

Inoltre esiste una matrice non singolare  $J$  tale che

$$JBJ^T = \Lambda, \quad JAJ^T = \mathbf{1}.$$

Dim. Poiché  $A$  è definita positiva, tale è anche  $A^{-1}$  e quindi è ben definita per il Corollario 10.19 la matrice  $A^{-1/2}$ . Si ponga

$$\bar{B} = A^{-1/2} B A^{-1/2}.$$

La matrice  $\bar{B}$  è simmetrica e definita positiva, in quanto

$$\begin{aligned} (x, \bar{B}x) &= (x, A^{-1/2} B A^{-1/2} x) = (A^{-1/2} x, B A^{-1/2} x) \\ &\geq \mu(B)(A^{-1/2} x, A^{-1/2} x) = \mu(B)(x, A^{-1} x) \geq \mu(B)\mu(A^{-1})(x, x). \end{aligned}$$

Esiste pertanto una base ortonormale di autovettori della matrice  $\bar{B}$ ,  $\{w^{(i)}, i = 1, \dots, n\}$  e  $n$  numeri positivi  $\lambda^{(i)}$  tali che

$$\bar{B}w^{(i)} = \lambda^{(i)} w^{(i)}$$

e cioè

$$A^{-1/2}BA^{-1/2}w^{(i)} = \lambda^{(i)}w^{(i)}.$$

Posto

$$v^{(i)} = A^{-1/2}w^{(i)},$$

si ha

$$A^{-1/2}Bv^{(i)} = \lambda^{(i)}A^{1/2}v^{(i)}$$

e quindi

$$Bv^{(i)} = \lambda^{(i)}Av^{(i)}.$$

Risulta inoltre

$$\begin{aligned}(v^{(i)}, Av^{(j)}) &= (A^{-1/2}w^{(i)}, AA^{-1/2}w^{(j)}) = (A^{-1/2}w^{(i)}, A^{1/2}w^{(j)}) \\ &= (w^{(i)}, A^{-1/2}A^{1/2}w^{(j)}) = (w^{(i)}, w^{(j)}) = \delta_{ij}.\end{aligned}$$

Esiste infine una matrice ortogonale  $\bar{J}$  tale che

$$\bar{J}\bar{B}\bar{J}^T = \bar{J}A^{-1/2}BA^{-1/2}\bar{J}^T = \Lambda.$$

Posto  $J = \bar{J}A^{-1/2}$ , ne consegue che

$$\Lambda = JBJ^T$$

ed anche

$$JAJ^T = \bar{J}A^{-1/2}AA^{-1/2}\bar{J}^T = \bar{J}\bar{J}^T = \mathbf{1}.$$

I numeri  $\lambda^{(i)}$  sono soluzioni di

$$0 = \det(\bar{B} - \lambda^{(i)}\mathbf{1}) = \det[A^{-1/2}(B - \lambda^{(i)}A)A^{-1/2}] = \det(B - \lambda^{(i)}A) \det(A^{-1}).$$

Questo conclude la dimostrazione del Corollario 10.20.  $\square$

*Osservazione:* La base  $\{v^{(i)} \mid i = 1, \dots, n\}$  è ortonormale rispetto al prodotto scalare

$$\langle x, y \rangle = (x, Ay).$$

Applichiamo il Corollario 10.20 allo studio della Lagrangiana  $\bar{L}$ . Si ponga

$$\zeta = J^T z, \quad y = J^T \xi.$$

Si ha

$$\begin{aligned}(\zeta, A\zeta) &= (J^T z, AJ^T z) = (z, JAJ^T z) = (z, z), \\ (y, By) &= (J^T \xi, BJ^T \xi) = (\xi, JBJ^T \xi) = (\xi, \Lambda\xi),\end{aligned}$$



Nella nuova base la Lagrangiana  $\bar{L}$  diviene

$$\hat{L}(z, \xi) = \frac{1}{2}(z, z) - \frac{1}{2}(\xi, \Lambda\xi).$$

Posto

$$\omega_i = \sqrt{\lambda^{(i)}},$$

le equazioni di Lagrange si scrivono

$$\ddot{\xi}_i + \omega_i^2 \xi_i = 0. \quad (10.53)$$

Siano  $y^{(0)}$  e  $\zeta^{(0)}$  i dati iniziali. Si ponga

$$z^{(0)} = (J^T)^{-1}\zeta^{(0)}, \quad \xi^{(0)} = (J^T)^{-1}y^{(0)}. \quad (10.54)$$

Le soluzioni di (10.53) sono

$$\xi_i(t) = \alpha_i \cos[\omega_i t + \varphi_i],$$

con

$$\alpha_i = \sqrt{(\xi_i^{(0)})^2 + \frac{(z_i^{(0)})^2}{\omega_i^2}}, \quad \varphi_i = \arctan \frac{z_i^{(0)}}{\omega_i \xi_i^{(0)}}. \quad (10.55)$$

Quindi le soluzioni delle equazioni di Lagrange per  $\bar{L}$  sono date da

$$y_i(t) = \sum_{j=1}^n J_{i,j}^T \alpha_j \cos[\omega_j t + \varphi_j]. \quad (10.56)$$

Si è allora dimostrato il seguente

**Teorema 10.21:** *Sia  $\bar{L}$  una Lagrangiana quadratica, della forma*

$$\bar{L}(\eta, q) = \frac{1}{2} \sum_{k,h=1}^n a_{h,k} \eta_h \eta_k - \frac{1}{2} \sum_{k,h=1}^n b_{h,k} q_h q_k,$$

con  $a_{h,k}$  e  $b_{h,k}$  costanti che rappresentano le componenti di due matrici,  $A$  e  $B$ , simmetriche e definite positive. Allora esistono  $n$  numeri reali positivi  $\omega_i$  ed una matrice  $J$  non singolare, tale che le soluzioni delle equazioni di Lagrange associate ad  $\bar{L}$  sono date dalle (10.56), con  $\alpha_i$  e  $\varphi_i$  dati dalle (10.55), che dipendono dai dati iniziali  $y^{(0)}$  e  $\zeta^{(0)}$  mediante la (10.54).

Il precedente Teorema mostra che le piccole oscillazioni di un sistema nell'intorno di una posizione di equilibrio stabile sono una combinazione di  $n$  moti armonici con frequenze  $\omega_i$ , dette *frequenze caratteristiche* o *frequenze proprie*, con ampiezze  $\alpha_i$  e con fasi  $\varphi_i$ . Le coordinate  $\xi_i$  costruite per diagonalizzare simultaneamente le matrici  $A$  e  $B$  sono anche dette *modi normali* e il precedente risultato afferma che *l' $i$ -esimo modo normale è un moto armonico di frequenza l' $i$ -esima frequenza propria,  $\omega_i$*  ■

## 11. Moto dei corpi rigidi.

### 11.1 Cinematica del corpo rigido.

Un esempio particolarmente importante di sistema vincolato è fornito dal *corpo rigido*. Si tratta di un sistema di  $N$  punti materiali di masse  $m_i$ ,  $i = 1, \dots, N$ , che si muovono in modo da mantenere le loro mutue distanze costanti nel tempo.

Dette  $x^{(i)}(t) \in \mathbb{R}^3$ ,  $i = 1, \dots, N$ , le coordinate di ciascuno dei punti materiali al tempo  $t$  rispetto ad un riferimento inerziale  $\mathcal{I}$ , il *vincolo di rigidità* è rappresentato dalle condizioni

$$|x^{(i)}(t) - x^{(j)}(t)|^2 = \ell_{i,j}^2, \quad i \neq j = 1, \dots, N \quad (11.1)$$

ove  $\ell_{i,j} = \ell_{j,i}$  denotano  $N(N-1)/2$  numeri positivi fissati specificando le posizioni occupate dai punti all'istante iniziale. Questo sistema è un modello per un corpo la cui forma e dimensioni sono rilevanti ai fini del moto, per cui non è possibile approssimarlo con un punto materiale, ma che durante il moto subisce deformazioni che possono essere considerate trascurabili e pertanto la sua forma e le sue dimensioni possono essere con buona approssimazione ritenute fisse. Abbiamo anche schematizzato il continuo di materia che costituisce un corpo rigido con un sistema costituito da un numero finito di punti materiali. Quest'ultima assunzione non è indispensabile e le conclusioni che otterremo si estendono in modo ovvio ad un corpo rigido continuo. Tuttavia essa fornisce una notevole semplificazione nelle notazioni.

Il vincolo di rigidità è un vincolo indipendente dal tempo che riduce i gradi di libertà del sistema dagli originari  $3N$  a soli  $n = 6$  gradi di libertà. Per pervenire a tale conclusione, cominciamo con l'osservare che le  $N(N-1)/2$  relazioni (11.1) sono in generale più di  $3N$ . Quindi molte di loro sono necessariamente pleonastiche. Per convincersi di ciò, si considerino tre punti *non allineati*<sup>(1)</sup>, che si può supporre senza perdita di generalità siano  $x^{(1)}$ ,  $x^{(2)}$  ed  $x^{(3)}$ , e sia  $\pi$  il piano che contiene tali punti. Fissato  $k > 3$  ed assegnati i numeri  $\ell_{k,i}$ , per  $i = 1, 2, 3$ , la posizione  $x^{(k)}$  del  $k$ -esimo punto è individuata univocamente (a meno di una riflessione rispetto al piano  $\pi$ ). Infatti, le relazioni

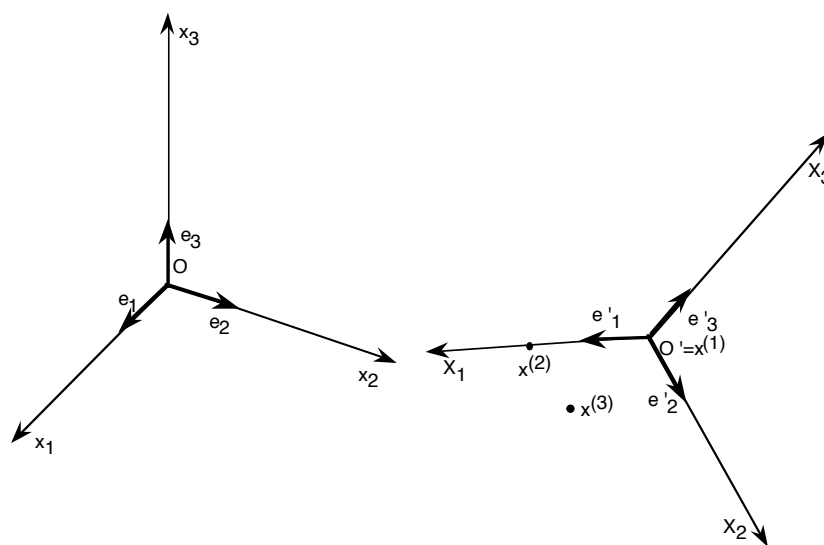
$$|x^{(k)} - x^{(i)}|^2 = \ell_{k,i}^2, \quad i = 1, 2, 3$$

costituiscono un sistema di tre equazioni nelle tre incognite  $x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, x_3^{(k)}$ , la cui matrice Jacobiana è non singolare perché i punti  $x^{(1)}$ ,  $x^{(2)}$  ed  $x^{(3)}$  non sono allineati. Il punto  $x^{(k)}$  è nell'intersezione di tre sfere,  $B_i$  centrate nei punti  $x^{(i)}$  e di raggi  $\ell_{k,i}$ . L'intersezione contiene due punti, che sono simmetrici per riflessione

---

<sup>(1)</sup> Essi certamente esistono a meno che i punti del corpo rigido non siano tutti disposti lungo una retta. Ignoreremo per il momento tale situazione.

rispetto al piano  $\pi$ . La scelta del semispazio cui  $x^{(k)}$  appartiene viene fatta una volta per tutte all'istante iniziale. Quindi, date all'istante iniziale le distanze  $\ell_{i,j}$ ,  $i, j = 1, \dots, N$ , il vincolo di rigidità implica che è sufficiente conoscere ad ogni istante successivo le posizioni dei soli tre punti  $x^{(1)}$ ,  $x^{(2)}$  ed  $x^{(3)}$  per ricostruire le posizioni di tutti gli altri punti, che pertanto soddisfano automaticamente le condizioni (11.1) per  $i = 1, \dots, N$  e  $j > 3$ . Le coordinate dei tre punti di riferimento prescelti a loro volta non sono tutte tra loro indipendenti, in quanto esse devono comunque soddisfare il vincolo di rigidità (11.1) con  $i, j = 1, 2, 3$ . La (11.1) in questo caso rappresenta tre relazioni indipendenti cui devono soddisfare le nove coordinate dei tre punti  $x^{(1)}$ ,  $x^{(2)}$  ed  $x^{(3)}$  e pertanto la configurazione del corpo rigido è determinata da sei parametri reali, provando in questo modo che il numero di gradi di libertà di un corpo rigido è  $n = 6$ .



Mediante i tre punti  $x^{(1)}$ ,  $x^{(2)}$  ed  $x^{(3)}$  è possibile costruire un riferimento  $\mathcal{R}$  detto riferimento solidale al corpo rigido. Si assume l'origine del riferimento in uno dei punti, ad esempio  $O' = x^{(1)}$  e si fissa uno dei tre vettori di base,  $e'_1$  come il vettore unitario parallelo a  $x^{(2)} - x^{(1)}$  e con lo stesso verso. Si sceglie quindi  $e'_2$  il vettore unitario perpendicolare ad  $e'_1$  che è contenuto nel piano  $\pi$  e tale che  $x^{(3)}$  si trovi nel semipiano positivo rispetto ad  $e'_2$ . Infine si sceglie  $e'_3$  come il vettore unitario perpendicolare a  $\pi$  con direzione tale che la terna  $\{e'_1, e'_2, e'_3\}$  sia una terna levogira. Si denoti con  $\mathcal{R} = \{O', e'_1, e'_2, e'_3\}$  il riferimento così costruito.

**Definizione 11.1:** Si dice *riferimento solidale* il riferimento  $\mathcal{R}$  ed ogni altro a riposo rispetto ad esso.

Il motivo di questa denominazione risiede nel fatto che, per costruzione, i punti degli assi coordinati si mantengono a distanza fissa dai punti  $x^{(1)}$ ,  $x^{(2)}$  ed  $x^{(3)}$ , così come fanno gli altri punti del corpo rigido e quindi si può immaginare il riferimento  $\mathcal{R}$  come un riferimento che si muove insieme con il corpo rigido.

Denoteremo con  $X^{(i)}$ ,  $i = 1, \dots, N$  le coordinate dei punti del corpo rigido rispetto ad  $\mathcal{R}$ . Il vincolo di rigidità comporta che tali coordinate rimangano costanti a tutti i tempi. Diremo *spazio solidale* al corpo rigido l'insieme di tutti i punti che hanno coordinate  $X$  rispetto al riferimento  $\mathcal{R}$  costanti nel tempo. I punti del corpo rigido per definizione sono punti dello spazio solidale. È però conveniente pensare a tutti i punti dello spazio solidale, indipendentemente dal fatto che sia ad essi associata o meno una massa, come punti del solido. Naturalmente i soli punti reali del corpo rigido contribuiranno alle quantità dinamiche.

Le relazioni tra le coordinate in due sistemi di riferimento in moto l'uno rispetto all'altro, sono state ottenute nel Capitolo 1, equazione (1.13). Denoteremo con  $\Lambda(t)$  la matrice le cui righe sono le componenti dei vettori della base  $\{e'_1(t), e'_2(t), e'_3(t)\}$  associata al riferimento solidale  $\mathcal{R}$  nella base  $\{e_1, e_2, e_3\}$ , cioè

$$e'_\beta = \sum_{\alpha=1}^3 \Lambda_{\beta\alpha}^T(t) e_\alpha.$$

La matrice  $\Lambda(t)$  è una matrice ortogonale per ogni tempo  $t$ ,

$$\Lambda(t)\Lambda^T(t) = \Lambda^T(t)\Lambda(t) = \mathbf{1}. \quad (11.2)$$

Se  $X$  sono le coordinate di un punto dello spazio solidale e  $x(t)$  le coordinate di tale punto rispetto al riferimento inerziale  $\mathcal{I}$  al tempo  $t$ , si ha

$$x_\alpha(t) = x_\alpha^{(O')}(t) + \sum_{\beta=1}^3 \Lambda_{\alpha\beta}(t) X_\beta, \quad \alpha = 1, \dots, 3.$$

o anche, in notazione matriciale

$$x(t) = x^{(O')}(t) + \Lambda(t)X. \quad (11.3)$$

La (11.3) è un caso speciale della (1.13) in quanto le coordinate  $X$  del punto dello spazio solidale sono costanti nel tempo.

La (11.3) mostra che il moto di ogni punto del corpo rigido è noto quando è noto il moto di un punto fissato  $O'$  e la funzione  $t \rightarrow \Lambda(t)$ . Le coordinate del punto  $O'$  sono tre parametri indipendenti. La matrice ortogonale  $\Lambda$  è caratterizzata da altri tre parametri, per individuare i quali è utile il seguente

**Teorema 11.1(Eulero):** *Sia  $\Lambda$  una matrice  $3 \times 3$  ortogonale, non coincidente con l'identità, tale che la base  $\{e'_1, e'_2, e'_3\}$  costituita dalle righe della matrice  $\Lambda$  sia*

concorde con la base  $\{e_1, e_2, e_3\}$ . Allora esiste un vettore unitario  $u$  che è un punto fisso per  $\Lambda$ , cioè tale che

$$\Lambda u = u. \quad (11.4)$$

Esistono inoltre una matrice ortogonale  $J$  ed un numero reale  $\varphi \in [0, 2\pi)$  tali che

$$J^T \Lambda J = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi & -\sin \varphi \\ 0 & \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}.$$

Dim. Ricordiamo che, essendo  $\Lambda$  ortogonale,

$$1 = \det(\Lambda \Lambda^T) = (\det \Lambda)^2.$$

Quindi  $\det \Lambda = \pm 1$ . Essendo le basi  $\{e_1, e_2, e_3\}$  e  $\{e'_1, e'_2, e'_3\}$  entrambe levogire, deve essere

$$\det \Lambda = 1.$$

La dimostrazione della (11.4) è ricondotta allo studio del problema agli autovalori

$$\Lambda u = \lambda u, \quad u \in \mathbb{C}^3, \quad \lambda \in \mathbb{C}, \quad u \neq 0. \quad (11.5)$$

Poiché  $u$  può avere componenti complesse, introduciamo il prodotto scalare

$$(x, y) = \sum_{\alpha=1}^3 \bar{x}_\alpha y_\alpha,$$

con  $\bar{x}$  complesso coniugato di  $x$ .  $\Lambda$  è una matrice reale, per cui si ha

$$(x, \Lambda y) = \sum_{\alpha=1}^3 \bar{x}_\alpha \sum_{\beta=1}^3 \Lambda_{\alpha\beta} y_\beta = \sum_{\beta=1}^3 y_\beta \sum_{\alpha=1}^3 \Lambda_{\beta\alpha}^T \bar{x}_\alpha = \sum_{\beta=1}^3 y_\beta \sum_{\alpha=1}^3 \overline{\Lambda_{\beta\alpha}^T x_\alpha} = (\Lambda^T x, y).$$

Pertanto se  $u$  risolve il problema agli autovalori,

$$(u, u) = (u, \Lambda^T \Lambda u) = (\Lambda u, \Lambda u) = |\lambda|^2 (u, u),$$

che comporta

$$|\lambda| = 1.$$

L'equazione secolare per il problema (11.5) è un'equazione di terzo grado in  $\lambda$  che quindi ammette certamente una soluzione reale  $\lambda_1$  e due soluzioni complesse tra loro coniugate  $\lambda_2$  e  $\lambda_3 = \bar{\lambda}_2$ , oppure tre soluzioni reali. Nel primo caso

$$1 = \det \Lambda = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = \lambda_1 |\lambda_2|^2 = \lambda_1,$$

e quindi la (11.4) è dimostrata. Nel secondo caso, essendo  $|\lambda_i| = 1$ , vi possono essere le seguenti situazioni:

- 1) tutti gli autovalori sono uguali ad 1:  $\Lambda$  coincide con l'identità, contro l'ipotesi;
- 2) tutti gli autovalori sono uguali a  $-1$ :  $\Lambda$  coincide con l'opposto dell'identità, contro la condizione che il determinante sia positivo;
- 3) due degli autovalori sono 1 ed uno  $-1$ , contro la condizione che il determinante sia positivo;
- 4) un autovalore è 1 e due  $-1$  e quindi la (11.4) è dimostrata.

Lo stesso argomento mostra che  $\lambda = 1$  è un autovalore semplice e quindi è unico, a meno di una costante moltiplicativa, il vettore  $u$  soluzione della (11.4). D'altra parte risulta

$$\Lambda \bar{u} = \lambda \bar{u}$$

e quindi anche

$$\Lambda(u + \bar{u}) = \lambda(u + \bar{u}).$$

Pertanto esiste una soluzione reale di (11.4), a meno di una costante moltiplicativa reale. Usando tale arbitrarietà si può scegliere  $u$  di modulo unitario.

Sia  $\{w^{(1)}, w^{(2)}, w^{(3)}\}$  una base qualsiasi base ortonormale con  $w^{(1)} = u$  e sia  $J$  la matrice

$$J_{\alpha\beta} = (w^{(\alpha)})_{\beta}.$$

La matrice  $J$ , anch'essa ortogonale, trasforma la base ortonormale  $\{e_1, e_2, e_3\}$  nella base ortonormale  $\{w^{(1)}, w^{(2)}, w^{(3)}\}$  e la matrice  $\Lambda$  nella matrice

$$\tilde{\Lambda} = J^T \Lambda J = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \hat{\Lambda} \end{pmatrix},$$

con  $\hat{\Lambda}$  matrice  $2 \times 2$  ortogonale con  $\det \hat{\Lambda} = 1$ .

Ogni matrice  $\hat{\Lambda}$   $2 \times 2$  ortogonale con determinante  $\det \hat{\Lambda} = 1$  si può scrivere nella forma

$$\Lambda_1 = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix},$$

con  $\varphi \in [0, 2\pi)$ . Infatti, le condizioni di ortogonalità sono:

$$\hat{\Lambda}_{11}^2 + \hat{\Lambda}_{12}^2 = 1, \quad \hat{\Lambda}_{21}^2 + \hat{\Lambda}_{22}^2 = 1, \quad \hat{\Lambda}_{11}\hat{\Lambda}_{21} + \hat{\Lambda}_{12}\hat{\Lambda}_{22} = 0.$$

Per le prime due condizioni, esistono  $\psi_1, \psi_2 \in [0, 2\pi)$ , tali che

$$\hat{\Lambda}_{11} = \cos \psi_1, \quad \hat{\Lambda}_{12} = -\sin \psi_1, \quad \hat{\Lambda}_{21} = \cos \psi_2, \quad \hat{\Lambda}_{22} = \sin \psi_2,$$

mentre la terza condizione diventa

$$\cos \psi_1 \cos \psi_2 - \sin \psi_1 \sin \psi_2 = \cos(\psi_2 + \psi_1) = 0,$$

che implica  $\psi_2 = \pi/2 - \psi_1$ .

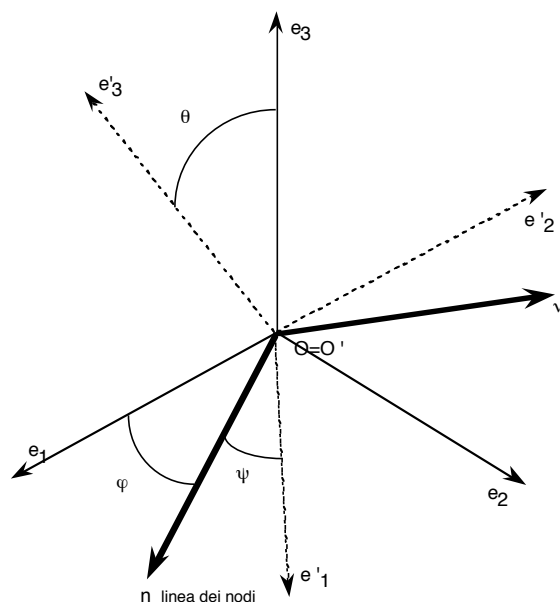
Questo conclude la dimostrazione del Teorema.

Per interpretare il risultato del teorema di Eulero, supponiamo  $u = e_3$  e che  $O' = O$ . Si ha allora

$$\begin{aligned} e'_1 &= \cos \varphi e_1 + \sin \varphi e_2, \\ e'_2 &= -\sin \varphi e_1 + \cos \varphi e_2, \\ e'_3 &= e_3. \end{aligned}$$

Quindi la base  $\{e'_1, e'_2, e'_3\}$  si ottiene dalla base  $\{e_1, e_2, e_3\}$  ruotando gli assi intorno all'asse per  $O'$  parallelo ad  $e_3$  di un angolo  $\varphi$ . Per tale motivo, in generale diremo che  $\Lambda$  è una *rotazione* intorno all'asse per  $O'$  parallelo ad  $u$ .

Ogni matrice  $\Lambda$  ortogonale, con  $\det \Lambda = 1$  si ottiene attraverso tre rotazioni successive, i cui angoli di rotazione sono detti angoli di Eulero. Per illustrare tale fatto si consideri la figura che segue, che corrisponde al caso  $O' = O$ .



### Angoli di Eulero.

L'angolo  $\theta \in [0, \pi]$ , detto *angolo di nutazione*, è l'angolo tra  $e_3$  ed  $e'_3$ , contato positivamente nel verso levogiro.

Si definisce *linea dei nodi* l'intersezione dei piani coordinati  $x_1x_2$  ed  $X_1X_2$ . Essa è ben definita se  $\theta \neq 0, \pi$ . Sia  $n$  il versore parallelo alla linea dei nodi, diretto nel

semipiano (rispetto alla retta  $X_2$ ) che contiene  $e'_1$ .

L'angolo  $\varphi \in [0, 2\pi)$ , detto *angolo di precessione*, è l'angolo tra  $e_1$  ed  $n$  contato positivamente nel verso levogiro.

L'angolo  $\psi \in [0, 2\pi)$ , detto *angolo di rotazione propria*, è l'angolo tra  $n$  ed  $e'_1$  anch'esso contato positivamente nel verso levogiro.

Le componenti del vettore unitario  $n$  nella base  $\{e'_1, e'_2, e'_3\}$  sono date dalla relazione

$$n = \cos \psi e'_1 - \sin \psi e'_2.$$

Detto  $\nu$  il vettore unitario nel piano  $X_1 X_2$  ortogonale ad  $n$ , e quindi tale che

$$\nu = \sin \psi e'_1 + \cos \psi e'_2, \quad (11.6)$$

si ha

$$e_3 = \cos \theta e'_3 + \sin \theta \nu$$

e quindi

$$e_3 = \sin \psi \sin \theta e'_1 + \cos \psi \sin \theta e'_2 + \cos \theta e'_3. \quad (11.7)$$

È chiaro che la base  $\{e_1, e_2, e_3\}$  è trasformata nella base  $\{e'_1, e'_2, e'_3\}$  mediante la seguente successione di rotazioni:

- 1) Una rotazione intorno all'asse  $e_3$  di angolo  $\varphi$ ,

$$\Lambda_{e_3}(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

che porta  $e_1$  a coincidere con la linea dei nodi.

- 2) Una rotazione di angolo  $\theta$  intorno alla linea dei nodi

$$\Lambda_n(\theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

che porta  $e_3$  a coincidere con  $e'_3$ .

- 3) Una rotazione di asse  $e'_3$  ed angolo  $\psi$ ,

$$\Lambda_{e'_3}(\psi) = \begin{pmatrix} \cos \psi & -\sin \psi & 0 \\ \sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

che porta  $n$  a coincidere con  $e'_1$ .

Il risultato di tali successive rotazioni è la matrice

$$\Lambda(\theta, \varphi, \psi) = \Lambda_{e_3}(\varphi) \Lambda_n(\theta) \Lambda_{e'_3}(\psi)$$



tale che

$$e_\alpha = \sum_{\beta=1}^3 \Lambda_{\alpha\beta}(\theta, \phi, \psi) e'_\beta.$$

È immediato controllare che

$$\begin{aligned} \Lambda(\theta, \phi, \psi) &= \\ &= \begin{pmatrix} \cos \psi \cos \varphi - \cos \theta \sin \psi \sin \varphi & -\sin \psi \cos \varphi - \cos \theta \cos \psi \sin \varphi & \sin \theta \sin \varphi \\ \cos \psi \sin \varphi + \cos \theta \sin \psi \cos \varphi & -\sin \psi \sin \varphi + \cos \theta \cos \psi \cos \varphi & -\sin \theta \cos \varphi \\ \sin \theta \sin \psi & \sin \theta \cos \psi & \cos \theta \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

che fornisce un altro modo per ottenere la (11.7).

La trasformazione che ad ogni matrice ortogonale  $\Lambda$  con  $\det \Lambda = 1$  associa gli angoli di Eulero è ben definita ed invertibile con l'esclusione dei valori  $\theta = 0$  e  $\theta = \pi$ , in corrispondenza dei quali la linea dei nodi e quindi gli angoli  $\varphi$  e  $\psi$  non sono determinati. Si osservi tuttavia che in questi casi solo la somma dei due angoli è rilevante ed essa è ben definita.

Le considerazioni precedenti mostrano che la configurazione di un corpo rigido è completamente determinata quando siano assegnati un suo punto  $O'$  e gli angoli di Eulero  $\psi, \theta, \varphi$  del riferimento solidale  $\mathcal{R}$  rispetto al riferimento inerziale  $\mathcal{I}$ . In molti casi risulta conveniente scegliere come punto  $O'$  il baricentro del corpo rigido. Nel seguito adotteremo quindi le sei coordinate Lagrangiane costituite dagli angoli di Eulero e dalle coordinate di  $O'$  rispetto ad  $\mathcal{I}$ .

#### Velocità in un moto rigido.

Il vincolo di rigidità è un vincolo indipendente dal tempo e quindi le velocità virtuali di ogni punto del corpo rigido coincidono con le velocità possibili. Esse possono essere caratterizzate ricordando che tutti i punti del corpo rigido, in conseguenza del vincolo di rigidità, sono a riposo rispetto al riferimento  $\mathcal{R}$  e quindi la velocità di ogni punto  $P$  coincide con la velocità di trascinamento del riferimento  $\mathcal{R}$  in  $P$ . La (1.18) ottenuta nel Capitolo 1, implica allora che la velocità  $v_P$  del punto  $P$  è data dall'espressione

$$v_P = v_{O'} + \omega \wedge \overrightarrow{O'P}, \quad (11.8)$$

dove  $\omega$  è il vettore velocità angolare del riferimento  $\mathcal{R}$  rispetto ad  $\mathcal{I}$ , che sarà denominata, in questo contesto *velocità angolare del corpo rigido*. Essa è data da

$$\omega_i = \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^3 \varepsilon_{i,j,k} A_{j,k}, \quad A_{i,k} = \sum_{l=1}^3 \dot{\Lambda}_{i,l} \Lambda_{l,k}^T.$$

Sostituendo l'espressione di  $\Lambda$  precedentemente ottenuta, in termini degli angoli di Eulero, un calcolo piuttosto lungo fornisce le relazioni tra le componenti di  $\omega$

e le derivate temporali degli angoli di Eulero. Un modo piú semplice di ottenere tali relazioni è quello che segue. Se la matrice  $\Lambda$  è della forma

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \cos \phi & -\sin \phi & 0 \\ \sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

con  $\phi$  funzione differenziabile del tempo, la matrice  $A$  è data da

$$A = \dot{\phi} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

e quindi il vettore  $\omega$  è dato da

$$\omega = (0, 0, \dot{\phi}) = \dot{\phi} e_3.$$

La matrice  $\Lambda$  è il prodotto di tre matrici della forma precedente. Inoltre, se  $\Lambda = \Lambda_1 \Lambda_2 \Lambda_3$ , e  $A_i = \dot{\Lambda}_i \Lambda_i^T$ , risulta

$$\begin{aligned} A &= \dot{\Lambda}_1 \Lambda_2 \Lambda_3 \Lambda_3^T \Lambda_2^T \Lambda_1^T + \Lambda_1 \dot{\Lambda}_2 \Lambda_3 \Lambda_3^T \Lambda_2^T \Lambda_1^T + \Lambda_1 \Lambda_2 \dot{\Lambda}_3 \Lambda_3^T \Lambda_2^T \Lambda_1^T \\ &= A_1 + \Lambda_1 A_2 \Lambda_1^T + \Lambda_1 \Lambda_2 A_3 \Lambda_2^T \Lambda_1^T. \end{aligned}$$

In conseguenza

$$\omega = \dot{\phi} e_3 + \dot{\theta} n + \dot{\psi} e'_3.$$

Ricordando le espressioni (11.6) e (11.7) di  $n$  ed  $e_3$  si ottiene

$$\begin{aligned} \omega &= \dot{\psi} e'_3 + \dot{\theta} (\cos \psi e'_1 - \sin \psi e'_2) + \dot{\phi} (\sin \psi \sin \theta e'_1 + \cos \psi \sin \theta e'_2 + \cos \theta e'_3) \\ &= (\dot{\phi} \sin \psi \sin \theta + \dot{\theta} \cos \psi) e'_1 + (\dot{\phi} \cos \psi \sin \theta - \dot{\theta} \sin \psi) e'_2 + (\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta) e'_3. \end{aligned}$$

Denotate con  $\Omega_\alpha$ ,  $\alpha = 1, \dots, 3$  le componenti del vettore  $\omega$  nella base  $\{e'_1, e'_2, e'_3\}$ , si ha

$$\begin{aligned} \Omega_1 &= \dot{\phi} \sin \psi \sin \theta + \dot{\theta} \cos \psi \\ \Omega_2 &= \dot{\phi} \cos \psi \sin \theta - \dot{\theta} \sin \psi \\ \Omega_3 &= \dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta. \end{aligned} \tag{11.9}$$

Un'altra importante relazione che sarà utilizzata nel seguito è quella che esprime la derivata temporale dei vettori della base  $\{e'_1, e'_2, e'_3\}$  in funzione di  $\omega$ . Il vettore  $e'_\alpha(t)$  coincide con il vettore  $\overrightarrow{O'P_\alpha}$ , con  $P_\alpha$  il punto a distanza unitaria posto lungo l'asse  $X_\alpha$ . Usando la (11.8) per tale punto si ha

$$v_{P_\alpha} = v_{O'} + \omega \wedge \overrightarrow{O'P_\alpha}.$$

Pertanto

$$\frac{d}{dt}e'_\alpha = \frac{d}{dt}\overrightarrow{O'P_\alpha} = v_{P_\alpha} - v_{O'} = \omega \wedge \overrightarrow{O'P_\alpha}$$

e quindi

$$\frac{d}{dt}e'_\alpha = \omega \wedge e'_\alpha, \quad \alpha = 1, \dots, 3. \quad (11.10)$$

## 11.2 Dinamica del corpo rigido.

### Principio dei lavori virtuali.

Per poter applicare allo studio del moto di un corpo rigido i risultati sui sistemi vincolati, occorre verificare che il vincolo di rigidità è un vincolo ideale e cioè soddisfa il principio dei lavori virtuali.

È naturale assumere che le reazioni vincolari che realizzano il vincolo di rigidità soddisfino il *principio di azione e reazione*, e cioè che la reazione vincolare  $f_i^{(v)}$  esercitata sul punto  $P_i$ ,  $i = 1, \dots, N$  sia somma di quelle che eserciterebbe ciascuno dei punti del corpo rigido,

$$f_i^{(v)} = \sum_{j=1}^N f_{j \rightarrow i}^{(v)},$$

e con  $f_{i \rightarrow i}^{(v)} = 0$  e per ogni coppia  $i, j$  con  $j \neq i$

$$f_{j \rightarrow i}^{(v)}(x^{(i)}, x^{(j)}) = \lambda_{j \rightarrow i}(|x^{(i)} - x^{(j)}|)(x^{(i)} - x^{(j)}),$$

con  $\lambda_{j \rightarrow i} = \lambda_{i \rightarrow j}$ .

In questa ipotesi, la potenza virtuale si annulla. Infatti

$$\begin{aligned} \mathcal{P}^{(v)} &= \sum_{i=1}^N f_i^{(v)} \cdot v_{P_i} = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N v_{P_i} \cdot f_{j \rightarrow i}^{(v)}(x^{(i)}, x^{(j)}) \\ &= \sum_{i < j=1}^N v_{P_i} \cdot f_{j \rightarrow i}^{(v)}(x^{(i)}, x^{(j)}) + \sum_{i > j=1}^N v_{P_i} \cdot f_{j \rightarrow i}^{(v)}(x^{(i)}, x^{(j)}) \\ &= \sum_{i < j=1}^N \left[ v_{P_i} \cdot f_{j \rightarrow i}^{(v)}(x^{(i)}, x^{(j)}) + v_{P_j} \cdot f_{i \rightarrow j}^{(v)}(x^{(j)}, x^{(i)}) \right] \\ &= \sum_{i < j=1}^N (v_{P_i} - v_{P_j}) \cdot (x^{(i)} - x^{(j)}) \lambda_{j \rightarrow i}(|x^{(i)} - x^{(j)}|). \end{aligned}$$

Le velocità possibili in ogni atto di moto rigido sono

$$v_{P_i} = v_{O'} + \omega \wedge (x^{(i)} - x^{O'}).$$

Sottraendo l'espressione di  $v_{P_j}$  da quella di  $v_{P_i}$ , si ha

$$v_{P_i} - v_{P_j} = \omega \wedge (x^{(i)} - x^{(j)}).$$

Pertanto

$$\mathcal{P}^{(v)} = \sum_{i < j=1}^N \lambda_{j \rightarrow i} (|x^{(i)} - x^{(j)}|) \omega \wedge (x^{(i)} - x^{(j)}) \cdot (x^{(i)} - x^{(j)}) = 0.$$

Un modello del vincolo di rigidità si costruisce in modo analogo al modello di vincolo ad una curva visto nel Capitolo 9. Infatti, posto

$$U^{(v)} = \frac{1}{2} \mu \sum_{i,j=1}^N \left( |x^{(i)} - x^{(j)}| - \ell_{i,j} \right)^2,$$

il modello di  $N$  punti materiali liberi, soggetti alle forze di energia potenziale  $U^{(v)}$  e a una forza esterna di energia potenziale inferiormente limitata, si comporta, nel limite  $\mu \rightarrow 0$  come un corpo rigido. Infatti, la conservazione dell'energia implica che ad ogni istante

$$\left| |x^{(i)} - x^{(j)}| - \ell_{i,j} \right| \leq C \mu^{-1/2}$$

e quindi il vincolo (11.1) è verificato nel limite  $\mu \rightarrow 0$ . Non discuteremo la dimostrazione della convergenza, che è molto simile a quella vista per il moto vincolato ad una curva.

#### Energia cinetica di un corpo rigido.

Per ottenere le equazioni di Lagrange per un corpo rigido è necessario esprimere l'energia cinetica

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i v_{P_i}^2$$

in funzione delle coordinate Lagrangiane (le coordinate del punto  $O'$  origine del riferimento solidale e gli angoli di Eulero del riferimento solidale rispetto al riferimento inerziale) e delle loro derivate temporali. Le due situazioni cui siamo interessati sono:

- 1) Il punto  $O'$  è scelto coincidente con il baricentro del corpo rigido oppure
- 2) Esiste un punto del corpo rigido che mantiene velocità nulla a tutti i tempi (*corpo rigido con un punto fisso*).

Caso 1: Nel primo caso abbiamo visto nel Capitolo 8 che l'energia cinetica si scrive

$$T = \frac{1}{2} m v_G^2 + T_G,$$

dove

$$T_G = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i (v_{P_i} - v_G)^2,$$

è l'energia cinetica nel riferimento baricentrale,

$$m = \sum_{i=1}^N m_i$$

è la massa totale,

$$x^{(G)} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^N m_i x^{(i)}$$

è il baricentro del corpo e  $v_G$  la sua velocità. La (11.8) implica

$$v_{P_i} - v_G = \omega \wedge (x^{(i)} - x^{(G)}).$$

Avendo scelto l'origine del riferimento solidale coincidente con il baricentro, il vettore  $x^{(i)} - x^{(G)}$  ha componenti  $X_\alpha^{(i)}$ ,  $\alpha = 1, \dots, 3$  nel riferimento solidale. Pertanto le componenti del vettore  $\omega \wedge (x^{(i)} - x^{(G)})$  nella base solidale sono

$$\begin{aligned} [\omega \wedge (x^{(i)} - x^{(G)})]_1 &= \Omega_2 X_3^{(i)} - \Omega_3 X_2^{(i)}, \\ [\omega \wedge (x^{(i)} - x^{(G)})]_2 &= \Omega_3 X_1^{(i)} - \Omega_1 X_3^{(i)}, \\ [\omega \wedge (x^{(i)} - x^{(G)})]_3 &= \Omega_1 X_2^{(i)} - \Omega_2 X_1^{(i)}. \end{aligned}$$

Si ha pertanto

$$(v_{P_i} - v_G)^2 = \left( \Omega_2 X_3^{(i)} - \Omega_3 X_2^{(i)} \right)^2 + \left( \Omega_3 X_1^{(i)} - \Omega_1 X_3^{(i)} \right)^2 + \left( \Omega_1 X_2^{(i)} - \Omega_2 X_1^{(i)} \right)^2$$

Esplicitando i quadrati e sostituendo nell'espressione dell'energia cinetica rispetto al baricentro, si ottiene quindi

$$T_G = \frac{1}{2} \sum_{\alpha, \beta=1}^3 I_{\alpha\beta} \Omega_\alpha \Omega_\beta \quad (11.11)$$

dove la matrice  $I$ , detta *matrice d'inerzia rispetto al baricentro*, ha la seguente espressione:

$$I_{\alpha\alpha} = \sum_{i=1}^N m_i \left[ |X^{(i)}|^2 - (X_\alpha^{(i)})^2 \right] = \sum_{i=1}^N \sum_{\gamma \neq \alpha=1}^3 m_i (X_\gamma^{(i)})^2;$$

$$I_{\alpha\beta} = - \sum_{i=1}^N m_i X_{\alpha}^{(i)} X_{\beta}^{(i)}, \quad \alpha \neq \beta = 1, \dots, 3.$$

La quantità  $I_{\alpha\alpha}$  è detta *momento d'inerzia* rispetto all'asse  $e'_{\alpha}$ , mentre per  $\alpha \neq \beta$  la quantità  $I_{\alpha\beta}$  è detta *prodotto d'inerzia* rispetto agli assi  $e'_{\alpha}$  ed  $e'_{\beta}$ .

La matrice d'inerzia  $I$  è determinata esclusivamente in termini delle masse del corpo rigido e delle coordinate dei punti del corpo rigido rispetto ad un riferimento solidale. In conseguenza essa non varia nel tempo e può essere calcolata quando siano assegnate le posizioni iniziali dei punti del corpo ed il riferimento solidale.

La definizione di  $T_G$  e l'espressione (11.11) mostrano che la matrice d'inerzia  $I$  è simmetrica e non negativa, anzi è definita positiva in quanto  $v_{P_i} = 0$  per ogni  $i = 1, \dots, N$  se e solo se  $\omega = 0$ . Pertanto, in conseguenza del teorema sugli autovettori di una matrice simmetrica e definita positiva visto nel Capitolo 10, esiste una base  $\{h_1, h_2, h_3\}$  di autovettori per tale matrice. Tale base è detta *base principale d'inerzia*. Poiché  $I$  non dipende dal moto, la base  $\{h_1, h_2, h_3\}$  non dipende anch'essa dal moto e quindi essa è una base *solidale* come la base  $\{e'_1, e'_2, e'_3\}$  del riferimento solidale. Non vi è quindi perdita di generalità nell'assumere che la base  $\{e'_1, e'_2, e'_3\}$  sia essa stessa una base principale d'inerzia e in tal caso il riferimento solidale  $\mathcal{R}$  è detto *riferimento principale d'inerzia*. È spesso usata anche la denominazione di base o riferimento *centrale* di inerzia per sottolineare che si è fissata l'origine del riferimento solidale nel baricentro  $x_G$  del corpo rigido.

Avendo assunto che  $\mathcal{R}$  sia un riferimento principale d'inerzia, ed avendo denotato con  $I_{\alpha}$ ,  $\alpha = 1, \dots, 3$  gli autovalori di  $I$ , l'espressione dell'energia cinetica rispetto al baricentro diviene

$$T_G = \frac{1}{2} [I_1 \Omega_1^2 + I_2 \Omega_2^2 + I_3 \Omega_3^2]$$

e quindi l'energia cinetica è

$$T = \frac{1}{2} m v_G^2 + \frac{1}{2} [I_1 \Omega_1^2 + I_2 \Omega_2^2 + I_3 \Omega_3^2].$$

Ricordando le espressioni (11.9) delle  $\Omega_{\alpha}$ , si ha quindi la desiderata espressione dell'energia cinetica in funzione delle coordinate del baricentro, degli angoli di Eulero e delle loro derivate:

$$T = \frac{1}{2} m v_G^2 + \frac{1}{2} I_1 [\dot{\varphi} \sin \psi \sin \theta + \dot{\theta} \cos \psi]^2 + \frac{1}{2} I_2 [\dot{\varphi} \cos \psi \sin \theta - \dot{\theta} \sin \psi]^2 + \frac{1}{2} I_3 [\dot{\psi} + \dot{\varphi} \cos \theta]^2. \quad (11.12)$$

Una semplificazione di tale espressione si ottiene quando i due autovalori  $I_1$  ed  $I_2$  della matrice d'inerzia relativa al baricentro coincidono, caso in cui si dice che il

corpo rigido è un *giroscopio*. Questo accade di solito quando la distribuzione delle masse nel corpo rigido è simmetrica rispetto a rotazioni intorno all'asse passante per il baricentro e parallelo ad  $e'_3$ . Tale asse è detto *asse giroscopico*. Utilizzando tale circostanza, la (11.12) si riduce a

$$T = \frac{1}{2}mv_G^2 + \frac{1}{2}I_1 [\dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta + \dot{\theta}^2] + \frac{1}{2}I_3 [\dot{\psi} + \dot{\varphi} \cos \theta]^2. \quad (11.13)$$

Le componenti Lagrangiane delle forze attive, dipendendo dalla configurazione e dall'atto di moto, possono sempre esprimersi in funzione delle coordinate del baricentro, degli angoli di Eulero e delle loro derivate. Una volta ottenute tali espressioni, si perviene pertanto alle equazioni di Lagrange per in corpo rigido.

Caso 2: Si supponga di aggiungere al sistema l'ulteriore vincolo ideale indipendente dal tempo che fissa la posizione di un punto del corpo rigido. È facile convincersi che tale vincolo si può realizzare con un modello di vincolo del tipo discusso in precedenza.

In questo caso si può assumere che il punto  $O'$  sia il punto fisso e non vi è perdita di generalità nello scegliere  $O' = O$ . Il sistema in tal caso ha soli tre gradi di libertà e la configurazione del sistema è univocamente individuata dai tre angoli di Eulero. Tutte le espressioni derivate in precedenza si estendono a questo caso, in quanto, pur non essendo  $O'$  coincidente con il baricentro, esso ha velocità nulla e quindi l'energia cinetica si riduce a

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i [\omega \wedge x_i]^2.$$

Si ottiene quindi

$$T = \frac{1}{2} \sum_{\alpha, \beta=1}^3 I_{\alpha\beta}^{(O)} \Omega_\alpha \Omega_\beta \quad (11.14)$$

ove la matrice d'inerzia  $I^{(O)}$  è relativa al punto fisso  $O$  invece che al baricentro. Essa può essere immediatamente calcolata, quando sia nota la matrice  $I$  relativa al baricentro. Calcoliamo ad esempio  $I_{11}$ .

$$\begin{aligned} I_{11}^{(O)} &= \sum_{i=1}^N m_i [(X_2^{(i)})^2 + (X_3^{(i)})^2] = \\ &= \sum_{i=1}^N m_i [(X_2^{(i)} - X_2^{(G)})^2 + (X_3^{(i)} - X_3^{(G)})^2] + m [(X_2^{(G)})^2 + (X_3^{(G)})^2] + \\ &+ 2 \sum_{i=1}^N m_i [(X_2^{(i)} - X_2^{(G)})X_2^{(G)} + (X_3^{(i)} - X_3^{(G)})X_3^{(G)}]. \end{aligned}$$

L'ultimo termine è nullo per definizione di baricentro e quindi si ottiene

$$I_{11}^{(O)} = I_{11} + \tilde{I}_{11}^{(G)},$$

essendo

$$\tilde{I}_{11}^{(G)} = m \left[ (X_2^{(G)})^2 + (X_3^{(G)})^2 \right]$$

il momento di inerzia rispetto all'asse  $e'_1$  che si otterrebbe se tutta la massa  $m$  del corpo rigido fosse concentrata nel baricentro. Una relazione analoga si ottiene per i prodotti di inerzia e in conclusione si ha il seguente

**Teorema 11.2 (di Huygens-Steiner):** *Se  $I$  denota la matrice d'inerzia relativa al baricentro ed  $I^{(O)}$  quella relativa all'origine  $O$ , vale la seguente relazione:*

$$I^{(O)} = I + \tilde{I}^{(G)},$$

con  $\tilde{I}^{(G)}$  la matrice di inerzia rispetto ad  $O$  corrispondente ad un sistema avente tutta la massa  $m$  concentrata nel baricentro  $G$ .

Assumendo che la base del riferimento solidale sia una base principale d'inerzia rispetto all'origine, l'energia cinetica si scrive allora

$$T = \frac{1}{2} \left\{ I_1 \left[ \dot{\varphi} \sin \psi \sin \theta + \dot{\theta} \cos \psi \right]^2 + I_2 \left[ \dot{\varphi} \cos \psi \sin \theta - \dot{\theta} \sin \psi \right]^2 + I_3 \left[ \dot{\psi} + \dot{\varphi} \cos \theta \right]^2 \right\}. \quad (11.15)$$

Espressione del Momento angolare.

E' utile per gli sviluppi successivi considerare il momento angolare  $K_Q$  rispetto ad un polo arbitrario  $Q$ , definito come

$$K_Q = \sum_{i=1}^N m_i (x^{(i)} - x^{(Q)}) \wedge v^{(i)}.$$

Siamo interessati ad un'espressione di  $K_Q$  in funzione della velocità angolare nei casi  $Q = G$  oppure  $v_Q = 0$ . Otterremo tale espressione nel caso  $Q = G$ , mentre l'altro caso è più semplice. Omettiamo l'indice  $Q$  per semplicità.

$$\begin{aligned} K &= \sum_{i=1}^N m_i (x^{(i)} - x^{(G)}) \wedge v^{(i)} = \sum_{i=1}^N m_i (x^{(i)} - x^{(G)}) \wedge (v^{(i)} - v_G) \\ &= \sum_{i=1}^N m_i (x^{(i)} - x^{(G)}) \wedge [\omega \wedge (x^{(i)} - x^{(G)})]. \end{aligned}$$



Usando l'identità

$$(x^{(i)} - x^{(G)}) \wedge [\omega \wedge (x^{(i)} - x^{(G)})] = \left| x^{(i)} - x^{(G)} \right|^2 \omega - [(x^{(i)} - x^{(G)}) \cdot \omega] (x^{(i)} - x^{(G)}),$$

dette  $K_\alpha$  le componenti del vettore  $K$  nella base del riferimento solidale  $\{e'_1, e'_2, e'_3\}$ , si trova immediatamente

$$K_\alpha = \sum_{\beta=1}^3 I_{\alpha\beta} \Omega_\beta, \quad (11.16)$$

dove  $I$  è la matrice d'inerzia rispetto al baricentro. Nel caso del moto con punto fisso vale la stessa espressione con  $I$  matrice d'inerzia rispetto all'origine.

Lagrangiana del giroscopio pesante.

Supponiamo che il corpo rigido sia un giroscopio, che il punto fisso  $O$  appartenga all'asse giroscopico e che sul corpo rigido agisca la sola forza peso, diretta lungo  $e_3$ , nel verso ad esso opposto:

$$f_i = -m_i g e_3.$$

La sua energia potenziale è

$$U = \sum_{i=1}^N m_i g e_3 \cdot x^{(i)} = m g e_3 \cdot x^{(G)}.$$

Sia  $\ell$  la distanza del baricentro dall'origine (che appartiene all'asse giroscopico). Si ha allora  $x^{(G)} = \ell e'_3$ . La definizione dell'angolo di nutazione implica

$$U = U(\theta) = m g \ell \cos \theta.$$

Quando il corpo rigido è un giroscopio, è immediato controllare, grazie al teorema di Huygens-Steiner, che la matrice d'inerzia relativa al punto fisso  $O$  è diagonale nella stessa base  $\{e'_1, e'_2, e'_3\}$  nella quale è diagonale la matrice d'inerzia baricentrale; inoltre, gli autovalori corrispondenti ad  $e'_1$  ed  $e'_2$  sono coincidenti. Pertanto l'energia cinetica si riduce a

$$T = \frac{1}{2} \left\{ I_1 \left[ \dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta + \dot{\theta}^2 \right] + I_3 \left[ \dot{\psi} + \dot{\varphi} \cos \theta \right]^2 \right\} \quad (11.17)$$

ed  $I_\alpha$  denota i momenti d'inerzia relativi all'origine.

Pertanto la Lagrangiana di un giroscopio pesante con un punto fisso appartenente all'asse giroscopico è

$$L(\dot{\varphi}, \dot{\psi}, \dot{\theta}, \varphi, \psi, \theta) = \frac{1}{2} \left\{ I_1 \left[ \dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta + \dot{\theta}^2 \right] + I_3 \left[ \dot{\psi} + \dot{\varphi} \cos \theta \right]^2 \right\} - m g \ell \cos \theta.$$

Moto di un giroscopio pesante.

L'indipendenza della Lagrangiana dagli angoli  $\varphi$  e  $\psi$  comporta due ulteriori leggi di conservazione che, assieme alla conservazione dell'energia, consentono un'analisi qualitativa del moto del giroscopio pesante simile a quella condotta per i sistemi unidimensionali e per i moti centrali. Dalle equazioni di Lagrange infatti segue che

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = I_1 \dot{\varphi} \sin^2 \theta + I_3 (\dot{\psi} + \dot{\varphi} \cos \theta) \cos \theta$$

e

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} = I_3 (\dot{\psi} + \dot{\varphi} \cos \theta)$$

sono costanti nel tempo. Denoteremo con  $k_3$  e  $K_3$  i valori di tali costanti determinati dalle condizioni iniziali. Si ha cioè

$$k_3 = I_1 \dot{\varphi} \sin^2 \theta + I_3 (\dot{\psi} + \dot{\varphi} \cos \theta) \cos \theta \quad (11.18)$$

e

$$K_3 = I_3 (\dot{\psi} + \dot{\varphi} \cos \theta). \quad (11.19)$$

Dalla terza delle (11.9) segue allora che

$$K_3 = I_3 \Omega_3. \quad (11.20)$$

Essendo la base usata una base principale d'inerzia, questo comporta che la costante  $K_3$  rappresenta la componente del momento angolare nella direzione  $e'_3$ . E' immediato controllare che  $k_3$  rappresenta la componente del momento angolare nella direzione  $e_3$ . Dalle (11.18) e (11.19) sia ha poi

$$k_3 = K_3 \cos \theta + I_1 \dot{\varphi} \sin^2 \theta. \quad (11.21)$$

Ricordando inoltre che l'energia totale  $E$  è data da

$$E = T + U = \frac{1}{2} \left\{ I_1 [\dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta + \dot{\theta}^2] + I_3 [\dot{\psi} + \dot{\varphi} \cos \theta]^2 \right\} + mgl \cos \theta \quad (11.22)$$

ed usando la (11.19) possiamo eliminare la  $\dot{\psi}$  da (11.22), ottenendo la conservazione dell'*energia ridotta*

$$E' = \frac{1}{2} I_1 [\dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta + \dot{\theta}^2] + mgl \cos \theta, \quad (11.23),$$

che differisce da  $E$  per un termine costante:

$$E = E' + \frac{K_3^2}{2I_3}.$$

Usando la (11.21) per ottenere

$$\dot{\varphi} = \frac{k_3 - K_3 \cos \theta}{I_1 \sin^2 \theta}, \quad (11.24)$$

e sostituendo in (11.23) otteniamo infine

$$E' = \frac{1}{2} I_1 \dot{\theta}^2 + U_{eff}(\theta) \quad (11.25)$$

con

$$U_{eff}(\theta) = \frac{(k_3 - K_3 \cos \theta)^2}{2I_1 \sin^2 \theta} + mg\ell \cos \theta. \quad (11.26)$$

La (11.25) contiene soltanto la variabile  $\theta$  ed è formalmente simile all'equazione che regola il moto di un sistema unidimensionale conservativo di massa  $I_1$  e energia potenziale  $U_{eff}(\theta)$ . Per il suo studio si può quindi ricorrere ai metodi usati nel Capitolo 4.

Notiamo subito una conseguenza dell'espressione del potenziale efficace. Supponiamo di voler studiare il comportamento nel tempo dell'angolo  $\theta$  quando all'istante iniziale si sceglie  $\theta_0 = 0$ . In conseguenza di tale condizione si ha  $k_3 = K_3$  e  $U'_{eff}(0) = 0$ . La posizione  $\theta = 0$  è quindi una posizione di equilibrio. Inoltre risulta

$$U''_{eff}(0) = \frac{K_3^2}{4I_1} - mg\ell.$$

Ricordando che  $K_3 = I_3 \Omega_3$  si conclude che  $\theta = 0$  è posizione di equilibrio stabile se

$$\Omega_3^2 > \frac{4I_1 mg\ell}{I_3^2},$$

e cioè il giroscopio inizialmente posto con l'asse giroscopico parallelo alla verticale, tende a mantenere tale posizione se  $\Omega_3$ , la velocità di rotazione intorno all'asse  $e'_3$ , è sufficientemente grande. Quindi una rotazione sufficientemente grande attorno all'asse giroscopico stabilizza la posizione di equilibrio  $\theta = 0$  che, in assenza di questa rotazione, sarebbe instabile in conseguenza della forza peso.

Torniamo ora al caso generale. È più conveniente usare, in luogo di  $\theta$  la variabile

$$u = \cos \theta \quad (11.27)$$

che varia nell'intervallo  $[-1, 1]$ . Usando la (11.25) si ottiene allora

$$\dot{u}^2 = \dot{\theta}^2 \sin^2 \theta = \frac{2 \sin^2 \theta}{I_1} (E' - U_{eff}(\theta)) := f(u) \quad (11.28)$$

con

$$f(u) = (\alpha - \beta u)(1 - u^2) - (a - bu)^2, \quad (11.29)$$

avendo posto

$$\alpha = \frac{2E'}{I_1}, \quad \beta = \frac{2mg\ell}{I_1}, \quad a = \frac{k_3}{I_1}, \quad b = \frac{K_3}{I_1}.$$

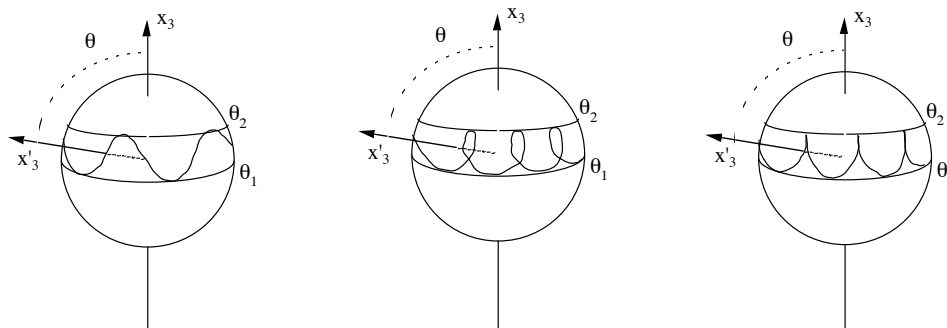
La funzione  $u \rightarrow f(u)$  è un polinomio di terzo grado in  $u$  ed è quindi ben definita su  $\mathbb{R}$ , sebbene ovviamente gli unici valori interessanti siano quelli assunti per  $u \in [-1, 1]$ , stante la (11.27). Poiché  $f(u) \rightarrow +\infty$  per  $u \rightarrow +\infty$ , mentre  $f(\pm 1) = -(a \mp b)^2 < 0$ , tranne che nel caso  $a = \pm b$ , si conclude che  $u \rightarrow f(u)$  ammette due radici reali  $u_1$  ed  $u_2$  possibilmente coincidenti nell'intervallo  $(-1, 1)$  ed una maggiore di 1. Detti  $\theta_1$  e  $\theta_2$  due angoli in  $(0, \pi)$  tali che  $u_i = \cos \theta_i$ , per  $i = 1, 2$ , dai metodi esposti nel Capitolo 4 segue che la variabile  $\theta$  oscilla periodicamente tra i valori  $\theta_1$  e  $\theta_2$ . Tale moto periodico dell'asse  $e'_3$  è detto *nutazione*, da cui il nome dato all'angolo  $\theta$ .

Una volta determinato l'andamento della variabile  $\theta$ , la (11.24), che si riscrive

$$\dot{\varphi} = \frac{a - bu}{1 - u^2}, \quad (11.30)$$

permette di studiare l'andamento dell'angolo  $\varphi$  nel tempo. In particolare, se l'equazione  $a = bu$  non ammette soluzione in  $(u_1, u_2)$ , allora l'andamento di  $\varphi$  è monotono.

Possiamo interpretare gli angoli  $\theta$  e  $\varphi$  come colatitudine e longitudine di un punto sulla sfera unitaria che rappresenta l'intersezione dell'asse  $e'_3$  con tale sfera. Il moto di tale punto è allora del tipo mostrato nella prima delle figure che seguono:



Se invece  $\bar{u} = a/b \in (u_1, u_2)$ , allora, quando  $\theta = \bar{\theta} = \arccos \bar{u}$ , risulta  $\dot{\varphi} = 0$  e quindi  $\varphi$  ha un istante di arresto e di inversione del moto che corrisponde alla seconda delle figure precedenti, ove la traccia dell'asse  $e'_3$  sulla sfera unitaria forma dei cappi. Infine, se  $\bar{u}$  coincide con  $u_1$  o  $u_2$ , allora vi è ancora un istante di arresto, ma senza inversione del moto e corrispondentemente la traccia dell'asse  $e'_3$  sulla

sfera unitaria presenta delle cuspidi, come mostrato nella terza delle figure precedenti. In ciascuno di questi casi il moto associato all'angolo  $\varphi$  si dice *precessione*, ciò che giustifica il nome dell'angolo  $\varphi$ . Ricordando infine che il corpo rigido ha una *rotazione propria*  $\Omega_3$  intorno all'asse  $e'_3$  che è costante per la conservazione di  $K'_3$ , si può concludere che *il moto di un corpo rigido pesante è composto di una nutazione, una precessione ed una rotazione propria*.

#### Corpo rigido continuo.

Concludiamo questa discussione osservando che, se invece di assumere il corpo rigido costituito da un numero finito di punti materiali, lo si fosse pensato come un sistema continuo, tutte le considerazioni precedenti sarebbero state valide a meno di piccole modifiche. In particolare, sia  $\rho(X) \geq 0$  la distribuzione di massa del corpo, nulla nei punti  $X$  che non fanno parte del corpo e sia  $dX$  l'elemento di volume nello spazio solidale. La massa totale è

$$m = \int \rho(X) dX,$$

il baricentro è

$$X_G = \frac{1}{m} \int X \rho(X) dX$$

ed la matrice d'inerzia è

$$I_{\alpha\alpha}^{(O)} = \int (X^2 - X_\alpha^2) \rho(X) dX,$$

$$I_{\alpha\beta}^{(O)} = \int X_\alpha X_\beta \rho(X) dX, \quad \alpha \neq \beta.$$

Una volta sostituite tali espressioni alle loro versioni discrete, tutte le conclusioni precedenti si estendono al caso di un corpo rigido continuo. La giustificazione di tale affermazione risiede nel fatto che si può pensare di dividere il corpo continuo in un insieme finito di cellette  $\mathcal{C}_i$ ,  $i = 1, \dots, N$  ed approssimarlo con un insieme discreto di punti materiali  $P_i$  posti al centro delle cellette con masse  $m_i = \rho(P_i) \text{vol}(\mathcal{C}_i)$ . Un procedimento di limite conduce quindi alle espressioni suddette della Lagrangiana ed alle equazioni di Lagrange.

### **11.3 Equazioni di Eulero per il corpo rigido.**

Il moto di un corpo rigido costituisce un esempio nel quale informazioni sul moto possono essere ottenute mediante le equazioni cardinali. Ciò è dovuto al fatto che le reazioni vincolari associate al vincolo di rigidità soddisfano il principio di azione e reazione e sono pertanto un sistema di forze con risultante e momento risultante nulli, come accade alle forze interne di un sistema libero. In conseguenza

le equazioni cardinali sono un insieme di equazioni pure. Si denotino con  $R$  ed  $M_Q$  il risultante ed il momento risultante rispetto al polo  $Q$  delle forze attive. Se  $Q$  è a riposo oppure coincide con il baricentro, le equazioni cardinali per il corpo rigido si scrivono:

$$\begin{aligned} m\ddot{x}_G &= R, \\ \frac{d}{dt}K_Q &= M_Q, \end{aligned} \quad (11.31).$$

La seconda delle (11.31) risulta utile nel caso che le forze attive siano tali che il loro momento rispetto a  $Q$  dipenda solo dalle coordinate angolari e non dalla posizione del baricentro. Un caso particolarmente importante è quello in cui esse hanno momento nullo rispetto al polo  $Q$ . In questi casi la seconda equazione cardinale è infatti in grado di determinare la legge con cui variano nel tempo gli angoli di Eulero. Due casi particolarmente notevoli in cui ciò accade sono:

- 1) *Corpo rigido pesante nel vuoto*: Il sistema delle forze attive è equivalente ad un'unica forza applicata nel baricentro e il momento risultante di tale sistema rispetto al baricentro è nullo. Scelto  $Q = x^{(G)}$ , le (11.31) divengono allora

$$\begin{aligned} m\ddot{x}_G &= -mge_3, \\ \frac{d}{dt}K_G &= 0. \end{aligned} \quad (11.32)$$

La prima delle (11.32) determina il moto del baricentro, mentre la seconda determina gli angoli di Eulero come si vedrà più avanti. Si osservi che la presenza dell'aria accoppierebbe le due equazioni e tale conclusione non sarebbe più valida.

- 2) *Corpo rigido con un punto fisso*. In questo caso è presente un'ulteriore reazione vincolare, oltre a quelle dovute al vincolo di rigidità, dovuta al vincolo che il punto  $O$  resti a riposo. Il sistema ha pertanto tre gradi di libertà, e le coordinate Lagrangiane sono date dagli angoli di Eulero. Scelto  $Q = O$  le (11.31) divengono allora

$$\begin{aligned} m\ddot{x}_G &= R + R^{(v)}, \\ \frac{d}{dt}K_O &= M_O + M_O^{(v)}. \end{aligned} \quad (11.33)$$

L'assunzione che il vincolo sia ideale equivale alla condizione

$$M_O^{(v)} = 0.$$

Infatti, essendo le velocità virtuali della forma

$$v_{P_i} = \omega \wedge x^{(i)},$$

con  $\omega$  vettore arbitrario, la potenza della reazione virtuale è

$$\mathcal{P}^{(v)} = \sum_{i=1}^N f_i^{(v)} \cdot v_{P_i} = \sum_{i=1}^N f_i^{(v)} \cdot \omega \wedge x^{(i)} = \omega \cdot \sum_{i=1}^N x^{(i)} \wedge f_i^{(v)} = M_O^{(v)} \cdot \omega.$$

Il principio dei lavori virtuali e l'arbitrarietà di  $\omega$  conducono alla conclusione asserita. Pertanto la seconda delle equazioni cardinali è anche in questo caso un'equazione pura. Le equazioni cardinali si scrivono cioè

$$\begin{aligned} m\ddot{x}_G &= R + R^{(v)}, \\ \frac{d}{dt}K_O &= M_O. \end{aligned} \quad (11.34)$$

Le uniche variabili libere per il sistema sono le variabili angolari e quindi il momento delle forze attive dipende solo da queste. Pertanto, la seconda equazione cardinale determina gli angoli di Eulero e quindi il moto del sistema. La prima delle equazioni cardinali può allora essere usata per determinare il risultante della reazione vincolare incognita. Un caso particolarmente importante di moto con un punto fisso si ha quando non vi sono forze attive agenti sul sistema. In questo caso si parla di *moti per inerzia* del corpo rigido.

Nei due casi precedenti lo studio del moto del corpo rigido è ricondotto allo studio dell'equazione

$$\frac{d}{dt}K = M_O(\varphi, \theta, \psi, \dot{\varphi}, \dot{\theta}, \dot{\psi}, t) \quad (11.35)$$

avendo indicato con  $K$  alternativamente il momento angolare rispetto al baricentro o all'origine. Assumendo che la base  $\{e'_1, e'_2, e'_3\}$  sia una base principale d'inerzia, si ha allora

$$K = I_1\Omega_1e'_1 + I_2\Omega_2e'_2 + I_3\Omega_3e'_3. \quad (11.36)$$

Usando tale espressione e ricordando che

$$\frac{d}{dt}e'_\alpha = \omega \wedge e'_\alpha$$

e che

$$e'_1 \wedge e'_2 = e'_3, \quad e'_2 \wedge e'_3 = e'_1, \quad e'_3 \wedge e'_1 = e'_2,$$

la derivata di  $K$  si scrive

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}K &= \\ &= I_1\dot{\Omega}_1e'_1 + I_2\dot{\Omega}_2e'_2 + I_3\dot{\Omega}_3e'_3 + I_1\Omega_1\dot{e}'_1 + I_2\Omega_2\dot{e}'_2 + I_3\Omega_3\dot{e}'_3 \\ &= I_1\dot{\Omega}_1e'_1 + I_2\dot{\Omega}_2e'_2 + I_3\dot{\Omega}_3e'_3 + I_1\Omega_1\omega \wedge e'_1 + I_2\Omega_2\omega \wedge e'_2 + I_3\Omega_3\omega \wedge e'_3 \\ &= I_1\dot{\Omega}_1e'_1 + I_2\dot{\Omega}_2e'_2 + I_3\dot{\Omega}_3e'_3 + I_1\Omega_1(\Omega_3e'_2 - \Omega_2e'_3) + I_2\Omega_2(\Omega_1e'_3 - \Omega_3e'_1) \\ &\quad + I_3\Omega_3(\Omega_2e'_1 - \Omega_1e'_2) \\ &= [I_1\dot{\Omega}_1 - \Omega_2\Omega_3(I_2 - I_3)]e'_1 + [I_2\dot{\Omega}_2 - \Omega_3\Omega_1(I_3 - I_1)]e'_2 \\ &\quad + [I_3\dot{\Omega}_3 - \Omega_1\Omega_2(I_1 - I_2)]e'_3 \end{aligned}$$

Quindi la (11.35) è equivalente al sistema di tre equazioni

$$\begin{aligned} I_1 \dot{\Omega}_1 - \Omega_2 \Omega_3 (I_2 - I_3) &= M_1(\varphi, \theta, \psi, \dot{\varphi}, \dot{\theta}, \dot{\psi}, t), \\ I_2 \dot{\Omega}_2 - \Omega_3 \Omega_1 (I_3 - I_1) &= M_2(\varphi, \theta, \psi, \dot{\varphi}, \dot{\theta}, \dot{\psi}, t), \\ I_3 \dot{\Omega}_3 - \Omega_1 \Omega_2 (I_1 - I_2) &= M_3(\varphi, \theta, \psi, \dot{\varphi}, \dot{\theta}, \dot{\psi}, t). \end{aligned} \quad (11.37)$$

Tale sistema prende il nome di *equazioni di Eulero* per il corpo rigido.

Sostituendo le espressioni delle componenti della velocità angolare si ottiene un sistema del secondo ordine, di forma piuttosto complicata, le cui incognite sono gli angoli di Eulero in funzione del tempo.

Consideriamo per semplicità il caso in cui il momento delle forze attive rispetto ad  $O$  sia nullo e cioè i *moti per inerzia* del corpo rigido. In tal caso le equazioni di Eulero divengono:

$$\begin{aligned} I_1 \dot{\Omega}_1 - \Omega_2 \Omega_3 (I_2 - I_3) &= 0, \\ I_2 \dot{\Omega}_2 - \Omega_3 \Omega_1 (I_3 - I_1) &= 0, \\ I_3 \dot{\Omega}_3 - \Omega_1 \Omega_2 (I_1 - I_2) &= 0. \end{aligned} \quad (11.38)$$

Si tratta adesso di un sistema del primo ordine nelle funzioni incognite  $t \rightarrow \Omega_\alpha(t)$ ,  $\alpha = 1, \dots, 3$ , ridotto a forma normale e quindi dotato di una ed una sola soluzione per fissati dati iniziali. Una volta risolto tale sistema, le relazioni (11.9) divengono un sistema di tre equazioni differenziali del primo ordine nelle incognite  $t \rightarrow \theta(t)$ ,  $t \rightarrow \psi(t)$  e  $t \rightarrow \varphi(t)$ , riducibile a forma normale se  $\sin \theta \neq 0$  e quindi anch'esso ammette un'unica soluzione per condizioni iniziali prefissate, purché  $\sin \theta(t_0) \neq 0$ .

La risoluzione delle (11.38) è semplice nel caso che i momenti di inerzia siano tutti uguali. In tal caso le  $\Omega_\alpha$  sono costanti nel tempo e tutti i moti sono quindi caratterizzati da velocità angolare costante. Un altro caso in cui è facile risolvere le (11.38) si ha quando due dei momenti d'inerzia coincidono, come avviene nel caso del giroscopio. In questo caso, supposti  $I_1 = I_2 = I$ , le (11.38) si riducono a

$$\begin{aligned} I \dot{\Omega}_1 - \Omega_2 \Omega_3 (I - I_3) &= 0, \\ I \dot{\Omega}_2 - \Omega_3 \Omega_1 (I_3 - I) &= 0, \\ I_3 \dot{\Omega}_3 &= 0. \end{aligned} \quad (11.39)$$

La terza di tali equazioni assicura che  $\Omega_3$  è un integrale primo. Detto  $r$  il suo valore all'istante iniziale, le (11.39) si riducono a

$$\begin{aligned} \dot{\Omega}_1 - \Gamma \Omega_2 &= 0, \\ \dot{\Omega}_2 + \Gamma \Omega_1 &= 0, \end{aligned} \quad (11.40)$$

con

$$\Gamma = \frac{(I - I_3)r}{I}.$$



Si tratta quindi di un sistema di due equazioni lineari. Differenziando di nuovo si vede che esso è equivalente a

$$\begin{aligned}\ddot{\Omega}_1 + \Gamma^2 \Omega_1 &= 0, \\ \ddot{\Omega}_2 + \Gamma^2 \Omega_2 &= 0.\end{aligned}$$

Si ha quindi

$$\begin{aligned}\Omega_1 &= A \cos(|\Gamma|t + \phi), \\ \Omega_2 &= -A \sin(|\Gamma|t + \phi),\end{aligned}$$

con  $A$  e  $\phi$  opportunamente scelti in funzione dei dati iniziali. Pertanto  $\Omega_1$  ed  $\Omega_2$  oscillano armonicamente con frequenza  $|\Gamma|$ . In conseguenza, il vettore  $\Omega$  ha la componente  $\Omega_3$  costante mentre la sua proiezione sul piano  $X_1X_2$  ruota su un cerchi di raggio  $A$  con velocità angolare  $|\Gamma|$ . Un moto di questo tipo è detto *precessione regolare*.

#### Rotazioni permanenti e loro stabilità.

Nel caso in cui i tre momenti di inerzia sono distinti, la risoluzione delle (11.38) è problematica. Ci limiteremo a considerare le sole soluzioni *stazionarie*, dette *rotazioni permanenti* e la loro stabilità. Supponiamo, per fissare le idee che sia

$$I_1 < I_2 < I_3.$$

Le soluzioni stazionarie, caratterizzate da  $\dot{\Omega}_\alpha = 0$ ,  $\alpha = 1, \dots, 3$ , soddisfano le condizioni

$$\begin{aligned}\Omega_2 \Omega_3 (I_2 - I_3) &= 0, \\ \Omega_3 \Omega_1 (I_3 - I_1) &= 0, \\ \Omega_1 \Omega_2 (I_1 - I_2) &= 0.\end{aligned}\tag{11.41}$$

Essendo i momenti d'inerzia tutti distinti,  $\Omega$  può avere al più una componente non nulla, cioè  $\Omega$  deve coincidere con uno dei tre vettori

$$\Omega^{(1)} = \Omega_1 e'_1, \quad \Omega^{(2)} = \Omega_2 e'_2, \quad \Omega^{(3)} = \Omega_3 e'_3.$$

Sia ha in conseguenza il

**Teorema 11.3:** *Le rotazioni permanenti sono possibili soltanto intorno ad assi principali d'inerzia.*

Se il dato iniziale  $\Omega(0)$  ha componenti solo lungo uno degli assi della terna principale d'inerzia, allora il moto susseguente è certamente una rotazione permanente. Se però vi è una componente, anche piccola, nelle altre direzioni,  $\Omega$  varia nel tempo e un tale dato iniziale non dà luogo a rotazioni permanenti. Si pone quindi il problema della stabilità delle rotazioni permanenti, se cioè si verifica che

per ogni  $\varepsilon > 0$ , esiste  $\delta > 0$  tale che, se  $|\Omega(0) - \Omega^{(\alpha)}| < \delta$  allora  $|\Omega(t) - \Omega^{(\alpha)}| < \varepsilon$  per tutti i tempi. Dimostreremo che tale affermazione è *vera* se  $\alpha = 1$  oppure  $\alpha = 3$ , mentre è *falsa* per  $\alpha = 2$  e quindi

**Teorema 11.4.** *Le rotazioni permanenti intorno agli assi con momento di inerzia minimo e massimo sono stabili mentre quella intorno all'asse con momento di inerzia intermedio è instabile.*

Dim. La dimostrazione di tale proprietà è conseguenza di un semplice argomento geometrico basato sugli integrali primi per le equazioni (11.38). La seconda equazione cardinale, in assenza di momento delle forze esterne infatti implica che il vettore  $K$  è costante rispetto al riferimento inerziale  $\mathcal{I}$ . Questo non rende costanti le componenti di  $K$  rispetto al riferimento solidale  $\mathcal{R}$  in quanto questo si muove, ma la quantità  $K_1^2 + K_2^2 + K_3^2$  è costante in quanto il modulo di un vettore è invariante per rotazioni. Detto  $L$  il valore del modulo di  $K$  all'istante  $t = 0$  si ha quindi

$$K_1^2 + K_2^2 + K_3^2 = L^2. \quad (11.42)$$

Oltre al modulo del momento angolare è conservata l'energia cinetica  $T_G$  data da

$$T_G = \frac{1}{2} [I_1\Omega_1^2 + I_2\Omega_2^2 + I_3\Omega_3^2],$$

come si controlla immediatamente moltiplicando ciascuna delle (11.38) per la componente corrispondente di  $\Omega$  e sommando.

Sia  $E$  il valore di  $T_G$  all'istante iniziale. Si ha allora

$$[I_1\Omega_1^2 + I_2\Omega_2^2 + I_3\Omega_3^2] = 2E.$$

Poiché le componenti di  $K$  ed  $\Omega$  sono legate dalle relazioni

$$K_\alpha = I_\alpha\Omega_\alpha, \quad \alpha = 1, \dots, 3,$$

studiando il comportamento di  $K$  si ottengono informazioni corrispondenti su  $\Omega$ . Riscrivendo l'integrale dell'energia in termini di  $K$ .

$$\frac{K_1^2}{2I_1E} + \frac{K_2^2}{2I_2E} + \frac{K_3^2}{2I_3E} = 1, \quad (11.43)$$

Il vettore  $K$  può essere visto come le coordinate di un punto di  $\mathbb{R}^3$  che deve appartenere alla sfera di raggio  $L$  definita dalla relazione (11.42) ed all'ellissoide di semiassi

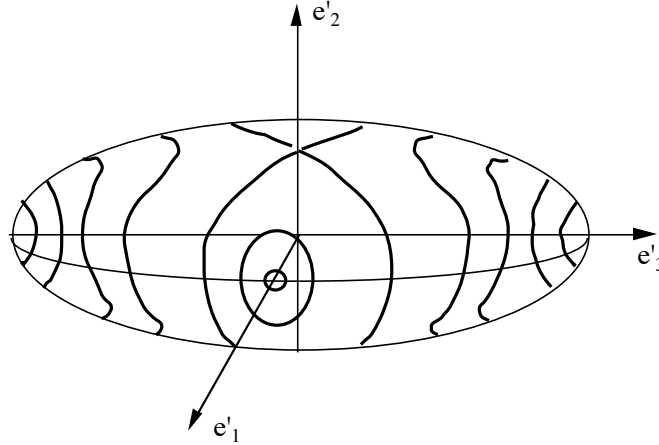
$$A_1 = \sqrt{2EI_1}, \quad A_2 = \sqrt{2EI_2}, \quad A_3 = \sqrt{2EI_3},$$

definito dalla relazione (11.43). Notiamo che, in conseguenza delle relazioni tra i momenti di inerzia, si ha

$$A_1 < A_2 < A_3.$$

Si tratta quindi di studiare le intersezioni tra queste due quadriche in dipendenza dei valori di  $E$  ed  $L$  che sono determinati dai dati iniziali. È chiaro che non vi sono dati iniziali possibili con  $L < A_1$  oppure  $L > A_3$ . Tutti gli altri casi danno luogo ad intersezioni non vuote.

La figura che segue mostra tali intersezioni al variare del valore di  $L$ .



$L = A_1$ : Le uniche soluzioni possibili sono  $K = \pm K^{(1)} = \pm I_1 \Omega^{(1)}$  che corrisponde alle rotazioni permanenti intorno all'asse  $e'_1$ .

$A_1 < L < A_1 + \varepsilon$ : Se  $L$  è poco più grande di  $A_1$ , l'intersezione delle due quadriche è contenuta in un piccolo intorno di  $K^{(1)}$  e pertanto il moto si svolge a tutti i tempi in tale intorno, provando la stabilità della rotazione permanente intorno ad  $e'_1$ .

$L = A_3$ : Come nel primo caso le uniche soluzioni possibili sono  $K = \pm K^{(3)} = \pm I_3 \Omega^{(3)}$  che corrisponde alle rotazioni permanenti intorno all'asse  $e'_3$ .

$A_3 - \varepsilon < L < A_3$ : L'intersezione delle due quadriche è contenuta in un piccolo intorno di  $K^{(3)}$  e questo implica la stabilità della rotazione permanente intorno ad  $e'_3$ .

$L = A_2$ : L'intersezione è costituita da due curve chiuse che si intersecano in corrispondenza di  $K = \pm K^{(2)} = \pm I_2 \Omega^{(2)}$ . In particolare, è possibile andare da un punto prossimo a  $K^{(2)}$  ad uno prossimo a  $-K^{(2)}$ . Questo basta per concludere l'instabilità della rotazione permanente intorno ad  $e'_2$ .

$A_2 - \varepsilon < L < A_2 + \varepsilon$ : In questo caso l'intersezione delle due quadriche è contenuta in una striscia intorno alle curve del caso precedente.

L'analisi dei casi precedenti conclude la dimostrazione del teorema.

## 12. Sistemi Hamiltoniani.

### 12.1 Nozione di sistema Hamiltoniano.

I sistemi Lagrangiani studiati nel Capitolo 10 sono basati sulla costruzione di uno spazio ambiente, lo *spazio delle configurazioni*  $W \subset \mathbb{R}^n$ , le cui coordinate sono le coordinate Lagrangiane  $q$ , al fianco delle quali sono poi introdotte le variabili ausiliarie  $\eta$  che rappresentano in ogni punto le componenti dei vettori tangenti le traiettorie del sistema. Le equazioni di Lagrange sono un sistema del secondo ordine nelle funzioni incognite  $t \rightarrow q(t)$ . Tale struttura è del tutto adeguata allo studio dei moti di un sistema meccanico a vincoli olonomi. Tuttavia un aspetto poco soddisfacente di tale struttura risiede nel ruolo profondamente differente giocato dalle variabili configurazionali  $q$  e dalle variabili di velocità  $\eta$ .

Ad esempio, il sistema delle equazioni di Lagrange può essere trasformato in un sistema del primo ordine della forma

$$\begin{aligned}\dot{q}_h &= \eta_h, \\ \dot{\eta}_h &= \phi_h(q, \eta, t),\end{aligned}\quad h = 1, \dots, n, \quad (12.1)$$

ove le funzioni  $\phi_h$  sono date dalle (10.11) del Capitolo 10.

La diversità di ruolo tra le variabili  $q$  ed  $\eta$  è naturale nel contesto dei sistemi Lagrangiani in quanto deriva dal problema meccanico che fornisce la motivazione di tale teoria.

Tuttavia, l'asimmetria tra le variabili  $q$  ed  $\eta$  restringe le tecniche di risoluzione del problema, legandole alla diversa interpretazione delle variabili. È invece desiderabile una formulazione del problema indipendente dal significato fisico delle variabili. Tale formulazione è possibile ed è la *formulazione Hamiltoniana* delle equazioni del moto.

La formulazione Hamiltoniana è basata sulla costruzione di nuove variabili che sostituiscono le variabili  $\eta$ . Queste sono in realtà già state introdotte nel Capitolo 10. Esse sono definite come

$$p_h = \frac{\partial L}{\partial \eta_h}(\eta, q, t), \quad h = 1, \dots, n \quad (12.2)$$

e sono dette *impulsi* o, a volte, *momenti cinetici coniugati*.

Se la Lagrangiana  $L$  è regolare, nel senso precisato nel Capitolo 10, le relazioni (12.2) sono risolvibili localmente rispetto alle  $\eta$  e quindi la trasformazione

$$\Phi : (\eta, q, t) \in \mathbb{R}^n \times W \times I \rightarrow (p, q, t) = \left( \frac{\partial L}{\partial \eta_h}(\eta, q, t), q, t \right)$$

è localmente invertibile.

Ad esempio, nel caso meccanico si ha  $L = T - U$  e

$$T(\eta, q, t) = \frac{1}{2} \sum_{h,k=1}^n a_{h,k}(q, t) \eta_h \eta_k + \sum_{k=1}^n b_k(q, t) \eta_k + c(q, t),$$

che può anche scriversi

$$T(\eta, q, t) = \frac{1}{2}(\eta, A(q, t)\eta) + (b(q, t), \eta) + c(q, t),$$

ove  $A(q, t)$  è la matrice di componenti le  $a_{h,k}(q, t)$  e  $b(q, t)$  è il vettore di componenti  $b_k(q, t)$ .

La definizione di  $p$  comporta

$$p = A(q, t)\eta + b(q, t).$$

Poiché la matrice  $A$  è simmetrica e definita positiva, essa è non singolare e quindi

$$\eta = A^{-1}(q, t)[p - b(q, t)].$$

Tale relazione fornisce, nel caso meccanico, l'espressione esplicita dell'inversa,  $\Phi^{-1}$  della trasformazione  $\Phi$  nella forma

$$\Phi^{-1}(p, q, t) = (A^{-1}(q, t)[p - b(q, t)], q, t)$$

Tornando al caso generale, l'invertibilità di  $\Phi$  comporta che si possono utilizzare le variabili impulso  $p$  come variabili indipendenti in luogo delle  $\eta$ . Una tale scelta è ragionevole dal momento che in termini di tali variabili le equazioni di Lagrange divengono

$$\dot{p}_h = \frac{\partial L}{\partial q_h}(\Phi^{-1}(p, q, t)). \quad (12.3)$$

Naturalmente le equazioni per le  $q$  perdono però la semplice forma fornita dalla prima delle (12.1) per divenire

$$\dot{q}_h = \alpha_h(p, q, t), \quad (12.4)$$

ove con  $\alpha_h(p, q, t)$  si sono denotate le prime  $n$  componenti di  $\Phi^{-1}$ , cioè le funzioni che forniscono le  $\eta$  in termini delle  $p$ :

$$\eta_h = \alpha_h(p, q, t), \quad h = 1, \dots, n$$

Il sistema di equazioni (12.3), (12.4) così ottenuto è un nuovo sistema del primo ordine equivalente alle equazioni di Lagrange. La sua soluzione  $t \rightarrow (p(t), q(t))$  è unica quando si prefissi un punto  $(p^{(0)}, q^{(0)})$  in un aperto di  $\mathbb{R}^{2n}$ . Ogni soluzione si

può interpretare come una traiettoria nello spazio  $\Gamma$  costituito dalle coppie  $(p, q)$  in un aperto di  $\mathbb{R}^{2n}$ . Tale spazio è denominato *spazio delle fasi*<sup>(1)</sup>.

Il sistema (12.3), (12.4) tuttavia non presenta particolari vantaggi rispetto al sistema (12.1) in quanto esso è formalmente più complesso del sistema (12.1) senza apparire particolarmente simmetrico nelle variabili  $p$  e  $q$ . In realtà le sue proprietà di simmetria vengono immediatamente evidenziate dall'introduzione della funzione di Hamilton, tramite la seguente

**Definizione 12.1:** La funzione

$$H(p, q, t) = \alpha(p, q, t) \cdot p - L(\alpha(p, q, t), q, t), \quad (12.5)$$

è detta *funzione di Hamilton* o *Hamiltoniana*.

Ricordando la definizione di energia generalizzata  $E(\eta, q, t)$  data nel Capitolo 10, si vede che la funzione  $H$  non è altro che l'energia generalizzata espressa in funzione di  $p$  invece che di  $\eta$ :

$$H(p, q, t) = E(\alpha(p, q, t), q, t).$$

In particolare, nel caso meccanico con vincoli indipendenti dal tempo,  $L = T_2 - U$  e  $E = T_2 + U$ . Poiché  $U$  non dipende da  $\eta$ , per determinare  $H$  basta sostituire l'espressione di  $\eta$  in funzione di  $p$  nell'espressione della energia cinetica

$$T_2(\eta, q) = \frac{1}{2} \sum_{h,k=1}^n a_{h,k}(q) \eta_h \eta_k := \frac{1}{2}(\eta, A(q)\eta).$$

Si ha

$$p = A(q)\eta,$$

da cui

$$\eta = A(q)^{-1}p,$$

e quindi

$$\tilde{T}_2(p, q) = T_2(A(q)^{-1}p, q) = \frac{1}{2}(A(q)^{-1}p, A(q)A(q)^{-1}p) = \frac{1}{2}(p, A(q)^{-1}p).$$

Pertanto la funzione di Hamilton di un sistema a vincoli olonomi, ideali e indipendenti dal tempo è

$$H(p, q) = \frac{1}{2}(p, A(q)^{-1}p) + U(q).$$

---

<sup>(1)</sup> Tale definizione di spazio delle fasi è adeguata alle considerazioni che seguono, che sono tutte di carattere locale. Non ci occuperemo della costruzione, che invece sarebbe possibile, di strutture globali sullo spazio delle fasi in quanto tali aspetti vanno al di là del livello elementare di questo corso.

Tornando alla situazione generale, dalle definizioni di  $p$  ed  $H$  si ha:

$$\begin{aligned}\frac{\partial H}{\partial q_h} &= p \cdot \frac{\partial \alpha}{\partial q_h} - \sum_{k=1}^n \frac{\partial L}{\partial \eta_k}(\alpha(p, q, t), q, t) \frac{\partial \alpha_k}{\partial q_h} - \frac{\partial L}{\partial q_h}(\alpha(p, q, t), q, t) \\ &= p \cdot \frac{\partial \alpha}{\partial q_h} - \sum_{k=1}^n p_k \frac{\partial \alpha_k}{\partial q_h} - \frac{\partial L}{\partial q_h}(\alpha(p, q, t), q, t) \\ &= -\frac{\partial L}{\partial q_h}(\alpha(p, q, t), q, t)\end{aligned}$$

e quindi la (12.3) diventa

$$\dot{p}_h = -\frac{\partial H}{\partial q_h}.$$

D'altra parte

$$\begin{aligned}\frac{\partial H}{\partial p_h} &= \alpha_h(p, q, t) + \sum_{k=1}^n p_k \frac{\partial \alpha_k}{\partial p_h}(p, q, t) - \sum_{k=1}^n \frac{\partial L}{\partial \eta_k}(\alpha(p, q, t), q, t) \frac{\partial \alpha_k}{\partial p_h} \\ &= \alpha_h(p, q, t).\end{aligned}$$

Pertanto la (12.4) diventa

$$\dot{q}_h = \frac{\partial H}{\partial p_h}$$

e quindi il sistema (12.3), (12.4) è equivalente al sistema

$$\begin{aligned}\dot{q}_h &= \frac{\partial H}{\partial p_h} \\ \dot{p}_h &= -\frac{\partial H}{\partial q_h}\end{aligned} \quad h = 1, \dots, n. \quad (12.6)$$

Il sistema di equazioni (12.6) è detto *sistema di Hamilton* e la sua peculiarità risiede nel fatto che i suoi secondi membri si lasciano esprimere tutti come derivate di un'unica funzione. Tale struttura è molto particolare e sintetizza le caratteristiche speciali delle equazioni differenziali che descrivono il moto dei sistemi meccanici soggetti a forze conservative.

In analogia con la definizione di sistema Lagrangiano, diamo la seguente

**Definizione 12.2:** Dato un aperto  $\Gamma \subset \mathbb{R}^{2n}$  ed una funzione differenziabile  $H$  definita in  $\Gamma \times \mathbb{R}$ , si dice *sistema Hamiltoniano* con *Hamiltoniana*  $H$ , sullo *spazio delle fasi*  $\Gamma$  l'insieme costituito da  $\Gamma$ , dalla funzione  $H$  e dal sistema di equazioni differenziali (12.6).

**Definizione 12.3:** L'Hamiltoniana  $H$  si dice *regolare* in  $\Gamma$  se è differenziabile due volte e per ogni  $(p, q, t) \in \Gamma \times \mathbb{R}$  la matrice  $B(p, q, t)$  di coefficienti

$$B_{h,k}(p, q, t) = \frac{\partial^2 H}{\partial p_h \partial p_k}(p, q, t)$$

è non singolare.

Si ha una completa equivalenza tra i sistemi Lagrangiani regolari ed i sistemi Hamiltoniani regolari. Si è infatti visto che a partire da un sistema Lagrangiano regolare è possibile costruire un sistema Hamiltoniano regolare. Viceversa, dato un sistema Hamiltoniano regolare, la trasformazione

$$\Psi : (p, q, t) \in \Gamma \times \mathbb{R} \rightarrow (\eta, q, t)$$

con

$$\eta_h = \frac{\partial H}{\partial p_h}(p, q, t) = \alpha_h(p, q, t) \quad (12.7)$$

è localmente invertibile. Sia  $\Psi^{-1}$  la sua inversa e si denotino con  $\pi_k(\eta, q, t)$  le prime  $n$  componenti di  $\Psi^{-1}$ . Posto

$$\hat{L}(\eta, q, t) = \pi(\eta, q, t) \cdot \eta - H(\pi(\eta, q, t), q, t),$$

si ha

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{L}}{\partial q_h}(\eta, q, t) &= \sum_{k=1}^n \left( \eta_k - \frac{\partial H}{\partial p_h}(\pi(\eta, q, t), q, t) \right) \frac{\partial \pi_k}{\partial q_h} - \frac{\partial H}{\partial q_h}(\pi(\eta, q, t), q, t) \\ &= - \frac{\partial H}{\partial q_h}(\pi(\eta, q, t), q, t). \end{aligned} \quad (12.8)$$

Inoltre

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{L}}{\partial \eta_h}(\eta, q, t) &= \pi_h(\eta, q, t) + \sum_{k=1}^n \left( \eta_k - \frac{\partial H}{\partial p_h}(\pi(\eta, q, t), q, t) \right) \frac{\partial \pi_k}{\partial \eta_h} \\ &= \pi_h(\eta, q, t). \end{aligned} \quad (12.9)$$

Poichè dalla prima delle equazioni di Hamilton e da (12.7) segue che

$$\dot{q}_h = \eta_h(t),$$

la (12.9) implica che

$$\dot{p}_h = \frac{d}{dt} \pi_h(\dot{q}, q, t) = \frac{d}{dt} \frac{\partial \hat{L}}{\partial \eta_h}(\dot{q}, q, t),$$



che, insieme alla seconda delle equazioni di Hamilton ed alla (12.8), fornisce

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \hat{L}}{\partial \eta_h}(\dot{q}, q, t) - \frac{\partial \hat{L}}{\partial q_h}(\dot{q}, q, t) = 0,$$

e cioè le equazioni di Lagrange relative alla Lagrangiana  $\hat{L}$ . Si noti infine che, se  $H$  è stato ottenuto dalla Lagrangiana  $L$ , allora  $\hat{L} = L$ . Infatti, in questo caso si ha

$$\hat{L}(\eta, q, t) = \sum_{k=1}^n \pi_k(\eta, q, t) \eta_k - \left( \sum_{h=1}^n p_h \alpha_h(p, q, t) - L(\alpha(p, q, t), q, t) \right) \Big|_{p=\pi(\eta, q, t)}.$$

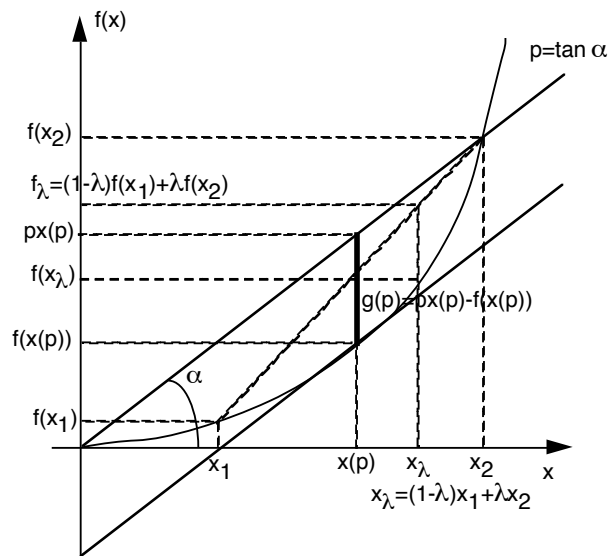
Essendo  $\eta = \alpha(p, q, t)$  e  $p = \pi(\alpha(p, q, t), q, t)$ , i primi due termini si cancellano e ne consegue che  $\hat{L} = L$ .

In definitiva la procedura che trasforma un sistema Lagrangiano in un sistema Hamiltoniano e viceversa è riflessiva. L'operazione che trasforma la Lagrangiana  $L$  nell'Hamiltoniana  $H$  è la stessa che trasforma l'Hamiltoniana  $H$  nella Lagrangiana  $\hat{L} = L$ . Si tratta di una struttura matematica che si presenta in vari problemi di Meccanica ed anche in problemi non meccanici come la relazione tra i potenziali termodinamici. Nel seguito ne forniamo la definizione generale.

## 12.2 Trasformata di Legendre.

Una funzione reale  $f$  definita su  $\mathbb{R}^n$  si dice (*strettamente*) *convessa* se, per ogni coppia di punti  $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n$ , risulta

$$f((1-\lambda)x_1 + \lambda x_2) < (1-\lambda)f(x_1) + \lambda f(x_2), \quad \forall \lambda \in (0, 1).$$



Per ogni  $p \in \mathbb{R}^n$ , si ponga

$$g(p) = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} [p \cdot x - f(x)].$$

**Definizione 12.4:** La funzione  $p \rightarrow g(p)$  è detta *trasformata di Legendre* di  $f$ .

L'operazione di trasformata di Legendre si denota con  $\mathcal{L}$  e quindi si scrive

$$g = \mathcal{L}f.$$

*Osservazione:* La definizione di trasformata di Legendre implica

$$x \cdot p \leq f(x) + g(p).$$

La definizione di trasformata di Legendre ammette una semplice interpretazione geometrica, per discutere la quale supponiamo  $n = 1$ .

Sia  $r$  la retta per l'origine di equazione  $y = px$  con coefficiente angolare  $p = \tan \alpha$ . Si consideri il punto  $x(p)$  ove il grafico della funzione è alla massima distanza dalla retta  $r$  lungo l'asse verticale<sup>(2)</sup>.  $g(p)$  è per definizione tale distanza.

La definizione data non richiede la derivabilità della funzione  $f$ . Assumiamo tuttavia, per semplificare la discussione seguente, che  $f$  è differenziabile due volte e la matrice delle sue derivate seconde  $D^2f(x)$  è definita positiva per ogni  $x \in \mathbb{R}^n$ , condizioni che assicurano che  $f$  è convessa. Il calcolo della trasformata di Legendre diventa in questo caso più semplice. Infatti, fissato  $p \in \mathbb{R}^n$ , il punto  $x(p)$  ove la funzione

$$F_p(x) = p \cdot x - f(x)$$

raggiunge il suo massimo è tale che

$$\nabla F_p(x) = p - \nabla f(x) = 0.$$

Tale relazione definisce la funzione  $p \rightarrow x(p)$  in quanto  $f$  è strettamente convessa e quindi la matrice delle derivate seconde di  $f$  è non singolare in ogni punto di  $\mathbb{R}^n$ . Determinato il punto  $x(p)$ , si trova

$$g(p) = p \cdot x(p) - f(x(p)).$$

Esempi:

---

<sup>(2)</sup> In particolare, se la curva è differenziabile, esso è il punto la cui tangente è parallela ad  $r$ .

- 1)  $f(x) = x \log x - x$ , con  $x \in (0, +\infty)$ <sup>(3)</sup>.  $f'(x) = \log x$ ,  $f''(x) = 1/x > 0$  per ogni  $x \in (0, +\infty)$ .  $x(p)$  risolve  $p = \log x$  e quindi  $x(p) = e^p$ . Pertanto

$$g(p) = px(p) - x(p) \log x(p) + x(p) = pe^p - e^p p + e^p = e^p.$$

Pertanto

$$\mathcal{L}(x \log x - x) = e^p.$$

- 2)

$$f(x) = \frac{|x|^\alpha}{\alpha}, \quad \alpha > 1, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

$x(p)$  è la soluzione di

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left( x \cdot p - \frac{|x|^\alpha}{\alpha} \right) = p_i - |x|^{\alpha-2} x_i = 0.$$

Quindi  $x(p)$  ha la direzione di  $p$  mentre il suo modulo è

$$|x(p)| = |p|^{1/(\alpha-1)}.$$

Quindi

$$x(p) = \frac{p}{|p|} |p|^{1/(\alpha-1)}.$$

Pertanto

$$g(p) = p \cdot x(p) - \frac{|x(p)|^\alpha}{\alpha} = \frac{|p|^\beta}{\beta}, \quad \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\alpha} = 1.$$

Quindi

$$\mathcal{L} \left( \frac{|x|^\alpha}{\alpha} \right) = \frac{|p|^\beta}{\beta}, \quad \frac{1}{\beta} = 1 - \frac{1}{\alpha}.$$

La precedente relazione implica in particolare la *disuguaglianza di Young*:

$$|x \cdot p| \leq \frac{|x|^\alpha}{\alpha} + \frac{|p|^\beta}{\beta}, \quad \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\alpha} = 1, \quad \alpha, \beta > 1.$$

- 3)

$$f(x) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n a_{i,j} x_i x_j = \frac{1}{2} x \cdot Ax,$$

ove la matrice  $A$  di componenti  $a_{i,j}$ ,  $i, j = 1, \dots, n$  è definita positiva.  $x(p)$  è la soluzione di

$$p = Ax$$

---

<sup>(3)</sup> Il fatto che  $f$  non sia definita in questo esempio su tutto  $\mathbb{R}$  non dà luogo ad alcuna difficoltà. La definizione data può essere estesa a funzioni definite su un qualsiasi insieme convesso.

e quindi

$$x(p) = A^{-1}p.$$

Pertanto

$$g(p) = p \cdot A^{-1}p - \frac{1}{2}A^{-1}p \cdot AA^{-1}p = \frac{1}{2}p \cdot A^{-1}p.$$

Si ha quindi

$$\mathcal{L}\left(\frac{1}{2}x \cdot Ax\right) = \frac{1}{2}p \cdot A^{-1}p.$$

**Proposizione 12.1:** *Se  $f$  è differenziabile due volte con matrice delle derivate seconde definita positiva in  $\mathbb{R}^n$  allora anche  $g(p)$  è differenziabile due volte con matrice delle derivate seconde definita positiva.*

Dim. Si ha

$$\nabla_p g(p) = \nabla_p x(p) \cdot p + x(p) - \nabla_x f(x(p)) \cdot \nabla_p x(p) = x(p).$$

Quindi

$$\nabla_p^2 g(p) = \nabla_p x(p).$$

Differenziando la relazione

$$p = \nabla_x f(x(p)),$$

si ottiene

$$\mathbf{1} = \nabla_x^2 f(x(p)) \cdot \nabla_p x(p),$$

e quindi

$$\nabla_p^2 g(p) = [\nabla_x^2 f(x(p))]^{-1}.$$

Pertanto,  $\nabla_p^2 g(p)$  esiste ed è definita positiva.  $\square$

La Proposizione 12.1 mostra che ha senso considerare la trasformata di Legendre di  $g(p)$ . Si ha

**Proposizione 12.2:** *Se  $f$  è differenziabile due volte con matrice delle derivate seconde definita positiva in  $\mathbb{R}^n$ , allora  $\mathcal{L}(\mathcal{L}(f)) = f$ .*

Dim. Infatti, se  $g = \mathcal{L}(f)$  e  $h = \mathcal{L}(g)$ , per ogni  $q$  fissato, sia  $p(q)$  il punto in cui  $q \cdot p - g(p)$  raggiunge il massimo. Esso è soluzione di

$$\begin{aligned} q_i &= \frac{\partial g(p)}{\partial p_i} = \frac{\partial}{\partial p_i} (p \cdot x(p) - f(x(p))) \\ &= x_i(p) + \sum_{j=1}^n \left[ p_j - \frac{\partial}{\partial x_j} f(x(p)) \right] \frac{\partial x_j(p)}{\partial p_i} = x_i(p). \end{aligned}$$

Pertanto  $q \rightarrow p(q)$  è la funzione inversa di  $p \rightarrow x(p)$ . In conseguenza

$$\begin{aligned} h(q) &= q \cdot p(q) - g(p(q)) = q \cdot p(q) - p(q) \cdot x(p(q)) + f(x(p(q))) \\ &= q \cdot p(q) - p(q) \cdot x(p(q)) + f(q) = f(q). \end{aligned} \quad \square$$

Consideriamo ora la Lagrangiana  $(\eta, q, t) \rightarrow L(\eta, q, t)$ . Per fissati  $(q, t)$ , come funzione di  $\eta$  essa è dotata di matrice Hessiana  $\mathcal{H}(\eta)$  non singolare per ogni  $\eta \in \mathbb{R}^n$ . Assumiamo in più che essa sia definita positiva. Questo è certamente il caso per la Lagrangiana di un sistema meccanico. Data una Lagrangiana regolare, con matrice Hessiana rispetto alle  $\eta$  definita positiva, si può quindi considerare la sua trasformata di Legendre rispetto alla variabile  $\eta$ ,  $\mathcal{L}_\eta$ . Per le definizioni date essa coincide con l'Hamiltoniana  $H$ ;

$$\mathcal{L}_\eta[L(\eta, q, t)] = H(p, q, t)$$

ed  $H$  è regolare per la Proposizione 12.1. In particolare, l'esempio 3) corrisponde al calcolo dell'Hamiltoniana per un sistema meccanico a vincoli indipendenti dal tempo.

L'osservazione che  $\hat{L} = L$  esprime l'involuntività della trasformata di Legendre stabilita nella Proposizione 12.2.

Si noti infine che molte delle considerazioni che precedono possono estendersi al caso di una lagrangiana regolare, anche in assenza dell'ipotesi che la matrice Hessiana sia definita positiva.

### 12.3 Principio di minima azione per sistemi Hamiltoniani

I sistemi Hamiltoniani (12.6) ammettono una formulazione variazionale così come avviene per i sistemi Lagrangiani. A differenza di questi ultimi però, le traiettorie sulle quali è definito il funzionale azione sono *traiettorie nello spazio delle fasi* anziché nello spazio delle configurazioni. Denoteremo con  $z = (p, q)$  il generico punto dello spazio delle fasi  $\Gamma \subset \mathbb{R}^{2n}$ . Fissati un tempo  $T > 0$  e due punti  $z^{(1)}$  e  $z^{(2)}$  in  $\Gamma$  definiamo l'insieme  $\mathcal{M}_{z^{(1)}, z^{(2)}, T}$ , o più brevemente  $\mathcal{M}$ , come l'insieme delle traiettorie differenziabili che hanno  $z^{(1)}$  e  $z^{(2)}$  come punti iniziali e finali

$$\mathcal{M}_{z^{(1)}, z^{(2)}, T} = \left\{ \gamma \in C^1([0, T] \rightarrow \Gamma), \gamma(0) = z^{(1)}, \gamma(T) = z^{(2)} \right\}.$$

Useremo anche la notazione  $w = (\dot{p}, \dot{q})$ . Introduciamo la funzione  $L(w, z, t)$  definita come

$$L(w, z, t) = p \cdot \dot{q} - H(p, q, t). \quad (12.10)$$

Si osservi che, non avendo assunto nessuna relazione tra  $\dot{q}$  e  $p$ , la funzione  $L$  così definita, per una generica scelta di  $z$  e  $w$  non coincide con la Lagrangiana  $\hat{L}$  costruita in precedenza a partire dall'Hamiltoniana.

**Definizione 12.5:** Si dice *Azione* su  $\mathcal{M}$  il funzionale che, per ogni  $\gamma \in \mathcal{M}$ , vale

$$S[\gamma] = \int_0^T dt L(\dot{\gamma}(t), \gamma(t), t) = \int_0^T dt [p(t) \cdot \dot{q}(t) - H(p(t), q(t), t)]. \quad (12.11)$$

Per tale funzionale valgono le condizioni di stazionarietà discusse nel Capitolo 7 e pertanto una traiettoria  $\gamma \in \mathcal{M}$  è un punto stazionario per l'azione  $S[\gamma]$  se e solo se  $\gamma$  è soluzione delle corrispondenti equazioni di Eulero-Lagrange

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial w_k} \right) (\dot{\gamma}(t), \gamma(t), t) = \frac{\partial L}{\partial z_k} (\dot{\gamma}(t), \gamma(t), t), \quad k = 1, \dots, 2n. \quad (12.12)$$

L'espressione (12.10) mostra che

$$\frac{\partial L}{\partial w_k} = 0 \quad \text{per } k = 1, \dots, n,$$

mentre risulta

$$\frac{\partial L}{\partial w_k} = p_k \quad \text{per } k = n + 1, \dots, 2n.$$

Inoltre,

$$\frac{\partial L}{\partial z_k} = \dot{q}_k - \frac{\partial H}{\partial p_k}, \quad \text{per } k = 1, \dots, n$$

e

$$\frac{\partial L}{\partial z_k} = -\frac{\partial H}{\partial q_k}, \quad \text{per } k = n + 1, \dots, 2n.$$

Pertanto, le (12.12), per  $k = 1, \dots, n$ , forniscono

$$0 = \dot{q}_k - \frac{\partial H}{\partial p_k},$$

mentre, per  $k = n + 1, \dots, 2n$ , danno

$$\dot{p}_k = -\frac{\partial H}{\partial q_k}.$$

Pertanto le equazioni di Eulero-Lagrange per il funzionale Azione su  $\mathcal{M}$  coincidono con il sistema Hamiltoniano (12.6) e questo dimostra il seguente

**Teorema 12.3 (Principio di Azione stazionaria):** *Le soluzioni del sistema Hamiltoniano (12.6) sono tutti e soli i punti stazionari del funzionale Azione  $S[\gamma]$  definito dalla (12.11). Inoltre, se  $T$  è sufficientemente piccolo i punti stazionari sono punti di minimo per  $S$ .*

*Osservazione 1:* Si noti che il sistema (12.6) che rappresenta le equazioni di Eulero-Lagrange per  $S[\gamma]$  è un sistema di equazioni differenziali del primo ordine. Pertanto, sotto condizioni di regolarità sull'Hamiltoniana  $H$ , fissato il dato iniziale  $z^{(1)}$  è univocamente determinata la traiettoria  $t \rightarrow \gamma_{z^{(1)}}(t)$  che risolve il sistema (12.6) e passa per  $z^{(1)}$  al tempo  $t = 0$ . In particolare è univocamente determinata la posizione  $\gamma_{z^{(1)}}(T)$  raggiunta all'istante  $T$  da  $\gamma_{z^{(1)}}$ . Ne consegue che, in corrispondenza di una scelta arbitraria di  $z^{(2)} \neq \gamma_{z^{(1)}}(T)$ , non esistono punti stazionari di  $S[\gamma]$  in  $\mathcal{M}_{z^{(1)}, z^{(2)}, T}$ . L'esistenza di punti stazionari è quindi assicurata soltanto per scelte particolari della coppia di punti  $(z^{(1)}, z^{(2)})$  e cioè quelle per cui

$$z^{(2)} = \gamma_{z^{(1)}}(T).$$

*Osservazione 2:* La Lagrangiana (12.10) non dipende da  $\dot{p}$ . Riesaminando la derivazione delle equazioni di Eulero-Lagrange del capitolo 7, oppure procedendo direttamente al calcolo della derivata dell'Azione rispetto al parametro  $\varepsilon$  della famiglia di traiettorie variate, è immediato rendersi conto che in tal caso non è necessario specificare tutte le coordinate dei punti iniziali e finali  $z^{(1)}$  e  $z^{(2)}$ , ma le soli parti  $q^{(1)}$  e  $q^{(2)}$  devono essere fissate per eliminare i termini finiti provenienti dall'integrazione per parti. In conseguenza di ciò, si può formulare il principio di minima azione su uno spazio di traiettorie nello spazio delle fasi più ampio di quello qui scelto. Nel problema ai limiti corrispondente viene quindi fissato un numero più basso di condizioni ai limiti e la sua risolubilità locale segue da considerazioni simili a quelle esposte nel capitolo 7.

#### 12.4 Leggi di conservazione in un sistema Hamiltoniano.

**Definizione 12.6:** Una funzione differenziabile  $G$  su  $\Gamma \times \mathbb{R}$  è un integrale primo per il sistema Hamiltoniano (12.6) se per ogni traiettoria  $t \rightarrow z(t) = (p(t), q(t))$  in  $\Gamma$  soluzione di (12.6) risulta

$$\frac{d}{dt}G(p(t), q(t), t) = 0.$$

Si è visto che l'Hamiltoniana  $H$  è, a meno di un cambiamento di variabili, l'energia generalizzata del sistema Lagrangiano corrispondente. Il calcolo della sua variazione lungo le soluzioni del sistema (12.6) può effettuarsi direttamente e

fornisce:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}H(p(t), q(t), t) &= \frac{\partial H}{\partial t} + \sum_{k=1}^n \frac{\partial H}{\partial p_k} \dot{p}_k + \sum_{k=1}^n \frac{\partial H}{\partial q_k} \dot{q}_k \\ &= \frac{\partial H}{\partial t} - \sum_{k=1}^n \frac{\partial H}{\partial p_k} \frac{\partial H}{\partial q_k} + \sum_{k=1}^n \frac{\partial H}{\partial q_k} \frac{\partial H}{\partial p_k} \\ &= \frac{\partial H}{\partial t}. \end{aligned}$$

Si ha pertanto:

**Proposizione 12.4:** *Se l'Hamiltoniana  $H$  non dipende esplicitamente dal tempo, essa è un integrale primo del sistema Hamiltoniano (12.6).*

Ricordando che per un sistema meccanico a vincoli olonomi indipendenti dal tempo l'Hamiltoniana coincide con l'energia totale del sistema, la Proposizione 3 fornisce la conservazione dell'energia totale nel formalismo Hamiltoniano.

Più in generale, la variazione della funzione  $G$  lungo le traiettorie soluzione di (12.6) si scrive

$$\frac{d}{dt}G(p(t), q(t), t) = \frac{\partial G}{\partial t} + \sum_{k=1}^n \left( \frac{\partial G}{\partial q_k} \frac{\partial H}{\partial p_k} - \frac{\partial G}{\partial p_k} \frac{\partial H}{\partial q_k} \right).$$

Pertanto la funzione  $G$  è un integrale primo del sistema Hamiltoniano se e solo se

$$\frac{\partial G}{\partial t} + \sum_{k=1}^n \left( \frac{\partial G}{\partial q_k} \frac{\partial H}{\partial p_k} - \frac{\partial G}{\partial p_k} \frac{\partial H}{\partial q_k} \right) = 0. \quad (12.13)$$

## 12.5 Teorema di Liouville.

Un'altra proprietà notevole per i sistemi Hamiltoniani è la conservazione del volume dello spazio delle fasi. Essa è conseguenza di considerazioni più generali sui sistemi del primo ordine. Consideriamo pertanto il sistema

$$\dot{x} = F(x, t) \quad (12.14)$$

con le condizioni iniziali

$$x(t_0) = x^{(0)},$$

con  $x^{(0)} \in \mathbb{R}^d$  ed  $t \rightarrow x(t)$  traiettoria differenziabile in  $\mathbb{R}^d$ . Il campo vettoriale  $F$  su  $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}$  che rappresenta il secondo membro del sistema (12.14), si suppone differenziabile e, per semplicità con derivate limitate in  $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}$ .



In particolare, per un sistema Hamiltoniano si ha  $d = 2n$ ,  $x = (p, q)$  e

$$F_h(x, t) = F_h^H(x, t) := \begin{cases} -\frac{\partial H}{\partial q_h}(p, q, t), & h = 1, \dots, n; \\ \frac{\partial H}{\partial p_{h-n}}(p, q, t), & h = n + 1, \dots, 2n. \end{cases} \quad (12.15)$$

Il campo  $F^H$  definito dalle precedenti relazioni si dice *campo Hamiltoniano* associato all'Hamiltoniana  $H$ .

Nelle condizioni di regolarità assunte esiste unica la soluzione a partire da ogni dato iniziale e pertanto è ben definita per ogni coppia  $(t_0, t) \in \mathbb{R}^2$  la trasformazione  $U_{t, t_0}$  che ad ogni  $x \in \mathbb{R}^d$  associa il punto  $x(t)$  occupato al tempo  $t$  dalla traiettoria  $t \rightarrow x(t)$  soluzione del sistema (12.14) tale che  $x(t_0) = x$ . Quindi  $U_{t, t_0}$  soddisfa le condizioni

$$U_{t_0, t_0}(x) = x; \quad \frac{d}{dt} U_{t, t_0}(x) = F(U_{t, t_0}(x), t). \quad (12.16)$$

Denomineremo la famiglia di trasformazioni  $U_{t, t_0}$  *evoluzione temporale* per il sistema (12.14).

**Proposizione 12.5:** Per ogni  $t_0, t_1, t_2 \in \mathbb{R}$  si ha

$$U_{t_2, t_1} \circ U_{t_1, t_0} = U_{t_2, t_0}. \quad (12.17)$$

In particolare,

$$U_{t_2, t_1} \circ U_{t_1, t_2} = U_{t_2, t_2} = \mathbf{I}$$

e quindi  $U_{t, t_0}$  è invertibile e la sua inversa è

$$U_{t, t_0}^{-1} = U_{t_0, t}.$$

Dim.  $y(t) = U_{t, t_1}(y)$  è la soluzione del sistema

$$\dot{y} = F(y, t) \quad (12.18)$$

con condizioni iniziali

$$y(t_1) = y.$$

Si ponga  $y = U_{t_1, t_0}(x)$ . Poiché  $x(t) = U_{t, t_0}(x)$  è soluzione dello stesso sistema di equazioni differenziali e  $x(t_1) = y(t_1)$ , risulta  $x(t) = y(t)$  per ogni  $t \in \mathbb{R}$  ed in particolare  $x(t_2) = y(t_2)$ . Questo prova (12.17). Poiché la terna  $t_0, t_1, t_2$  è completamente arbitraria, si può scegliere  $t_0 = t_2$  e ottenere quindi l'invertibilità di  $U_{t, t_0}$ .  $\square$

Se il campo vettoriale  $F$  non dipende dal tempo (*sistema autonomo*), si ha

$$U_{t,t_0} = U_{t-t_0,0}$$

per ogni scelta di  $t_0$ . Infatti, se  $U_{t,t_0}(x)$  è la soluzione del sistema (12.14) con condizione iniziale  $x(t_0) = x$ , posto  $\tau = t - t_0$ ,  $\tau \rightarrow y(\tau) = U_{t_0+\tau,t_0}(x)$  risolve lo stesso sistema (per l'indipendenza di  $F$  dal tempo) con  $y(0) = x$ . Pertanto  $y(\tau) = U_{\tau,0}(x)$  e quindi  $U_{t_0+\tau,t_0}(x) = U_{\tau,0}(x)$  per ogni  $\tau$ . In conseguenza di tale osservazione, in luogo della famiglia a due parametri  $U_{t,t_0}$  si può considerare la famiglia ad un parametro di trasformazioni

$$V_t = U_{t,0}.$$

La Proposizione 12.5 implica quindi che, per un sistema autonomo, *l'evoluzione temporale*  $\{V_t, t \in \mathbb{R}\}$  è un gruppo ad un parametro di trasformazioni di  $\mathbb{R}^d$  in sé. In particolare, *l'evoluzione temporale per un sistema Hamiltoniano con Hamiltoniana indipendente dal tempo definisce un gruppo di trasformazioni sullo spazio delle fasi.*

Sia ora  $A$  un insieme misurabile di  $\mathbb{R}^d$ . Si fissi  $t_0 \in \mathbb{R}$  e si denoti con  $A_t = U_{t,t_0}A$  l'insieme delle posizioni raggiunte al tempo  $t$  muovendosi lungo le traiettorie soluzione del sistema (12.14) che passano per  $A$  al tempo  $t_0$ . Più precisamente,

$$A_t := U_{t,t_0}A = \{x \in \mathbb{R}^d \mid \exists y \in A, \text{ tale che } x = U_{t,t_0}(y)\}.$$

Per la regolarità della trasformazione  $U_{t,t_0}$  anche l'insieme  $A_t$  è un insieme misurabile. Si ponga

$$\mu(A_t) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{A_t} dx,$$

ove  $dx$  denota la misura di Lebesgue (o di Riemann, a scelta) su  $\mathbb{R}^d$ . La variazione di  $\mu(A_t)$  nel tempo è fornita dal seguente

**Lemma 12.6:** *Definita la divergenza del campo vettoriale  $F$  come*

$$\operatorname{div} F = \sum_{i=1}^d \frac{\partial F_i}{\partial x_i},$$

*se  $A$  è un insieme misurabile e limitato di  $\mathbb{R}^d$ , si ha*

$$\frac{d}{dt} \mu(A_t) = \int_{A_t} \operatorname{div} F(x, t) dx.$$

Dim. Dato  $h \in \mathbb{R}$ , confrontiamo  $\mu(A_{t+h})$  con  $\mu(A_t)$ . Per la Proposizione 12.5,

$$\mu(A_{t+h}) = \mu(U_{t+h,t}A_t).$$

Detto  $z = U_{t+h,t}(x)$  per  $x \in A_t$ ,

$$\mu(A_{t+h}) = \int_{A_{t+h}} dz = \int_{A_t} dx |\det J_{t+h,t}(x)|,$$

ove  $J_{t+h,t}$  è la matrice Jacobiana i cui elementi sono

$$\frac{\partial z_i}{\partial x_j}, \quad i, j = 1, \dots, d.$$

Si noti che  $\det J_{t+h,t}$  è positivo per ogni  $h$  in quanto vale 1 per  $h = 0$  e non può cambiare di segno perché per farlo dovrebbe annullarsi per qualche  $h$ , mentre la trasformazione  $U_{t+h,t}$  è invertibile per ogni  $t$  ed  $h$ .

Per definizione,

$$U_{\tau,t}(x) = x + \int_t^\tau ds F(U_{s,t}(x), s) = x + F(x, t)(\tau - t) + \int_t^\tau ds [F(U_{s,t}(x), s) - F(x, t)].$$

Usando il teorema di Lagrange si ha quindi

$$U_{\tau,t}(x) = x + F(x, t)(\tau - t) + \int_t^\tau ds \left[ \nabla F(x^*, s^*) \cdot [U_{s,t}(x) - x] + \frac{\partial F}{\partial t}(x^{**}, s^{**})(s - t) \right],$$

ove  $(x^*, s^*)$  e  $(x^{**}, s^{**})$  sono punti opportuni. Iterando tale relazione ed usando la limitatezza di  $F$  e delle sue derivate si ha quindi, per  $h$  piccolo

$$z = x + F(x, t)h + O(h^2).$$

Differenziando tale relazione rispetto ad  $x$  si ottiene pertanto

$$J_{t+h,t} = \mathbf{1} + h\nabla F(x, t) + O(h^2).$$

Se  $B$  è la matrice

$$B = \mathbf{1} + hC + O(h^2),$$

allora

$$\det B = 1 + h\text{Tr} C + O(h^2).$$

Infatti, detto  $\mathcal{P}_d$  il gruppo delle permutazioni di  $\{1, \dots, d\}$  e  $\sigma(\pi) = 0, 1$  a seconda che  $\pi$  sia pari o dispari, si ha

$$\begin{aligned} \det B &= \sum_{\pi \in \mathcal{P}_d} (-1)^{\sigma(\pi)} \prod_{i=1}^d B_{i, \pi(i)} = \sum_{\pi \in \mathcal{P}_d} (-1)^{\sigma(\pi)} \prod_{i=1}^d (\delta_{i, \pi(i)} + hC_{i, \pi(i)} + O(h^2)) \\ &= \sum_{\pi \in \mathcal{P}_d} (-1)^{\sigma(\pi)} \prod_i \delta_{i, \pi(i)} + h \sum_{\pi \in \mathcal{P}_d} (-1)^{\sigma(\pi)} \sum_{j=1}^d C_{j, \pi(j)} \prod_{i \neq j} \delta_{i, \pi(i)} + O(h^2) \\ &= 1 + h \sum_{\pi \in \mathcal{P}_d} (-1)^{\sigma(\pi)} \sum_{j=1}^d C_{j, \pi(j)} \prod_{i \neq j} \delta_{i, \pi(i)} + O(h^2) = 1 + \sum_{j=1}^d C_{j, j} + O(h^2). \end{aligned}$$

L'uguaglianza della prima linea con la seconda si ottiene semplicemente espandendo il prodotto. La prima delle due uguaglianze nell'ultima linea è dovuta al fatto che  $\delta_{i, \pi(i)} \neq 0$  solo se  $\pi$  è la permutazione identica e questo è quindi l'unico contributo non nullo del primo termine e vale 1. Usando lo stesso argomento si ottiene l'ultima uguaglianza.

Si ha quindi

$$\det J_{t+h, t} = 1 + \operatorname{div} F(x, t)h + O(h^2),$$

da cui

$$\frac{\mu(A_{t+h}) - \mu(A_t)}{h} = \int_{A_t} \operatorname{div} F(x, t) dx + O(h),$$

che implica il Lemma 12.6.  $\square$

*Osservazione:* Posto  $J(x, t) = \det J_{t, t_0}(x)$ , poiché  $J(x, t+h) = J(x, t) \det J_{t+h, t}$ , l'argomento precedente dimostra anche che  $J(x, t)$  soddisfa la relazione

$$\frac{\partial J}{\partial t} = J \operatorname{div} F(x, t).$$

Una notevole conseguenza del Lemma 12.6 per i sistemi Hamiltoniani è il

**Teorema 12.7 (di Liouville):** *Sia  $A \subset \Gamma$  un insieme misurabile e limitato dello spazio delle fasi. La misura di Lebesgue (o di Riemann) dell'insieme  $A$  resta invariata durante il moto, nel senso che, detta  $U_{t, t_0}$  l'evoluzione temporale per il sistema Hamiltoniano (12.6), ed  $A_t = U_{t, t_0} A$ , la quantità*

$$\mu(A_t) = \int_{A_t} dp_1 \dots dp_n dq_1 \dots dq_n$$

*è costante nel tempo. Tale misura prende il nome di misura di Liouville su  $\Gamma$ .*

Dim. Si tratta di un'immediata conseguenza del teorema precedente. Infatti il campo Hamiltoniano  $F^H$  è dato dalle (12.15). Si ha pertanto

$$\operatorname{div} F_H = \sum_{h=1}^{2n} \frac{\partial F_i}{\partial z_i} = \sum_{h=1}^n \left( \frac{\partial}{\partial p_h} \left( -\frac{\partial H}{\partial q_h} \right) + \frac{\partial}{\partial q_h} \left( \frac{\partial H}{\partial p_h} \right) \right) = 0$$

in quanto l'Hamiltoniana è infinitamente differenziabile e quindi l'ordine di derivazione è irrilevante.  $\square$

Il Teorema di Liouville insieme con il teorema di ricorrenza di Poincaré che segue, è alla base di un famoso paradosso della Meccanica Statistica. Cominciamo con il fornire una versione astratta del teorema di Poicaré.

**Teorema 12.8 (di Poincaré):** *Sia  $D$  un compatto di  $\mathbb{R}^{d(4)}$ . Sia inoltre  $g$  una trasformazione continua ed invertibile di  $\mathbb{R}^d$  in sé che lascia  $D$  invariante (e cioè  $g(D) \subseteq D$ ) e conserva la misura di Lebesgue su  $D$ , cioè*

$$\mu(g(A)) = \mu(A), \quad \text{per ogni } A \subseteq D \text{ misurabile.}$$

Allora, per ogni  $x \in D$  e per ogni intorno  $I$  di  $x$  esistono  $\bar{x} \in I$  e  $\bar{n}$  intero tali che

$$g^{\bar{n}}(\bar{x}) \in I,$$

ove  $g^n$  denota l'iterata  $n$ -esima di  $g$ .

Dim. Fissato  $x$  ed un qualsiasi suo intorno  $I \subseteq D$ , si consideri la successione di insiemi

$$I = g^0(I), g(I), g^2(I), \dots, g^n(I), \dots$$

Tale successione non è disgiunta in quanto, se lo fosse, la  $\sigma$ -additività della misura di Lebesgue implicherebbe

$$\mu \left( \bigcup_{n=0}^{\infty} g^n(I) \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \mu(g^n(I)) = \sum_{n=0}^{\infty} \mu(I) = +\infty$$

in quanto  $g$  lascia la misura invariante ed inoltre  $\mu(I) > 0$ . Ma  $\bigcup_{n=0}^{\infty} g^n(I) \subseteq D$  in quanto  $D$  è invariante. Questo è assurdo perché  $\mu(D) < +\infty$  essendo  $D$  compatto.

La precedente osservazione implica che esistono due interi  $\ell$  ed  $m$  tali che

$$g^\ell(I) \cap g^m(I) \neq \emptyset.$$

<sup>(4)</sup> La restrizione ad  $\mathbb{R}^d$  non è necessaria. Si potrebbe infatti utilizzare un qualsiasi spazio metrico separato su cui è definita una misura di Borel positiva.

Sia  $y$  un elemento comune a  $g^\ell(I)$  e  $g^m(I)$ . Vi sono  $x_1$  ed  $x_2$  in  $I$  tali che

$$g^\ell(x_1) = y = g^m(x_2).$$

Supponiamo, per fissare le idee,  $m > \ell$ . Scriviamo  $g^m = g^\ell \circ g^{m-\ell}$ . Allora la precedente uguaglianza si scrive

$$g^\ell(x_1) = g^\ell(g^{m-\ell}(x_2))$$

e, per l'invertibilità di  $g$ , si ottiene

$$x_1 = g^{m-\ell}(x_2).$$

Pertanto, posto  $\bar{n} = m - \ell$  e  $\bar{x} = x_2$ , il teorema di Poincaré è dimostrato.  $\square$

Per applicare il Teorema di Poincaré ai sistemi Hamiltoniani, supponiamo l'Hamiltoniana  $H$  indipendente dal tempo e consideriamo la trasformazione  $g$  definita come l'evoluzione temporale per  $t = 1$ :

$$g = V_1.$$

Tale applicazione è continua, invertibile, trasforma lo spazio delle fasi  $\Gamma$  in sé e lascia invariante la misura di Liouville. Occorre adesso individuare un insieme compatto invariante  $D$ . A questo scopo supponiamo che  $H$  sia l'energia totale di un sistema meccanico:

$$H(p, q) = \frac{1}{2}(p, A^{-1}(q)p) + U(q),$$

con energia potenziale  $U$  inferiormente limitata,  $U(q) \geq -B$  e tale che  $U(q) \rightarrow +\infty$  se almeno una delle  $q_h$  va all'infinito.

In tali ipotesi, fissata l'energia totale  $\geq -B$ , l'insieme

$$\Gamma_E = \{(p, q) \in \Gamma \mid H(p, q) \leq E\}$$

è compatto. Infatti  $\Gamma_E$  è chiuso per la continuità di  $H$  ed è limitato perché in  $\Gamma_E$  risulta

$$\frac{1}{2}(p, A^{-1}(q)p) \leq E + B$$

che implica la limitatezza delle  $p$ , mentre la condizione sul potenziale all'infinito assicura che le  $q$  sono limitate.

L'insieme  $\Gamma_E$  è invariante per la conservazione dell'energia. Si può pertanto scegliere  $D = \Gamma_E$  è applicare il Teorema di Poincaré a tale insieme.

La situazione descritta modella un sistema di  $N$  particelle in un contenitore, ad esempio  $\Lambda = [-1, 1]^3$  <sup>(5)</sup>. Si consideri ora una configurazione iniziale  $(p, q)$  del sistema caratterizzata dal fatto che la prima coordinata di tutte le particelle è negativa, cioè tutte le particelle sono nella parte sinistra del contenitore. Durante il moto naturalmente esse andranno dovunque. Per il teorema di Poincaré, esiste una piccola perturbazione di tale situazione iniziale che ritorna arbitrariamente vicino alla configurazione iniziale  $(p, q)$  dopo un tempo sufficientemente lungo. Tale tempo  $T$  dipende dalla configurazione  $(p, q)$  e dalla grandezza della perturbazione, è detto *tempo di ricorrenza* di Poincaré. Si conclude quindi che, passato il tempo di ricorrenza di Poincaré, tutte le particelle ritornano approssimativamente nel settore sinistro del contenitore  $\Lambda$ . Il numero di particelle  $N$  è completamente arbitrario. In particolare, assumendolo pari al numero di molecole contenute in un litro di gas in condizioni normali,  $N \approx 10^{22}$ , ne consegue che tutte le particelle del gas, dopo un tempo di ricorrenza di Poincaré tornano nel settore sinistro del contenitore, una conclusione contraria a qualsiasi esperienza.

Tale conclusione, nota come *paradosso di Poincaré*, è stata alla base delle notevoli critiche che sono state portate alla fondatezza della Meccanica Statistica, basata sull'idea che le componenti microscopiche dei sistemi termodinamici siano soggette alle equazioni di Newton della Meccanica. In realtà la conseguenza appena vista del teorema di Poincaré, sebbene corretta dal punto di vista matematico, è tuttavia di scarsissima utilità pratica in quanto è possibile stimare il tempo di ricorrenza di Poincaré per un sistema di  $N \approx 10^{22}$  particelle e il risultato che si ottiene è un tempo che supera di svariati ordini di grandezza l'età dell'universo, stima che spiega perché nessuno ha mai visto le particelle tornare tutte nel settore sinistro del contenitore.

## 12.6 Equazione di Liouville.

Come si è visto, lo stato di un sistema Hamiltoniano è caratterizzato da un punto  $x = (p, q)$  dello spazio delle fasi. In certe situazioni tuttavia, non è nota esattamente la posizione del sistema all'istante iniziale, ma piuttosto la sua distribuzione di probabilità, cioè una misura positiva  $\mu_0$  normalizzata sullo spazio delle fasi (cioè tale che la sua massa totale sia unitaria), il cui valore su un insieme misurabile  $A$  rappresenta la probabilità che il sistema si trovi al tempo  $t = 0$  nell'insieme  $A$ . Naturalmente, tale incertezza sul dato iniziale si trasferisce su

---

<sup>(5)</sup> In realtà il vincolo che le particelle restino nella regione  $\Lambda$  è un vincolo non bilaterale cui le considerazioni fin qui svolte non si applicano in modo ovvio. Assumendo che le particelle rimbalzano elasticamente alle pareti di  $\Lambda$  sarebbe possibile estendere i precedenti argomenti per includere anche tale situazione. Per semplificare la discussione si sono considerate invece le particelle libere di muoversi in  $\mathbb{R}^3$ , ma si è fatta la "innaturale" assunzione che l'energia potenziale vada all'infinito quando una particella si allontana troppo dall'origine. Tale assunzione modella adeguatamente la presenza del contenitore  $\Lambda$ .

un'analoga incertezza sulla posizione del sistema nello spazio delle fasi agli istanti successivi, in corrispondenza della quale avremo una distribuzione al tempo  $t$  caratterizzata da una misura positiva  $\mu_t$  anch'essa normalizzata. Nell'ipotesi che la misura iniziale sia assolutamente continua rispetto alla misura di Lebesgue, con densità  $\rho(x, 0)$  positiva e differenziabile, per le proprietà del moto anche la misura al tempo  $t$  è assolutamente continua rispetto alla misura di Lebesgue, con densità  $\rho(x, t)$  positiva e differenziabile. Nel seguito intendiamo determinare un'equazione differenziale per  $\rho(x, t)$ .

Questa situazione può essere descritta alternativamente immaginando la distribuzione di probabilità nello spazio delle fasi come una distribuzione effettiva di massa di un *fluido* che si muove nello spazio delle fasi in modo che le traiettorie di ciascun suo punto siano tangenti al campo Hamiltoniano.

Poiché l'ipotesi che il sistema sia Hamiltoniano non è essenziale per larga parte della discussione, supporremo per il momento di considerare un sistema differenziale in  $\mathbb{R}^d$  del tipo

$$\dot{x} = F(x, t).$$

Sia come al solito  $U_{t,t_0}x$  la soluzione di tale sistema che passa per  $x$  al tempo  $t = t_0$ . Sia inoltre  $\varphi(x)$  una qualsiasi funzione differenziabile e limitata su  $\mathbb{R}^d$ . Se al tempo iniziale  $t_0$  il punto si trova con certezza in  $x$ , la determinazione al tempo  $t$  della grandezza associata a  $\varphi$  è  $\varphi(U_{t,t_0}x)$ . Se invece la posizione iniziale  $x$  è distribuita secondo la distribuzione  $\mu_{t_0}$ , si assume come determinazione di  $\varphi$  al tempo iniziale  $t_0$  la sua media rispetto ad  $\mu_{t_0}$ , cioè

$$\int \mu_{t_0}(dx)[\varphi(x)],$$

che in Teoria della Probabilità si chiama *attesa* o *valore aspettato* di  $\varphi$ . Analogamente, si assume come determinazione di  $\varphi$  al tempo  $t$  la *media* di  $\varphi(U_{t,t_0}x)$  rispetto alla distribuzione  $\mu_{t_0}$ :

$$\int \mu_{t_0}(dx)[\varphi(U_{t,t_0}x)],$$

cioè l'attesa di  $\varphi \circ U_{t,t_0}$ . La conoscenza di tale quantità per ogni  $\varphi$  differenziabile caratterizza univocamente da distribuzione al tempo  $t$  come l'unica misura  $\mu_t$  tale che

$$\int \mu_t(dx)\varphi(x) = \int \mu_{t_0}(dx)[\varphi(U_{t,t_0}x)].$$

Se  $\mu_{t_0}$  è assolutamente continua rispetto alla misura di Lebesgue con densità  $\rho(x, t_0)$ , tale è anche  $\mu_t$  e la sua densità  $\rho(x, t)$  è tale che la precedente relazione si scrive

$$\int dx\rho(x, t)\varphi(x) = \int dx\rho(x, t_0)[\varphi(U_{t,t_0}x)].$$



Differenziando i due membri rispetto a  $t$  si ottiene allora

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int dx \rho(x, t) \varphi(x) &= \int dx \partial_t \rho(x, t) \varphi(x) = \\ \frac{d}{dt} \int dx \rho(x, t_0) [\varphi(U_{t, t_0} x)] &= \int dx \rho(x, t_0) \nabla \varphi[(U_{t, t_0} x)] \cdot \frac{dU_{t, t_0} x}{dt} = \\ \int dx \rho(x, t_0) \nabla \varphi[(U_{t, t_0} x)] \cdot F(U_{t, t_0} x, t) &= \\ \int dx \rho(x, t) F(x, t) \cdot \nabla \varphi(x) &= \\ - \int dx \nabla \cdot [\rho(x, t) F(x, t)] \varphi(x). \end{aligned}$$

Per passare dalla seconda linea alla terza si è usata l'equazione differenziale, dalla terza alla quarta la definizione di  $\rho(x, t)$  ed infine dalla quarta alla quinta l'integrazione per parti.

Si ha in conseguenza

$$\int dx \{ \partial_t \rho(x, t) + \nabla \cdot [\rho(x, t) F(x, t)] \} = 0$$

qualunque sia la funzione differenziabile  $\varphi$ . Quindi la densità  $\rho(x, t)$  soddisfa l'equazione differenziale

$$\partial_t \rho(x, t) + \nabla \cdot [\rho(x, t) F(x, t)] = 0. \quad (12.19)$$

L'equazione (12.19) è del tutto generale, in ipotesi di regolarità e prende il nome di *equazione di continuità*. Nel caso particolare dei sistemi Hamiltoniani, poiché  $\nabla \cdot F^H = 0$ , tale equazione si riduce a

$$\partial_t \rho(x, t) + F_H(x, t) \cdot \nabla \rho(x, t) = 0,$$

o, più esplicitamente

$$\frac{\partial \rho(p, q, t)}{\partial t} + \sum_{h=1}^n \left\{ \frac{\partial \rho(p, q, t)}{\partial q_h} \frac{\partial H(p, q, t)}{\partial p_h} - \frac{\partial \rho(p, q, t)}{\partial p_h} \frac{\partial H(p, q, t)}{\partial q_h} \right\} = 0. \quad (12.20)$$

La precedente equazione prende il nome di *equazione di Liouville* e fornisce, come richiesto, l'equazione differenziale che descrive il comportamento nel tempo di una distribuzione di probabilità sullo spazio delle fasi. È conveniente usare la notazione

$$\{\rho, H\} := \sum_{h=1}^n \left\{ \frac{\partial \rho(p, q, t)}{\partial q_h} \frac{\partial H(p, q, t)}{\partial p_h} - \frac{\partial \rho(p, q, t)}{\partial p_h} \frac{\partial H(p, q, t)}{\partial q_h} \right\},$$

che consente di abbreviare la precedente equazione in

$$\partial_t \rho + \{\rho, H\} = 0 \quad (12.21).$$

La combinazione di derivate  $\{\rho, H\}$  gioca un ruolo cruciale nella teoria dei sistemi Hamiltoniani, come si vedrà nel seguito e ad essa è dato il nome di *parentesi di Poisson*.

### 12.7 Invarianti integrali.

Altre grandezze invarianti durante i moti Hamiltoniani sono i cosiddetti *invarianti integrali*, alcuni dei quali saranno discussi in questa sezione.

Conviene introdurre lo *spazio delle fasi esteso*  $\tilde{\Gamma}$  definito come

$$\tilde{\Gamma} = \Gamma \times \mathbb{R},$$

i cui punti sono elementi di  $\mathbb{R}^{2n+1}$  di coordinate  $z = (p, q, t)$  con  $(p, q) \in \Gamma$  e  $t \in \mathbb{R}$ . Una curva regolare in  $\tilde{\Gamma}$  è individuata dalle sue equazioni parametriche  $\lambda \rightarrow z(\lambda)$  con  $\lambda$  che varia in un intervallo  $(a, b)$ . Le  $2n + 1$  funzioni

$$\begin{aligned} \lambda \in (a, b) &\rightarrow p_h(\lambda), & h = 1, \dots, n, \\ \lambda \in (a, b) &\rightarrow q_h(\lambda), & h = 1, \dots, n, \\ \lambda \in (a, b) &\rightarrow t(\lambda), \end{aligned}$$

sono assunte differenziabili in  $(a, b)$  con derivate non tutte simultaneamente nulle. Ad esempio, scelto il parametro  $\lambda$  coincidente con il tempo  $t$  le *traiettorie dinamiche* sono le soluzioni del sistema Hamiltoniano (12.6) corrispondenti all'Hamiltoniana. ■  
Pertanto, al variare dell'Hamiltoniana  $H$ , i vettori tangenti le traiettorie dinamiche sono i campi vettoriali Hamiltoniani, della forma  $F^H = (F_1^H, \dots, F_{2n+1}^H)$  con

$$F_k^H = \begin{cases} -\frac{\partial H}{\partial q_k}, & k = 1, \dots, n \\ \frac{\partial H}{\partial p_{k-n}}, & k = n+1, \dots, 2n, \\ 1, & k = 2n+1. \end{cases}$$

In particolare, tutte le traiettorie dinamiche sono regolari come curve di  $\tilde{\Gamma}$ .

Fissato un campo vettoriale  $F$  differenziabile e con derivate limitate in  $\tilde{\Gamma}$ , il teorema di unicità per le soluzioni del sistema

$$\dot{z} = F(z) \quad (12.22)$$

implica che per ogni  $z \in \tilde{\Gamma}$  passa una ed una sola *curva integrale* del campo  $F$ . Se in particolare  $F = F^H$  per qualche  $H$  regolare, per ogni punto dello spazio delle fasi esteso  $\tilde{\Gamma}$  passa una ed una sola traiettoria dinamica corrispondente all'Hamiltoniana  $H$ .

Sia  $\mathcal{C}$  una curva *chiusa* e cioè tale che la sua equazione parametrica

$$\lambda \in [a, b] \rightarrow \bar{z}(\lambda) = (p(\lambda), q(\lambda), t(\lambda))$$

verifica la condizione

$$\bar{z}(a) = \bar{z}(b).$$

Per ogni  $\lambda \in [a, b]$  si consideri la curva integrale del campo  $F$  passante per  $\bar{z}(\lambda)$ , cioè la soluzione delle equazioni (12.22) tale che per  $t = t(\lambda)$  risulta  $z(t(\lambda)) = \bar{z}(\lambda)$ .

Risulta in questo modo definita la funzione

$$u : (\lambda, t) \in [a, b] \times \mathbb{R} \rightarrow u(\lambda, t) \in \tilde{\Gamma}$$

tale che per ogni  $\lambda \in [a, b]$  fissato,  $u(\lambda, \cdot)$  è curva integrale che passa per  $\bar{z}(\lambda)$  al tempo  $t(\lambda)$ :

$$u(\lambda, t(\lambda)) = \bar{z}(\lambda).$$

**Definizione 12.7:** L'insieme  $\mathcal{T}$  dei punti che sono immagine di  $[a, b] \times \mathbb{R}$  tramite la funzione  $u$  è una superficie bidimensionale di  $\tilde{\Gamma}$  che prende il nome di *tubo di curve integrali* o *tubo di flusso* appoggiato alla curva  $\mathcal{C}$ . Se  $F = F^H$  per qualche Hamiltoniana  $H$ , si parla di *tubo di traiettorie dinamiche* o tubo di flusso corrispondente all'Hamiltoniana  $H$ .

Sia  $\pi$  una forma differenziale su  $\tilde{\Gamma}$  i cui coefficienti sono le  $2n + 1$  funzioni reali su  $\tilde{\Gamma}$ ,  $A_1(z), \dots, A_n(z), B_1(z), \dots, B_n(z)$  e  $T(z)$ :

$$\pi = A \cdot dp + B \cdot dq + T dt.$$

Alternativamente si userà la notazione

$$\pi = \sum_{h=1}^{2n+1} Z_h dz_h.$$

Data una curva  $\gamma$  in  $\tilde{\Gamma}$ , di equazioni parametriche  $\lambda \in (a, b) \rightarrow \gamma(\lambda) = (p(\lambda), q(\lambda), t(\lambda))$ , l'integrale di  $\pi$  sulla curva  $\gamma$  è dato da

$$\int_{\gamma} A \cdot dp + B \cdot dq + T dt = \int_a^b d\lambda [A(\gamma(\lambda)) \cdot p'(\lambda) + B(\gamma(\lambda)) \cdot q'(\lambda) + T(\gamma(\lambda))t'(\lambda)]$$

con  $p'(\lambda), q'(\lambda), t'(\lambda)$  le derivate di  $p(\lambda), q(\lambda), t(\lambda)$  rispetto a  $\lambda$ . Tale quantità è infatti indipendente dalla rappresentazione parametrica.

Se  $\mathcal{C}$  è una curva chiusa, si usa la notazione

$$\oint_{\mathcal{C}} [A \cdot dp + B \cdot dq + T dt]$$

per indicare l'integrale della forma differenziale  $\pi$  sulla curva chiusa  $\mathcal{C}$ , detto anche *circuitazione* di  $\pi$  su  $\mathcal{C}$ .

Ricordiamo che la forma differenziale  $\pi$  si dice *esatta* se esiste una funzione  $F$  su  $\tilde{\Gamma}$  tale che

$$A_h = \frac{\partial F}{\partial p_h}, \quad B_h = \frac{\partial F}{\partial q_h}, \quad h = 1, \dots, n; \quad T = \frac{\partial F}{\partial t}.$$

Ricordiamo anche che la forma differenziale  $\pi$  è esatta se e solo se

$$\oint_{\mathcal{C}} A \cdot dp + B \cdot dq + T dt = 0$$

per ogni curva chiusa  $\mathcal{C}$ .

Poiché l'insieme  $\tilde{\Gamma}$  è semplicemente connesso,  $\pi$  è esatta se e solo se

$$\frac{\partial Z_i}{\partial z_j} = \frac{\partial Z_j}{\partial z_i}, \quad \forall i, j = 1, \dots, 2n + 1.$$

Invariante di Poincaré-Cartan. Fissato arbitrariamente un tubo  $\mathcal{T}$  di curve integrali del campo  $F$ , si consideri una qualsiasi curva chiusa  $\mathcal{C}$  che taglia tutte le traiettorie dinamiche che costituiscono il tubo in un solo punto. Si consideri inoltre la forma differenziale con coefficienti  $A = 0, B = p, T = -H$ :

$$\pi = p \cdot dq - H dt \tag{12.23}.$$

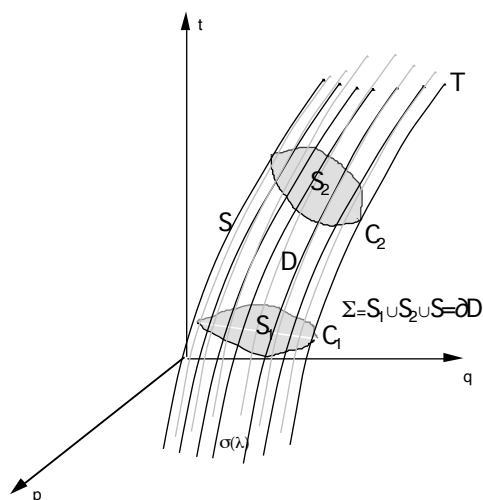
Denotiamo con  $J(\mathcal{C})$  la circuitazione di  $\pi$  su  $\mathcal{C}$ :

$$J(\mathcal{C}) = \oint_{\mathcal{C}} [p \cdot dq - H dt].$$

**Teorema 12.9:** *Sia  $\mathcal{T}$  il tubo di flusso corrispondente al campo Hamiltoniano  $F^H$ . Allora  $J(\mathcal{C})$  assume lo stesso valore sulle curve chiuse che tagliano tutte le traiettorie del tubo  $\mathcal{T}$  in un solo punto.*

*Osservazione:* Pertanto  $J(\mathcal{C})$  è invariante per spostamenti e deformazioni arbitrarie della curva  $\mathcal{C}$  lungo le traiettorie dinamiche corrispondenti all'Hamiltoniana  $H$ . È

per questo motivo che la quantità  $J(\mathcal{C})$  prende il nome di *invariante integrale di Poincaré-Cartan*.



Dim. Per  $n = 1$  la dimostrazione segue da una semplice applicazione dei teoremi di Stokes e Gauss. Siano  $\mathcal{C}_1$  e  $\mathcal{C}_2$  due qualsiasi curve chiuse che tagliano le traiettorie dinamiche del tubo  $\mathcal{T}$  in un solo punto, e  $\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2$  due qualsiasi superfici regolari con bordi  $\mathcal{C}_1$  e  $\mathcal{C}_2$  rispettivamente. Sia inoltre  $\mathcal{S}$  la superficie laterale del tubo contenuta tra le due curve e  $\mathcal{D}$  il “cilindro” di  $\mathbb{R}^3$  limitato da  $\Sigma = \mathcal{S} \cup \mathcal{S}_1 \cup \mathcal{S}_2$ . Posto  $v = (0, p, -H)$ , per il teorema di Stokes,

$$J(\mathcal{C}_i) = \oint_{\mathcal{C}_i} [p \cdot dq - H dt] = \int_{\mathcal{S}_i} \text{rot } v \cdot n d\sigma, \quad i = 1, 2.$$

È immediato controllare che

$$\text{rot } v = \left( \frac{\partial H}{\partial q}, -\frac{\partial H}{\partial p}, -1 \right)$$

è tangente ad  $\mathcal{S}$ , in quanto  $\mathcal{S}$  è costituito da traiettorie dinamiche. Pertanto

$$\int_{\mathcal{S}} \text{rot } v \cdot n d\sigma = 0.$$

D'altra parte, per definizione,  $\text{div}(\text{rot } v) = 0$ . Pertanto, per il teorema di Gauss,

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\mathcal{D}} dp \, dq \, dt \, \text{div } \text{rot } v \\ &= \oint_{\Sigma} \text{rot } v \cdot n d\sigma = \oint_{\mathcal{S}_2} \text{rot } v \cdot n d\sigma - \oint_{\mathcal{S}_1} \text{rot } v \cdot n d\sigma = J(\mathcal{C}_2) - J(\mathcal{C}_1). \end{aligned}$$

Per dare la dimostrazione nel caso  $n \geq 1$ , fissiamo due qualsiasi curve chiuse  $\mathcal{C}_i$ ,  $i = 1, 2$  che tagliano il tubo  $\mathcal{T}$  in un solo punto. Questo può essere fatto fissando ad arbitrio le funzioni  $\lambda \rightarrow t_i(\lambda)$ , con  $t_i(a) = t_i(b)$ . Infatti, l'appartenenza a  $\mathcal{T}$  fissa in conseguenza le equazioni parametriche delle due curve:

$$\lambda \rightarrow u(\lambda, t_i(\lambda)) = z_i(\lambda) = (p_i(\lambda), q_i(\lambda), t_i(\lambda)).$$

Si noti che  $t_i(\lambda)$  è l'unico istante in cui il punto di  $\mathcal{C}_i$  di parametro  $\lambda$  interseca la traiettoria dinamica passante per tale punto.

Fissato  $\lambda \in [a, b]$ , sia  $\sigma(\lambda)$  la traiettoria dinamica che passa per i punti  $z_i(\lambda)$  e cioè la curva di equazioni parametriche

$$t \rightarrow u(\lambda, t) = (p(\lambda, t), q(\lambda, t), t).$$

Sia inoltre  $S(\lambda)$  l'azione associata a tale traiettoria:

$$S(\lambda) := S[\sigma(\lambda)] = \int_{t_1(\lambda)}^{t_2(\lambda)} dt \left[ p(\lambda, t) \cdot \frac{\partial q}{\partial t}(\lambda, t) - H(p(\lambda, t), q(\lambda, t), t) \right].$$

Si ha il seguente

**Lemma 12.10:**

$$S'(\lambda) = \frac{d}{d\lambda} S(\lambda) = [p_2(\lambda) \cdot q'_2(\lambda) - H(p_2(\lambda), q_2(\lambda), t_2(\lambda))] t'_2(\lambda) \\ - [p_1(\lambda) \cdot q'_1(\lambda) - H(p_1(\lambda), q_1(\lambda), t_1(\lambda))] t'_1(\lambda)$$

Dal Lemma 12.10 segue immediatamente la dimostrazione del Teorema 12.9 in quanto, per definizione di *circuitazione*,

$$\int_a^b S'(\lambda) d\lambda = J(\mathcal{C}_2) - J(\mathcal{C}_1)$$

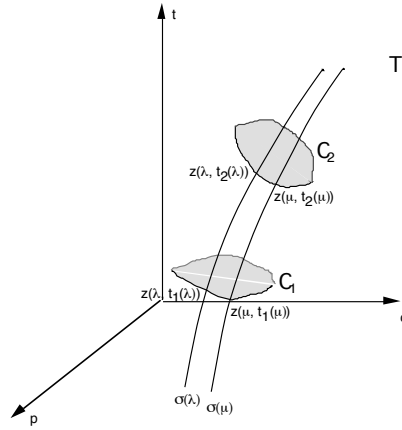
e quindi

$$S(b) - S(a) = J(\mathcal{C}_2) - J(\mathcal{C}_1).$$

Ma  $S(b) = S(a)$  poiché la traiettoria dinamica  $\sigma(b)$  coincide con  $\sigma(a)$ .  $\square$

Dim. del Lemma 12.10: Fissati arbitrariamente  $\lambda$  e  $\mu$ , calcoliamo

$$\frac{S(\mu) - S(\lambda)}{\mu - \lambda} = \frac{1}{\mu - \lambda} \left[ \int_{t_1(\mu)}^{t_2(\mu)} dt \left[ p(\mu, t) \cdot \frac{\partial q}{\partial t}(\mu, t) - H(p(\mu, t), q(\mu, t), t) \right] \right. \\ \left. - \int_{t_1(\lambda)}^{t_2(\lambda)} dt \left[ p(\lambda, t) \cdot \frac{\partial q}{\partial t}(\lambda, t) - H(p(\lambda, t), q(\lambda, t), t) \right] \right].$$



Supponendo, per fissare le idee, che  $(t_1(\lambda), t_2(\lambda)) \subset (t_1(\mu), t_2(\mu))$ , la precedente espressione può essere riscritta come

$$\begin{aligned} \frac{S(\mu) - S(\lambda)}{\mu - \lambda} &= \frac{1}{\mu - \lambda} \int_{t_1(\lambda)}^{t_2(\lambda)} dt \left\{ p(\mu, t) \cdot \frac{\partial q}{\partial t}(\mu, t) - H(p(\mu, t), q(\mu, t), t) \right. \\ &- \left. p(\lambda, t) \cdot \frac{\partial q}{\partial t}(\lambda, t) + H(p(\lambda, t), q(\lambda, t), t) \right\} \\ &+ \frac{1}{\mu - \lambda} \left\{ \int_{t_1(\mu)}^{t_1(\lambda)} + \int_{t_2(\lambda)}^{t_2(\mu)} \right\} dt \left[ p(\mu, t) \cdot \frac{\partial q}{\partial t}(\mu, t) - H(p(\mu, t), q(\mu, t), t) \right]. \end{aligned} \quad (12.24)$$

Scriviamo

$$t_i(\mu) - t_i(\lambda) = t'_i(\lambda)(\mu - \lambda) + o(\mu - \lambda).$$

Usando tale espressione e la regolarità delle funzioni integrande, l'ultimo termine diventa

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\mu - \lambda} \left\{ \int_{t_1(\mu)}^{t_1(\lambda)} + \int_{t_2(\lambda)}^{t_2(\mu)} \right\} dt \left[ p(\mu, t) \cdot \frac{\partial q}{\partial t}(\mu, t) - H(p(\mu, t), q(\mu, t), t) \right] \\ &= t'_2(\lambda) \left[ p(\lambda, t) \cdot \frac{\partial q}{\partial t}(\lambda, t_2(\lambda)) - H(p(\lambda, t_2(\lambda)), q(\lambda, t_2(\lambda)), t_2(\lambda)) \right] \\ &- t'_1(\lambda) \left[ p(\lambda, t) \cdot \frac{\partial q}{\partial t}(\lambda, t_1(\lambda)) - H(p(\lambda, t_1(\lambda)), q(\lambda, t_1(\lambda)), t_1(\lambda)) \right] + \frac{o(\mu - \lambda)}{\mu - \lambda} \end{aligned}$$

D'altra parte, si ha

$$\begin{aligned}
& p(\mu, t) \cdot \frac{\partial q}{\partial t}(\mu, t) - H(p(\mu, t), q(\mu, t), t) - p(\lambda, t) \cdot \frac{\partial q}{\partial t}(\lambda, t) + H(p(\lambda, t), q(\lambda, t), t) \\
&= (\mu - \lambda) \left[ \frac{\partial p(\lambda, t)}{\partial \lambda} \cdot \frac{\partial q(\lambda, t)}{\partial t} + \frac{\partial^2 q(\lambda, t)}{\partial \lambda \partial t} \cdot p(\lambda, t) \right. \\
&\quad \left. - \frac{\partial p(\lambda, t)}{\partial \lambda} \cdot \frac{\partial H}{\partial p}(p(\lambda, t), q(\lambda, t), t) - \frac{\partial q(\lambda, t)}{\partial \lambda} \cdot \frac{\partial H}{\partial q}(p(\lambda, t), q(\lambda, t), t) \right] + o(\mu - \lambda) \\
&= (\mu - \lambda) \left[ \frac{\partial^2 q(\lambda, t)}{\partial \lambda \partial t} \cdot p(\lambda, t) - \frac{\partial q(\lambda, t)}{\partial \lambda} \cdot \frac{\partial H}{\partial q}(p(\lambda, t), q(\lambda, t), t) \right] + o(\mu - \lambda),
\end{aligned}$$

avendo usato la prima delle (12.6).

Integrando il primo di tali termini su  $(t_1(\lambda), t_2(\lambda))$  per parti, si ottiene

$$\int_{t_1(\lambda)}^{t_2(\lambda)} dt \frac{\partial^2 q(\lambda, t)}{\partial \lambda \partial t} \cdot p(\lambda, t) = - \int_{t_1(\lambda)}^{t_2(\lambda)} dt \frac{\partial q(\lambda, t)}{\partial \lambda} \cdot \frac{\partial p(\lambda, t)}{\partial t} + p(\lambda, t) \frac{\partial q(\lambda, t)}{\partial \lambda} \Big|_{t_1(\lambda)}^{t_2(\lambda)}.$$

Sostituendo tali espressioni in (12.24) ed usando la seconda delle (12.6) si ottiene quindi

$$\begin{aligned}
S'(\lambda) &= p(\lambda, t_2(\lambda)) \frac{\partial q(\lambda, t_2(\lambda))}{\partial \lambda} - p(\lambda, t_1(\lambda)) \frac{\partial q(\lambda, t_1(\lambda))}{\partial \lambda} \\
&\quad + t'_2(\lambda) \left[ p(\lambda, t) \cdot \frac{\partial q}{\partial t}(\lambda, t_2(\lambda)) - H(p(\lambda, t_2(\lambda)), q(\lambda, t_2(\lambda)), t_2(\lambda)) \right] \\
&\quad - t'_1(\lambda) \left[ p(\lambda, t) \cdot \frac{\partial q}{\partial t}(\lambda, t_1(\lambda)) - H(p(\lambda, t_1(\lambda)), q(\lambda, t_1(\lambda)), t_1(\lambda)) \right].
\end{aligned}$$

Ricordando che

$$q_i(\lambda) = q(\lambda, t_i(\lambda)), \quad p_i(\lambda) = p(\lambda, t_i(\lambda)), \quad i = 1, 2$$

si ha

$$q'_i(\lambda) = \frac{\partial q(\lambda, t_i(\lambda))}{\partial \lambda} + \frac{\partial q(\lambda, t_i(\lambda))}{\partial t} t'_i(\lambda)$$

e combinando tale relazione con la precedente si ottiene la prova del Lemma.

L'invarianza di  $J(\mathcal{C})$  per spostamenti arbitrari lungo le traiettorie di un campo Hamiltoniano, assicurata dal teorema precedente, è in realtà una proprietà che caratterizza i campi Hamiltoniani. Con ciò si intende che, se, per ogni curva chiusa  $\mathcal{C}$  che interseca le curve integrali di un campo  $F$  in un solo punto,  $J(\mathcal{C})$  è invariante rispetto a spostamenti arbitrari lungo le curve integrali di  $F$ , allora necessariamente  $F$  è il campo Hamiltoniano corrispondente all'Hamiltoniana  $H$ . In realtà



tale proprietà potrebbe essere assunta come *definizione* di campo Hamiltoniano. Poiché non useremo tale caratterizzazione, ne omettiamo la dimostrazione.

Invariante di Poincaré. Tra le curve  $\mathcal{C}$  che si usano per la costruzione dell'invariante di Poincaré-Cartan vi sono in particolare quelle che corrispondono a tagliare un tubo di traiettorie dinamiche con un piano  $t = \text{costante}$ .

Tali curve di  $\tilde{\Gamma}$  corrispondono a curve chiuse  $\gamma$  nello spazio delle fasi ordinario  $\Gamma$ . Su tali curve risulta ovviamente  $t'(\lambda) = 0$  e quindi  $J(\mathcal{C})$  si riduce a

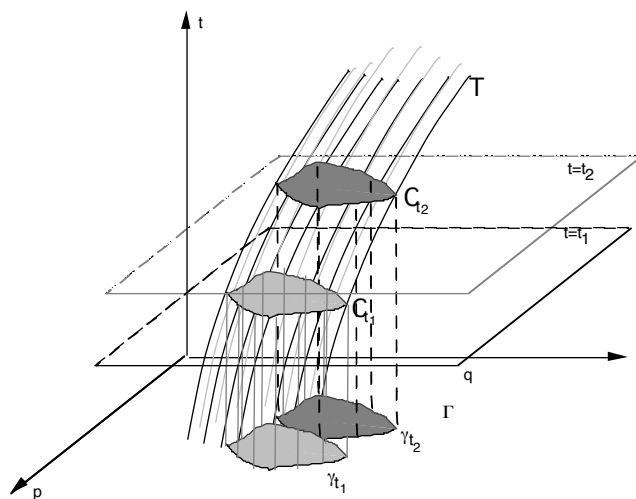
$$I(\gamma) = \oint_{\gamma} p \cdot dq.$$

Il teorema precedente implica allora immediatamente il seguente

**Teorema 12.11:** *Sia  $\{\gamma(t), t \in \mathbb{R}\}$  la famiglia di curve che si ottiene da una qualsiasi curva chiusa regolare  $\gamma$  di  $\Gamma$  trasportando ciascun suo punto con la trasformazione  $U_{t,0}$ . Si ha allora*

$$\frac{d}{dt} I(\gamma(t)) = 0.$$

*Osservazione:* Il valore numerico dell'invariante di Poincaré, costante nel tempo per il Teorema 12.11, non dipende dalla particolare scelta dell'Hamiltoniana  $H$ , ma solo dalla curva  $\gamma$ . Pertanto, per ogni curva chiusa  $\gamma$ ,  $I(\gamma)$  è invariante rispetto a spostamenti lungo le traiettorie dinamiche corrispondenti ad ogni Hamiltoniana regolare. Per tale motivo si parla anche di *invariante universale*.



Teorema di Lee Hwa-Chung.

È naturale domandarsi se vi siano altri invarianti integrali dello stesso genere dell'invariante di Poincarè, cioè invarianti della forma

$$\mathcal{I}(\gamma) = \oint_{\gamma} [A \cdot dp + B \cdot dq]$$

con  $A$  e  $B$  coefficienti di una forma differenziale su  $\Gamma$ , soddisfacenti la proprietà di non dipendere dal tempo e dall'Hamiltoniana usata per trasportare la curva  $\gamma$ . Il teorema che segue, fondamentale per gli sviluppi successivi, stabilisce l'unicità dell'invariante di Poincarè tra tutti gli invarianti della forma  $\mathcal{I}(\gamma)$ .

**Teorema 12.12 (Lee Hwa-Chung):** *Per ogni Hamiltoniana regolare  $H$ , sia  $U_{t,t_0}^H$  l'evoluzione temporale corrispondente ad  $H$ . Sia inoltre  $\{\gamma^H(t), t \in \mathbb{R}\}$  la famiglia di curve chiuse che si ottiene da una curva regolare chiusa  $\gamma$ , trasportandola mediante  $U_{t,0}^H$ :*

$$\gamma^H(t) = U_{t,0}^H \gamma.$$

Siano inoltre  $A$  e  $B$  funzioni regolari definite su  $\tilde{\Gamma}$  ed a valori in  $\mathbb{R}^n$ .

Se la circuitazione della forma differenziale

$$\pi = A \cdot dp + B \cdot dq$$

su  $\gamma^H(t)$ ,

$$\mathcal{I}^{H,t}(\gamma) = \oint_{\gamma^H(t)} [A \cdot dp + B \cdot dq]$$

è indipendente da  $t$  e da  $H$  per ogni Hamiltoniana  $H$  e per ogni curva chiusa regolare  $\gamma$ , allora esiste  $c \in \mathbb{R}$ , indipendente da  $H$  e da  $\gamma$ , tale che

$$\mathcal{I}^{H,t}(\gamma) = c\mathcal{I}(\gamma) = c \oint_{\gamma} p \cdot dq.$$

*Osservazione.* Lee Hwa-Chung provò risultati analoghi per invarianti integrali definiti su varietà di dimensione maggiore di 1. Non utilizzeremo tali risultati nel seguito e quindi ne omettiamo al discussione.

Dim. Forniamo la dimostrazione solo nel caso  $n = 1$ . La dimostrazione del caso generale può ottenersi usando le stesse idee, ma è piú laboriosa. Sia  $\lambda \rightarrow \gamma(\lambda) = (p(\lambda), q(\lambda))$  con  $\lambda \in [a, b]$  e  $\gamma(a) = \gamma(b)$ , una rappresentazione parametrica della curva regolare  $\gamma$ . Per ogni  $t$ , sia  $\lambda \rightarrow u(\lambda, t) = (p(\lambda, t), q(\lambda, t))$  una rappresentazione parametrica della curva  $\gamma^H(t)$ . Pertanto

$$\begin{aligned} \frac{\partial q(\lambda, t)}{\partial t} &= \frac{\partial H}{\partial p}(p(\lambda, t), q(\lambda, t), t), \\ \frac{\partial p(\lambda, t)}{\partial t} &= -\frac{\partial H}{\partial q}(p(\lambda, t), q(\lambda, t), t). \end{aligned} \tag{12.25}$$

L'invariante  $\mathcal{I}(t)$  si scrive allora

$$\mathcal{I}(t) = \int_a^b d\lambda \left[ A(p(\lambda, t), q(\lambda, t), t) \frac{\partial p(\lambda, t)}{\partial \lambda} + B(p(\lambda, t), q(\lambda, t), t) \frac{\partial q(\lambda, t)}{\partial \lambda} \right].$$

L'invarianza di  $\mathcal{I}$  comporta che

$$\frac{d}{dt} \int_a^b d\lambda \left[ A(p(\lambda, t), q(\lambda, t), t) \frac{\partial p(\lambda, t)}{\partial \lambda} + B(p(\lambda, t), q(\lambda, t), t) \frac{\partial q(\lambda, t)}{\partial \lambda} \right] = 0.$$

Differenziando sotto il segno di integrale e usando le notazioni

$$\dot{f} = \frac{\partial \tilde{f}(t, \lambda)}{\partial t}, \quad \tilde{f}(t, \lambda) = f(p(\lambda, t), q(\lambda, t), t),$$

$$f' = \frac{\partial \tilde{f}(t, \lambda)}{\partial \lambda}, \quad \tilde{f}(t, \lambda) = f(p(\lambda, t), q(\lambda, t), t),$$

si ottiene

$$\int_a^b d\lambda \left[ \dot{A}p' + A\dot{p}' + \dot{B}q' + B\dot{q}' \right] = 0.$$

Il secondo ed il quarto termine possono essere integrati per parti e forniscono

$$\int_a^b d\lambda [A\dot{p}' + B\dot{q}'] = - \int_a^b d\lambda [A'\dot{p} + B'\dot{q}],$$

in quanto il termine finito si annulla perché la curva  $\gamma^H(t)$  è chiusa. Si ha quindi

$$\int_a^b d\lambda \left[ \dot{A}p' - A'\dot{p} + \dot{B}q' - B'\dot{q} \right] = 0.$$

Esplicitando le derivate di  $A$  e  $B$  si ottiene allora:

$$\begin{aligned} & \left[ \dot{A}p' - A'\dot{p} + \dot{B}q' - B'\dot{q} \right] \\ &= \frac{\partial A}{\partial p} \dot{p}p' + \frac{\partial A}{\partial q} \dot{q}p' + \frac{\partial A}{\partial t} p' - \frac{\partial A}{\partial p} p'\dot{p} - \frac{\partial A}{\partial q} q'\dot{p} \\ &+ \frac{\partial B}{\partial p} \dot{p}q' + \frac{\partial B}{\partial q} \dot{q}q' + \frac{\partial B}{\partial t} q' - \frac{\partial B}{\partial p} p'\dot{q} - \frac{\partial B}{\partial q} q'\dot{q} \\ &= \frac{\partial A}{\partial q} \dot{q}p' + \frac{\partial A}{\partial t} p' - \frac{\partial A}{\partial q} q'\dot{p} + \frac{\partial B}{\partial p} \dot{p}q' + \frac{\partial B}{\partial t} q' - \frac{\partial B}{\partial p} p'\dot{q} \\ &= p' \left[ - \left( \frac{\partial B}{\partial p} - \frac{\partial A}{\partial q} \right) \dot{q} + \frac{\partial A}{\partial t} \right] + q' \left[ \left( \frac{\partial B}{\partial p} - \frac{\partial A}{\partial q} \right) \dot{p} + \frac{\partial B}{\partial t} \right] \end{aligned}$$

Posto allora

$$R = \frac{\partial B}{\partial p} - \frac{\partial A}{\partial q},$$

usando le (12.25) si ottiene

$$\int_a^b d\lambda \left\{ \left( -R \frac{\partial H}{\partial p} + \frac{\partial A}{\partial t} \right) p' + \left( -R \frac{\partial H}{\partial q} + \frac{\partial B}{\partial t} \right) q' \right\} = 0.$$

In conseguenza la circuitazione della forma differenziale

$$\bar{\pi} = \bar{A}dp + \bar{B}dq$$

con

$$\bar{A} = -R \frac{\partial H}{\partial p} + \frac{\partial A}{\partial t}, \quad \bar{B} = -R \frac{\partial H}{\partial q} + \frac{\partial B}{\partial t}$$

è nulla su ogni curva chiusa. Pertanto  $\bar{\pi}$  è un differenziale esatto e quindi è verificata la condizione

$$\frac{\partial \bar{A}}{\partial q} = \frac{\partial \bar{B}}{\partial p}$$

e cioè

$$\frac{\partial}{\partial p} \left( -R \frac{\partial H}{\partial q} + \frac{\partial B}{\partial t} \right) = \frac{\partial}{\partial q} \left( -R \frac{\partial H}{\partial p} + \frac{\partial A}{\partial t} \right).$$

Tale relazione equivale a

$$\frac{\partial R}{\partial t} + \frac{\partial R}{\partial q} \frac{\partial H}{\partial p} - \frac{\partial R}{\partial p} \frac{\partial H}{\partial q} = 0$$

Ricordando la definizione di integrale primo, ne consegue che  $R$  è un integrale primo per ogni sistema Hamiltoniano. Ciò è possibile solo se  $R$  è una costante  $c$ . Pertanto

$$\frac{\partial B}{\partial p} - \frac{\partial A}{\partial q} = c.$$

Siano

$$A_1 = A, \quad B_1 = B - cp.$$

La forma differenziale

$$\pi_1 = A_1 dp + B_1 dq$$

soddisfa allora la condizione

$$\frac{\partial A_1}{\partial q} = \frac{\partial B_1}{\partial p}$$

e quindi è esatta in quanto  $\Gamma$  è semplicemente connesso. Pertanto esiste  $\Psi$  tale che

$$Adp + Bdq - cpdq = d\Psi.$$

Integrando tale relazione su una curva chiusa  $\gamma$  si ottiene allora

$$\oint_{\gamma} [Adp + Bdq] = c \oint_{\gamma} pdq$$

e pertanto il Teorema di Lee Hwa-Chung è dimostrato per  $n = 1$ .  $\square$

## 13. Trasformazioni canoniche.

### 13.1 Nozione di trasformazione canonica.

Si è osservato nel Capitolo 10 che le equazioni di Lagrange sono invarianti rispetto a cambiamenti di coordinate sullo spazio delle configurazioni  $\mathcal{C}$  della forma

$$q' = \psi(q, t), \quad (13.1)$$

con  $\psi(q, t)$  funzione differenziabile e tale che per ogni  $t$  fissato, la trasformazione (13.1) è invertibile. Per il modo con cui il sistema di Hamilton è stato costruito a partire dalle equazioni di Lagrange, esso risulta a sua volta invariante rispetto alla trasformazione sullo spazio delle fasi indotta dalla trasformazione (13.1). Per stabilire la forma di tale trasformazione, occorre riferirsi alla definizione delle variabili  $p$  in termini di derivate della Lagrangiana rispetto alle velocità.

Ricordiamo innanzitutto che, se  $\eta = \dot{q}$  sono le velocità generalizzate in un moto  $t \rightarrow q(t)$ , allora la trasformazione (13.1) induce una trasformazione sulle  $\eta$  della forma

$$\eta' = M(q, t)\eta + g(q, t);$$

la matrice  $M(q, t)$ , di elementi

$$M_{h,k}(q, t) = \frac{\partial \psi_h}{\partial q_k}(q, t),$$

è una matrice non singolare. Inoltre

$$g(q, t) = \frac{\partial \psi}{\partial t}(q, t).$$

In corrispondenza si costruisce la Lagrangiana  $L'$  ponendo

$$L'(\eta', q', t) = L\left(M^{-1}(q, t)[\eta' - g(q, t)], q, t\right)\Big|_{q=\psi^{-1}(q', t)},$$

in modo tale che le equazioni per la traiettoria  $t \rightarrow q'(t)$  sono nella forma di equazioni di Lagrange corrispondenti alla Lagrangiana  $L'$ .

Poiché

$$p_h = \frac{\partial L}{\partial \eta_h}, \quad p'_h = \frac{\partial L'}{\partial \eta'_h},$$

per stabilire la relazione tra  $p$  e  $p'$  basta differenziare la relazione

$$L(\eta, q, t) = L'(M(q, t)\eta + g(q, t), \psi(q, t), t)$$

rispetto alla variabile  $\eta_h$ :

$$p_h = \frac{\partial L}{\partial \eta_h} = \frac{\partial}{\partial \eta_h} L'(M(q, t)\eta + g(q, t), \psi(q, t), t) = \sum_{k=1}^n \frac{\partial L'}{\partial \eta'_k} M_{k,h} = \sum_{k=1}^n M_{k,h} p'_k.$$

e quindi

$$p'_i = \sum_{h=1}^n M_{h,i}^{-1} p_h.$$

Pertanto la trasformazione indotta da (13.1) sullo spazio delle fasi è

$$\Psi : (p, q, t) \rightarrow ((M^{-1})^T p, \psi(q, t), t). \quad (13.2)$$

Il già discusso passaggio dal sistema di Lagrange al sistema di Hamilton mediante la trasformata di Legendre implica che le funzioni  $t \rightarrow (p(t), q(t))$  sono le soluzioni del sistema di Hamilton

$$\begin{aligned} \dot{p} &= -\frac{\partial H}{\partial q}, \\ \dot{q} &= \frac{\partial H}{\partial p}. \end{aligned} \quad (13.3)$$

Si definisce  $H'$  come

$$H' = H \circ \Psi^{-1}, \quad (13.4)$$

e cioè

$$H'(p', q', t) = H(M^T p', \psi^{-1}(q', t), t).$$

È immediato controllare che  $H'$  è la trasformata di Legendre di  $L'$  e pertanto le equazioni per le funzioni  $t \rightarrow (p'(t), q'(t))$  sono date da

$$\begin{aligned} \dot{p}' &= -\frac{\partial H'}{\partial q'}, \\ \dot{q}' &= \frac{\partial H'}{\partial p'}. \end{aligned} \quad (13.5)$$

Si può quindi concludere che la trasformazione (13.2) indotta dalla (13.1) trasforma il sistema Hamiltoniano (13.3) nel sistema Hamiltoniano (13.5) con Hamiltoniana  $H'$  fornita dalla (13.4). La trasformazione  $\Psi(p, q, t)$  sullo spazio delle fasi  $\Gamma$  indotta dalla trasformazione  $\psi(q, t)$  sullo spazio delle configurazioni si dice *trasformazione naturale*.

Poiché lo spazio su cui è definito il sistema Hamiltoniano (13.3) è lo spazio delle fasi  $\Gamma$ , non vi è nessun motivo per limitarsi a considerare soltanto le trasformazioni naturali e cioè i cambi di coordinate sullo spazio delle fasi che corrispondono

a trasformazioni  $\Psi$  della forma (13.2). Più in generale, si possono considerare trasformazioni della forma

$$\Psi : (p, q, t) \in \Gamma \times \mathbb{R} \rightarrow (P, Q, t) \in \Gamma' \times \mathbb{R}$$

con

$$\begin{aligned} P &= P(p, q, t), \\ Q &= Q(p, q, t) \end{aligned} \quad (13.6)$$

Le funzioni  $(p, q, t) \rightarrow P(p, q, t)$  e  $(p, q, t) \rightarrow Q(p, q, t)$  sono funzioni differenziabili definite in  $\Gamma \times \mathbb{R}$  a valori in  $\mathbb{R}^n$ , tali che  $\Psi$  sia localmente invertibile. Tale condizione verrà nel seguito sempre garantita assumendo che la matrice Jacobiana

$$J[(P, Q)/(p, q)] = \begin{pmatrix} \frac{\partial P_1}{\partial p_1} & \cdots & \frac{\partial P_1}{\partial p_n} & \frac{\partial P_1}{\partial q_1} & \cdots & \frac{\partial P_1}{\partial q_n} \\ \frac{\partial \dot{P}_n}{\partial p_1} & \cdots & \frac{\partial \dot{P}_n}{\partial p_n} & \frac{\partial \dot{P}_n}{\partial q_1} & \cdots & \frac{\partial \dot{P}_n}{\partial q_n} \\ \frac{\partial Q_1}{\partial p_1} & \cdots & \frac{\partial Q_1}{\partial p_n} & \frac{\partial Q_1}{\partial q_1} & \cdots & \frac{\partial Q_1}{\partial q_n} \\ \frac{\partial \dot{Q}_n}{\partial p_1} & \cdots & \frac{\partial \dot{Q}_n}{\partial p_n} & \frac{\partial \dot{Q}_n}{\partial q_1} & \cdots & \frac{\partial \dot{Q}_n}{\partial q_n} \end{pmatrix},$$

della trasformazione  $\Psi$  abbia determinante non nullo per ogni  $(p, q, t) \in \Gamma \times \mathbb{R}$ .

Con abuso di notazione si sono denotate e si denoteranno nel seguito con  $P, Q$  sia le nuove variabili che le funzioni che determinano la trasformazione. Lo spazio delle fasi  $\Gamma'$  ove variano le variabili  $(P, Q)$  verrà denotato anche con  $\Gamma_{P, Q}$ , per ricordare che si tratta dello spazio delle fasi relativo a tali variabili. Allo stesso modo,  $\Gamma_{p, q}$  sarà una notazione equivalente a  $\Gamma$ .

Mentre i sistemi Lagrangiani sono invarianti rispetto a cambi di coordinate sullo spazio delle configurazioni, non è detto che i sistemi Hamiltoniani siano invarianti rispetto a cambi di coordinate sullo spazio delle fasi della forma (13.6).

Se  $t \rightarrow (p(t), q(t))$  è una qualsiasi soluzione del sistema Hamiltoniano (13.3), la traiettoria immagine tramite  $\Psi$ ,  $t \rightarrow \Psi(p(t), q(t), t)$  risolve il sistema *trasformato*

$$\begin{aligned} \dot{P} &= F_P(P, Q, t), \\ \dot{Q} &= F_Q(P, Q, t) \end{aligned}$$

ove

$$\begin{aligned} F_{P_h}(P, Q, t) &= \left[ \sum_{k=1}^n \left( -\frac{\partial P_h}{\partial p_k} \frac{\partial H}{\partial q_k} + \frac{\partial P_h}{\partial q_k} \frac{\partial H}{\partial p_k} \right) + \frac{\partial P_h}{\partial t} \right] (\Psi^{-1}(P, Q, t)), \quad h=1, \dots, n, \\ F_{Q_h}(P, Q, t) &= \left[ \sum_{k=1}^n \left( -\frac{\partial Q_h}{\partial p_k} \frac{\partial H}{\partial q_k} + \frac{\partial Q_h}{\partial q_k} \frac{\partial H}{\partial p_k} \right) + \frac{\partial Q_h}{\partial t} \right] (\Psi^{-1}(P, Q, t)), \quad h=1, \dots, n. \end{aligned}$$

Le precedenti espressioni si ottengono immediatamente differenziando le (13.6) rispetto al tempo ed usando le equazioni di Hamilton per le  $\dot{p}$  e  $\dot{q}$ .

Non è detto che il campo  $F = (F_{P_1}, \dots, F_{P_n}, F_{Q_1}, \dots, F_{Q_n})$  sia il campo Hamiltoniano di qualche Hamiltoniana  $H'$ . Infatti è facile fornire esempi di trasformazioni  $\Psi$  per le quali il sistema trasformato di un sistema Hamiltoniano non è Hamiltoniano. Ad esempio, nel caso  $n = 1$  la trasformazione

$$P = pq^2, \quad Q = qp^2,$$

la cui inversa, per  $P, Q, p, q$  positivi è

$$p = \left(\frac{Q^2}{P}\right)^{1/3}, \quad q = \left(\frac{P^2}{Q}\right)^{1/3},$$

non trasforma sistemi Hamiltoniani in sistemi Hamiltoniani. Basta far vedere che questo è il caso per  $H(p, q, t) = p^2/2$ . In tal caso,

$$\dot{p} = 0, \quad \dot{q} = p$$

è il sistema Hamiltoniano nelle variabili  $(p, q)$ . D'altra parte

$$\begin{aligned} \dot{P} &= \dot{p}q^2 + 2pq\dot{q} = 2p^2q = 2Q, \\ \dot{Q} &= \dot{q}p^2 + 2pq\dot{p} = p^3 = \frac{Q^2}{P}. \end{aligned}$$

Se esistesse  $H'(P, Q, t)$  differenziabile, tale che

$$F_P = -\frac{\partial H'}{\partial Q}, \quad F_Q = \frac{\partial H'}{\partial P},$$

si avrebbe in conseguenza

$$\operatorname{div} F = \frac{\partial F_P}{\partial P} + \frac{\partial F_Q}{\partial Q} = 0.$$

Nel nostro caso

$$F_P = 2Q, \quad F_Q = \frac{Q^2}{P},$$

e quindi

$$\operatorname{div} F = 2\frac{Q}{P} \neq 0.$$

La proprietà di trasformare sistemi Hamiltoniani in sistemi Hamiltoniani caratterizza un sottoinsieme di tutte le possibili trasformazioni dello spazio delle fasi (13.6). Tali trasformazioni sono dette *canoniche*. Diamo infatti la seguente



**Definizione 13.1:** Una trasformazione

$$\Psi : (p, q, t) \in \Gamma_{p,q} \times \mathbb{R} \rightarrow (P, Q, t) \in \Gamma_{P,Q} \times \mathbb{R}$$

data dalle (13.6), differenziabile e localmente invertibile è detta *trasformazione canonica* se, qualunque sia l'Hamiltoniana regolare  $H(p, q, t)$ , esiste una Hamiltoniana regolare  $H'(P, Q, t)$  tale che tutte le traiettorie  $t \rightarrow (p(t), q(t))$  in  $\Gamma_{p,q}$  soluzioni del sistema Hamiltoniano (13.3) sono trasformate dalla  $\Psi$  nelle traiettorie  $t \rightarrow (P(t), Q(t))$  in  $\Gamma_{P,Q}$  soluzioni del sistema Hamiltoniano corrispondente all'Hamiltoniana  $H'$

$$\begin{aligned} \dot{P}_h &= -\frac{\partial H'}{\partial Q_h}, \\ \dot{Q}_h &= \frac{\partial H'}{\partial P_h} \end{aligned} \quad h = 1, \dots, n. \quad (13.7)$$

Sottolineiamo che la condizione che definisce le trasformazioni canoniche riguarda ogni Hamiltoniana regolare. È tuttavia possibile che una trasformazione  $\Psi$  trasformi il sistema Hamiltoniano corrispondente ad una specifica Hamiltoniana  $H$  in un nuovo sistema canonico, con Hamiltoniana  $H'$ , ma non faccia altrettanto quando si prenda una diversa Hamiltoniana di partenza. Quando ciò si verifica la trasformazione  $\Psi$  è detta *canonica rispetto alla coppia di Hamiltoniane  $H$  ed  $H'$* . Per molti scopi pratici l'invarianza di una specifica coppia di sistemi Hamiltoniani è completamente sufficiente. Tuttavia la classe di tali trasformazioni è troppo ampia per poterla caratterizzare in modo soddisfacente. Nel seguito considereremo esclusivamente trasformazioni canoniche nel senso precisato nella Definizione 13.1.

Nella classe delle trasformazioni canoniche vi è una sottoclasse, quella delle trasformazioni completamente canoniche, caratterizzate dalla seguente

**Definizione 13.2:** Sia

$$\Phi : (p, q) \in \Gamma_{p,q} \rightarrow (P(p, q), Q(p, q)) \in \Gamma_{P,Q}$$

una trasformazione localmente invertibile sullo spazio delle fasi ed *indipendente dal tempo*. Una tale trasformazione è detta *completamente canonica* se è canonica ed inoltre

$$H'(P, Q, t) = H(\Phi^{-1}(P, Q), t).$$

Esempi di trasformazioni canoniche.

1. Le trasformazioni naturali forniscono un primo esempio di trasformazioni completamente canoniche.
2. La trasformazione  $\Phi$  indipendente dal tempo, definita da

$$P_h = q_h, \quad Q_h = -p_h, \quad h = 1, \dots, n,$$

è una trasformazione completamente canonica. Infatti il sistema trasformato è

$$\begin{aligned}\dot{P} = \dot{q} &= \frac{\partial H}{\partial p}(p, q, t) = \frac{\partial H}{\partial p}(-Q, P, t) \stackrel{def}{=} F_P(P, Q, t), \\ \dot{Q} = -\dot{p} &= \frac{\partial H}{\partial q}(p, q, t) = \frac{\partial H}{\partial q}(-Q, P, t) \stackrel{def}{=} F_Q(P, Q, t).\end{aligned}$$

Posto

$$H'(P, Q, t) = H(-Q, P, t)$$

si ha

$$\begin{aligned}\frac{\partial H'}{\partial P}(P, Q, t) &= \frac{\partial H}{\partial q}(-Q, P, t) = F_Q(P, Q, t), \\ \frac{\partial H'}{\partial Q}(P, Q, t) &= -\frac{\partial H}{\partial p}(Q, P, t) = -F_P(P, Q, t)\end{aligned}$$

e quindi il sistema trasformato ammette  $H'$  come Hamiltoniana, il che prova che la trasformazione è canonica. Essa è anche completamente canonica in quanto  $H' = H \circ \Phi^{-1}$ .

Tale esempio mostra che in una trasformazione canonica il significato originario delle variabili di configurazione ed impulso viene a perdersi completamente. Infatti i nuovi impulsi sono le vecchie coordinate, mentre le nuove coordinate sono i vecchi impulsi cambiati di segno. La distinzione tra variabili di configurazione ed impulsi verrà mantenuta nel seguito in modo puramente convenzionale.

3. La trasformazione  $\Phi$  indipendente dal tempo, definita da

$$P_h = q_h, \quad Q_h = p_h, \quad h = 1, \dots, n,$$

è una trasformazione canonica ma non completamente canonica. Infatti il sistema trasformato è

$$\begin{aligned}\dot{P} = \dot{q} &= \frac{\partial H}{\partial p}(p, q, t) = \frac{\partial H}{\partial p}(Q, P, t) = F_P(P, Q, t), \\ \dot{Q} = \dot{p} &= -\frac{\partial H}{\partial q}(p, q, t) = -\frac{\partial H}{\partial q}(Q, P, t) = F_Q(P, Q, t).\end{aligned}$$

Posto

$$H'(P, Q, t) = -H(Q, P, t)$$

si ha

$$\begin{aligned}\frac{\partial H'}{\partial P}(P, Q, t) &= -\frac{\partial H}{\partial q}(Q, P, t) = F_Q(P, Q, t), \\ \frac{\partial H'}{\partial Q}(P, Q, t) &= -\frac{\partial H}{\partial p}(-Q, P, t) = -F_P(P, Q, t)\end{aligned}$$

e quindi il sistema trasformato ammette  $H'$  come Hamiltoniana, il che prova che la trasformazione è canonica. Essa non è completamente canonica in quanto  $H' = -H \circ \Phi^{-1}$  e non  $H' = H \circ \Phi^{-1}$ .

4. Data una qualsiasi funzione differenziabile  $t \rightarrow f(t)$  mai nulla, esiste  $t \rightarrow g(t)$  soddisfacente la stessa condizione, tale che la trasformazione  $\Psi$  definita da

$$P_h = f(t)q_h, \quad Q_h = g(t)p_h, \quad h = 1, \dots, n,$$

è una trasformazione canonica dipendente dal tempo. Difatti

$$\begin{aligned} \dot{P} &= \dot{q}f + q\dot{f} = \frac{\partial H}{\partial p}\left(\frac{Q}{g}, \frac{P}{f}, t\right)f + \frac{P}{f}\dot{f} = F_P, \\ \dot{Q} &= \dot{p}g + p\dot{g} = -\frac{\partial H}{\partial q}\left(\frac{Q}{g}, \frac{P}{f}, t\right)g + \frac{Q}{g}\dot{g} = F_Q. \end{aligned}$$

D'altra parte, scelto

$$H'(P, Q, t) = H\left(\frac{Q}{g}, \frac{P}{f}, t\right) + b(t) \sum_{l=1}^n P_l Q_l,$$

con  $t \rightarrow b(t)$  funzione da determinare,

$$\begin{aligned} \frac{\partial H'}{\partial P}(P, Q, t) &= \frac{\partial H}{\partial q}\left(\frac{Q}{g}, \frac{P}{f}, t\right)\frac{1}{f} + bQ = F_Q = -\frac{\partial H}{\partial q}\left(\frac{Q}{g}, \frac{P}{f}, t\right)g + \frac{Q}{g}\dot{g} \\ \frac{\partial H'}{\partial Q}(P, Q, t) &= \frac{\partial H}{\partial p}\left(\frac{Q}{g}, \frac{P}{f}, t\right)\frac{1}{g} + bP = -F_P = -\frac{\partial H}{\partial p}\left(\frac{Q}{g}, \frac{P}{f}, t\right)f - \frac{P}{f}\dot{f}. \end{aligned}$$

Da tali relazioni segue

$$g = -\frac{1}{f}, \quad b = \frac{\dot{g}}{g} = -\frac{\dot{f}}{f}.$$

In particolare, se  $f = a$  indipendente dal tempo e  $g = -1/a$ , la trasformazione è completamente canonica.

5. Posto

$$P_h = A_h = \frac{p_h^2 + q_h^2}{2}, \quad Q_h = \varphi_h = \arctan \frac{q_h}{p_h},$$

la trasformazione  $\Phi$  indipendente dal tempo è ben definita ed invertibile se ad esempio  $p_h > 0$  per ogni  $h = 1, \dots, n$ . La sua inversa è data da

$$p_h = \sqrt{2A_h} \cos \varphi_h, \quad q_h = \sqrt{2A_h} \sin \varphi_h.$$

Essa è completamente canonica. Infatti, si ha

$$\begin{aligned}\dot{A}_h &= p_h \dot{p}_h + q_h \dot{q}_h = -p_h \frac{\partial H}{\partial q_h} + q_h \frac{\partial H}{\partial p_h} = F_{A_h}, \\ \dot{\varphi}_h &= \frac{p_h \dot{q}_h - q_h \dot{p}_h}{p_h^2 + q_h^2} = \frac{1}{2A_h} \left[ p_h \frac{\partial H}{\partial p_h} + q_h \frac{\partial H}{\partial q_h} \right] = F_{\varphi_h}.\end{aligned}$$

D'altra parte,

$$\begin{aligned}\frac{\partial p_h}{\partial A_h} &= \frac{1}{\sqrt{2A_h}} \cos \varphi_h = \frac{p_h}{2A_h}, & \frac{\partial q_h}{\partial A_h} &= \frac{1}{\sqrt{2A_h}} \sin \varphi_h = \frac{q_h}{2A_h}, \\ \frac{\partial p_h}{\partial \varphi_h} &= -\sqrt{2A_h} \sin \varphi_h = -q_h, & \frac{\partial q_h}{\partial \varphi_h} &= \sqrt{2A_h} \cos \varphi_h = p_h.\end{aligned}$$

Pertanto, posto

$$H'(A, \varphi) = H(\sqrt{2A_h} \cos \varphi_h, \sqrt{2A_h} \sin \varphi_h),$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial H'}{\partial A_h} &= \frac{p_h}{2A} \frac{\partial H}{\partial p_h} + \frac{q_h}{2A_h} \frac{\partial H}{\partial q_h} = F_{\varphi_h}, \\ \frac{\partial H'}{\partial q_h} &= -q_h \frac{\partial H}{\partial p_h} + p_h \frac{\partial H}{\partial q_h} = -F_{A_h}.\end{aligned}$$

Un caso particolarmente importante nel quale si usa questa trasformazione completamente canonica è quello in cui

$$H(p, q) = \sum_{l=1}^n \frac{p_l^2 + q_l^2}{2}, \quad (13.8)$$

corrispondente ad un sistema di oscillatori armonici ridotti a modi normali e con frequenze proprie e masse tutte uguali ad 1 per semplicità. In questo caso  $H'(A, \varphi) = \sum_{l=1}^n A_l$ , sicché il sistema Hamiltoniano corrispondente si riduce a

$$\dot{A}_h = 0, \quad \dot{\varphi}_h = 1,$$

la cui integrazione è immediata e conduce a

$$A_h = A_h^{(0)}, \quad \varphi_h = \varphi_h^{(0)} + t.$$

6. Si ponga

$$B_h = \sqrt{A_h}.$$

La trasformazione  $\Phi'$  definita come  $\Phi$ , ma con le  $B_h$  come nuove variabili impulso in luogo delle  $A_h$ , cioè

$$P_h = B_h = \sqrt{\frac{p_h^2 + q_h^2}{2}}, \quad Q_h = \varphi_h = \arctan \frac{q_h}{p_h},$$

con inversa data da

$$p_h = \sqrt{2}B_h \cos \varphi_h, \quad q_h = \sqrt{2}B_h \sin \varphi_h,$$

non è nemmeno canonica. Infatti, supponendo per semplicità  $n = 1$ , e considerando il caso speciale

$$H(p, q) = \frac{p^2}{2},$$

con gli stessi calcoli di prima si ottiene

$$\begin{aligned} \dot{B} &= \frac{p\dot{p} + q\dot{q}}{2B} = \frac{pq}{2B} = B \sin \varphi \cos \varphi, \\ \dot{\varphi} &= \frac{p\dot{q} - q\dot{p}}{2B} = \frac{p^2}{2B} = \cos^2 \varphi. \end{aligned}$$

Se la trasformazione fosse canonica, dovrebbe esistere  $H'(B, \varphi)$  tale che

$$\frac{\partial H'}{\partial B} = \cos^2 \varphi, \quad \frac{\partial H'}{\partial \varphi} = -B \sin \varphi \cos \varphi.$$

La prima di tali relazioni implica

$$H'(B, \varphi) = B \cos^2 \varphi + \alpha(\varphi),$$

con  $\alpha(\varphi)$  indipendente da  $B$ . Sostituita tale espressione nella seconda relazione, si ottiene

$$\frac{\partial \alpha}{\partial \varphi} = B \sin \varphi \cos \varphi,$$

che non può essere soddisfatta da una  $\alpha$  indipendente da  $B$ . In conclusione la trasformazione *non* è canonica. Tuttavia, il sistema Hamiltoniano corrispondente all'Hamiltoniana (13.8) viene trasformato ovviamente nel sistema

$$\dot{B}_h = 0, \quad \dot{\varphi}_h = 1$$

che è canonico, con Hamiltoniana  $H'(B, \varphi) = \sum_{l=1}^n B_l$ . pertanto la trasformazione  $\Phi'$  è *canonica rispetto alla coppia di Hamiltoniane  $H$  (data da (13.8)) ed  $H' = \sum_{l=1}^n B_l$ .*

### 13.2 Condizioni di canonicità.

In molti casi può risultare difficile un controllo diretto della canonicità di una trasformazione. È utile in questi casi disporre di condizioni necessarie e sufficienti di canonicità. Cominceremo con il trovare una condizione necessaria che è basata sull'invariante integrale di Poincaré-Cartan e sull'invariante di Poincaré.

Sia  $\Psi$  una trasformazione canonica. Detti  $\tilde{\Gamma}_{p,q} = \Gamma_{p,q} \times \mathbb{R}$  e  $\tilde{\Gamma}_{P,Q} = \Gamma_{P,Q} \times \mathbb{R}$  gli spazi delle fasi estesi nelle variabili  $(p, q)$  e  $(P, Q)$  rispettivamente,

$$\Psi : \tilde{\Gamma}_{p,q} \rightarrow \tilde{\Gamma}_{P,Q}$$

è differenziabile e localmente invertibile. Inoltre, per ogni Hamiltoniana  $H$ , il sistema Hamiltoniano

$$\begin{aligned} \dot{p}_h &= -\frac{\partial H}{\partial q_h}, \\ \dot{q}_h &= \frac{\partial H}{\partial p_h}, \end{aligned} \quad h = 1, \dots, n, \quad (13.9)$$

è trasformato da  $\Psi$  nel sistema Hamiltoniano

$$\begin{aligned} \dot{P}_h &= -\frac{\partial H'}{\partial Q_h}(P, Q, t), \\ \dot{Q}_h &= \frac{\partial H'}{\partial P_h}(P, Q, t), \end{aligned} \quad h = 1, \dots, n, \quad (13.10)$$

con Hamiltoniana  $H'$ .

Sia  $\mathcal{T}_{p,q}$  un tubo di flusso relativo al sistema Hamiltoniano (13.9),  $\mathcal{C}_0$  una curva chiusa ottenuta tagliando  $\mathcal{T}_{p,q}$  con un piano  $t = \text{cost}$  e  $\mathcal{C}$  un'altra qualsiasi curva chiusa che interseca le traiettorie del tubo  $\mathcal{T}_{p,q}$  in un solo punto. Il teorema sull'invariante di Poincaré-Cartan assicura che

$$\oint_{\mathcal{C}} [p \cdot dq - H dt] = \oint_{\mathcal{C}_0} p \cdot dq. \quad (13.11)$$

Denotiamo con  $\mathcal{T}_{P,Q}$ ,  $\mathcal{C}'_0$ ,  $\mathcal{C}'$  il tubo di flusso e le due curve chiuse che si ottengono trasformando  $\mathcal{T}_{p,q}$ ,  $\mathcal{C}_0$  e  $\mathcal{C}$  mediante  $\Psi$ . In particolare, la curva  $\mathcal{C}'_0$  è anch'essa ottenuta tagliando  $\mathcal{T}_{P,Q}$  con un piano  $t = \text{cost}$ . Poiché la trasformazione è canonica, il tubo  $\mathcal{T}_{P,Q}$  è un tubo di flusso relativo ad un sistema Hamiltoniano con Hamiltoniana  $H'$ . Pertanto il teorema sull'invariante di Poincaré-Cartan implica che

$$\oint_{\mathcal{C}'} [P \cdot dQ - H' dt] = \oint_{\mathcal{C}'_0} P \cdot dQ. \quad (13.12)$$

Il membro destro di (13.12) può essere scritto come una forma differenziale nelle variabili  $(p, q)$ , in quanto

$$P \cdot dQ = \sum_{h=1}^n \left\{ \sum_{k=1}^n P_k \frac{\partial Q_k}{\partial q_h} \right\} dq_h + \sum_{h=1}^n \left\{ \sum_{k=1}^n P_k \frac{\partial Q_k}{\partial p_h} \right\} dp_h.$$

Qualunque sia il sistema Hamiltoniano di partenza, i membri destri di (13.11) e (13.12) sono invarianti per spostamenti lungo le curve integrali dei due campi Hamiltoniani relativi ad  $H$  ed  $H'$ , a tempi fissati, in quanto sono i rispettivi invarianti di Poincaré. Pertanto, per il teorema di Lee Hwa-Chung, esiste  $c \in \mathbb{R}$  tale che

$$\oint_{\mathcal{C}'} P \cdot dQ = \frac{1}{c} \oint_{\mathcal{C}} p \cdot dq.$$

In conseguenza, usando (13.11) e (13.12) si ha

$$\oint_{\mathcal{C}'} [P \cdot dQ - H' dt] = \frac{1}{c} \oint_{\mathcal{C}} [p \cdot dq - H dt]$$

per ogni curva chiusa  $\mathcal{C}$  e con  $\mathcal{C}' = \Psi(\mathcal{C})$ . Reinterpretando la forma differenziale  $P \cdot dQ - H' dt$  come una forma differenziale nelle variabili  $(p, q)$ , la precedente relazione implica che la forma differenziale

$$p \cdot dq - H dt - c[P \cdot dQ - H' dt]$$

ha circuitazione nulla su ogni curva chiusa. Pertanto tale forma differenziale è esatta e quindi esiste  $G(p, q, t)$  differenziabile su  $\tilde{\Gamma}_{p,q}$  tale che

$$p \cdot dq - H dt - c[P \cdot dQ - H' dt] = dG \quad (13.13)$$

*Osservazione:* Per pervenire a tale conclusione si è usato in modo determinante il teorema di Lee Hwa-Chung che dipende dall'invarianza dell'integrale di Poincaré rispetto ai moti di ogni sistema Hamiltoniano. La condizione necessaria per la canonicità di una trasformazione appena dimostrata è valida quando si assuma la definizione "restrittiva" di trasformazione canonica cioè di trasformazione che manda "ogni" sistema Hamiltoniano in un sistema Hamiltoniano, mentre non si applica alle trasformazioni che sono canoniche solo rispetto ad una specifica coppia di sistemi Hamiltoniani.

La condizione (13.13) non è solo necessaria per la canonicità, ma anche sufficiente. Dimosteremo infatti il seguente

**Teorema 13.1:** *Condizione necessaria e sufficiente affinché la trasformazione  $\Psi$  sia canonica è che per ogni  $H(p, q, t)$  regolare esistano  $c \neq 0$ ,  $G(p, q, t)$  differenziabile e  $H'(P, Q, t)$  regolare in modo che la (13.13) sia verificata.*

Dim. La condizione necessaria è stata già dimostrata in precedenza. Per dimostrare la condizione sufficiente, ricordiamo che, come si è visto nel Capitolo 12, le traiettorie soluzione di un sistema Hamiltoniano sono tutti e soli i punti stazionari del funzionale Azione. Più precisamente, fissati  $z^{(1)}$  e  $z^{(2)}$  in  $\Gamma$  e lo spazio delle

traiettorie  $\mathcal{M}_{z^{(1)}, z^{(2)}, T}$ , una traiettoria  $\gamma \in \mathcal{M}_{z^{(1)}, z^{(2)}, T}$  è un punto stazionario per il funzionale Azione

$$S[\gamma] = \int_0^T dt [p(t) \cdot \dot{q}(t) - H(p(t), q(t), t)]$$

in  $\mathcal{M}_{z^{(1)}, z^{(2)}, T}$  se e solo se  $t \rightarrow \gamma(t) = (p(t), q(t))$  è una soluzione del sistema Hamiltoniano (13.3). La canonicità della trasformazione  $\Psi$  sarà dimostrata facendo vedere che, in conseguenza di (13.13), la traiettoria trasformata  $\gamma' = \Psi(\gamma)$  data da  $t \rightarrow \gamma'(t) = (P(t), Q(t))$  è un punto stazionario per l'Azione trasformata

$$S'[\gamma'] = \int_0^T dt [P(t) \cdot \dot{Q}(t) - H'(P(t), Q(t), t)]$$

in  $\mathcal{M}'_{z'^{(1)}, z'^{(2)}, T}$ , ove  $(z'^{(1)}, 0) = \Psi(z^{(1)}, 0)$  e  $(z'^{(2)}, T) = \Psi(z^{(2)}, T)$ . Mostrato ciò, poiché i punti stazionari dell'azione  $S'$  in  $\mathcal{M}'_{z'^{(1)}, z'^{(2)}, T}$  sono tutte e sole le soluzioni del sistema Hamiltoniano (13.7) ne consegue che  $\Psi$  trasforma ogni sistema Hamiltoniano in un sistema Hamiltoniano e quindi è canonica.

Per mostrare che  $\gamma'$  è un punto stazionario per  $S'$ , basta fissare una curva  $\gamma \in \mathcal{M}$  ed integrare la relazione (13.13) sulla curva  $\tilde{\gamma} \in \tilde{\Gamma}_{p,q}$  data da  $[0, T] \ni t \rightarrow (\gamma(t), t) = (p(t), q(t), t)$ . Si ottiene allora

$$\begin{aligned} & \int_0^T dt [p(t) \cdot \dot{q}(t) - H(p(t), q(t), t)] - c \int_0^T dt [P(t) \cdot \dot{Q}(t) - H'(P(t), Q(t), t)] \\ & = G(z^{(2)}, T) - G(z^{(1)}, 0). \end{aligned}$$

Per definizione di  $S$  ed  $S'$  si ha cioè

$$S[\gamma] = cS'[\gamma'] + G(z^{(2)}, T) - G(z^{(1)}, 0).$$

Le quantità  $G(z^{(1)}, 0)$  e  $G(z^{(2)}, T)$  sono costanti al variare di  $\gamma$  in  $\mathcal{M}$  e pertanto una traiettoria  $\gamma \in \mathcal{M}$  è un punto stazionario per  $S$  se e solo se la traiettoria trasformata  $\gamma' = \Psi(\gamma) \in \mathcal{M}'$  è stazionaria per  $S'$ . Questo conclude la dimostrazione del Teorema 13.1.  $\square$

*Osservazione:* Il numero  $c$  che appare nella condizione (13.13) è legato all'unicità dell'invariante di Poincaré, provata dal teorema di Lee Hwa-Chung. Pertanto esso dipende solo dalla trasformazione canonica e non dalle funzioni  $H$  ed  $H'$ . Pertanto esso è associato in modo unico alla trasformazione canonica. Esso è detto *valenza* della trasformazione canonica. In particolare, se  $c = 1$  la trasformazione canonica è detta *univalente*. È chiaro che, se  $\Psi : (p, q, t) \rightarrow (P, Q, t)$  è una trasformazione canonica con valenza  $c \neq 1$ , la trasformazione  $\bar{\Psi} : (p, q, t) \rightarrow (\bar{P}, \bar{Q}, t)$  con  $\bar{P} = P$  e  $\bar{Q} = cQ$ , è canonica univalente, in quanto, scegliendo  $\bar{H}' = cH'$ , la (13.13) vale



con  $c = 1$ . Pertanto il fattore  $c$  è un fattore di scala inessenziale. Ignoreremo nel seguito tale fattore, restringendo la nostra attenzione alle sole trasformazioni canoniche univalenti che saranno denominate semplicemente *canoniche*.

### 13.3 Funzioni generatrici di trasformazioni canoniche.

La condizione (13.13) caratterizza completamente la classe delle trasformazioni canoniche. Essa suggerisce d'altra parte che, fissata ad arbitrio una funzione differenziabile  $G(p, q, t)$ , si possa costruire una trasformazione canonica che verifica le (13.13). Tuttavia tali relazioni sono troppo implicite per essere realmente utilizzate per determinare una trasformazione canonica.

Modificando lievemente il punto di vista adottato in precedenza si perviene tuttavia alla nozione di *funzione generatrice* di una trasformazione canonica.

Si supponga che la matrice Jacobiana parziale

$$J(Q/p) = \begin{pmatrix} \frac{\partial Q_1}{\partial p_1} & \cdots & \frac{\partial Q_1}{\partial p_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial Q_n}{\partial p_1} & \cdots & \frac{\partial Q_n}{\partial p_n} \end{pmatrix}$$

abbia determinante non nullo, in modo che le relazioni

$$Q_h = Q_h(p, q, t), \quad h = 1, \dots, n$$

possano essere risolte almeno localmente rispetto alle  $p$ , fornendo

$$p_h = \hat{p}_h(Q, q, t).$$

Usando tale relazione si ottiene poi

$$\hat{P}_h(Q, q, t) = P_h(\hat{p}(Q, q, t), q, t).$$

In tali condizioni, in luogo delle variabili  $p, q$  oppure  $P, Q$ , si possono assumere come variabili indipendenti le variabili  $q, Q$ , cioè le vecchie e le nuove coordinate. Il vantaggio di una tale scelta di variabili indipendenti è che la relazione (13.13) in questo modo coinvolge i soli differenziali delle variabili indipendenti. Posto inoltre

$$F(Q, q, t) = G(\hat{p}(Q, q, t), q, t),$$

la (13.13) si scrive

$$dF = \hat{p} \cdot dq - \hat{P} \cdot dQ - (\hat{H} - \hat{H}')dt$$

ove  $\hat{H}(Q, q, t) = H(\hat{p}(Q, q, t), q, t)$  e  $\hat{H}'(q, Q, t) = H'(\hat{P}(Q, q, t), Q, t)$ . Tale condizione è verificata se e solo se

$$\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial q_h}(Q, q, t) &= \hat{p}_h(Q, q, t), \\ \frac{\partial F}{\partial Q_h}(Q, q, t) &= -\hat{P}_h(Q, q, t), \\ \frac{\partial F}{\partial t}(Q, q, t) &= -H(\hat{p}(Q, q, t), q, t) + H'(\hat{P}(Q, q, t), Q, t).\end{aligned}\tag{13.14}$$

La prima delle (13.14) può essere risolta rispetto alle  $Q$  in quanto la matrice Jacobiana parziale  $J(\hat{p}/Q)$  è non singolare in quanto inversa della matrice  $J(Q/p)$  che è localmente invertibile per ipotesi. Risolvendo quindi la (13.14) rispetto alle  $Q$  si ottiene

$$Q_h = Q_h(p, q, t), \quad h = 1, \dots, n.\tag{13.15}$$

Sostituendo questa nel primo membro della seconda delle (13.14), si ottiene poi

$$P_h = P_h(p, q, t) = -\frac{\partial F}{\partial Q_h}(Q(p, q, t), q, t).\tag{13.16}$$

Le (13.15) e (13.16) forniscono l'espressione esplicita della trasformazione canonica mentre la terza delle (13.14) diventa

$$H'(P, Q, t) = H(p(P, Q, t), q(P, Q, t), t) + \frac{\partial F}{\partial t}(Q, q(P, Q, t), t),\tag{13.17}$$

In definitiva, assegnata una funzione  $F$  differenziabile due volte nelle variabili  $Q, q, t$  tale che la matrice  $D_{q,Q}^2 F$  di elementi

$$\frac{\partial^2 F}{\partial q_k \partial Q_h}(Q, q, t), \quad h, k = 1, \dots, n,$$

abbia determinante non nullo, si pone

$$p_h = \frac{\partial F}{\partial q_h}(Q, q, t), \quad P_h = -\frac{\partial F}{\partial Q_h}(Q, q, t), \quad h = 1, \dots, n.$$

Le prime  $n$  di tali relazioni sono risolvibili rispetto alle  $Q$  per la non singolarità della matrice  $D_{q,Q}^2 F$ . La loro sostituzione nelle seconde  $n$  relazioni definisce allora una trasformazione canonica, mentre la (13.17) fornisce la nuova Hamiltoniana  $H'$  corrispondente all'Hamiltoniana  $H$ . La trasformazione canonica  $\Psi$  così ottenuta si dice *generata* dalla funzione  $F$ , mentre la funzione  $F$  si dice *funzione generatrice* della trasformazione canonica.

La scelta delle variabili  $Q$  e  $q$  come variabili indipendenti è arbitraria: una qualsiasi scelta di  $n$  delle vecchie variabili ed  $n$  delle nuove è possibile. Ad esempio, si potrebbero considerare le variabili  $p_1, \dots, p_s, q_{s+1}, \dots, q_n, P_1, \dots, P_{s'}, Q_{s'+1}, \dots, Q_n$ , purché non sia mai presente una coppia di variabili coniugate. Le scelte principali adottate nella pratica sono  $(Q, q)$ ,  $(Q, p)$ ,  $(P, q)$ , e  $(P, p)$ . Per tale motivo una funzione generatrice del tipo appena considerato,  $F(Q, q, t)$  sarà anche detta *funzione generatrice del 1° tipo* e sarà denotata, per questo motivo con  $F_1(Q, q, t)$ . La trasformazione canonica  $\Psi_1$  da essa generata è individuata dalle posizioni

$$p_h = \frac{\partial F_1}{\partial q_h}(Q, q, t), \quad P_h = -\frac{\partial F_1}{\partial Q_h}(Q, q, t), \quad h = 1, \dots, n,$$

mentre la nuova Hamiltoniana  $H'$  è data da

$$H'(P, Q, t) = H(p(P, Q, t), q(P, Q, t), t) + \frac{\partial F_1}{\partial t}(Q, q(P, Q, t), t),$$

Per definire la funzione generatrice del secondo tipo cominciamo con l'osservare che, essendo

$$p \cdot dq = d(p \cdot q) - q \cdot dp,$$

la (13.13) può anche scriversi in termini dei differenziali di  $Q$  e  $p$  nella forma

$$-q \cdot dp - P \cdot dQ - (H - H')dt = d[G - p \cdot q]. \quad (13.18)$$

Per considerare le variabili  $Q$  e  $p$  come indipendenti occorre assumere che sia non degenera la matrice Jacobiana

$$J(Q/q) = \begin{pmatrix} \frac{\partial Q_1}{\partial q_1} & \cdots & \frac{\partial Q_1}{\partial q_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial Q_n}{\partial q_1} & \cdots & \frac{\partial Q_n}{\partial q_n} \end{pmatrix}$$

in modo che le relazioni

$$Q_h = Q_h(p, q, t), \quad h = 1, \dots, n$$

possano essere risolte almeno localmente rispetto alle  $q$ , fornendo

$$q_h = \hat{q}_h(Q, p, t).$$

Usando tale relazione si ottiene poi

$$\hat{P}_h(Q, q, t) = P(p, \hat{q}(Q, p, t), t).$$

Posto

$$F_2(Q, p, t) = G(p, \hat{q}(Q, p, t), t) - p \cdot \hat{q}(Q, p, t),$$

la (13.18) diventa

$$dF_2 = -\hat{q} \cdot dp - \hat{P} \cdot dQ - (\hat{H} - \hat{H}')dt$$

ove  $\hat{H}(p, Q, t) = H(p, \hat{q}(Q, p, t), t)$  e  $\hat{H}'(p, Q, t) = H'(\hat{P}(Q, p, t), Q, t)$ . Procedendo come prima, si ottiene

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_2}{\partial p_h}(Q, p, t) &= -\hat{q}_h(Q, p, t), \\ \frac{\partial F_2}{\partial Q_h}(Q, p, t) &= -\hat{P}_h(Q, p, t), \\ \frac{\partial F_2}{\partial t}(Q, p, t) &= -H(p, \hat{q}(Q, p, t), t) + H'(\hat{P}(Q, p, t), Q, t). \end{aligned}$$

Gli stessi argomenti di prima mostrano che, assegnata una funzione  $F_2$  differenziabile due volte nelle variabili  $Q$  e  $p$ , tale che la matrice  $D_{Q,p}^2 F_2$  di elementi

$$\frac{\partial^2 F_2}{\partial p_k \partial Q_h}(Q, p, t), \quad h, k = 1, \dots, n,$$

abbia determinante non nullo, si può porre

$$q_h = -\frac{\partial F_2}{\partial p_h}(Q, p, t), \quad P_h = -\frac{\partial F_2}{\partial Q_h}(Q, p, t), \quad h = 1, \dots, n.$$

Le prime  $n$  di tali relazioni sono invertibili rispetto alle  $Q$  per la non singolarità della matrice  $D_{Q,p}^2 F_2$ . La loro sostituzione nelle seconde  $n$  definisce allora una trasformazione canonica  $\Psi_2$ , mentre la relazione

$$H'(P, Q, t) = H(p(P, Q, t), q(P, Q, t), t) + \frac{\partial F_2}{\partial t}(Q, p(P, Q, t), t),$$

fornisce la nuova Hamiltoniana  $H'$  corrispondente all'Hamiltoniana  $H$ .

La funzione  $F_2(Q, p, t)$  si dice *funzione generatrice del 2° tipo*.

Le funzioni degli altri due tipi si costruiscono in modo analogo. Se si suppone che  $J(P/p)$  è non singolare e quindi si possono usare le variabili  $(P, q)$ , si sceglie  $F_3(P, q, t)$ , con la condizione che la matrice  $D_{P,q}^2 F_3$  di elementi

$$\frac{\partial^2 F_3}{\partial P_k \partial q_h}(P, q, t), \quad h, k = 1, \dots, n,$$

abbia determinante non nullo. La trasformazione canonica  $\Psi_3$  è definita ponendo

$$p_h = \frac{\partial F_3}{\partial q_h}(P, q, t), \quad Q_h = \frac{\partial F_3}{\partial P_h}(P, q, t), \quad h = 1, \dots, n.$$

mentre l'Hamiltoniana  $H'$  è data da

$$H'(P, Q, t) = H(p(P, Q, t), q(P, Q, t), t) + \frac{\partial F_3}{\partial t}(P, q(P, Q, t), t),$$

Allo stesso modo, se si suppone che  $J(P/q)$  è non singolare e quindi si possono usare le variabili  $(P, p)$ , si sceglie la funzione  $F_4(P, p, t)$  tale che la matrice  $D_{P,p}^2 F_4$  di elementi

$$\frac{\partial^2 F_4}{\partial P_k \partial p_h}(P, p, t), \quad h, k = 1, \dots, n,$$

abbia determinante non nullo, la trasformazione canonica  $\Psi_4$  è definita ponendo

$$q_h = -\frac{\partial F_4}{\partial p_h}(P, p, t), \quad Q_h = \frac{\partial F_4}{\partial P_h}(P, p, t), \quad h = 1, \dots, n.$$

mentre l'Hamiltoniana  $H'$  è data da

$$H'(P, Q, t) = H(p(P, Q, t), q(P, Q, t), t) + \frac{\partial F_4}{\partial t}(P, p(P, Q, t), t),$$

*Osservazione:* Se la funzione generatrice non dipende esplicitamente dal tempo, la trasformazione canonica è indipendente dal tempo ed inoltre

$$H(p, q, t) = H'(P(p, q), Q(p, q), t),$$

per cui la trasformazione è completamente canonica.

Riassumendo:

$$\begin{aligned} 1^\circ \text{ tipo : } & \quad p = \frac{\partial F_1}{\partial q}(Q, q, t), & \quad P = \frac{\partial F_1}{\partial Q}(Q, q, t) \\ 2^\circ \text{ tipo : } & \quad q = -\frac{\partial F_2}{\partial p}(Q, p, t), & \quad P = -\frac{\partial F_2}{\partial Q}(Q, p, t) \\ 3^\circ \text{ tipo : } & \quad p = \frac{\partial F_3}{\partial q}(P, q, t), & \quad Q = \frac{\partial F_3}{\partial P}(P, q, t) \\ 4^\circ \text{ tipo : } & \quad q = -\frac{\partial F_4}{\partial p}(P, p, t), & \quad Q = \frac{\partial F_4}{\partial P}(P, p, t) \end{aligned}$$

Esempi.

1) Sia  $\Phi$  la trasformazione

$$P = p - q, \quad Q = \frac{p+q}{2}. \quad (13.19)$$

Mostrare che è canonica, trovando una funzione generatrice del 1° tipo. Risolvendo la seconda delle (13.19) rispetto a  $p$  e sostituendo nella prima si trova

$$\hat{p} = 2Q - q, \quad \hat{P} = 2Q - 2q.$$

$F_1$  deve soddisfare le relazioni

$$\frac{\partial F_1}{\partial q} = 2Q - q, \quad \frac{\partial F_1}{\partial Q} = 2q - 2Q.$$

Integrando la prima di queste relazioni si trova

$$F_1(Q, q) = 2Qq - \frac{q^2}{2} + \alpha(Q),$$

che, sostituita nella seconda fornisce

$$2q + \alpha'(Q) = 2q - 2Q.$$

Pertanto  $\alpha(Q) = -Q^2$  e

$$F_1(Q, q) = -Q^2 - \frac{q^2}{2} + 2Qq$$

è la funzione generatrice della trasformazione (13.19).

2) Sia  $F_1 = q \cdot Q$ . Trovare la trasformazione canonica generata da  $F_1$ .

$$p_h = \frac{\partial F_1}{\partial q_h} = Q_h, \quad P_h = -\frac{\partial F_1}{\partial Q_h} = -q_h.$$

3) Trovare la funzione generatrice dell'identità.

Poiché  $J(P/q) = 0 = J(Q/p)$ , deve essere necessariamente una funzione o del 2° tipo o del 3° tipo. Consideriamo il primo caso. Deve essere

$$Q_h = q_h = -\frac{\partial F_2}{\partial p_h}(Q, p), \quad p_h = P_h = -\frac{\partial F_2}{\partial Q_h}(Q, p).$$

Integrando la prima si trova

$$F_2 = -Q \cdot p + \alpha(Q).$$

Sostituendo nella seconda,

$$p_h = p_h - \frac{\partial \alpha(Q)}{\partial Q_h}$$

che implica  $\alpha = \text{cost.}$  Pertanto

$$F_2(Q, p) = -p \cdot Q$$

è funzione generatrice dell'identità del 2° tipo. Si consideri ora il secondo caso. Deve essere

$$p_h = P_h = \frac{\partial F_3}{\partial q_h}, \quad Q_h = q_h = \frac{\partial F_3}{\partial P_h}.$$

Integrando la prima si ha

$$F_3(P, q) = P \cdot q + \beta(P)$$

che, sostituita nella seconda fornisce

$$q_h = q_h + \frac{\partial \beta(P)}{\partial P_h}.$$

Pertanto

$$F_3 = P \cdot q$$

è la funzione generatrice dell'identità di 3° tipo.

4) La trasformazione

$$P_h = f(t)q_h, \quad Q_h = -\frac{1}{f(t)}p_h$$

è canonica per ogni  $t \rightarrow f(t)$  mai nulla, come si è visto in precedenza. Dimostrare la canonicità costruendo una funzione generatrice.

Poiché  $J(P/q)$  è non singolare, si può cercare una funzione generatrice del 4° tipo.  $F_4$ . Deve essere

$$\frac{1}{f}P_h = q_h = -\frac{\partial F_4}{\partial p_h}, \quad -\frac{1}{f}p_h = Q_h = \frac{\partial F_4}{\partial P_h}.$$

Integrando la prima si ottiene

$$F_4 = -\frac{1}{f}p \cdot P + \alpha(P).$$

Sostituendo nella seconda:

$$-\frac{1}{f}p_h = -\frac{1}{f}p - \frac{\partial\alpha}{\partial P_h}$$

e pertanto

$$F_4 = -\frac{1}{f}p \cdot P$$

è la funzione generatrice. Poiché

$$\frac{\partial F_4}{\partial t} = \frac{1}{f^2}\dot{f}p \cdot P = -\frac{\dot{f}}{f}Q \cdot P,$$

si ha

$$H'(P, Q, t) = H\left(-\frac{Q}{f}, \frac{P}{f}, t\right) - \frac{\dot{f}}{f}Q \cdot P,$$

come già ottenuto in precedenza.

5) Trovare la trasformazione canonica generata dalla funzione generatrice

$$F_3(P, q, t) = \psi(q, t) \cdot P.$$

Risulta:

$$Q = \frac{\partial F_3}{\partial P} = \psi(q, t), \quad p = \frac{\partial F_3}{\partial q} = \frac{\partial\psi(q, t)}{\partial q}P.$$

Invertendo la seconda,

$$P = \left(\frac{\partial\psi(q, t)}{\partial q}\right)^{-1} p.$$

Si tratta cioè di una trasformazione naturale e l'argomento precedente è una prova alternativa a quella fornita all'inizio di questo capitolo del fatto che le trasformazioni naturali sono canoniche.

### 13.4 Metodo di Hamilton-Jacobi.

La nozione di funzione generatrice sta alla base di un metodo di soluzione delle equazioni di Hamilton, il metodo di Hamilton-Jacobi, che, quando applicabile, fornisce la soluzione esplicita al problema ai valori iniziali per il sistema (13.3). L'idea del metodo è basata sul fatto che, fissata l'Hamiltoniana  $H$  del sistema di partenza, al variare della trasformazione canonica, la nuova Hamiltoniana  $H'$  è data da

$$H' = H + \frac{\partial F}{\partial t}.$$



Si può quindi sperare che sia possibile, con un'opportuna scelta della funzione  $F$ , ottenere un sistema Hamiltoniano (13.7) più semplice da integrare. È chiaro che il sistema più semplice si otterrebbe se risultasse  $H' = 0$ . Supponiamo che una tale scelta della funzione  $F$  sia possibile e che essa generi la trasformazione canonica  $\Psi$  definita da

$$P_h = P_h(p, q, t), \quad Q_h = Q_h(p, q, t), \quad h = 1, \dots, n.$$

In corrispondenza di tale scelta si avrebbe  $H' = 0$  ed il sistema (13.7) diverrebbe il sistema banale

$$\dot{P}_h = 0, \quad \dot{Q}_h = 0, \quad h = 1, \dots, n,$$

che ha per soluzioni

$$P_h(t) = P_h^{(0)}, \quad Q_h(t) = Q_h^{(0)}, \quad h = 1, \dots, n,$$

con  $P^{(0)}$  e  $Q^{(0)}$  i valori iniziali delle  $P$  e  $Q$ :

$$P_h^{(0)} = P_h(p^{(0)}, q^{(0)}, 0), \quad Q_h^{(0)} = Q_h(p^{(0)}, q^{(0)}, 0), \quad h = 1, \dots, n.$$

In conseguenza la soluzione  $t \rightarrow (p(t), q(t))$  di (13.3) deve soddisfare le relazioni

$$P_h(p(t), q(t), t) = P_h^{(0)}, \quad Q_h(p(t), q(t), t) = Q_h^{(0)}, \quad h = 1, \dots, n.$$

L'invertibilità della trasformazione  $\Psi$  assicura che è possibile risolvere il sistema precedente per ogni  $t$  e quindi determinare, in linea di principio la soluzione in funzione delle  $P^{(0)}$  e  $Q^{(0)}$ .

Evidentemente tutte le difficoltà della soluzione del problema ai valori iniziali per il sistema (13.3) sono state in questo modo trasferite nella determinazione della funzione generatrice  $F$  che realizza la semplificazione auspicata. Supponiamo, per fissare le idee, di voler determinare una funzione generatrice del 3° tipo, cioè una funzione  $F(P, q, t)$  tale che la matrice  $D_{P,q}^2 F$  sia non singolare e la trasformazione canonica  $\Psi$  sia definita ponendo

$$p_h = \frac{\partial F}{\partial q_h}(P, q, t), \quad Q_h = \frac{\partial F}{\partial P_h}(P, q, t), \quad h = 1, \dots, n. \quad (13.20)$$

mentre l'Hamiltoniana  $H'$  è data da

$$H'(P, Q, t) = H(p(P, Q, t), q(P, Q, t), t) + \frac{\partial F}{\partial t}(P, q(P, Q, t), t),$$

La richiesta  $H' = 0$  equivale quindi alla condizione

$$\frac{\partial F}{\partial t}(P, q, t) + H(p(P, q, t), q, t) = 0,$$

ove si sono utilizzate le  $P$  e le  $q$  come variabili indipendenti.

La precedente relazione caratterizza la  $F$ , ma la sua determinazione esplicita a partire da tale relazione non è ovvia in quanto in  $H$  appare la funzione  $p(P, q, t)$ , che è a sua volta incognita ed è legata alla  $F$  dalla prima delle relazioni (13.20). Sostituendo tale relazione si ottiene quindi la condizione che deve essere soddisfatta dalla funzione generatrice  $F$ :

$$\frac{\partial F}{\partial t} + H(\nabla_q F, q, t) = 0, \quad (13.21)$$

ove  $\nabla_q F$  denota il vettore di  $\mathbb{R}^n$

$$\nabla_q F = \left( \frac{\partial F}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial F}{\partial q_n} \right).$$

L'equazione (13.21) è un'equazione alle derivate parziali del primo ordine nella funzione incognita  $F$ . Essa prende il nome di *equazione di Hamilton-Jacobi*. Si tratta di una equazione non lineare, anche nel caso più semplice di una particella libera soggetta ad una forza conservativa di potenziale  $U$ . In tal caso infatti l'Hamiltoniana si riduce alla semplice espressione

$$H(p, q) = \frac{p^2}{2m} + U(q),$$

e l'equazione di Hamilton-Jacobi si scrive

$$\frac{\partial F}{\partial t} + \frac{1}{2m} \sum_{i=1}^3 \left( \frac{\partial F}{\partial q_i} \right)^2 + U(q) = 0,$$

che è quadratica in  $\nabla_q F$ . Osserviamo che la funzione  $F$  deve dipendere da  $t$  perché si possa realizzare la condizione  $H' = 0$ . Tuttavia, nel caso che l'Hamiltoniana  $H$  non dipenda dal tempo, la dipendenza di  $F$  da  $t$  può essere scelta nel modo più semplice possibile, cioè in forma lineare:

$$F = S(P, q) + \alpha t,$$

con  $\alpha$  costante. Con tale scelta, la (13.21) diviene

$$\alpha + H(\nabla_q S, q) = 0.$$

Tale equazione mostra che la costante  $\alpha$  rappresenta proprio l'opposto del valore dell'energia totale in corrispondenza ai dati iniziali fissati e quindi essa può essere scritta nella forma

$$H(\nabla_q S, q) = E, \quad (13.22)$$

che prende il nome di *equazione di Hamilton-Jacobi stazionaria*.

Sia nel caso dipendente dal tempo che nel caso stazionario, le variabili  $P$  figurano esclusivamente come parametri, in quanto nell'equazione non sono presenti esplicitamente né le  $P$  né le derivate di  $F$  rispetto alle  $P$ .

Per risolvere l'equazione di Hamilton-Jacobi in modo utile per costruire una funzione generatrice non basta determinare una singola soluzione, ma occorre determinare una famiglia  $\{F_\alpha, \alpha \in \mathbb{R}^n\}$  di funzioni definite in  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ ,  $(q, t) \rightarrow F_\alpha(q, t)$ , tali che per ogni  $\alpha \in \mathbb{R}^n$ ,  $F_\alpha(q, t)$  sia differenziabile rispetto a  $(q, t)$  e soddisfi l'equazione (13.21). Inoltre, denotata con  $F(\alpha, q, t)$  la funzione su  $\mathbb{R}^{2n+1}$  tale che  $(\alpha, q, t) \rightarrow F(\alpha, q, t) = F_\alpha(q, t)$ , la matrice  $D_{\alpha, q}^2 F$  deve essere non singolare. In queste condizioni, identificando  $\alpha$  con  $P$ , la funzione  $F(P, q, t)$  è una funzione generatrice di 3° tipo di una trasformazione canonica tale che  $H' = 0$ . La famiglia  $\{F_\alpha, \alpha \in \mathbb{R}^n\}$  di soluzioni di (13.21) tale che la matrice  $D_{\alpha, q}^2 F$  è non singolare è denominata *integrale completo* dell'equazione (13.21).

Pertanto, per applicare il metodo di Hamilton-Jacobi alla soluzione del problema di Cauchy per il sistema Hamiltoniano, occorre determinare un integrale completo dell'equazione di Hamilton-Jacobi. Tale problema in generale presenta difficoltà pari, se non superiori al problema della soluzione del problema di Cauchy per il sistema Hamiltoniano. Tuttavia, in alcuni casi, l'impiego di opportune tecniche di soluzione, quali il metodo di *separazione delle variabili*, rende utile il metodo di Hamilton-Jacobi.

#### Esempi.

Considereremo, a titolo di esempio di soluzione dell'equazione di Hamilton-Jacobi per separazione di variabili, due classi particolari di Hamiltoniane. Ci limiteremo inoltre al caso stazionario, e quindi alla soluzione dell'equazione (13.22)

1) Si supponga che l'Hamiltoniana  $H$  abbia la struttura

$$H(p, q) = G(g_1(p_1, q_1), \dots, g_n(p_n, q_n)), \quad (13.23)$$

con  $G$  e  $g_i$  funzioni regolari. Ammettiamo inoltre che risulti

$$\frac{\partial g_i}{\partial p_i} \neq 0, \quad i = 1, \dots, n. \quad (13.24)$$

Dette  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$   $n$  costanti e posto

$$g_i\left(\frac{\partial S}{\partial q_i}, q_i\right) = \alpha_i, \quad i = 1, \dots, n \quad (13.25)$$

con

$$G(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = E,$$

le (13.24) implicano

$$\frac{\partial S}{\partial q_i} = \varphi_i(\alpha_i, q_i) \quad (13.26)$$

la  $\varphi_i$  essendo l'inversa della  $g_i$  come funzione della  $p_i$  a  $q_i$  fissato. Detta poi  $\phi_i(\alpha_i, q_i)$  una primitiva di  $\varphi_i$ , cioè una funzione tale che

$$\phi_i(\alpha_i, q_i) = \int dq_i \varphi_i(\alpha_i, q_i), \quad (13.27)$$

si ha

$$S(P, q) = \sum_{i=1}^n \phi_i(P_i, q_i)$$

e quindi

$$F(P, q, t) = -G(P_1, \dots, P_n)t + \sum_{i=1}^n \phi_i(P_i, q_i).$$

Pertanto la determinazione della soluzione dell'equazione di Hamilton-Jacobi è in questo caso ricondotta al calcolo degli  $n$  integrali (13.27). E' immediato controllare che, in conseguenza di (13.24) risulta

$$\det \left( \frac{\partial^2 F}{\partial P_i \partial q_j} \right) \neq 0$$

e quindi la precedente espressione fornisce un integrale completo dell'equazione di Hamilton-Jacobi. L'esempio più semplice di tale caso è fornito dal sistema di  $n$  oscillatori armonici che, in termini di modi normali, ha come Hamiltoniana

$$H(p, q) = \sum_{i=1}^n g_i(p_i, q_i), \quad g_i(p_i, q_i) = \frac{1}{2}(p_i^2 + \omega_i^2 q_i^2).$$

In questo caso  $\varphi_i(\alpha_i, q_i) = \sqrt{2\alpha_i - \omega_i^2 q_i^2}$ ,

$$\phi_i(\alpha_i, q_i) = \int dq_i \sqrt{2\alpha_i - \omega_i^2 q_i^2}$$

e

$$F(P, q, t) = \sum_{i=1}^n \left\{ \int dq_i \sqrt{2P_i - \omega_i^2 q_i^2} - P_i t \right\}.$$

2) Si supponga che l'Hamiltoniana  $H$  abbia la struttura

$$H(p, q) = g_n \left( \dots g_3 \left( g_2 \left( g_1(q_1, p_1), q_2, p_2 \right), q_3, p_3 \right) \dots q_n, p_n \right)$$

con  $g_k(z, q_k, p_k)$ ,  $k = 1 \dots, n$  regolare e tale che

$$\frac{\partial g_k}{\partial p_k} \neq 0, \quad k = 1 \dots, n. \quad (13.28)$$

Posto allora

$$\begin{aligned} g_1(q_1, \frac{\partial S}{\partial q_1}) &= \alpha_1, \\ g_2(\alpha_1, q_2, \frac{\partial S}{\partial q_2}) &= \alpha_2, \\ &\dots \\ g_n(\alpha_{n-1}, q_n, \frac{\partial S}{\partial q_n}) &= \alpha_n, \end{aligned}$$

con  $\alpha_n = E$ , per la (13.28) tali relazioni si possono risolvere rispetto alle derivate di  $S$  e quindi si ottiene

$$\begin{aligned} \frac{\partial S}{\partial q_1} &= \varphi_1(q_1, \alpha_1) \\ \frac{\partial S}{\partial q_2} &= \varphi_2(q_2, \alpha_1, \alpha_2), \\ &\dots \\ \frac{\partial S}{\partial q_n} &= \varphi_n(q_n, \alpha_{n-1}, \alpha_n), \end{aligned}$$

$\varphi_k$  essendo l'inversa della funzione  $g_k$  rispetto alla variabile  $p_k$  per  $z$  e  $q_k$  fissati. Posto quindi

$$\phi_i(q_i, \alpha_{i-1}, \alpha_i) = \int dq_i \varphi_i(q_i, \alpha_{i-1}, \alpha_i),$$

si ottiene

$$S(P, q) = \sum_{i=1}^n \phi_i(P_{i-1}, P_i, q_i) = \sum_{i=1}^n \int dq_i \varphi_i(q_i, P_{i-1}, P_i)$$

e

$$F(P, q, t) = -P_n t + \sum_{i=1}^n \int dq_i \varphi_i(q_i, P_{i-1}, P_i).$$

Anche in questo caso è immediato controllare che, in conseguenza di (13.28) risulta

$$\det \left( \frac{\partial^2 F}{\partial P_i \partial q_j} \right) \neq 0$$

e quindi la precedente espressione fornisce un integrale completo dell'equazione di Hamilton-Jacobi. L'esempio piú famoso di questa classe di Hamiltoniane corrisponde al moto Newtoniano di una particella:

$$H(p_\rho, p_\theta, p_\varphi, \rho, \theta, \varphi) = \frac{1}{2m} \left\{ p_\rho^2 + \frac{p_\theta^2}{\rho^2} + \frac{p_\varphi^2}{\rho^2 \sin^2 \theta} \right\} - \frac{k}{\rho}.$$

In questo caso

$$\begin{aligned} g_1(\varphi, p_\varphi) &= p_\varphi, \\ g_2(\alpha_1, \theta, p_\theta) &= p_\theta^2 + \frac{\alpha_1^2}{\sin^2 \theta}, \\ g_3(\alpha_2, \rho, p_\rho) &= \frac{1}{2m} \left( p_\rho^2 + \frac{\alpha_2}{\rho^2} \right) - \frac{k}{\rho}. \end{aligned}$$

Si ha quindi

$$\begin{aligned} \frac{\partial S}{\partial \varphi} &= \alpha_1, \\ \frac{\partial S}{\partial \theta} &= \sqrt{\alpha_2 - \frac{\alpha_1^2}{\sin^2 \theta}}, \\ \frac{\partial S}{\partial \rho} &= \sqrt{2m \left( \alpha_3 + \frac{k}{\rho} \right) - \frac{\alpha_2}{\rho^2}}. \end{aligned}$$

Pertanto

$$\begin{aligned} F(P_\rho, P_\theta, P_\varphi, \rho, \theta, \varphi, t) = \\ - P_\rho t + P_\varphi \varphi + \int d\theta \sqrt{P_\theta - \frac{P_\varphi^2}{\sin^2 \theta}} + \int d\rho \sqrt{2m \left( P_\rho + \frac{k}{\rho} \right) - \frac{P_\theta}{\rho^2}}. \end{aligned}$$

### 13.5 Trasformazioni completamente canoniche.

Ricordiamo che una trasformazione indipendente dal tempo

$$\Phi : (p, q) \in \Gamma_{p,q} \rightarrow (P, Q) \in \Gamma_{P,Q}$$

differenziabile ed invertibile con

$$P_h = P_h(p, q), \quad Q_h = Q_h(p, q), \quad h = 1, \dots, n,$$

è completamente canonica se è canonica e  $H' = H \circ \Phi^{-1}$ .

Utilizzando la (13.13) è immediato controllare che  $\Phi$  è completamente canonica se e solo se esiste  $G(p, q)$  tale che

$$p \cdot dq = P \cdot dQ + dG. \quad (13.29)$$

Sia  $\mathcal{C}$  una qualsiasi curva chiusa regolare in  $\Gamma_{p,q}$  e  $\mathcal{C}'$  la curva chiusa in  $\Gamma_{P,Q}$  che si ottiene da  $\mathcal{C}$  applicando la trasformazione  $\Phi$ . La (13.29) è allora equivalente alla condizione:

$$\forall \mathcal{C} \subset \Gamma_{p,q}, \quad \oint_{\mathcal{C}} p \cdot dq = \oint_{\mathcal{C}'} P \cdot dQ, \quad \text{con } \mathcal{C}' = \Phi(\mathcal{C}), \quad (13.30)$$

La (13.30) è quindi una condizione necessaria e sufficiente di completa canonicità.

Un'applicazione di tale condizione fornisce la prova che *il flusso Hamiltoniano*  $U_{t_1, t_0}$  (cioè la trasformazione che ad ogni coppia  $(p, q)$  associa il punto  $(p(t_1), q(t_1))$  raggiunto al tempo  $t_1$  dalla traiettoria che passa per  $(p, q)$  al tempo  $t_0$ ) *determina una trasformazione completamente canonica*.

Infatti, sia  $\Phi$  la trasformazione definita dalla posizione

$$(P(p, q), Q(p, q)) = U_{t_1, t_0}(p, q).$$

L'invarianza dell'integrale di Poincaré

$$\oint_{\mathcal{C}} p \cdot dq$$

per ogni curva chiusa  $\mathcal{C}$ , equivale in questo caso alla condizione

$$\oint_{\mathcal{C}} p \cdot dq = \oint_{\mathcal{C}'} P \cdot dQ,$$

con  $\mathcal{C}' = U_{t_1, t_0}(\mathcal{C})$ . Tale relazione è proprio la condizione necessaria e sufficiente (13.30).

### Struttura simplettica.

Altre caratterizzazioni delle trasformazioni completamente canoniche si ottengono con l'aiuto della matrice  $2n \times 2n$

$$J = \begin{pmatrix} \mathbb{O}_n & -\mathbf{1}_n \\ \mathbf{1}_n & \mathbb{O}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & -1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & -1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \quad (13.31)$$

che è denominata *matrice simplettica fondamentale*. Nella (13.31) la matrice  $\mathbb{O}_n$  è la matrice  $n \times n$  avente tutti gli elementi nulli, mentre la matrice  $\mathbb{1}_n$  è la matrice  $n \times n$  avente tutti gli elementi nulli tranne quelli della diagonale principale che sono tutti uguali ad 1.

È immediato controllare che

$$J^2 = -\mathbb{1}_{2n} \quad (13.32)$$

ove  $\mathbb{1}_{2n}$  è la matrice  $2n \times 2n$  avente tutti gli elementi nulli tranne quelli della diagonale principale che sono tutti uguali ad 1. Poiché  $2n$  è pari,  $\det(-\mathbb{1}_{2n}) = 1$  e quindi si ha

$$|\det J| = 1.$$

Si verifica immediatamente che  $\det J = 1$ , in quanto, mediante  $n$  scambi di colonne,  $J$  può essere ridotta ad una matrice diagonale con i primi  $n$  elementi della diagonale uguali a  $-1$  ed i secondi  $n$  uguali ad 1.

Dal punto di vista notazionale, se con  $z = (p, q)$  si denota il generico punto dello spazio delle fasi  $\Gamma$ , e con  $\nabla_z G$  il vettore di  $\mathbb{R}^{2n}$  avente per componenti le derivate  $(\partial G / \partial z_h)$ , per  $h = 1, \dots, 2n$ , allora il campo Hamiltoniano  $F^H$  si scrive

$$F^H = J \nabla_z H$$

ed il sistema Hamiltoniano (13.3) si scrive

$$\dot{z} = J \nabla_z H.$$

La matrice  $J$  consente di definire la *forma simplettica*: per ogni coppia  $z_1, z_2 \in \Gamma$ , si pone

$$[z_1, z_2] = z_1 \cdot J z_2 = -p_1 \cdot q_2 + q_1 \cdot p_2.$$

Poiché naturalmente

$$J^T = -J,$$

si ha

$$[z_1, z_2] = -[z_2, z_1]$$

e cioè la forma simplettica è *antisimmetrica*. In particolare  $[z, z] = 0$ .

**Definizione 13.3:** Una trasformazione lineare  $S$  di  $\mathbb{R}^{2n}$  in sé, caratterizzata da una matrice  $2n \times 2n$  che denoteremo ancora con  $S$  con abuso di notazione, si dice *simplettica* se lascia invariata la forma simplettica:

$$[S z_1, S z_2] = [z_1, z_2], \quad \forall z_1, z_2 \in \mathbb{R}^{2n}.$$

**Proposizione 13.2:** *Condizione necessaria e sufficiente affinché  $S$  sia simplettica è che risulti*

$$S^T J S = J. \quad (13.33)$$



Dim. Per ogni  $z, u$ ,

$$[Sz, Su] = Sz \cdot JSu = z \cdot S^T JSu.$$

Pertanto  $S$  è simplettica se e solo se

$$z \cdot S^T JSu = z \cdot Ju, \quad \forall z, u \in \mathbb{R}^{2n},$$

e cioè se e solo se è verificata la (13.33).

Moltiplicando (13.33) per  $J$  si ottiene

$$-\mathbf{1}_{2n} = J^2 = S^T JSJ,$$

che implica

$$(SJ)^{-1} = -S^T J.$$

Poiché  $(SJ)^{-1} = J^{-1}S^{-1}$ , ne segue che per ogni trasformazione simplettica  $S$ ,

$$S^{-1} = -JS^T J.$$

Moltiplicando tale relazione a sinistra per  $S$  ed a destra per  $J$  si ottiene poi

$$J = SJS^T$$

che implica che, se  $S$  è simplettica, anche  $S^T$  è simplettica.  $\square$

Sia ora  $\Phi$  una trasformazione di  $\Gamma_{p,q}$  in  $\Gamma_{P,Q}$ . Denotando con  $z$  e  $Z$  i punti di  $\Gamma_{p,q}$  e  $\Gamma_{P,Q}$ , essa si scriverà:

$$Z = \Phi(z).$$

Le precedenti proprietà delle trasformazioni simplettiche sono alla base del seguente

**Teorema 13.3:** *La trasformazione  $\Phi$  è completamente canonica se e solo se la matrice Jacobiana di  $\Phi$  è simplettica.*

Dim. Denoteremo per brevità con  $G$  la matrice Jacobiana di  $\Phi$ ,  $J(Z/z)$ . Si assuma  $H = H' \circ \Phi$ . Applicando due volte il teorema di derivazione delle funzioni composte, si ha

$$\dot{Z} = G\dot{z} = GJ\nabla_z H = GJG^T \nabla_Z H', \quad (13.34)$$

in quanto

$$\nabla_z H = (G^T \nabla_Z H').$$

Se  $\Phi$  è completamente canonica,

$$\dot{Z} = J\nabla_Z H' \quad (13.35)$$

e quindi, per l'arbitrarietà di  $\nabla_z H'$  segue che  $G^T$  è simplettica e quindi  $G$  è simplettica.

Viceversa, se  $G$  è simplettica, (13.34) implica (13.35) per ogni  $H$  e quindi  $\Phi$  è completamente canonica.  $\square$

**Corollario 13.4:** *Ogni trasformazione completamente canonica  $\Phi$  conserva la misura di Liouville  $dz = dp_1 \dots dp_n dq_1 \dots dq_n$ .*

Dim. Basta far vedere che  $|\det G| = 1$ . Questo segue dal fatto che  $G$  è simplettica e quindi

$$G^T J G = J$$

che implica

$$(\det G)^2 \det J = \det J.$$

$\square$

Avendo precedentemente osservato che il flusso Hamiltoniano  $U_{t_1, t_0}$  è una trasformazione completamente canonica, questo Corollario fornisce una nuova dimostrazione del teorema di Liouville sull'invarianza della misura di Liouville durante il moto.

#### Parentesi di Poisson.

Siano  $F, G$  due funzioni differenziabili su  $\Gamma$ , a valori reali. Si definisce *parentesi di Poisson* tra  $F$  e  $G$  e la si denota con  $\{F, G\}$  oppure con  $\{F, G\}_{p, q}$  quando sia necessario evidenziare le variabili indipendenti, la quantità

$$\{F, G\} = \sum_{h=1}^n \left[ \frac{\partial F}{\partial q_h} \frac{\partial G}{\partial p_h} - \frac{\partial F}{\partial p_h} \frac{\partial G}{\partial q_h} \right] = \nabla_z F \cdot J \nabla_z G = [\nabla_z F, \nabla_z G].$$

Abbiamo già incontrato tale quantità nel Capitolo 12, a proposito di integrali primi per un sistema Hamiltoniano. Essa appare nell'equazione (12.13) che fornisce la condizione affinché una funzione  $G$  sia un integrale primo. Con la precedente definizione, la (12.13) si scrive

$$\frac{\partial G}{\partial t} + \{G, H\} = 0. \quad (13.36)$$

In particolare, se  $G$  non dipende dal tempo, essa è un integrale primo se e solo se

$$\{G, H\} = 0.$$

Le seguenti proprietà sono un'immediata conseguenza della definizione:

$$\begin{aligned} \{G, F\} &= -\{F, G\}; \\ \{\alpha_1 F_1 + \alpha_2 F_2, G\} &= \alpha_1 \{F_1, G\} + \alpha_2 \{F_2, G\}, \quad \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}; \\ \{F_1 F_2, G\} &= F_1 \{F_2, G\} + \{F_1, G\} F_2. \end{aligned} \quad (13.37)$$

Inoltre, se  $F, G, M$  sono differenziabili due volte, vale l'*identità di Jacobi*

$$\{F, \{G, M\}\} + \{G, \{M, F\}\} + \{M, \{F, G\}\} = 0. \quad (13.38)$$

*Osservazione:* L'identità di Jacobi implica che, se  $G_1$  e  $G_2$  sono integrali primi, tale è anche  $\{G_1, G_2\}$ . Infatti

$$\{H, \{G_1, G_2\}\} = -\{G_1, \{G_2, H\}\} - \{G_2, \{H, G_1\}\} = 0.$$

Vale il seguente

**Teorema 13.4:** *La trasformazione  $\Phi$  è completamente canonica se e solo se lascia invariate le parentesi di Poisson e cioè, per ogni coppia di funzioni  $F$  e  $M$  su  $\Gamma_{p,q}$ , dette  $F' = F \circ \Phi^{-1}$  e  $M' = M \circ \Phi^{-1}$  le due funzioni corrispondenti su  $\Gamma_{P,Q}$ , risulta*

$$\{F', M'\}_{P,Q} = \{F, M\}_{p,q} \circ \Phi^{-1}. \quad (13.39)$$

Dim. Denotiamo con  $G$  la matrice Jacobiana di  $\Phi$ . Si ha

$$\{F, M\}_{p,q} = [\nabla_z F, \nabla_z M] = [G^T \nabla_Z F', G^T \nabla_Z M'] \circ \Phi.$$

D'altra parte,

$$\{F', M'\}_{P,Q} = [\nabla_Z F', \nabla_Z M'].$$

Pertanto, se  $\Phi$  è completamente canonica,  $G$  è simplettica, per cui anche  $G^T$  lo è e si ha l'uguaglianza (13.39). Viceversa, se vale la (13.39), per l'arbitrarietà di  $F$  ed  $M$  si ottiene che  $G^T$  è simplettica e quindi  $\Phi$  è completamente canonica.  $\square$

L'invarianza delle parentesi di Poisson implica un'altra importante condizione di completa canonicità, espressa dal seguente

**Teorema 13.5:** *Condizione necessaria e sufficiente affinché  $\Phi$  sia completamente canonica è che per ogni coppia  $i, k = 1, \dots, n$ , risulti*

$$\{Q_i, Q_k\}_{p,q} = 0, \quad \{P_i, P_k\}_{p,q} = 0, \quad \{Q_i, P_k\}_{p,q} = \delta_{i,k}. \quad (13.40)$$

Dim. Poiché è immediato controllare che le relazioni (13.40) valgono quando alla coppia di indici  $(p, q)$  si sostituisce  $(P, Q)$ , l'invarianza delle parentesi di Poisson per trasformazioni completamente canoniche (13.39) implica che le (13.40) valgono per trasformazioni completamente canoniche. Per mostrare la condizione

sufficiente occorre far vedere che se sono verificate le (13.40), allora sono verificate anche (13.39) per ogni coppia di funzioni  $F$  ed  $M$ . Ciò si ottiene calcolando esplicitamente le parentesi di Poisson. Per evitare un eccesso di indici, forniamo il calcolo nel caso  $n = 1$ , ma esso vale sostanzialmente inalterato qualunque sia  $n$ .

$$\begin{aligned}\{F, M\}_{p,q} &= \frac{\partial F}{\partial q} \frac{\partial M}{\partial p} - \frac{\partial F}{\partial p} \frac{\partial M}{\partial q} \\ &= \left( \frac{\partial F'}{\partial Q} \frac{\partial Q}{\partial q} + \frac{\partial F'}{\partial P} \frac{\partial P}{\partial q} \right) \left( \frac{\partial M'}{\partial Q} \frac{\partial Q}{\partial p} + \frac{\partial M'}{\partial P} \frac{\partial P}{\partial p} \right) \\ &\quad - \left( \frac{\partial F'}{\partial Q} \frac{\partial Q}{\partial p} + \frac{\partial F'}{\partial P} \frac{\partial P}{\partial p} \right) \left( \frac{\partial M'}{\partial Q} \frac{\partial Q}{\partial q} + \frac{\partial M'}{\partial P} \frac{\partial P}{\partial q} \right) \\ &= I_1 + I_2,\end{aligned}$$

con

$$\begin{aligned}I_1 &= \frac{\partial F'}{\partial Q} \frac{\partial M'}{\partial P} \frac{\partial Q}{\partial q} \frac{\partial P}{\partial p} + \frac{\partial F'}{\partial P} \frac{\partial M'}{\partial Q} \frac{\partial P}{\partial q} \frac{\partial Q}{\partial p} \\ &\quad - \frac{\partial F'}{\partial Q} \frac{\partial M'}{\partial P} \frac{\partial Q}{\partial p} \frac{\partial P}{\partial q} - \frac{\partial F'}{\partial P} \frac{\partial M'}{\partial Q} \frac{\partial P}{\partial p} \frac{\partial Q}{\partial q}, \\ I_2 &= \frac{\partial F'}{\partial Q} \frac{\partial M'}{\partial Q} \frac{\partial Q}{\partial q} \frac{\partial Q}{\partial p} + \frac{\partial F'}{\partial P} \frac{\partial M'}{\partial P} \frac{\partial P}{\partial q} \frac{\partial P}{\partial p} \\ &\quad - \frac{\partial F'}{\partial Q} \frac{\partial M'}{\partial Q} \frac{\partial Q}{\partial p} \frac{\partial Q}{\partial q} - \frac{\partial F'}{\partial P} \frac{\partial M'}{\partial P} \frac{\partial P}{\partial p} \frac{\partial P}{\partial q}.\end{aligned}$$

Ma usando (13.40) si ha

$$I_1 = \frac{\partial F'}{\partial Q} \frac{\partial M'}{\partial P} \{Q, P\}_{p,q} + \frac{\partial F'}{\partial P} \frac{\partial M'}{\partial Q} \{P, Q\}_{p,q} = \{F', M'\}_{P,Q},$$

mentre

$$I_2 = \frac{\partial F'}{\partial Q} \frac{\partial M'}{\partial Q} \{Q, Q\}_{p,q} + \frac{\partial F'}{\partial P} \frac{\partial M'}{\partial P} \{P, P\}_{p,q} = 0.$$

Tali relazioni implicano l'invarianza delle parentesi di Poisson e concludono la dimostrazione del teorema.

*Osservazione:* La parentesi di Poisson è a volte detta “commutatore” e ci si riferisce alle (13.40) come *regole di commutazione canoniche*.

### 13.6 Integrali primi e simmetrie dell'Hamiltoniana.

Nel Capitolo 10 abbiamo visto che il teorema di Noether fornisce la relazione tra le simmetrie della Lagrangiana e le grandezze conservate. Una simile relazione può trovarsi anche tra le simmetrie dell'Hamiltoniana e le grandezze conservate.

Poiché solo le trasformazioni canoniche trasformano sistemi Hamiltoniani in sistemi Hamiltoniani, le simmetrie rilevanti per l'Hamiltoniana sono quelle realizzate mediante trasformazioni canoniche. Per questo motivo introduciamo la seguente

**Definizione 13.4:** Sia  $\{\Phi^\lambda, \lambda \in \mathbb{R}\}$  una famiglia ad un parametro di trasformazioni completamente canoniche,

$$\Phi^\lambda : (p, q) \rightarrow (P^\lambda, Q^\lambda),$$

differenziabile rispetto al parametro  $\lambda$ , specificata per ogni  $\lambda$  dalle funzioni  $P^\lambda(p, q)$  e  $Q^\lambda(p, q)$  e tale che:

- 1)  $\Phi^{\lambda_1} \circ \Phi^{\lambda_2} = \Phi^{\lambda_1 + \lambda_2}$  per ogni  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ ;
- 2)  $\Phi^0 = \mathbb{I}$ ;
- 3)  $(\Phi^\lambda)^{-1} = \Phi^{-\lambda}$  per ogni  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

Una tale famiglia si dice *gruppo ad un parametro di trasformazioni canoniche*.

Se invece di scegliere il parametro  $\lambda$  in  $\mathbb{R}$ , lo si sceglie in  $(-\varepsilon, \varepsilon)$  per qualche  $\varepsilon > 0$  e le condizioni 1) e 3) valgono per  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ , allora la famiglia  $\{\Phi^\lambda, \lambda \in (-\varepsilon, \varepsilon)\}$  si dice *gruppo locale ad un parametro di trasformazioni canoniche*. Nella maggior parte delle considerazioni che seguono sarà sufficiente limitarsi a considerare gruppi locali.

Per ogni  $\lambda$  fissato, supporremo la trasformazione canonica  $\Phi^\lambda$  assegnata mediante una funzione generatrice del 3° tipo e quindi assumeremo assegnata una funzione  $F(P, q; \lambda)$ , con  $D_{P, q}^2 F$  non singolare per ogni  $\lambda$  e differenziabile anche rispetto a  $\lambda$ , tale che

$$p_h = \frac{\partial F}{\partial q_h}(P^\lambda, q; \lambda), \quad Q_h^\lambda = \frac{\partial F}{\partial P_h}(P^\lambda, q; \lambda), \quad h = 1, \dots, n. \quad (13.41)$$

Supporremo inoltre, per semplicità, che le derivate seconde di  $F$  siano tutte uniformemente limitate.

Per la condizione 2), deve risultare

$$F(P, q; 0) = P \cdot q,$$

in quanto questa è la funzione generatrice dell'identità. La differenziabilità della  $F$  implica allora che esiste una funzione differenziabile  $G(P, q)$  tale che, per  $\lambda$  piccolo si abbia

$$F(P, q; \lambda) = P \cdot q + \lambda G(P, q) + o(\lambda).$$

Usando tale relazione, le (13.41) si scrivono

$$\begin{aligned} p_h &= P_h^\lambda + \lambda \frac{\partial G}{\partial q_h}(P^\lambda, q) + o(\lambda), \\ Q_h^\lambda &= q_h + \lambda \frac{\partial G}{\partial P_h}(P^\lambda, q) + o(\lambda), \end{aligned} \quad h = 1, \dots, n. \quad (13.42)$$

Le precedenti relazioni possono essere risolte rispetto a  $P^\lambda$  in modo approssimato quando  $\lambda$  è piccolo e si ottiene

$$\begin{aligned} P_h^\lambda &= p_h - \lambda \frac{\partial G}{\partial q_h}(p, q) + o(\lambda), \\ Q_h^\lambda &= q_h + \lambda \frac{\partial G}{\partial P_h}(p, q) + o(\lambda), \end{aligned} \quad h = 1, \dots, n. \quad (13.43)$$

Infatti, la prima delle (13.42) si può riscrivere come

$$P_h^\lambda = p_h - \lambda \frac{\partial G}{\partial q_h}(P^\lambda, q) + o(\lambda). \quad (13.44)$$

Pertanto si ha

$$P_h^\lambda = p_h - \lambda \frac{\partial G}{\partial q_h}(p, q) + \lambda \left[ \frac{\partial G}{\partial q_h}(P^\lambda, q) - \frac{\partial G}{\partial q_h}(p, q) \right] + o(\lambda).$$

La limitatezza delle derivate seconde di  $G$  e la (13.44) implicano che il termine in parentesi quadre è infinitesimo e quindi segue la prima delle (13.43). La seconda di tali relazioni si ottiene poi usando ancora la (13.44) e la limitatezza delle derivate seconde di  $G$  nella seconda delle (13.42).

Usando la matrice  $J$ , le (13.43) si scrivono anche

$$Z^\lambda = z + \lambda J \nabla_z G + o(\lambda) \quad (13.45)$$

A causa delle (13.43), la funzione  $G$  è detta *generatore infinitesimo del gruppo (locale) di trasformazioni canoniche*. Fissato  $(p, q) \in \Gamma$ , la funzione  $\lambda \rightarrow \Phi^\lambda(p, q)$  è detta *traiettoria del gruppo ad un parametro* per  $(p, q)$ .

Sia  $U$  una funzione differenziabile sullo spazio delle fasi sia  $u(\lambda)$  la sua restrizione ad una traiettoria del gruppo per  $(p, q)$  fissati

$$u(\lambda) = U(\Phi^\lambda(p, q)).$$

La funzione  $L_\Phi U$  su  $\Gamma$  definita da

$$(L_\Phi U)(p, q) = \left. \frac{d}{d\lambda} u(\lambda) \right|_{\lambda=0} = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{U(P^\lambda(p, q), Q^\lambda(p, q)) - U(p, q)}{\lambda},$$

misura le variazioni di  $U$  lungo le traiettorie del gruppo. Usando le (13.45), si ottiene

$$(L_\Phi U) = \nabla_z U \cdot J \nabla_z G = [\nabla_z U, \nabla_z G] = \{U, G\}.$$

Tale relazione fornisce quindi la variazione di  $U$  lungo le curve integrali del gruppo in termini della Parentesi di Poisson di  $U$  con il generatore infinitesimo  $G$  del

gruppo ad un parametro. Essa ci permette anche di interpretare la parentesi di Poisson tra una funzione  $U$  ed un'altra funzione  $G$  come la *variazione di  $U$  lungo le traiettorie del gruppo (locale) ad un parametro di trasformazioni canoniche generato da  $G$* .

Diremo che  $U$  è *invariante* rispetto al gruppo (locale) di trasformazioni  $\{\Phi^\lambda, \lambda \in (-\varepsilon, \varepsilon)\}$  se risulta

$$L_\Phi U = 0$$

e quindi, se  $G$  ne è il generatore infinitesimo,

$$\{U, G\} = 0.$$

Diremo che il gruppo (locale) di trasformazioni  $\{\Phi^\lambda, \lambda \in (-\varepsilon, \varepsilon)\}$  è una *simmetria* del sistema Hamiltoniano di Hamiltoniana  $H$  se  $H$  è invariante rispetto al gruppo (locale)  $\{\Phi^\lambda, \lambda \in (-\varepsilon, \varepsilon)\}$ .

In particolare, se  $H$  è dotata di una simmetria, e  $G$  è il generatore infinitesimo di tale simmetria, risulta

$$\{H, G\} = 0.$$

Ricordando le condizioni sugli integrali primi per un sistema Hamiltoniano, concludiamo che,

**Proposizione 13.6.** *Se l'Hamiltoniana  $H$  ammette una simmetria, il generatore infinitesimo di tale simmetria è un integrale primo per il sistema Hamiltoniano.*

Tale Proposizione costituisce l'estensione del teorema di Noether ai sistemi Hamiltoniani.

## 14. Sistemi integrabili e loro perturbazioni.

### 14.1 Sistemi integrabili.

Un problema classico della teoria dei sistemi di equazioni differenziali è la riducibilità della sua risoluzione a “quadrature”. Con questo ci si riferisce alla possibilità di ridurre la risoluzione del sistema differenziale al calcolo di integrali, quadrature secondo un linguaggio un po’ arcaico. Fissiamo la nostra attenzione sul sistema *autonomo*

$$\dot{z} = F(z), \quad z \in \mathbb{R}^d, \quad F : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d. \quad (14.1)$$

Nel caso  $d = 1$  la riduzione a quadrature è immediata in quanto, detta  $G(z)$  una primitiva di  $1/F$ , la soluzione del problema ai valori iniziali si ottiene invertendo la relazione

$$G(z) - G(z^{(0)}) = t - t_0.$$

Pertanto la soluzione è determinata quando si sia effettuata la “quadratura” necessaria per determinare la funzione  $G$ .

Quando  $d > 1$  la riduzione a quadrature non è possibile a meno che non si disponga di altre informazioni sul sistema. Informazioni utili a questo scopo sono rappresentate dalla conoscenza di integrali primi per il sistema.

Se si conoscono  $d - 1$  integrali primi indipendenti, cioè  $d - 1$  funzioni differenziabili  $U_1(z), \dots, U_{d-1}(z)$  tali che in ogni punto i vettori  $\nabla_z U_1(z), \dots, \nabla_z U_{d-1}(z)$  siano linearmente indipendenti, è possibile in linea di principio ridurre la soluzione del sistema a quadrature. Infatti il moto si svolge sull’intersezione delle  $d - 1$  superfici  $\{z \in \mathbb{R}^d \mid U_i(z) = u_i\}$ , dove  $u_1, \dots, u_{d-1}$  sono  $d - 1$  numeri reali. Per le ipotesi fatte, tale intersezione è una varietà unidimensionale e si può quindi ricondurre il problema dell’integrazione del sistema (14.1) ad un problema unidimensionale risolubile per quadrature.

La riduzione a quadrature del sistema Hamiltoniano, che è definito in  $\mathbb{R}^{2n}$ , richiederebbe a priori  $2n - 1$  integrali primi indipendenti. Una delle principali peculiarità dei sistemi Hamiltoniani è che la conoscenza di soli  $n$  integrali primi è sufficiente per la sua riduzione a quadrature. La dimostrazione di tale proprietà è uno dei risultati principali di questo Capitolo.

Prima di enunciare tale risultato, consideriamo un caso particolare. Dato il sistema Hamiltoniano

$$\begin{aligned} \dot{p}_h &= -\frac{\partial H}{\partial q_h}, \\ \dot{q}_h &= \frac{\partial H}{\partial p_h} \end{aligned} \quad h = 1, \dots, n, \quad (14.2)$$

di Hamiltoniana  $H(p, q, t)$ , si supponga che  $H$  dipenda dalle prime  $r$  variabili configurazionali  $\tilde{q} = (q_1, \dots, q_r)$  e non dalle  $n - r$  variabili  $\bar{q} = (q_{r+1}, \dots, q_n)$ . Le variabili  $\bar{q}$  saranno dette, come nel caso Lagrangiano *variabili cicliche*. In questo



caso è possibile trovare le soluzioni del sistema (14.2) mediante la risoluzione di un sistema Hamiltoniano di ordine  $2r$  e  $n - r$  quadrature. Infatti, per l'ipotesi di indipendenza dell'Hamiltoniana dalle  $\tilde{q}$ , le variabili  $\tilde{p} = (p_{r+1}, \dots, p_n)$  sono integrali primi per il sistema (14.2) e pertanto  $\tilde{p}(t) = \tilde{p}(t_0) = \tilde{p}^{(0)}$ . Posto allora

$$\tilde{H}(\tilde{p}, \tilde{q}, t) = H(\tilde{p}, \tilde{p}^{(0)}, \tilde{q}, t),$$

le funzioni  $t \rightarrow \tilde{p}(t)$ ,  $t \rightarrow \tilde{q}(t)$  soddisfano il sistema Hamiltoniano di ordine  $2r$

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{p}}_h &= -\frac{\partial \tilde{H}}{\partial q_h}(\tilde{p}, \tilde{q}, t), \\ \dot{\tilde{q}}_h &= \frac{\partial \tilde{H}}{\partial p_h}(\tilde{p}, \tilde{q}, t) \end{aligned} \quad h = 1, \dots, r, \quad (14.3)$$

Risolto tale sistema, restano da determinare le funzioni  $t \rightarrow \tilde{q}(t)$ . Esse sono date dalle equazioni

$$\dot{\tilde{q}}_h = \frac{\partial H}{\partial p_h}(\tilde{p}(t), \tilde{p}^{(0)}, \tilde{q}(t), t) := \psi_h(t), \quad h = r + 1, \dots, n.$$

Le funzioni  $t \rightarrow \psi_h(t)$  sono note quando si sia risolto il sistema (14.3) e quindi la soluzione di queste equazioni consiste in  $n - r$  quadrature.

In particolare, se  $r = 0$ , e cioè se l'Hamiltoniana  $H$  non dipende dalle coordinate di configurazione, come accade ad esempio per l'Hamiltoniana di un sistema libero non soggetto a forze, allora la risoluzione del sistema (14.2) si riconduce ad  $n$  quadrature.

Ne concludiamo che, se conosciamo  $n$  integrali primi che coincidono con gli  $n$  impulsi generalizzati, allora possiamo ridurre la soluzione del sistema alle quadrature. D'altra parte, con una trasformazione canonica, possiamo sempre sostituire un impulso generalizzato con la coordinata corrispondente. Pertanto gli  $n$  integrali primi che consentono di ridurre il sistema a quadrature non devono essere necessariamente gli impulsi generalizzati.

Tuttavia essi non possono essere scelti completamente ad arbitrio: gli impulsi generalizzati soddisfano la condizione di *involuntività*

$$\{p_i, p_j\} = 0, \quad \forall i, j = 1, \dots, n.$$

Tale condizione è invariante per trasformazioni canoniche e quindi è una condizione necessaria sulla scelta degli  $n$  integrali primi che permettono la riduzione del problema a quadrature. Il teorema di Liouville-Arnold, che verrà dato nel resto di questo Capitolo, fornisce le condizioni sufficienti sugli integrali primi affinché le considerazioni precedenti siano applicabili.

Posto  $z = (p, q)$ , siano  $U_1(z), \dots, U_n(z)$   $n$  funzioni (infinitamente) differenziabili su  $\Gamma_{p,q}$  che siano integrali primi del sistema Hamiltoniano (14.2). Più in particolare, supponiamo che  $H$  non dipenda da  $t$ , e uno degli integrali primi sia l'Hamiltoniana stessa.

Detto  $B$  un sottoinsieme aperto di  $\Gamma$ , diremo che  $U_1(z), \dots, U_n(z)$  sono  $n$  integrali primi *indipendenti* in  $B$  se gli  $n$  vettori  $\nabla_z U_1(z), \dots, \nabla_z U_n(z)$  sono linearmente indipendenti per ogni  $z \in B$  e quindi se la matrice

$$J(U/z) = \begin{pmatrix} \frac{\partial U_1}{\partial z_1} & \cdots & \frac{\partial U_1}{\partial z_{2n}} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial U_n}{\partial z_1} & \cdots & \frac{\partial U_n}{\partial z_{2n}} \end{pmatrix} (z)$$

ha rango  $n$  per ogni  $z \in B$ .

Si dirà che gli  $n$  integrali primi  $U_1(z), \dots, U_n(z)$  sono *in involuzione* in  $B$  se per ogni coppia di indici  $i, j = 1, \dots, n$ , risulta

$$\{U_i, U_j\}(z) = 0 \quad (14.4)$$

per ogni  $z \in B$ .

Poniamo

$$\frac{\partial U}{\partial p} = \begin{pmatrix} \frac{\partial U_1}{\partial p_1} & \cdots & \frac{\partial U_1}{\partial p_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial U_n}{\partial p_1} & \cdots & \frac{\partial U_n}{\partial p_n} \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial U}{\partial q} = \begin{pmatrix} \frac{\partial U_1}{\partial q_1} & \cdots & \frac{\partial U_1}{\partial q_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial U_n}{\partial q_1} & \cdots & \frac{\partial U_n}{\partial q_n} \end{pmatrix}.$$

Con questa notazione, le (14.4) si scrivono

$$\frac{\partial U}{\partial q} \left( \frac{\partial U}{\partial p} \right)^T - \frac{\partial U}{\partial p} \left( \frac{\partial U}{\partial q} \right)^T = 0 \quad (14.5)$$

Assumeremo inoltre che la matrice  $(\partial U/\partial p)$  sia non singolare:

$$\det \left( \frac{\partial U}{\partial p} \right) (z) \neq 0, \quad z \in B. \quad (14.6)$$

Tale condizione è più forte dell'ipotesi di indipendenza, in quanto il minore di ordine  $n$  a determinante non nullo di  $J(U/z)$  potrebbe essere diverso da  $(\partial U/\partial p)$ . Tale condizione non è indispensabile, ma semplifica notevolmente la dimostrazione.

Prima di discutere il teorema di Liouville-Arnold, ne forniamo una piú “facile” versione locale. Fissiamo un punto  $z_0 = (p_0, q_0) \in \Gamma$  ed  $u = (u_1, \dots, u_n) \in \mathbb{R}^n$ . Le equazioni

$$U_1(p, q) = u_1, \dots, U_n(q, p) = u_n \quad (14.7)$$

possono essere risolte localmente rispetto alle  $p$  grazie alla condizione (14.6). Piú precisamente, posto  $u_0 = U(z_0)$ , esistono un intorno  $I \subset \mathbb{R}^n$  di  $u_0$  ed un intorno  $B_0 \subset B$  di  $z_0$  ove le condizioni (14.7) definiscono implicitamente la funzione

$$(u, q) \rightarrow p = \pi(u, q)$$

tale che

$$U(\pi(u, q), q) = u, \quad u \in I, \quad (p, q) \in B_0.$$

Una volta definita tale funzione, consideriamo la forma differenziale  $\pi(p, q) \cdot dq$ . Una conseguenza immediata dell’involuntività è la seguente

**Proposizione 14.1:** *La forma differenziale*

$$\pi(u, q) \cdot dq \quad (14.8)$$

*è localmente integrabile.*

Dim. Occorre provare che per ogni coppia  $i, k = 1, \dots, n$  risulta

$$\frac{\partial \pi_i}{\partial q_k} = \frac{\partial \pi_k}{\partial q_i},$$

ovvero che la matrice

$$\frac{\partial \pi}{\partial q} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \pi_1}{\partial q_1} & \dots & \frac{\partial \pi_1}{\partial q_n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial \pi_n}{\partial q_1} & \dots & \frac{\partial \pi_n}{\partial q_n} \end{pmatrix}$$

è simmetrica:

$$\frac{\partial \pi}{\partial q} = \left( \frac{\partial \pi}{\partial q} \right)^T.$$

Dal teorema della funzione implicita oppure direttamente differenziando la (14.7) rispetto a  $q$  si ottiene

$$\frac{\partial U}{\partial p} \frac{\partial \pi}{\partial q} + \frac{\partial U}{\partial q} = 0,$$

e quindi, per (14.6)

$$\frac{\partial \pi}{\partial q} = - \left( \frac{\partial U}{\partial p} \right)^{-1} \frac{\partial U}{\partial q}.$$

Pertanto la simmetria di  $(\partial\pi/\partial q)$  equivale a

$$\left(\frac{\partial U}{\partial p}\right)^{-1} \frac{\partial U}{\partial q} = \left(\frac{\partial U}{\partial q}\right)^T \left[\left(\frac{\partial U}{\partial p}\right)^{-1}\right]^T.$$

Moltiplicando a sinistra per  $(\partial U/\partial p)$  si ottiene allora

$$\frac{\partial U}{\partial q} = \frac{\partial U}{\partial p} \left(\frac{\partial U}{\partial q}\right)^T \left[\left(\frac{\partial U}{\partial p}\right)^{-1}\right]^T.$$

Poiché  $[(\partial U/\partial p)^{-1}]^T = [(\partial U/\partial p)^T]^{-1}$ , moltiplicando a destra per  $(\partial U/\partial p)^T$  si ottiene

$$\frac{\partial U}{\partial q} \left(\frac{\partial U}{\partial p}\right)^T = \frac{\partial U}{\partial p} \left(\frac{\partial U}{\partial q}\right)^T,$$

che equivale alla (14.5). Questo conclude la dimostrazione della Proposizione 14.1.  $\square$

L'integrabilità locale della forma differenziale (14.8) implica che è ben definita, in un intorno opportunamente piccolo di  $(u_0, q_0)$ , la funzione

$$S(u, q) = \int_{q_0}^q \pi(u, q) \cdot dq, \quad (14.9)$$

in quanto, pur di restringersi ad un intorno sufficientemente piccolo di  $q_0$ , l'integrale che definisce  $S$  non dipende dalla linea che congiunge  $q_0$  con  $q$ . Avendo definito  $S$  in tal modo, è evidente che

$$\frac{\partial S}{\partial q}(u, q) = \pi(u, q) = p. \quad (14.10)$$

D'altra parte, posto

$$\theta = \frac{\partial S}{\partial u}(q, u), \quad (14.11)$$

le (14.10) e (14.11) possono interpretarsi come le relazioni che definiscono una trasformazione completamente canonica nell'intorno di  $z_0 = (p_0, q_0)$  tra le variabili  $(p, q)$  e le variabili  $(u, \theta)$  mediante una funzione generatrice di 3° tipo. Perché tale interpretazione sia corretta basta che sia non degenere la matrice  $D_{q,u}^2 S$ , condizione certamente verificata in quanto  $D_{q,u}^2 S = D_u \pi$ , che è l'inversa della matrice  $(\partial U/\partial p)$ , la quale a sua volta è non degenere per la condizione (14.6).

Si è in tal modo costruita una trasformazione completamente canonica  $\Phi$  che trasforma il sistema Hamiltoniano (14.2) nel sistema

$$\begin{aligned} \dot{u}_h &= -\frac{\partial H'}{\partial \theta_h} \\ \dot{\theta}_h &= \frac{\partial H'}{\partial u_h}, \end{aligned} \quad h = 1, \dots, n. \quad (14.12)$$

Per l'invarianza delle parentesi di Poisson rispetto a trasformazioni completamente canoniche si ha

$$\{H, U_h\}_{p,q} = \{H', u_h\}_{u,\theta} \circ \Phi = \frac{\partial H'}{\partial \theta_h} \circ \Phi.$$

Essendo  $U(p, q)$  per ipotesi integrali primi del sistema (14.2), risulta

$$\{H, U_h\} = 0.$$

Pertanto

$$\frac{\partial H'}{\partial \theta_h}(u, \theta) = 0$$

e quindi

$$H'(u, \theta) = h(u)$$

con  $h$  opportuna funzione regolare delle sole  $u$ . Siamo in tal modo ricondotti alla situazione discussa all'inizio di questo Capitolo, di un sistema con  $n$  coordinate cicliche:

$$\begin{aligned} \dot{u}_h &= 0 \\ \dot{\theta}_h &= \frac{\partial h}{\partial u_h}(u) \end{aligned} \quad h = 1, \dots, n. \quad (14.13)$$

Abbiamo quindi provato il seguente

**Teorema 14.2 (di Liouville):** *Se il sistema (14.2) ammette, in un intorno di  $z_0 = (p_0, q_0)$ ,  $n$  integrali primi indipendenti in involuzione e soddisfacenti la condizione (14.6), allora esiste una trasformazione completamente canonica (nell'intorno di  $z_0$ ) che trasforma il sistema (14.2) nel sistema (14.13) risolubile per quadrature.*

Una conseguenza immediata di tale teorema è il seguente:

**Corollario 14.3:** *Un sistema Hamiltoniano di ordine  $n$  ammette al più  $n$  integrali primi indipendenti in involuzione.*

Dim. Infatti, se oltre agli integrali primi  $U_1, \dots, U_n$  indipendenti ed in involuzione, vi fosse un altro integrale primo  $W$  in involuzione con i precedenti, si avrebbe

$$\{U_i, W\}_{p,q} = 0, \quad i = 1, \dots, n.$$

Usando la trasformazione completamente canonica introdotta in precedenza, per l'invarianza delle parentesi di Poisson, sarebbe anche

$$\{u_i, W'\}_{u,\theta} = 0, \quad i = 1, \dots, n,$$

con  $W' = W \circ \Phi^{-1}$ . Ma

$$\{u_i, W'\}_{u,\theta} = \frac{\partial W'}{\partial \theta_i}$$

e quindi,

$$\frac{\partial W'}{\partial \theta_i} = 0, \quad i = 1, \dots, n$$

e cioè esiste una funzione  $w$  delle sole  $u$  tale che

$$W' = w(u_1, \dots, u_n),$$

ovvero

$$W(p, q) = w(U_1(p, q), \dots, U_n(p, q)).$$

Cioè,  $W$  è una funzione di  $U_1, \dots, U_n$  e quindi non è indipendente da questi.  $\square$

La versione globale del Teorema di Liouville, dovuta ad Arnold, fornisce informazioni sulla struttura topologica della varietà individuata dagli integrali primi. Fissiamo ancora una volta  $z_0 = (p_0, q_0)$  ed un intorno  $I \subset \mathbb{R}^n$  di  $u_0 = U(z_0)$ . Per  $u \in I$ , definiamo il sottoinsieme di  $\Gamma$

$$M_u = \{z \in \Gamma \mid U_1(z) = u_1, \dots, U_n(z) = u_n\}.$$

Supponiamo, senza perdita di generalità che tale insieme sia connesso, limitandoci ad una sua componente connessa in caso contrario. Dall'assunzione di indipendenza delle  $U$ , per il teorema della funzione implicita, segue che  $M_u$  è una varietà differenziale di dimensione  $n$ . L'assunzione fondamentale del teorema di Liouville-Arnold è che

$$M_u \quad \text{è compatta per } u \in I.$$

Su  $M_u$  sono definiti  $n$  campi vettoriali

$$X_i = J \nabla_z U_i, \quad i = 1, \dots, n.$$

Tali campi vettoriali sono indipendenti in quanto i campi  $\nabla_z U_i$  sono indipendenti per ipotesi e  $J$  è non degenere. Sia  $\{\Phi_i^\lambda, \lambda \in \mathbb{R}\}$  il gruppo ad un parametro di trasformazioni generato da  $U_i$ , caratterizzato per  $\lambda$  piccolo dalle relazioni

$$\Phi_i^\lambda(p, q) = (P^{\lambda,i}(p, q), Q^{\lambda,i}(p, q)) = (p, q) + \lambda X_i + o(\lambda).$$

Tale gruppo può essere esteso ad un gruppo globale in un intorno di  $M_u$ . Inoltre, nelle considerazioni che seguono, possiamo limitarci a esaminare, in luogo del comportamento di  $\Phi_i^\lambda$ , quello di  $L_{\Phi_i}$  che misura le variazioni della generica funzione su  $\Gamma$  lungo le traiettorie del gruppo.

Ricordiamo che  $L_{\Phi_i}$  è stato definito nel Capitolo 13 come

$$\begin{aligned}(L_{\Phi_i}G)(p, q) &= \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{1}{\lambda} [G(P^{\lambda, i}(p, q), Q^{\lambda, i}(p, q)) - G(p, q)] \\ &= \nabla_z G \cdot X_i = \nabla_z G \cdot J\nabla_z U_i = \{G, U_i\}.\end{aligned}$$

Il campo  $X_i$  è tangente a  $M_u$  nel senso che  $M_u$  è *invariante sotto l'azione di  $\Phi_i^\lambda$* . Infatti per ogni  $j = 1, \dots, n$

$$L_{\Phi_i}U_j = \{U_j, U_i\} = 0$$

in quanto le  $U_j$  sono in involuzione. Pertanto, se  $(p, q) \in M_u$ , anche  $\Phi_i^\lambda(p, q) \in M_u$  e quindi  $M_u$  è invariante.

Inoltre, se  $i \neq k$ ,  $\Phi_i^\lambda$  e  $\Phi_k^\lambda$  *commutano*:

$$\Phi_i^{\lambda_1} \circ \Phi_k^{\lambda_2} = \Phi_k^{\lambda_1} \circ \Phi_i^{\lambda_2}.$$

Infatti, basta osservare che per ogni funzione regolare  $G$  risulta

$$\begin{aligned}L_{\Phi_i}L_{\Phi_k}G - L_{\Phi_k}L_{\Phi_i}G &= \{\{G, U_k\}, U_i\} - \{\{G, U_i\}, U_k\} = \\ &= \{U_i, \{U_k, G\}\} + \{U_k, \{G, U_i\}\} = -\{G, \{U_i, U_k\}\} = 0,\end{aligned}$$

usando l'identità di Jacobi e l'involutività.

In conclusione mediante gli  $n$  integrali primi  $U_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ , sulla varietà  $M_u$  risultano definiti  $n$  gruppi ad un parametro di trasformazioni che commutano e lasciano  $M_u$  invariata. Il seguente lemma è un risultato classico di Topologia Differenziale:

**Lemma 14.4:** *Se una varietà  $n$ -dimensionale  $M$  è invariante sotto l'azione di  $n$  gruppi ad un parametro, indipendenti e commutanti, allora esiste  $\ell \in \{0, \dots, n\}$  tale che  $M$  è diffeomorfa al prodotto cartesiano  $\mathbb{T}_\ell \times \mathbb{R}^{n-\ell}$  <sup>(1)</sup>, ove  $\mathbb{T}_\ell$  è il toro  $\ell$ -dimensionale, cioè il prodotto di  $\ell$  circonferenze.*

Per la dimostrazione di tale risultato rinviamo al libro di Arnold, paragrafo 49.C.

Nel caso in esame, la varietà  $M_u$  è supposta compatta. Ciò comporta  $\ell = n$ , essendo questo l'unico caso in cui il prodotto  $\mathbb{T}_\ell \times \mathbb{R}^{n-\ell}$  è compatto. Ne consegue che  $M_u$  è diffeomorfa al toro  $n$ -dimensionale  $\mathbb{T}_n$ . Pertanto i punti di  $M_u$  sono in

<sup>(1)</sup> Per definizione, ciò significa che esiste una trasformazione differenziabile con inversa differenziabile tra  $M$  e  $\mathbb{T}_\ell \times \mathbb{R}^{n-\ell}$ .

corrispondenza biunivoca con  $n$  “angoli”  $\psi = (\psi_1, \dots, \psi_n)$  definiti modulo  $2\pi$ . In altri termini, per ogni  $u \in I$  la varietà  $M_u$  può rappresentarsi come

$$M_u = \{(p, q) \in \Gamma \mid p = \alpha(u, \psi), q = \beta(u, \psi), \psi \in \mathbb{T}_n\},$$

ove le funzioni  $(u, \psi) \rightarrow \alpha(u, \psi)$ ,  $(u, \psi) \rightarrow \beta(u, \psi)$  sono differenziabili e periodiche di periodo  $2\pi$  in ciascuna delle variabili  $\psi_h$ ,  $h = 1, \dots, n$ . La trasformazione

$$\Psi : (p, q) \rightarrow (u, \psi)$$

definita dalle funzioni  $\alpha$  e  $\beta$  non è necessariamente canonica, condizione indispensabile per avere un buon controllo del sistema trasformato. Occorre quindi costruire una trasformazione canonica che trasformi la varietà invariante  $M_u$  in un toro e cioè realizzare il diffeomorfismo mediante una trasformazione canonica.

Fissiamo dapprima l'attenzione sul caso  $n = 1$ . La varietà  $M_u$  è quindi unidimensionale e diffeomorfa ad una circonferenza. Poniamo

$$A(u) = \frac{1}{2\pi} \oint_{M_u} pdq = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \alpha(u, \psi) \frac{\partial \beta(u, \psi)}{\partial \psi} d\psi.$$

Supponiamo che la funzione  $u \rightarrow A(u)$  sia invertibile in un intorno di  $u_0$ , in modo da poter sostituire in tale intorno la variabile  $u$  con la variabile  $A$ . Fissato ad arbitrio un punto  $(p^*, q^*) \in M_u$ , poniamo

$$S(A, q) = \int_{(p^*, q^*)}^{(p, q)} pdq.$$

Tale funzione non è ben definita in quanto il suo valore dipende dal numero di volte che viene percorsa la varietà  $M_u$  per andare da  $(p^*, q^*)$  a  $(p, q)$ . Tuttavia, poiché per definizione di  $A$  il valore dell'integrale di  $pdq$  su  $M_u$  è  $2\pi A$ , le determinazioni di  $S(A, q)$  differiscono tra loro per  $2\pi mA$ , con  $m \in \mathbb{Z}$ . Quindi la quantità

$$\varphi = \frac{\partial S}{\partial A}$$

è definita a meno di  $2\pi m$ ,  $m \in \mathbb{Z}$ . In altre parole  $\varphi$  si può interpretare come un angolo. Pertanto le posizioni

$$p = \frac{\partial S}{\partial q}(A, q), \quad \varphi = \frac{\partial S}{\partial A}(A, q),$$

definiscono una trasformazione tale che

$$pdq = \frac{\partial S}{\partial q} dq = dS - \frac{\partial S}{\partial A} dA = dS - \varphi dA = d(S - \varphi A) + Ad\varphi = dF + Ad\varphi. \quad (14.14)$$



La funzione  $F = S - A\varphi$  è una funzione ad un sol valore in quanto sia le determinazioni di  $S$  che quelle di  $A\varphi$  differiscono di  $2\pi mA$ ,  $m \in \mathbb{Z}$  e quindi la non univocità delle due funzioni è compensata. Pertanto la (14.14) rappresenta la condizione di completa canonicità che assicura che la trasformazione  $(p, q) \rightarrow (A, \varphi)$  è una trasformazione completamente canonica che ammette  $S$  come funzione generatrice di 3° tipo.

Il caso  $n > 1$  si tratta in modo simile. Introduciamo le *curve coordinate* su  $M_u$  come segue:

$$\gamma_k(u) = \{(\alpha(u, \psi), \beta(u, \psi)), \psi_i = 0, i \neq k; \psi_k = t \in [0, 2\pi]\}, \quad k = 1, \dots, n.$$

Definiamo inoltre

$$A_k(u) = \frac{1}{2\pi} \oint_{\gamma_k(u)} p \cdot dq.$$

Il fatto che la forma differenziale  $p \cdot dq$  è localmente integrabile assicura che il valore delle  $A_k$  non dipende dalla scelta particolare delle  $\gamma_k(u)$ . Supponiamo che la trasformazione  $u \rightarrow A(u)$  sia invertibile in un intorno di  $u_0$  e come nel caso  $n = 1$  poniamo

$$S(A, q) = \int_{(p^*, q^*)}^{(p, q)} p \cdot dq.$$

L'integrabilità locale della forma  $p \cdot dq$  permette di concludere che la funzione  $S$ , sebbene a più valori, dipende dalla forma della curva che congiunge  $(p^*, q^*)$  con  $(p, q)$  solo per il numero di volte che tale curva gira intorno alla varietà  $M_u$  in ciascuna delle direzioni coordinate. Pertanto le sue determinazioni differiscono per  $2\pi m \cdot A$  con  $m \in \mathbb{Z}^n$ . Procedendo come nel caso  $n = 1$  si ha quindi che le quantità

$$\varphi_h = \frac{\partial S}{\partial A_h}(A, q), \quad h = 1, \dots, n, \quad (14.15)$$

sono definite a meno di  $2\pi m_h$ ,  $m_h \in \mathbb{Z}$  e quindi si interpretano come angoli. Inoltre, dalla definizione di  $S$  risulta

$$p_h = \frac{\partial S}{\partial q_h}(A, q), \quad h = 1, \dots, n. \quad (14.16)$$

Si ha inoltre

$$p \cdot dq = \frac{\partial S}{\partial q} \cdot dq = dS - \frac{\partial S}{\partial A} \cdot dA = dS - \varphi \cdot dA = d(S - \varphi \cdot A) + A \cdot d\varphi = dF + A \cdot d\varphi. \quad (14.17)$$

Come nel caso  $n = 1$ , anche in questo caso la funzione  $F$  è ad un sol valore e la condizione (14.17) assicura che la trasformazione  $(p, q) \rightarrow (A, \varphi)$  definita da

(14.15), (14.16) è una trasformazione completamente canonica che ammette  $S$  come funzione generatrice di 3° tipo.

Le variabili  $A$  sono funzioni degli integrali primi e quindi sono integrali primi a loro volta. Procedendo come per il teorema locale si ottiene quindi il sistema Hamiltoniano nelle variabili  $(A, \varphi)$

$$\begin{aligned} \dot{A}_h &= 0, \\ \dot{\varphi}_h &= \frac{\partial h(A)}{\partial A_h} = \omega_h(A), \quad h = 1, \dots, n. \end{aligned} \quad (14.18)$$

Le variabili  $A$  hanno le stesse dimensioni dell'Azione e pertanto vengono dette *variabili azione*. Le variabili  $\varphi$  si lasciano interpretare come angoli e in conseguenza il complesso delle variabili  $(A, \varphi)$  è detto *variabili azione-angolo*. Gli argomenti precedenti costituiscono la dimostrazione del

**Teorema 14.5 (di Liouville-Arnold):** *Si supponga che il sistema Hamiltoniano (14.2) ammetta  $n$  integrali primi,  $U_1, \dots, U_n$ , indipendenti, in involuzione e soddisfacenti la condizione (14.6) in un aperto di  $\mathbb{R}^{2n}$  contenente un punto  $z_0 = (p_0, q_0)$ . Si supponga inoltre che, posto  $u_0 = U(z_0)$ , per ogni  $u$  in un intorno  $I$  di  $u_0$  la varietà  $M_u$  sia compatta. Allora esiste una trasformazione completamente canonica  $(p, q) \rightarrow (A, \varphi)$  con  $\varphi$  definiti modulo  $2\pi$ , tale che per ogni  $u \in I$  la varietà  $M_u$  è diffeomorfa al toro  $n$ -dimensionale e il sistema canonico, nelle variabili  $(A, \varphi)$  diviene il sistema (14.18) che è pertanto riducibile a quadrature.*

I sistemi che verificano le proprietà contenute nella tesi del teorema di Liouville-Arnold sono detti (canonicamente) integrabili:

**Definizione 14.1:** Il sistema Hamiltoniano (14.2) è detto (*canonicamente*) *integrabile* in un intorno aperto  $B$  contenente un punto  $(p_0, q_0)$  se:

- 1) È possibile determinare  $n$  integrali primi indipendenti  $A_1(p, q), \dots, A_n(p, q)$  in modo tale che per  $A$  in un intorno  $I$  di  $A_0 = A(p_0, q_0)$ , la varietà invariante

$$M_A = \{(p, q) \in \Gamma \mid A_h(p, q) = A_h, \quad h = 1, \dots, n\}$$

sia diffeomorfa al toro  $n$ -dimensionale  $\mathbb{T}_n$ ;

- 2) Detti  $\varphi_1, \dots, \varphi_n$  gli angoli sul toro  $\mathbb{T}_n$ , esiste una trasformazione  $(p, q) \rightarrow (A, \varphi)$  completamente canonica tra  $B$  ed  $I \times \mathbb{T}_n$ ;
- 3) L'Hamiltoniana  $H'(A, \varphi)$  dipende solo da  $A$ :  $H'(A, \varphi) = h(A)$  ed il sistema Hamiltoniano, nelle variabili  $(A, \varphi)$  si scrive

$$\begin{aligned} \dot{A}_h &= 0, \\ \dot{\varphi}_h &= \frac{\partial h(A)}{\partial A_h} = \omega_h(A), \quad h = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

In conseguenza di tale definizione il Teorema di Liouville-Arnold può sintetizzarsi nell'affermazione che, se per il sistema canonico (14.2) è possibile trovare  $n$  integrali primi indipendenti ed in involuzione ed inoltre la varietà  $M_u$  è compatta, allora il sistema (14.2) è canonicamente integrabile.

Esempi.

- 1) Sistema di  $n$  oscillatori armonici. Con un cambio di coordinate (modi normali), tale sistema è caratterizzato dall'Hamiltoniana

$$H(p, q) = \sum_{i=1}^n H_i(p_i, q_i) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2}(p_i^2 + \omega_i^2 q_i^2).$$

Le funzioni  $H_i(p_i, q_i)$ ,  $i = 1, \dots, n$  sono  $n$  integrali primi indipendenti ed in involuzione. Fissato  $e = (e_1, \dots, e_n)$  con  $e_i > 0$ , definiamo le curve chiuse  $C(e_i) = \{(p_i, q_i) \mid H_i(p_i, q_i) = e_i\}$ .  $M_e$  è il prodotto cartesiano di tali curve ed è ovviamente compatta. Sono quindi soddisfatte le condizioni del teorema di Liouville-Arnold. Si ponga

$$A_i(e_i) = \frac{1}{2\pi} \oint_{C(e_i)} p dq = \frac{1}{2\pi} \oint_{C(e_i)} \sqrt{2e_i - \omega_i^2 q_i^2} dq_i$$

Con la sostituzione  $q_i = \sqrt{2e_i/\omega_i^2} \cos \lambda$ , si ottiene

$$A_i(e_i) = \frac{1}{2\pi} \frac{2e_i}{\omega_i} \int_0^{2\pi} \cos^2 \lambda d\lambda = \frac{e_i}{\omega_i}.$$

Ricordando che  $e_i = H_i(p_i, q_i)$ , si ha quindi

$$A_i = \frac{1}{2} \left( \frac{p_i^2}{\omega_i} + \omega_i q_i^2 \right).$$

Posto

$$\varphi_i = \arctan \frac{\omega_i q_i}{p_i},$$

si ha

$$d\varphi_i = \frac{p_i^2}{\omega_i^2 q_i^2 + p_i^2} \left( \frac{\omega_i dq_i}{p_i} - \frac{\omega_i q_i dp_i}{p_i^2} \right) = \frac{p_i dq_i - q_i dp_i}{2A_i}.$$

Pertanto

$$A \cdot d\varphi = \frac{1}{2} p \cdot dq - \frac{1}{2} q \cdot dp = p \cdot dq - d \left( \frac{1}{2} p \cdot q \right).$$

La trasformazione è quindi completamente canonica ed inoltre

$$H'(A, \varphi) = \omega \cdot A = h(A).$$

2) Moto di un punto in un campo di forze centrali (planare). Ricordiamo che la Lagrangiana è

$$L(\dot{\rho}, \dot{\theta}, \rho, \theta) = \frac{1}{2}m(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\theta}^2) - V(\rho).$$

Usando le variabili  $q_1 = \rho$ ,  $q_2 = \theta$ , e i corrispondenti impulsi  $p_1 = p_\rho$ ,  $p_2 = p_\theta$ , l'Hamiltoniana è

$$H(p, q) = \frac{1}{2m}p_1^2 + \frac{1}{2mq_1^2}p_2^2 + V(q_1).$$

Si ha

$$\{H, p_2\} = \frac{\partial H}{\partial q_2} = 0.$$

Pertanto  $H$  e  $p_2$  sono due integrali primi indipendenti ed in involuzione. Supponiamo  $\rho \rightarrow V(\rho)$  tale che

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \rho^2 V(\rho) \geq 0, \quad \lim_{\rho \rightarrow \infty} V(\rho) = 0.$$

In tali condizioni, fissati  $e$  e  $\ell$  la varietà

$$M_{(e,\ell)} = \{(p, q) \mid H(p, q) = e, p_2 = \ell\}$$

è compatta se  $e < 0$ . In conseguenza del teorema di Liouville-Arnold, tale sistema è canonicamente integrabile. La costruzione esplicita delle variabili azione-angolo è rinviata agli esercizi.

3) Trottola pesante. Ricordiamo che la Lagrangiana è

$$L(\dot{\theta}, \dot{\varphi}, \dot{\psi}, \theta, \varphi, \psi) = \frac{1}{2}I(\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta) + \frac{1}{2}I_3(\dot{\psi} + \dot{\varphi} \cos \theta)^2 - mgd \cos \theta.$$

Usiamo le variabili  $q_1 = \theta$ ,  $q_2 = \varphi$ ,  $q_3 = \psi$ ,  $p_1 = p_\theta$ ,  $p_2 = p_\varphi$ ,  $p_3 = p_\psi$ .

$$H(p, q) = \frac{p_1^2}{2I} + \frac{(p_2 - p_3 \cos \theta)^2}{2I \sin^2 \theta} + \frac{p_3^2}{2I_3} + mgd \cos \theta.$$

Poiché

$$\{H, p_2\} = \frac{\partial H}{\partial q_2} = 0, \quad \{H, p_3\} = \frac{\partial H}{\partial q_3} = 0,$$

ed inoltre

$$\{p_2, p_3\} = 0,$$

gli integrali primi  $H$ ,  $p_2$  e  $p_3$  sono in involuzione. Risulta inoltre

$$\nabla_z H = \left( \frac{p_1}{I}, \frac{p_2 - p_3 \cos \theta}{I \sin^2 \theta}, \frac{p_3}{I_3} - \frac{(p_2 - p_3 \cos \theta) \cos \theta}{I \sin^2 \theta}, \frac{\partial H}{\partial q_1}, 0, 0 \right),$$

$$\nabla_z p_2 = (0, 1, 0, 0, 0, 0),$$

$$\nabla_z p_3 = (0, 0, 1, 0, 0, 0).$$

Pertanto

$$\det \left( \frac{\partial U}{\partial p} \right) = \frac{p_1}{I}$$

è non nullo se  $p_1 \neq 0$ . In conseguenza, per  $p_1 \neq 0$  gli integrali primi sono indipendenti ed inoltre è soddisfatta la condizione (14.6). Scelto  $e > -mgd$ , è facile controllare che la varietà  $M_{(e, \ell_2, \ell_3)}$  è compatta e quindi, per il teorema di Liouville-Arnold diffeomorfa a  $\mathbb{T}_3$ . Inoltre il sistema è integrabile. Anche per questo problema la costruzione esplicita delle variabili azione-angolo è rinviata agli esercizi.

## 14.2 Perturbazioni di sistemi integrabili.

Solo una piccola minoranza dei sistemi Hamiltoniani è integrabile, e tali non sono in generale i sistemi Hamiltoniani associati ai più interessanti sistemi meccanici. Uno dei più famosi problemi *non integrabili* è il problema dei tre corpi.

Mentre, come abbiamo visto, il problema dei due corpi corrisponde ad un sistema Hamiltoniano integrabile, l'aggiunta di un terzo corpo rende la soluzione del problema del moto molto difficile. D'altra parte, la rilevanza del problema di  $n$  corpi per lo studio del sistema planetario è evidente. Per tale motivo sono stati elaborati metodi di soluzione approssimata di problemi di questo tipo, basati sul fatto che, in opportune circostanze, ci si può ricondurre ad una *piccola perturbazione* di un problema integrabile. Per chiarire questo termine, fissiamo le idee sul problema di tre corpi, il primo dei quali sia il Sole, il secondo la Terra ed il terzo un altro pianeta, ad esempio Giove, che è il pianeta di massa più grande del sistema solare. L'Hamiltoniana di tale sistema è:

$$H = \left\{ \frac{p_S^2}{2m_S} + \frac{p_T^2}{2m_T} + \mathcal{G} \frac{m_S m_T}{|x_S - x_T|} \right\} + \left[ \frac{p_G^2}{2m_G} + \mathcal{G} \frac{m_S m_G}{|x_S - x_G|} \right] + \mathcal{G} \frac{m_G m_T}{|x_G - x_T|}.$$

Si sono usate le notazioni  $p_S$ ,  $p_T$  e  $p_G$  per denotare gli impulsi del Sole, della Terra e di Giove,  $x_S$ ,  $x_T$  e  $x_G$  per le rispettive posizioni ed  $m_S$ ,  $m_T$  ed  $m_G$  per le masse. Il termine in parentesi graffe rappresenta l'Hamiltoniana del sistema Terra-Sole che è un problema di due corpi, il termine in parentesi quadre è l'Hamiltoniana del moto di Giove nel campo gravitazionale del Sole e l'ultimo termine rappresenta l'interazione gravitazionale tra la Terra e Giove. Pensando per semplicità il Sole immobile, in quanto di massa molto più grande di Giove e della Terra, è chiaro che l'ultimo termine, cioè l'attrazione che Giove esercita sulla Terra, rende tale sistema non integrabile. Essa rappresenta una perturbazione che in opportune condizioni può essere considerata piccola, in quanto l'attrazione che Giove esercita sulla Terra è più piccola di quella che il Sole esercita sulla Terra per un fattore

$m_G/m_S$ , fattore dell'ordine di  $10^{-3}$  mentre le distanze Terra-Sole e Terra-Giove sono dello stesso ordine di grandezza.

In generale quindi ci proponiamo di esaminare il comportamento di un sistema Hamiltoniano ad  $n$  gradi di libertà la cui Hamiltoniana  $\overline{H}_\varepsilon(p, q)$  si possa scrivere come

$$\overline{H}_\varepsilon(p, q) = H_0(p, q) + \varepsilon H_1(p, q),$$

con  $H_0$  Hamiltoniana di un sistema canonicamente integrabile,  $H_1$  una funzione regolare e  $\varepsilon$  un parametro "piccolo" da individuarsi caso per caso e che, nell'esempio considerato prima, è  $\varepsilon = m_G/m_S$ . Le considerazioni che svolgeremo nel seguito saranno valide per scelte di  $\varepsilon$  sufficientemente piccolo.

Ricordiamo che per un sistema integrabile è possibile trovare una trasformazione completamente canonica  $\Psi_0 : (p, q) \in B \rightarrow (A, \varphi) \in I \times \mathbb{T}_n$  con  $\varphi \in \mathbb{T}_n$  tale che  $H'_0(A, \varphi) = h(A)$ . Nelle variabili  $A, \varphi$  l'Hamiltoniana  $\overline{H}_\varepsilon$  è trasformata in

$$H_\varepsilon(A, \varphi) = h(A) + \varepsilon f(A, \varphi), \quad (14.19)$$

ove  $f$  è una funzione periodica, di periodo  $2\pi$  degli angoli  $\varphi_h$ . In corrispondenza, il sistema Hamiltoniano diviene

$$\begin{aligned} \dot{A} &= -\varepsilon \frac{\partial f}{\partial \varphi}, \\ \dot{\varphi} &= \omega(A) + \varepsilon \frac{\partial f}{\partial A}, \end{aligned} \quad (14.20)$$

con

$$\omega(A) = \frac{\partial h(A)}{\partial A}. \quad (14.21)$$

Vogliamo confrontare le soluzioni del sistema (14.20) con quelle del sistema "imperturbato", corrispondente ad  $\varepsilon = 0$  che sono:

$$A = A^{(0)}, \quad \varphi = \varphi^{(0)} + \omega(A^{(0)})(t - t_0),$$

ove  $A^{(0)}$  e  $\varphi^{(0)}$  sono dati iniziali assegnati, espressi in termini delle variabili azione-angolo. Denotata con  $t \rightarrow (A_\varepsilon(t), \varphi_\varepsilon(t))$  la soluzione di (14.20) corrispondente agli stessi dati iniziali, denotiamo con

$$\delta = \sup_{t \in [0, T]} \left( \left| A_\varepsilon(t) - A^{(0)} \right| + \left| \varphi_\varepsilon(t) - \varphi^{(0)} - \omega(A^{(0)})(t - t_0) \right| \right),$$

la differenza tra la soluzione del sistema (14.20) e quella del sistema imperturbato. Assumiamo inoltre che la quantità

$$L = \sup_{A, \varphi \in I \times \mathbb{T}_n} \left\{ \left| \frac{\partial f}{\partial A} \right|, \left| \frac{\partial f}{\partial \varphi} \right|, \left| \frac{\partial h}{\partial A} \right| \right\}$$

sia finita.

È allora evidente che

$$\delta \leq 2L\varepsilon T.$$

Pertanto, se  $T$  è molto piccolo rispetto ad  $\varepsilon^{-1}$ , l'errore che si commette trascurando la perturbazione  $\varepsilon f$  rispetto all'Hamiltoniana imperturbata è anch'esso piccolo.

D'altra parte, in molti casi si è interessati a comportamenti del sistema per tempi lunghi, cioè almeno dell'ordine di  $\varepsilon^{-1}$ , in corrispondenza dei quali  $\delta$  non è piccolo. Questo è ad esempio il caso del sistema planetario, per il quale sono interessanti informazioni su tempi molto lunghi. In questi casi non è accettabile il trascurare la perturbazione in quanto le previsioni così ottenute sono largamente inattendibili.

L'idea del metodo delle perturbazioni è di trasformare il sistema Hamiltoniano (14.20) in un nuovo sistema Hamiltoniano con Hamiltoniana della forma (14.19), con nuove funzioni  $h'$  ed  $f'$  e con il parametro  $\varepsilon$  sostituito da  $\varepsilon^m$  con  $m > 1$ . Per fissare le idee, consideriamo il caso  $m = 2$ . Vogliamo determinare una trasformazione canonica  $\Psi$  in modo che in termini delle nuove variabili  $(A', \varphi')$ , l'Hamiltoniana divenga

$$H'_\varepsilon(A', \varphi') = h_\varepsilon(A') + \varepsilon^2 f'(A', \varphi') \quad (14.22)$$

ed il sistema Hamiltoniano si scriva

$$\begin{aligned} \dot{A}' &= -\varepsilon^2 \frac{\partial f'}{\partial \varphi'}, \\ \dot{\varphi}' &= \omega'_\varepsilon(A') + \varepsilon^2 \frac{\partial f'}{\partial A'}. \end{aligned} \quad (14.23)$$

con

$$\omega'_\varepsilon(A') = \frac{\partial h_\varepsilon(A')}{\partial A'}. \quad (14.24)$$

Le soluzioni del sistema (14.23) in cui si trascurino i termini di ordine  $\varepsilon^2$  sono allora:

$$A'(t) = A'^{(0)}, \quad \varphi'(t) = \varphi'^{(0)} + \omega'_\varepsilon(A'^{(0)})(t - t_0),$$

ove  $A'^{(0)}$  e  $\varphi'^{(0)}$  sono i dati iniziali, espressi in termini delle nuove variabili azione-angolo. Denotata con  $t \rightarrow (A'_\varepsilon(t), \varphi'_\varepsilon(t))$  la soluzione di (14.23) corrispondente agli stessi dati iniziali, sia

$$\delta' = \sup_{t \in [0, T]} \left( \left| A'_\varepsilon(t) - A'^{(0)} \right| + \left| \varphi'_\varepsilon(t) - \varphi'^{(0)} - \omega'_\varepsilon(A'^{(0)})(t - t_0) \right| \right)$$

la differenza tra la soluzione del sistema (14.23) e quella dello stesso sistema privato dei termini di ordine  $\varepsilon^2$ . Si avrà allora

$$\delta' \leq 2L\varepsilon^2 T$$

e quindi, se si trascura il termine di ordine  $\varepsilon^2$  nel sistema (14.23) si ottengono informazioni attendibili per tempi piccoli rispetto ad  $\varepsilon^{-2}$ , con un evidente miglioramento rispetto al sistema (14.20).

Vogliamo fornire un metodo per determinare la trasformazione canonica  $\Psi$ , dipendente da  $\varepsilon$  in modo che l'Hamiltoniana trasformata sia della forma (14.22). Per fare ciò usiamo il metodo della funzione generatrice. Cerchiamo quindi una funzione delle vecchie coordinate e dei nuovi impulsi,  $S_\varepsilon(A', \varphi)$  che per  $\varepsilon = 0$  si riduce alla funzione generatrice dell'identità:

$$S_\varepsilon(A', \varphi) = A' \cdot \varphi + \Phi_\varepsilon(A', \varphi), \quad (14.25)$$

con

$$\Phi_0(A', \varphi) = 0.$$

Le variabili  $A'$  e  $\varphi'$  dipendono da  $\varepsilon$ , ma lasceremo tale dipendenza sottintesa per brevità. Le relazioni tra vecchie e nuove variabili sono date da

$$\begin{aligned} A &= A' + \frac{\partial \Phi_\varepsilon}{\partial \varphi}(A', \varphi), \\ \varphi' &= \varphi + \frac{\partial \Phi_\varepsilon}{\partial A'}(A', \varphi). \end{aligned} \quad (14.26)$$

Perché la nuova Hamiltoniana  $H'_\varepsilon$  sia della forma (14.22) deve essere

$$H_\varepsilon\left(A' + \frac{\partial \Phi_\varepsilon}{\partial \varphi}(A', \varphi), \varphi\right) = h_\varepsilon(A') + O(\varepsilon^2). \quad (14.27)$$

Riassumendo, si tratta di determinare  $\Phi_\varepsilon$ ,  $h_\varepsilon$  e l'errore  $O(\varepsilon^2)$  in modo da rendere soddisfatta la (14.27). Si possono cercare  $\Phi_\varepsilon$  ed  $h_\varepsilon$  sotto forma di serie di potenze in  $\varepsilon$ :

$$\begin{aligned} \Phi_\varepsilon &= \Phi_0 + \varepsilon \Phi_1 + \dots, \\ h_\varepsilon &= h_0 + \varepsilon h_1 + \dots \end{aligned}$$

In realtà non vi è veramente bisogno di pensare a serie infinite in quanto solo i primi termini saranno realmente rilevanti.

Per ipotesi abbiamo  $\Phi_0 = 0$ . Espandendo il membro sinistro di (14.27) in potenze di  $\varepsilon$ , si ha

$$H_\varepsilon\left(A' + \frac{\partial \Phi_\varepsilon}{\partial \varphi}(A', \varphi), \varphi\right) = h(A') + \varepsilon \left( \omega(A') \cdot \frac{\partial \Phi_1}{\partial \varphi}(A', \varphi) + f(A', \varphi) \right) + O(\varepsilon^2).$$

La relazione (14.27) può scriversi allora:

$$h(A') - h_0(A') + \varepsilon \left[ \omega(A') \cdot \frac{\partial \Phi_1}{\partial \varphi}(A', \varphi) + f(A', \varphi) - h_1(A') \right] + O(\varepsilon^2) = 0. \quad (14.28)$$



Dovendo tale relazione essere valida nel limite  $\varepsilon \rightarrow 0$ , si ottiene

$$h_0(A') = h(A'). \quad (14.29)$$

Dividendo per  $\varepsilon$ , nel limite  $\varepsilon \rightarrow 0$  si ha anche

$$h_1(A') = \omega(A') \cdot \frac{\partial \Phi_1}{\partial \varphi}(A', \varphi) + f(A', \varphi). \quad (14.30)$$

La (14.29) determina  $h_0$ . Mostriamo che la (14.30) determina  $h_1$  e  $\Phi_1$ .

Data una funzione  $g$  su  $\mathbb{T}_n$ , useremo la notazione

$$\bar{g} = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{T}_n} d\varphi g(\varphi)$$

per indicarne la media sul toro  $\mathbb{T}_n$ . Poiché evidentemente

$$\frac{\partial \Phi_1}{\partial \varphi}(A') = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{T}_n} d\varphi \frac{\partial \Phi_1}{\partial \varphi}(A', \varphi) = 0,$$

mediando la (14.30) su  $\mathbb{T}_n$  si ottiene

$$h_1(A') = \bar{f}(A') = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{T}_n} d\varphi f(A', \varphi) \quad (14.31)$$

e pertanto  $h_1$  è determinata come la media di  $f$  sul toro  $\mathbb{T}_n$ . Sostituendo tale espressione in (14.30), si ottiene allora

$$\omega(A') \cdot \frac{\partial \Phi_1}{\partial \varphi}(A', \varphi) = - [f(A', \varphi) - \bar{f}(A')]. \quad (14.32)$$

Ogni soluzione  $\Phi_1$  regolare di (14.32), definita a meno di una funzione arbitraria di  $A'$ , fornisce per  $\varepsilon$  sufficientemente piccolo la funzione generatrice  $S_\varepsilon(A', \varphi) = A' \cdot \varphi + \varepsilon \Phi_1(A', \varphi)$  di una trasformazione canonica  $\Psi$  della forma

$$\begin{aligned} A' &= A - \varepsilon \frac{\partial \Phi_1}{\partial \varphi}(A', \varphi), \\ \varphi' &= \varphi + \varepsilon \frac{\partial \Phi_1}{\partial A'}(A', \varphi), \end{aligned}$$

che può risciversi

$$\begin{aligned} A' &= A - \varepsilon \frac{\partial \Phi_1}{\partial \varphi}(A, \varphi) + O(\varepsilon^2), \\ \varphi' &= \varphi + \varepsilon \frac{\partial \Phi_1}{\partial A}(A, \varphi) + O(\varepsilon^2), \end{aligned} \quad (14.33)$$

e che trasforma l'Hamiltoniana in

$$H'(A', \varphi') = h(A') + \varepsilon h_1(A') + O(\varepsilon^2).$$

Infatti, la condizione di non singolarità della matrice  $D_{\varphi, A}^2 S_\varepsilon$  è verificata in quanto, per  $\varepsilon$  piccolo,  $S_\varepsilon$  differisce di poco dalla funzione generatrice dell'identità.

L'argomento precedente può essere reso più accurato considerando potenze più elevate di  $\varepsilon$ . Ad esempio, continuando fino al secondo ordine si otterrebbe la condizione

$$\begin{aligned} h + \varepsilon \left( \omega \cdot \frac{\partial \Phi_1}{\partial \varphi} \right) + \varepsilon^2 \left( \omega \cdot \frac{\partial \Phi_2}{\partial \varphi} + \frac{\partial f}{\partial A} \cdot \frac{\partial \Phi_1}{\partial \varphi} + \frac{\partial \omega}{\partial A} \cdot \left( \frac{\partial \Phi_1}{\partial \varphi} \right)^2 \right) + O(\varepsilon^3) \\ = h_0 + \varepsilon h_1 + \varepsilon^2 h_2 + O(\varepsilon^3). \end{aligned}$$

Pertanto, accanto alle (14.29) e (14.30) si avrebbe l'ulteriore condizione

$$h_2(A') = \omega \cdot \frac{\partial \Phi_2}{\partial \varphi}(A', \varphi) + N_2(A', \varphi) \quad (14.34)$$

con

$$N_2 = \frac{\partial f}{\partial A} \cdot \frac{\partial \Phi_1}{\partial \varphi} + \frac{\partial \omega}{\partial A} \cdot \left( \frac{\partial \Phi_1}{\partial \varphi} \right)^2. \quad (14.35)$$

Continuando fino all'ordine  $\varepsilon^m$ , si avrebbe allo stesso modo:

$$h_\ell = \omega \cdot \frac{\partial \Phi_\ell}{\partial \varphi} + N_m, \quad \ell = 1, \dots, m, \quad (14.36)$$

ove  $N_\ell(A', \varphi)$  è un polinomio nelle variabili

$$\frac{\partial \Phi_i}{\partial \varphi}, \quad i = 1, \dots, \ell - 1,$$

con coefficienti proporzionali ad  $f$ ,  $h$  e alle loro derivate fino all'ordine  $\ell$ . L'espressione di  $h_\ell$  si ottiene immediatamente mediando la relazione (14.36) sul toro  $\mathbb{T}_n$ . Si ha

$$h_\ell(A') = \overline{N_\ell}(A'). \quad (14.37)$$

In conseguenza la (14.36) diviene

$$\omega(A') \cdot \frac{\partial \Phi_\ell}{\partial \varphi}(A', \varphi) = - [N_\ell(A', \varphi) - \overline{N_\ell}(A')]. \quad (14.38)$$

che è analoga a (14.32) con  $N_\ell$  in luogo di  $f$ .

In tutti questi casi siamo quindi ricondotti alla risoluzione dell'equazione

$$\omega(A) \cdot \frac{\partial \psi}{\partial \varphi}(A, \varphi) = g(A, \varphi) \quad (14.39)$$

con  $g$  soddisfacente la condizione

$$\bar{g} = 0.$$

La soluzione di tale equazione può essere determinata in termini di serie di Fourier. Risolveremo a titolo di esempio la (14.39) nel caso  $\ell = 1$  in corrispondenza del quale  $g = -[f - \bar{f}]$ .

Una classe di  $g$  spesso rilevante nelle applicazioni è quella definita dall'assunzione che  $g$  sia un polinomio trigonometrico e cioè che esista  $N > 0$  tale che  $g$  possa scriversi

$$g(A, \varphi) = \sum_{\substack{k \in \mathbb{Z}^n \\ |k| \leq N}} \hat{g}_k(A) e^{ik \cdot \varphi}, \quad (14.40)$$

con  $f_k(A)$  funzioni regolari di  $A$  a valori complessi per ogni  $k \in \mathbb{Z}^n$  tale che  $|k| \leq N$ . Si assuma inoltre che per gli stessi  $|k| \leq N$  valga la condizione

$$|\omega(A) \cdot k|^{-1} \leq C, \quad \forall A \in I \quad (14.41)$$

per un'opportuna costante  $C > 0$  e  $k \neq 0$ .

Poiché  $\psi$  è una funzione regolare su  $\mathbb{T}_n$ , essa ammette uno sviluppo in serie di Fourier della forma

$$\psi(A, \varphi) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \hat{\psi}_k(A) e^{ik \cdot \varphi},$$

ove  $\hat{\psi}_k$  sono i coefficienti di Fourier di  $\psi$ , dati da

$$\hat{\psi}_k(A) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{T}_n} d\varphi \psi(A, \varphi) e^{-ik \cdot \varphi}. \quad (14.42)$$

La derivata di  $\psi$  rispetto a  $\varphi$  è anch'essa espressa come una serie di Fourier, e cioè

$$\frac{\partial \psi}{\partial \varphi}(A, \varphi) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} ik \hat{\psi}_k(A) e^{ik \cdot \varphi}. \quad (14.43)$$

Sostituendo (14.42) e (14.43) in (14.32) si ottiene allora

$$i[\omega(A) \cdot k] \hat{\psi}_k(A) + \hat{g}_k(A) = 0, \quad k \neq 0. \quad (14.44)$$

Per  $k = 0$  deve valere la condizione di compatibilità

$$\hat{g}_0 = 0$$

in quanto  $k \cdot \omega = 0$  per  $k = 0$ . Questa condizione è identicamente verificata in quanto  $\hat{g}_0 = \bar{g} = 0$  per ipotesi. Nel caso  $g = -[f - \bar{f}]$  l'ipotesi  $\bar{g} = 0$  è soddisfatta: ricordiamo infatti che la presenza del termine  $\bar{f}$  è dovuta alla scelta di  $h_1$ , scelta che rende pertanto soddisfatta la condizione di compatibilità. Per  $k \neq 0$ , grazie alla condizione (14.41), l'equazione (14.44) può essere risolta e fornisce

$$\hat{\psi}_k(A) = -\frac{\hat{g}_k(A)}{i\omega(A) \cdot k}. \quad (14.45)$$

In particolare, per  $|k| > N$  risulta quindi  $\hat{\psi}_k(A) = 0$  e pertanto anche  $\psi$  è un polinomio trigonometrico. La condizione (14.41) assicura poi che la precedente espressione è ben definita. Il coefficiente di Fourier  $\hat{\psi}_0$  non è determinato dall'equazione, in accordo con il fatto che la  $\psi$  è definita a meno di una funzione arbitraria di  $A$ .

In definitiva, nel caso  $g = -[f - \bar{f}]$ , con  $f$  polinomio di Fourier di grado  $N$ , le precedenti relazioni forniscono l'espressione di  $\Phi_1$  a meno di una funzione arbitraria di  $A$ . Per fissare univocamente la funzione generatrice, scegliamo il coefficiente di Fourier di  $\Phi_1$  corrispondente a  $k = 0$ ,  $\hat{\Phi}_0^{(1)} = 0$ . In conclusione otteniamo

$$\Phi_1(A, \varphi) = \sum_{\substack{k \in \mathbb{Z}^n \\ 0 < |k| \leq N}} -\frac{\hat{f}_k(A)}{i\omega(A) \cdot k} e^{ik \cdot \varphi}. \quad (14.46)$$

L'espressione (14.46) rappresenta una funzione ben definita delle variabili  $A$  e  $\varphi$  per  $(A, \varphi) \in I \times \mathbb{T}_n$ . La funzione

$$S_\varepsilon(A', \varphi) = A' \cdot \varphi + \varepsilon \Phi_1(A', \varphi)$$

rappresenta la funzione generatrice della trasformazione canonica. Occorre verificare che la matrice  $D_{A', \varphi}^2 S_\varepsilon$  sia non singolare. Poiché  $D_{A', \varphi}^2 S_\varepsilon = \mathbb{I} + \varepsilon D_{A', \varphi}^2 \Phi_1$ , basta controllare che le derivate seconde di  $\Phi_1$  sono uniformemente limitate da una costante  $K$  in quanto, in tal caso

$$|\det D_{A', \varphi}^2 S_\varepsilon| \geq 1 - \varepsilon K n + O(\varepsilon^2) > 0$$

se  $\varepsilon$  è sufficientemente piccolo. D'altra parte, dall'espressione (14.46) ottenuta per  $\Phi_1$  è facile controllare che  $D_{A', \varphi}^2 \Phi_1$  è maggiorata da una costante  $K$  per  $(A, \varphi) \in I \times \mathbb{T}_n$ .

Sottolineiamo che la semplicità del precedente argomento è tutta dovuta al fatto che  $f$  è un polinomio trigonometrico di grado  $N$ . Se tuttavia si vuole estendere la precedente trattazione agli ordini successivi, la funzione  $N_2$  ad esempio, è un polinomio di grado superiore ad  $N$  e quindi la condizione (14.41) non è più in grado di garantire l'assenza di risonanze, cioè la possibilità che il denominatore in (14.46) diventi molto piccolo per qualche valore di  $k$  (*piccoli denominatori*).

Casi piú generali di perturbazioni che non siano polinomi trigonometrici possono essere considerati quando vi siano condizioni abbastanza forti sulla funzione  $\omega(A)$  da permettere di escludere la presenza di “piccoli denominatori”. Un esempio di questo genere si ha quando il sistema imperturbato è un sistema di oscillatori armonici, in corrispondenza del quale l’Hamiltoniana imperturbata  $H_0$  diviene, nelle variabili azione-angolo,

$$h(A) = \omega \cdot A$$

con  $\omega$  il vettore delle frequenze proprie degli oscillatori. Per trattare questo caso si assume la seguente *condizione diofantina*:

esistono  $c > 0$  ed  $\alpha > 0$  tali che

$$|\omega \cdot k|^{-1} \leq c|k|^\alpha, \quad \forall k \in \mathbb{Z}^n - \{0\}.$$

Notiamo anzitutto che esistono scelte di  $\omega$  soddisfacenti la condizione diofantina. Infatti, dati  $\alpha > 0$  e  $R > 0$  definiamo il sottoinsieme di  $\mathbb{R}^n$

$$D_{\alpha,R} = \{\omega \in \mathbb{R}_+^n \mid |\omega| \leq R; \exists c > 0, |\omega \cdot \nu|^{-1} \leq c|\nu|^\alpha \forall \nu \in \mathbb{Z}^n - \{0\}\}.$$

Tale insieme è misurabile e si può dimostrare che la sua misura di Lebesgue soddisfa la stima

$$\mu(D_{\alpha,R}) \geq \mu(\{|\omega| \leq R\}) \left(1 - \frac{c}{R}\right),$$

per un’opportuna costante  $c$ . In conseguenza, gli  $\omega$  soddisfacenti una condizione diofantina sono una percentuale consistente degli  $\omega$  possibili, che tende ad 1 quando  $R$  tende all’infinito.

Accanto alla condizione diofantina assumiamo anche che, per ogni  $A \in I$  fissato,  $f \in C^\infty[\mathbb{T}_n]$ , condizione che assicura, per il teorema di Fourier, che per ogni  $p > 0$  esiste  $c_p > 0$  tale che

$$|\hat{f}_k(A)| (1 + |k|^p) \leq c_p. \quad (14.47)$$

Procedendo come in precedenza, si ottiene l’espressione seguente per  $\Phi_1$ :

$$\Phi_1(A, \varphi) = \sum_{\substack{k \in \mathbb{Z}^n \\ k \neq 0}} -\frac{\hat{f}_k(A)}{i\omega \cdot k} e^{ik \cdot \varphi}. \quad (14.48)$$

Tale serie è assolutamente convergente nelle ipotesi fatte in quanto

$$\sum_{\substack{k \in \mathbb{Z}^n \\ k \neq 0}} \left| \frac{\hat{f}_k(A)}{i\omega \cdot k} \right| \leq c \sum_{\substack{k \in \mathbb{Z}^n \\ k \neq 0}} |\hat{f}_k(A)| |k|^\alpha \leq cc_{\alpha+p} \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \frac{1}{(1 + |k|)^p} < +\infty,$$

se  $p > n$ . In modo analogo si possono trattare potenze piú elevate di  $\varepsilon$  in quanto è facile convincersi che  $N_\ell$  soddisfa le stesse condizioni di  $f$ .

Si può pertanto concludere che, per un sistema di oscillatori armonici soddisfacenti la condizione diofantina e con perturbazione in  $C^\infty[\mathbb{T}^n]$ , si ha che per ogni  $m > 0$  esiste  $\varepsilon_0(m)$  tale che, per  $\varepsilon < \varepsilon_0$  si può costruire una funzione

$$S_m(A', \varphi) = A' \cdot \varphi + \sum_{\ell=1}^m \varepsilon^\ell \Phi_\ell(A', \varphi)$$

che è la funzione generatrice di una trasformazione canonica  $\Psi_\varepsilon$  che trasforma l'Hamiltoniana  $H(A, \varphi)$  in

$$H'(A', \varphi') = h_0(A') + \varepsilon h_1(A') + \dots + \varepsilon^m h_m(A') + O(\varepsilon^{m+1}).$$

*Osservazione:* Sebbene l'approssimazione possa diventare arbitrariamente accurata prendendo  $m$  sufficientemente grande, il procedimento esposto in precedenza non ammette limite in quanto le serie

$$\sum_{\ell=1}^{\infty} \varepsilon^\ell \Phi_\ell, \quad \sum_{\ell=0}^{\infty} \varepsilon^\ell h_\ell \quad (14.49)$$

non sono in generale convergenti. Infatti, se lo fossero, esse definirebbero una funzione generatrice ed una Hamiltoniana che rendono integrabile il sistema.

Il seguente esempio mostra che tale conclusione è falsa.

Sia  $n = 2$  e

$$H_\varepsilon(A_1, A_2, \varphi_1, \varphi_2) = A_1 + \sqrt{2}A_2 + \varepsilon \left( A_2 + f(\varphi_1, \varphi_2) \right),$$

con  $f \in C^\infty[\mathbb{T}_2]$ . La condizione diofantina è soddisfatta da  $\omega = (1, \sqrt{2})$  e pertanto, se si potesse applicare infinite volte il procedimento precedente, si potrebbero costruire  $\Phi_\ell$  ed  $h_\ell$  per ogni  $\ell \geq 0$  e quindi, mediante le serie corrispondenti si potrebbe integrare il sistema, se queste fossero convergenti.

Esiste tuttavia, nell'intorno di  $\varepsilon = 0$  un insieme denso di valori di  $\varepsilon$  tali che il sistema Hamiltoniano corrispondente all'Hamiltoniana  $H_\varepsilon$  non è integrabile. Essi sono i valori di  $\varepsilon$  tali che  $\sqrt{2} + \varepsilon$  è razionale. Infatti, il sistema è risolvibile esplicitamente e per questi valori di  $\varepsilon$  si può direttamente constatare che esso ammette orbite non limitate.

Consideriamo a questo scopo il sistema di Hamiltoniana  $H(A, \varphi) = \alpha \cdot A + f(\varphi)$  con  $f$  periodica e di classe  $C^\infty$ . Esso si può risolvere esplicitamente e fornisce

$$\varphi = \varphi^{(0)} + \alpha t, \quad A(t) = A^{(0)} + \int_0^t d\tau \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} ik \hat{f}_k e^{ik \cdot [\varphi^{(0)} + \alpha t]}.$$

Fissiamo  $\varepsilon$  in modo che  $\sqrt{2} + \varepsilon = p/q$  con  $p, q$  interi. Scegliendo  $\alpha = (1, \sqrt{2} + \varepsilon)$  nell'espressione precedente, vediamo che tra i  $k \in \mathbb{Z}^2$  che contribuiscono all'espressione precedente vi sono quelli della forma  $k = m(-q, p)$ , con  $m \in \mathbb{Z}$ , in corrispondenza dei quali risulta  $k \cdot \alpha = 0$ , che forniscono un contributo (convergente in quanto  $f$  è di classe  $C^\infty$ ) che cresce linearmente nel tempo (risonanza) e quindi esce da qualunque varietà compatta.

Pertanto la varietà invariante non è compatta, come invece accade per i sistemi integrabili e le serie (14.49) non possono convergere.

## 15. Dinamica dei fluidi.

### 15.1 Introduzione.

I fluidi reali sono costituiti di molecole e la loro evoluzione è esaurientemente modellizzata su scala microscopica dalle equazioni di Newton per un sistema di  $N$  particelle (o dall'equazione di Schrödinger per lo stesso sistema quando si voglia tenere conto degli effetti quantistici che intervengono su scala microscopica). Il numero  $N$  è tuttavia estremamente grande ( $\approx 6 \times 10^{23}$  per una mole di gas) e la descrizione del sistema in termini delle posizioni e delle velocità di tutte le particelle del sistema, oltre che praticamente irrealizzabile, è eccessivamente ed inutilmente dettagliata, almeno quando si sia interessati al suo comportamento macroscopico. Per questa ragione si individuano pochi parametri ritenuti significativi dal punto di vista macroscopico e si tenta di fornire un sistema di equazioni che coinvolgano esclusivamente tali parametri. La teoria basata su queste equazioni prende il nome di *Dinamica dei fluidi*. La giustificazione ultima di questa teoria risiede nella possibilità di derivarne le equazioni fondamentali a partire dalle equazioni microscopiche attraverso un opportuno procedimento di limite (*limite idrodinamico*). In questo capitolo non discuteremo questo aspetto e ci limiteremo a formulare brevemente i principi fondamentali della Dinamica dei fluidi e ad ottenere i due principali modelli usualmente adottati per la descrizione del moto di un fluido e cioè le equazioni di Eulero e le equazioni di Navier-Stokes. In realtà molte delle considerazioni che seguono sono valide per un qualsiasi sistema continuo e non solo per i fluidi, che saranno introdotti come specifici modelli di sistemi continui.

### 15.2 Nozione di sistema continuo.

Supponiamo assegnato una volta per tutte un sistema di riferimento inerziale  $\mathcal{I}$  rispetto al quale valuteremo le coordinate spazio-temporali associate agli eventi relativi al sistema continuo. Supporremo inoltre fissate delle unità di misura macroscopiche (ad esempio i centimetri ed i secondi). Questa assunzione è coerente con la necessità di caratterizzare la scala macroscopica come quella tale che in ogni volume macroscopico, per quanto piccolo, sia contenuto un numero enorme di molecole. In tal modo osservazioni condotte su questa scala non riescono a distinguere l'individualità delle singole molecole ma percepiscano la distribuzione di materia come continua.



Per questa ragione diremo *sistema continuo* una distribuzione continua di massa in  $\mathbb{R}^3$  cioè una distribuzione di massa tale che per ogni insieme misurabile  $A \subset \mathbb{R}^3$  detta  $m_t(A) \geq 0$  la massa contenuta nell'insieme  $A$  al tempo  $t$ , la misura  $A \rightarrow m_t(A)$  sia assolutamente continua rispetto alla misura di Lebesgue<sup>(1)</sup>.

Esiste quindi una funzione  $\rho(x, t) \geq 0$  detta *densità (di massa)*, tale che

$$m(A) = \int_A dx \rho(x, t). \quad (15.1)$$

In altre parole, in ogni volume elementare  $dx$  centrato in un generico punto  $x \in \mathbb{R}^3$  è contenuta una massa  $\rho(x, t)dx$ , corrispondente alla presenza di un enorme numero di molecole nell'elemento di volume  $dx$ . Il punto di vista continuo ignora l'individualità di tali particelle e studia il comportamento di questo elemento *macroscopico* nel suo insieme.

Una parte del sistema continuo, contenuta in un volume  $dx$  centrato intorno al punto  $x$  al tempo  $t$  sarà detta *elemento materiale* o *particella* del sistema continuo e  $x$  sarà detta *posizione* della particella al tempo  $t$ . Sottolineamo ancora una volta che una particella del continuo non deve essere confusa con una molecola, rappresentando invece un agglomerato di un numero molto grande di molecole.

La posizione di ciascuna particella del sistema continuo varia nel tempo. Per individuare in modo univoco ciascuna particella del sistema continuo utilizzeremo ad esempio le coordinate  $X \in \mathbb{R}^3$  della posizione occupata dalla particella al tempo  $t = 0$ . Al variare del tempo  $t$  inoltre  $x = \Phi(X, t)$  denoterà la posizione al tempo  $t$  della particella che al tempo  $t = 0$  si trovava in  $X$ . La funzione  $X \rightarrow \Phi(X, t)$  è quindi tale che

$$\Phi(X, 0) = X. \quad (15.2)$$

Assumeremo che la funzione  $\Phi$  sia differenziabile rispetto ad  $X$  e  $t$  e che, per ogni  $t$ , sia invertibile come funzione di  $X$ . Esiste cioè una funzione  $x \rightarrow \Phi^{-1}(x, t)$  tale che

$$\Phi(\Phi^{-1}(x, t), t) = x \quad \forall x \in \mathbb{R}^3. \quad (15.3)$$

Questa assunzione, che implica che ciascuna particella (macroscopica) mantiene la sua individualità nel corso del tempo, traduce il fatto che due distinti elementi materiali non possono mai occupare la stessa posizione (*impenetrabilità dei corpi*). Le condizioni di regolarità sono essenziali agli sviluppi futuri e il loro venir meno corrisponde al verificarsi di fenomeni per i quali il modello che ci accingiamo a formulare diviene inadeguato. Ogni funzione regolare (in un senso che verrà specificato più avanti)  $(X, t) \rightarrow \Phi(X, t)$  soddisfacente le suddette proprietà sarà detta un *moto* o un *flusso* del sistema continuo.

<sup>(1)</sup> Una misura  $A \rightarrow \mu(A)$  si dice assolutamente continua rispetto alla misura  $A \rightarrow \nu(A)$  se, per ogni insieme *misurabile*  $A$  l'essere  $\nu(A) = 0$  implica  $\mu(A) = 0$ . In tal caso esiste una funzione misurabile e positiva  $\gamma(x)$ , detta *derivata di Radon Nikodym*, tale che  $\mu(A) = \int_A \gamma(x) d\nu(x)$ .

L'invertibilità di  $\Phi$  mostra che possiamo indifferentemente individuare la generica particella del sistema continuo mediante le sue coordinate  $X$  all'istante iniziale oppure mediante le sue coordinate  $x$  al tempo  $t$ . La descrizione in termini delle  $X$  è detta *descrizione Lagrangiana* mentre quella in termini delle  $x$  è detta *descrizione Euleriana*.

Si consideri ora la matrice  $F = \nabla_X \Phi$  di componenti

$$F_{i,j}(X,t) = \frac{\partial \Phi_i(X,t)}{\partial X_j}, \quad i, j = 1, \dots, 3. \quad (15.4)$$

La matrice  $F$ , che prende il nome di *gradiente di deformazione*, si riduce all'identità per  $t = 0$  in conseguenza di (15.2). Si assumerà, conformemente all'ipotesi di invertibilità di  $\Phi$  che  $F$  sia non singolare per ogni  $X$  e  $t$  e che

$$\det F(X,t) \neq 0 \quad \forall (X,t).$$

Per ogni  $X$  fissato la curva  $t \rightarrow \Phi(X,t)$  si dice *traiettoria* della particella  $X$ . La velocità e l'accelerazione della particella  $X$  al tempo  $t$  sono date ovviamente dalle espressioni

$$\tilde{u}(X,t) = \frac{\partial \Phi(X,t)}{\partial t}, \quad \tilde{a}(X,t) = \frac{\partial^2 \Phi(X,t)}{\partial t^2}. \quad (15.5)$$

I campi vettoriali  $X \rightarrow \tilde{u}(X,t)$  e  $X \rightarrow \tilde{a}(X,t)$  sono detti rispettivamente *campo di velocità Lagrangiano* ed *campo di accelerazione Lagrangiano* al tempo  $t$ .

Si supponga ora fissato il punto  $x$  e si denotino con  $u(x,t)$  ed  $a(x,t)$  la velocità e l'accelerazione della particella che transita per  $x$  al tempo  $t$ :

$$u(x,t) = \tilde{u}(\Phi^{-1}(x,t),t), \quad a(x,t) = \tilde{a}(\Phi^{-1}(x,t),t). \quad (15.6)$$

I campi vettoriali  $x \rightarrow u(x,t)$  ed  $x \rightarrow a(x,t)$  sono detti rispettivamente *campo di velocità Euleriano* (o semplicemente *campo di velocità*) e *campo di accelerazione Euleriano* (o semplicemente *campo di accelerazione*) al tempo  $t$ .

Dalle definizioni suddette segue che

$$\frac{\partial}{\partial t} \Phi(X,t) = u(\Phi(X,t),t). \quad (15.7)$$

Quando il campo di velocità Euleriano  $u(x,t)$  è noto, questa equazione, insieme alla condizione (15.2) può essere interpretato, come un problema ai valori iniziali nell'incognita  $t \rightarrow \Phi(X,t)$ .

La relazione tra i campi di velocità ed accelerazione Lagrangiani ed Euleriani vale piú in generale per una qualunque osservabile "Euleriana"  $g(x,t)$ , (cioè

un'osservabile misurata nell'ambito di una descrizione Euleriana) e la sua corrispondente osservabile "Lagrangiana"  $\tilde{g}(X, t)$  (cioè la medesima osservabile misurata nella descrizione Lagrangiana). Esa è data da

$$\tilde{g}(X, t) = g(\Phi(X, t), t), \quad g(x, t) = \tilde{g}(\Phi^{-1}(x, t), t), \quad (15.8)$$

che estende in modo ovvio la (15.6):

$$u(x, t) = \tilde{u}(\Phi^{-1}(x, t), t) = \frac{\partial \Phi}{\partial t}(\Phi^{-1}(x, t), t), \quad \tilde{u}(X, t) = u(\Phi(X, t), t) \quad (15.9)$$

e

$$a(x, t) = \tilde{a}(\Phi^{-1}(x, t), t) = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2}(\Phi^{-1}(x, t), t), \quad \tilde{a}(X, t) = a(\Phi(X, t), t) \quad (15.10)$$

Notiamo che tra le derivate temporali di un'osservabile Lagrangiana ed Euleriana sussiste la seguente relazione:

$$\frac{\partial}{\partial t} \tilde{g}(X, t) = \frac{\partial}{\partial t} g(x, t) + u(x, t) \cdot \nabla_x g(x, t), \quad (15.11)$$

quando  $x$  ed  $X$  sono legati dalla relazione  $x = \Phi(X, t)$ . Per ottenere la relazione (15.11) basta differenziare la prima delle (15.8) con la regola di derivazione delle funzioni composte,

$$\frac{\partial}{\partial t} \tilde{g}(X, t) = \left. \frac{\partial g(\Phi(X, t), t)}{\partial t} \right|_X = \left. \frac{\partial g(x, t)}{\partial t} \right|_x + \nabla_x g(x, t) \cdot \frac{\partial \Phi(X, t)}{\partial t}$$

e usare la prima delle (15.9).

La combinazione di derivate che appare nel membro destro della (15.11) rappresenta la derivazione lungo la traiettoria di una fissata particella del sistema e prende il nome di *derivata sostanziale*. Per indicarla si usa il simbolo

$$\frac{D}{Dt} = \left. \frac{\partial}{\partial t} \right|_x + u(x, t) \cdot \nabla_x.$$

In particolare, per  $g(x, t) = u(x, t)$  si ottiene

$$a(x, t) = \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} + u(x, t) \cdot \nabla_x u(x, t) = \frac{Du}{Dt}(x, t). \quad (15.12)$$

### 15.3 Teorema del trasporto.

Una famiglia  $\{A_t \subset \mathbb{R}^3 \mid t \in [0, \bar{t}]\}$  di sottoinsiemi di  $\mathbb{R}^3$  si dice *volume materiale* se per ogni  $t \in [0, \bar{t}]$ , per ogni  $x \in A_t$  risulta  $x = \Phi(X, t)$  per qualche  $X \in A_0$ . In

altri termini, un volume materiale è un volume che si muove insieme con il sistema continuo.

Nella formulazione delle equazioni del moto per i sistemi continui saremo interessati a considerare quantità che si esprimono come integrali di osservabili su volumi materiali, della forma

$$\int_{A_t} dxg(x, t)$$

e a valutarne la loro derivata temporale. Proviamo a questo scopo il seguente

**Teorema 15.1 (del trasporto):** *Se  $g$  ed  $u$  sono differenziabili in  $A_t$ , per  $t \in [0, \bar{t}]$  e  $\Phi$  è regolare, allora*

$$\frac{d}{dt} \int_{A_t} dxg(x, t) = \int_{A_t} dx \left[ \frac{Dg}{Dt} + g \operatorname{div} u \right] (x, t). \quad (15.13)$$

*Osservazione:* Il teorema del trasporto nel caso  $g = 1$  si riduce al calcolo della derivata temporale di un volume materiale ed il risultato è quello stabilito nel lemma preliminare alla dimostrazione del teorema di Liouville per i sistemi Hamiltoniani.

Dim. La dimostrazione si basa sul passaggio da variabili Euleriane a variabili Lagrangiane. Si usa cioè la rappresentazione

$$\int_{A_t} dxg(x, t) = \int_{A_0} dX J(X, t) \tilde{g}(X, t), \quad (15.14)$$

ove

$$J(X, t) = |\det F(X, t)|.$$

Differenziando la relazione (15.14) rispetto al tempo ed usando la (15.11) si ottiene

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{A_t} dxg(x, t) &= \int_{A_0} dX \frac{\partial J(X, t)}{\partial t} \tilde{g}(X, t) + \int_{A_0} dX J(X, t) \frac{\partial \tilde{g}(X, t)}{\partial t} \\ &= \int_{A_0} dX \frac{\partial J(X, t)}{\partial t} \tilde{g}(X, t) + \int_{A_t} dx \frac{Dg(x, t)}{Dt}. \end{aligned}$$

Per concludere la prova basta far vedere che risulta

$$\frac{\partial J(X, t)}{\partial t} = J(X, t) \operatorname{div} u(\Phi(X, t), t) \quad (15.15).$$

Per provare la (15.15), osserviamo anzitutto che, poiché  $\det F(X, 0) = 1$  e la matrice  $F$  non è singolare per ogni  $t$ , per continuità  $\det F > 0$  e quindi il valore assoluto è irrilevante. D'altra parte, per la (15.7)

$$\Phi(X, t) = X + \int_0^t ds u(\Phi(X, s), s).$$

Differenziando rispetto ad  $X$  si ottiene

$$F(X, t) = \mathbf{I} + \int_0^t ds \nabla_x u(\Phi(X, s), s) F(X, s),$$

ove

$$[\nabla_x u F]_{i,j} = \sum_{k=1}^3 \frac{\partial u_i}{\partial x_k} F_{k,j}.$$

Pertanto

$$\frac{\partial F(X, t)}{\partial t} = \nabla_x u(\Phi(X, t), t) F(X, t) \quad (15.16)$$

Ricordando infine che la derivata di un determinante è data da una somma di determinanti di matrici che sono ottenute sostituendo di volta in volta ad una colonna la sua derivata e lasciando inalterate le altre, si ottiene

$$\frac{\partial J(X, t)}{\partial t} = \sum_{i=1}^3 \det F^{(i)}(X, t),$$

dove  $F^{(i)}$  è ottenuto sostituendo l' $i$ -esima colonna di  $F$  con la sua derivata temporale. Dall'espressione della derivata temporale di  $F$  si ottiene allora

$$\det F^{(i)} = \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \det F$$

in quanto i contributi con  $k \neq i$  annullano i rispettivi determinanti. La (15.15) è allora dimostrata e con essa il teorema del trasporto.

Passeremo ora a formulare le leggi fondamentali della Meccanica dei sistemi continui.

#### 15.4 Conservazione della massa.

Ricordiamo che la distribuzione di massa è caratterizzata dalla densità  $\rho(x, t) \geq 0$  e che per ogni insieme misurabile  $A$  la quantità

$$m_t(A) = \int_A dx \rho(x, t)$$

rappresenta la massa contenuta nell'insieme  $A$ .

La legge di conservazione della massa stabilisce che *non vi è creazione o distruzione di massa* e, in altri termini, in un volume materiale  $\{A_t \mid t \in [0, \bar{t}]\}$  la massa è costante. Si assume quindi

$$\frac{d}{dt} m_t(A_t) = 0 \quad (15.17)$$

per ogni  $t$  e per ogni volume materiale.

Poiché la funzione  $\rho$  è assunta differenziabile, utilizzando il teorema del trasporto, otteniamo

$$\int_{A_t} dx \left[ \frac{D}{Dt} \rho(x, t) + \rho(x, t) \operatorname{div} u(x, t) \right] = 0.$$

Questa equazione è valida qualunque sia il volume materiale. In conseguenza risulta

$$\frac{D}{Dt} \rho(x, t) + \rho(x, t) \operatorname{div} u(x, t) = 0. \quad (15.18)$$

Ricordando la definizione di derivata sostanziale, la precedente equazione si scrive anche

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho + \operatorname{div}[\rho u] = 0. \quad (15.19)$$

L'equazione (15.19) prende il nome di *equazione di continuità*. La sua validità è legata esclusivamente alla conservazione della massa e viene assunta in tutti i modelli che escludono la presenza di reazioni chimiche.

Al fine di fornire un'interpretazione dell'equazione di continuità, consideriamo più in generale una funzione differenziabile  $\psi(x, t)$  per la quale esista un campo vettoriale differenziabile  $j_\psi(x, t)$  tale che risulti

$$\frac{\partial}{\partial t} \psi + \operatorname{div}[j_\psi] = 0. \quad (15.20)$$

Quando la (15.20) è verificata, si dice che la funzione  $\psi$  soddisfa una *legge di conservazione*.

Consideriamo un insieme misurabile  $A$  fissato (non materiale) con frontiera regolare  $\partial A$ . Integrando la (15.20) sull'insieme  $A$  si ottiene allora

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_A dx \psi(x, t) + \int_A dx \operatorname{div} j_\psi(x, t) = 0.$$

Per il teorema di Gauss, stanti le ipotesi di regolarità fatte, risulta

$$\int_A dx \operatorname{div} j_\psi(x, t) = \int_{\partial A} d\sigma(x) j_\psi(x, t) \cdot n(x)$$

dove  $n(x)$  rappresenta la normale esterna alla superficie  $\partial A$  nel punto  $x$  e  $d\sigma(x)$  è la misura sulla superficie  $\partial A$  indotta dalla misura di Lebesgue. In conseguenza di ciò, per ogni insieme  $A$  dotato di frontiera regolare risulta

$$\frac{d}{dt} \int_A dx \psi(x, t) = - \int_{\partial A} d\sigma(x) j_\psi(x, t) \cdot n(x). \quad (15.21)$$

L'equazione (15.21) mostra che la variazione nel tempo dell'integrale della funzione  $\psi$  sull'insieme  $A$  è dovuta esclusivamente a fenomeni di trasferimento che avvengono sulla frontiera di  $A$ : *non vi sono fenomeni di creazione o distruzione di  $\psi$  nei punti interni di  $A$* . Inoltre l'integrale di  $\psi$  decresce quando  $j_\psi$  forma un angolo acuto con la normale esterna a  $\partial A$ , cioè è diretto verso l'esterno di  $A$ , mentre cresce nel caso opposto. Per questa ragione il campo vettoriale  $j_\psi$  è detto *corrente* di  $\psi$ . Le considerazioni suddette giustificano il nome di legge di conservazione dato all'equazione (15.20) e forniscono un'interpretazione del campo vettoriale  $j_\psi$ . In particolare, l'equazione di continuità è la legge di conservazione per la densità  $\rho$  e la corrente  $j_\rho = \rho u$  è detta *corrente di massa*.

*Osservazione 1:* Se la funzione  $g$  del teorema del trasporto può scriversi come  $g = \rho\psi$  con  $\psi$  differenziabile, allora per l'equazione di continuità, il teorema del trasporto assume la seguente forma più semplice:

$$\frac{d}{dt} \int_{A_t} dx \rho \psi = \int_{A_t} dx \rho \frac{D}{Dt} \psi. \quad (15.22)$$

Basta infatti osservare che

$$\frac{D}{Dt}(\rho\psi) + \rho\psi \operatorname{div} u = \rho \frac{D}{Dt} \psi + \psi \left[ \frac{D}{Dt} \rho + \rho \operatorname{div} u \right] = \rho \frac{D}{Dt} \psi.$$

*Osservazione 2:* La conservazione della massa fornisce la seguente relazione tra la densità al tempo  $t = 0$  e quella all'istante generico:

$$\rho(\Phi(X, t), t) J(X, t) = \rho(X, 0). \quad (15.23)$$

Infatti, la costanza di  $m_t(A_t)$  implica  $m_t(A_t) = m_0(A_0)$  per ogni  $A \subset \mathbb{R}^3$  e cioè

$$\int_{A_t} dx \rho(x, t) = \int_{A_0} dX \rho(X, 0).$$

Riscrivendo il primo integrale in termini delle coordinate Lagrangiane  $X$  si ottiene

$$\int_{A_t} dx \rho(x, t) = \int_{A_0} dX J(X, t) \rho(\Phi(X, t), t)$$

e quindi

$$\int_{A_0} dX J(X, t) \rho(\Phi(X, t), t) = \int_{A_0} dX \rho(X, 0).$$

L'arbitrarietà di  $A_0$  implica la (15.23).

L'equazione (15.23) che esprime la conservazione della massa in forma Lagrangiana, è detta anche *equazione di continuità Lagrangiana*.

### 15.5 Bilancio dell'impulso (equazione di Newton).

La massa  $\rho(x, t)dx$  contenuta al tempo  $t$  in un volumetto  $dx$  centrato nel punto  $x$  si muove con velocità  $u(x, t)$ . L'impulso ad essa associato è  $\rho(x, t)u(x, t)dx$ . Per questa ragione, per ogni  $A \subset \mathbb{R}^3$  si dice *impulso* di  $A$  al tempo  $t$  il vettore

$$P_t(A) = \int_A dx \rho(x, t)u(x, t).$$

Denoteremo inoltre con  $F_t(A)$  il *risultante di tutte le forze agenti su  $A$  al tempo  $t$* . In analogia con la prima equazione cardinale della Meccanica, si assume la seguente *legge di bilancio dell'impulso*: per ogni volume materiale  $\{A_t \mid t \in [0, \bar{t}]\}$ , la derivata temporale dell'impulso  $P_t(A_t)$  è pari al risultante  $F_t(A_t)$  delle forze agenti su  $A_t$ . In formule:

$$\frac{d}{dt}P_t(A_t) = F_t(A_t) \quad (15.24)$$

per ogni volume materiale.

Occorre ora formulare delle assunzioni sulla natura delle forze agenti su ciascuna parte  $A$  del sistema continuo. Si assume che le forze agenti su  $A$  siano di due tipi: un primo tipo, il cui risultante si denota con  $F_t^V(A)$ , rappresenta le azioni che vengono esercitate dall'esterno su tutte le particelle di  $A$ . Un esempio di forza di questo tipo è l'attrazione di gravità. La forza  $F_t^V(A)$  è detta *forza di volume* e si assume che essa sia *assolutamente continua rispetto alla massa*, e cioè che esista un campo vettoriale  $b(x, t)$  regolare, detto *forza specifica* (o *forza per unità di massa*) tale che

$$F_t^V(A) = \int_A dx \rho(x, t)b(x, t). \quad (15.25)$$

La funzione  $b(x, t)$ , rappresentando le forze agenti dall'esterno, si supporrà nota ed in particolare, sarà nulla per i sistemi isolati.

Le forze del secondo tipo, il cui risultante si denota con  $F_t^S(A)$ , rappresenta l'azione delle altre parti del sistema sulla parte  $A$ . Si suppone che queste forze siano a corto raggio e che si esplicino soltanto sulla frontiera  $\partial A$  di  $A$ . Pertanto  $F_t^S(A)$  è assunta assolutamente continua rispetto alla superficie di  $A$  e cioè si suppone che esista una funzione vettoriale regolare  $\varphi(x, n, t)$ , detta *sforzo specifico agente in  $x$  al tempo  $t$  su una superficie unitaria di normale  $n = n(x)$* , tale che

$$F_t^S(A) = \int_{\partial A} d\sigma(x) \varphi(x, t, n(x)). \quad (15.26)$$

L'ipotesi (15.26) è nota come *ipotesi di Eulero-Cauchy sugli sforzi*.

In conseguenza di queste assunzioni, ricordando inoltre il teorema del trasporto (15.22), la legge di bilancio dell'impulso si scrive

$$\int_{A_t} dx \rho(x, t) \frac{D}{Dt} u(x, t) = \int_{A_t} dx \rho(x, t) b(x, t) + \int_{\partial A_t} d\sigma(x) \varphi(x, t, n(x)). \quad (15.27)$$



Una prima conseguenza della (15.27) è il teorema di Cauchy sugli sforzi che stabilisce che la dipendenza dello sforzo specifico  $\varphi$  dalla direzione  $n$  è necessariamente lineare.

**Teorema 16.2 (di Cauchy):** *Esiste un campo di matrici*

$$S(x, t) = (S_{i,j}(x, t), i, j = 1, \dots, 3)$$

tale che

$$\varphi(x, t, n) = S(x, t)n, \quad (15.28)$$

e in termini di componenti,

$$\varphi_i(x, t, n) = \sum_{j=1}^3 S_{i,j}(x, t)n_j.$$

Il campo di matrici  $S$  è detto *tensori degli sforzi*<sup>(2)</sup>.

Dim. Osserviamo che, se  $A_t^\varepsilon$  è una famiglia di volumi materiali tale che

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{|A_t^\varepsilon|}{|\partial A_t^\varepsilon|} = 0,$$

ove  $|A|$  denota il volume di  $A$  e  $|\partial A|$  denota la superficie di  $\partial A$ , allora

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{|\partial A_t^\varepsilon|} \int_{\partial A_t^\varepsilon} d\sigma(x) \varphi(x, t, n(x)) = 0. \quad (15.29)$$

Infatti, applicando la (15.27) al volume materiale  $A_t^\varepsilon$ , notando che, se  $\rho$ ,  $b$  e  $Du/Dt$  sono regolari,

$$\left| \int_{A_t^\varepsilon} dx \rho \frac{D}{Dt} u \right| \leq C |A_t^\varepsilon|, \quad \left| \int_{A_t^\varepsilon} dx \rho b \right| \leq C |A_t^\varepsilon|$$

e dividendo per  $|\partial A_t^\varepsilon|$  si ottiene la (15.29).

In conseguenza di (15.29) si ha

$$\varphi(x, t, -n) = -\varphi(x, t, n) \quad (15.30)$$

che rappresenta il *principio di azione e reazione per gli sforzi*. Per dimostrare la (15.30), basta applicare la (15.29) ad una regione cilindrica<sup>(3)</sup>  $\mathcal{C}$  centrata in  $x$ , le

<sup>(2)</sup> Non discuteremo il carattere tensoriale di questa quantità, peraltro ovvio al lettore familiare con la nozione di *tensori*.

<sup>(3)</sup> Il cilindro non ha frontiera regolare, ma basta ammorbidire gli spigoli corrispondenti al contatto tra le superfici di base e la superficie laterale per dare senso all'argomento che segue.

cui basi, di raggio  $\varepsilon$ , siano perpendicolari ad  $n$  e la cui altezza sia  $\varepsilon^2$ . La frontiera di questa regione è allora costituita dall'unione dei cerchi  $C_1$  e  $C_2$  le cui normali esterne sono rispettivamente  $n$  e  $-n$  e dalla superficie laterale  $\Sigma$ . Si ha

$$\int_{\mathcal{C}} \varphi_i(x, t, n) d\sigma(x) = \pi\varepsilon^2(\varphi_i(\xi_1, t, n) + \varphi_i(\xi_2, t, -n)) + 2\pi\varepsilon^3\varphi_i(\xi_3, t, -n_3),$$

dove  $\xi_\alpha$  sono punti opportuni in  $C_\alpha$  per  $\alpha = 1, 2$ , mentre  $\xi_3$  ed  $n_3$  sono un punto opportuno ed una direzione opportuna su  $\Sigma$ . Dividendo per  $\varepsilon^2$ , prendendo il limite  $\varepsilon \rightarrow 0$ , ed usando la (15.29), per la continuità di  $\varphi$  si ottiene la (15.30).

La dimostrazione del teorema di Cauchy segue la stessa logica ma richiede l'uso di una regione piú complicata. Per costruire questa regione, che si denoterà con  $\mathcal{T}$ , detta *tetraedro di Cauchy*<sup>(4)</sup>, supponiamo che  $n$  non sia parallelo a nessun piano coordinato e consideriamo nel punto  $x$  tre rette  $r_i$ ,  $i = 1, \dots, 3$  parallele agli assi coordinati ed il piano perpendicolare ad  $n$  posto a distanza  $\varepsilon$  da  $x$  in modo tale che le intersezioni  $x_i$  di questo piano con le rette  $r_i$  ed il punto  $x$  costituiscano i vertici di un tetraedro  $\mathcal{T}$  e  $n$  sia la normale esterna alla faccia  $\Sigma_0$  di  $\mathcal{T}$  non parallela ai piani coordinati. Denoteremo inoltre con  $\Sigma_i$ ,  $i = 1, \dots, 3$  le facce parallele ai piani coordinati ed aventi come normali esterne gli opposti dei vettori di base,  $-e_i$ . Per costruzione se  $n_i$  sono le componenti di  $n$ , si ha

$$|\Sigma_j| = |n_j||\Sigma_0|.$$

Pertanto,  $|\partial\mathcal{T}| = |\Sigma_0|(1 + \sum_{j=1}^3 |n_j|) = O(\varepsilon^2)$ , mentre ovviamente  $|\mathcal{T}| = O(\varepsilon^3)$ . Con lo stesso argomento usato in precedenza si ottiene allora

$$\varphi(x, t, n) + \sum_{j=1}^3 \varphi(x, t, -e_j)|n_j| = 0.$$

Se  $n_j > 0$  per  $j = 1, \dots, 3$ , la precedente relazione implica

$$\varphi(x, t, n) = \sum_{j=1}^3 \varphi(x, t, e_j)n_j$$

che coincide con la tesi del teorema di Cauchy quando si pone

$$S_{i,j}(x, t) = \varphi_i(x, t, e_j).$$

In pratica le  $S_{i,j}$ , al variare di  $i$  rappresentano le componenti dello sforzo su una superficie per  $x$  parallela al piano coordinato di normale  $e_j$ . Nel caso che qualcuno

<sup>(4)</sup> Anche in questo caso, per ottenere una regione dotata di frontiera regolare occorre ammorbidire gli spigoli ed i vertici.

degli  $n_j$  sia negativo, basta sostituire il corrispondente vettore di base con il suo opposto per ottenere il risultato. Infine, se  $n$  è parallelo ad un piano coordinato il risultato segue per continuità da quanto dimostrato.  $\square$

Il teorema di Cauchy consente di esprimere le forze di superficie in termini di un integrale di volume mediante il teorema di Gauss:

$$F_t^S(A) = \int_{\partial A} d\sigma(x) \varphi(x, t, n(x)) = \int_{\partial A} d\sigma(x) S(x, t) n(x) = \int_A dx \operatorname{div} S(x, t),$$

ove

$$[\operatorname{div} S(x, t)]_i = \sum_{j=1}^3 \frac{\partial S_{i,j}}{\partial x_j}(x, t).$$

Il bilancio dell'impulso diviene così

$$\int_{A_t} dx \rho(x, t) \frac{D}{Dt} u(x, t) = \int_{A_t} dx \rho(x, t) b(x, t) + \int_{A_t} dx \operatorname{div} S(x, t). \quad (15.31)$$

e l'arbitrarietà della regione  $A_t$  comporta

$$\rho(x, t) \frac{D}{Dt} u(x, t) = \operatorname{div} S(x, t) + \rho(x, t) b(x, t), \quad (15.32)$$

che è detta *legge di bilancio locale dell'impulso*. Ricordando la definizione di  $Du/Dt$ , l'equazione (15.32) si scrive anche

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} + \rho(u \cdot \nabla_x) u = \operatorname{div} S + \rho b, \quad (15.33)$$

ove si è usata la notazione abbreviata  $(u \cdot \nabla_x) g = \sum_{i=1}^3 u_i \partial_{x_i} g$ . Ricordando anche l'equazione di continuità, il bilancio locale dell'impulso può anche scriversi nella forma

$$\partial_t(\rho u_i) + \sum_{k=1}^3 \partial_{x_k} [\rho u_i u_k - S_{i,k}] = \rho b_i, \quad i = 1, \dots, 3. \quad (15.34)$$

Introducendo poi la matrice  $u \otimes u$  di componenti

$$(u \otimes u)_{i,j} = u_i u_j, \quad i, j = 1, \dots, 3$$

che si legge “ $u$  tensore  $u$ ”, la (15.34) può essere scritta più brevemente

$$\partial_t(\rho u) + \operatorname{div} [\rho u \otimes u - S] = \rho b. \quad (15.35)$$

Nel caso  $b = 0$  (sistema isolato) la (15.34) mostra che l' $i$ -esima componente dell'impulso soddisfa una legge di conservazione e la corrente corrispondente è data dal vettore  $j_{\rho u_i}$  la cui  $k$ -esima componente è

$$(j_{\rho u_i})_k = \rho u_i u_k - S_{i,k}.$$

### 15.6 Bilancio del momento angolare.

Come in Meccanica, anche in Dinamica dei fluidi, a fianco della prima equazione cardinale, che traduce il bilancio dell'impulso, vi è una seconda equazione che traduce il bilancio del momento angolare. Per stabilirla definiamo *momento angolare di A al tempo t* la quantità

$$K_t(A) = \int_A dx \rho(x, t) [x \wedge u(x, t)],$$

avendo fissato una volta per tutte il polo nell'origine. Definiamo inoltre *momento delle forze di superficie* la quantità

$$M_t^S(A) = \int_{\partial A} d\sigma(x) [x \wedge \varphi(x, t, n(x))]$$

e *momento delle forze di volume* la quantità

$$M_t^V(A) = \int_A dx \rho(x, t) [x \wedge b(x, t)].$$

La *legge di bilancio del momento angolare* stabilisce che per ogni volume materiale  $A_t$  risulta

$$\frac{d}{dt} K_t(A_t) = M_t^S(A) + M_t^V(A). \quad (15.36)$$

Usando il teorema del trasporto e ricordando che  $Dx/Dt = u$  e che  $u \wedge u = 0$ , otteniamo grazie al teorema di Cauchy

$$\int_{A_t} \rho(x, t) x \wedge \frac{D}{Dt} u(x, t) = \int_{\partial A_t} d\sigma(x) [x \wedge (S(x, t) n(x))] + \int_{A_t} dx \rho(x, t) [x \wedge b(x, t)]. \quad (15.37)$$

Il teorema di Gauss implica

$$\int_{\partial A_t} d\sigma(x) [x \wedge (S(x, t) n(x))] = \int_{A_t} dx \operatorname{div} [x \wedge S],$$

ove

$$(\operatorname{div}[x \wedge S])_\ell = \sum_{k,m,i=1}^3 \varepsilon_{\ell,m,i} \partial_{x_k} [x_m S_{i,k}] = (x \wedge \operatorname{div} S)_\ell + \sum_{i,k=1}^3 \varepsilon_{\ell,k,i} S_{i,k}$$

Sostituendo queste relazioni nella (15.37), la legge locale di bilancio dell'impulso implica, per l'arbitrarietà di  $A_t$ ,

$$\sum_{i,k=1}^3 \varepsilon_{\ell,k,i} S_{i,k} = 0,$$

relazione che è verificata se e solo se

$$S_{i,k} = S_{k,i}, \quad \forall i, k = 1, \dots, 3, \quad \text{ovvero } S^T = S \quad (15.38)$$

In conclusione, se vale il bilancio dell'impulso in forma locale, il bilancio del momento angolare è equivalente all'assunzione che *il tensore degli sforzi è una matrice simmetrica*.

### 15.7 Bilancio dell'energia (prima legge della Termodinamica).

Come in Meccanica il bilancio dell'energia gioca un ruolo fondamentale nella Dinamica dei fluidi. Poiché un sistema continuo è soggetto, oltre che a fenomeni meccanici, anche a fenomeni termici, la formulazione della legge di bilancio dell'energia va generalizzata in analogia a quanto si fa in Termodinamica.

Definiamo *energia cinetica di A al tempo t* la quantità

$$E_t^{(cin)}(A) = \int_A dx \frac{1}{2} \rho(x, t) u(x, t)^2.$$

Si definisce *potenza delle forze superficiali agenti su A al tempo t* la quantità

$$\mathcal{P}_t^S(A) = \int_{\partial A} d\sigma(x) u(x, t) \cdot S(x, t) n(x).$$

Si definisce *potenza delle forze di volume agenti su A al tempo t* la quantità

$$\mathcal{P}_t^V(A) = \int_A dx \rho(x, t) u(x, t) \cdot b(x, t).$$

In assenza di fenomeni termici il bilancio dell'energia stabilirebbe l'uguaglianza

$$\frac{d}{dt} E_t^{(cin)}(A_t) = \mathcal{P}_t^S(A_t) + \mathcal{P}_t^V(A_t).$$

Tuttavia, quando i fenomeni termici sono rilevanti, la relazione precedente è falsa. La Termodinamica suggerisce l'introduzione, a fianco dell'energia cinetica, di un'altra forma di energia, detta *energia interna*, che verrà denotata con  $E_t^{(int)}(A)$ . L'energia interna è assunta assolutamente continua rispetto alla massa, nel senso che esiste una funzione regolare  $e(x, t)$  detta *energia interna specifica*, tale che

$$E_t^{(int)}(A) = \int_A dx \rho(x, t) e(x, t).$$

Occorre introdurre inoltre la *potenza termica fornita ad A al tempo t*, che si denota con  $\mathcal{Q}_t(A)$ . In analogia a quanto fatto per la forza, si suppone che la potenza termica derivi da due tipi di contributi: uno,  $\mathcal{Q}_t^V(A)$  assolutamente continuo rispetto alla massa, che tiene conto di eventuali trasferimenti di calore per irraggiamento, tale che esiste  $r(x, t)$  regolare, detta *potenza termica specifica* in modo che

$$\mathcal{Q}_t^V(A) = \int_A dx \rho(x, t) r(x, t).$$

L'altro contributo,  $\mathcal{Q}_t^S(A)$  che tiene conto di fenomeni di conduzione termica, è assunto assolutamente continuo rispetto alla superficie di  $A$  e quindi esiste una funzione regolare  $h(x, t, n)$  detta *flusso termico attraverso una superficie unitaria passante per x di normale n* tale che

$$\mathcal{Q}_t^S(A) = \int_{\partial A} d\sigma(x) h(x, t, n(x)).$$

Il *principio di bilancio dell'energia o prima legge della Termodinamica* stabilisce allora che per ogni volume materiale  $A_t$  risulta

$$\frac{d}{dt} (E_t^{(cin)}(A_t) + E_t^{(int)}(A_t)) = \mathcal{P}_t^S(A_t) + \mathcal{Q}_t^S(A_t) + \mathcal{P}_t^V(A_t) + \mathcal{Q}_t^V(A_t). \quad (15.39)$$

Usando il teorema del trasporto, possiamo riscrivere la (15.39) come

$$\int_{A_t} dx \rho \frac{D}{Dt} \left[ \frac{1}{2} u^2 + e \right] = \int_{\partial A_t} d\sigma(x) (u \cdot S n + h) + \int_{A_t} dx \rho (u \cdot b + r). \quad (15.40)$$

La prima conseguenza della (15.40) è l'analogo del teorema di Cauchy per il flusso termico: *esiste un campo vettoriale regolare  $q(x, t)$  detto vettore flusso di calore, tale che*

$$h(x, t, n) = -q(x, t) \cdot n \quad (15.41).$$

Il segno nella precedente relazione è fissato in modo che, quando  $q$  forma un angolo acuto con la normale esterna, l'energia del sistema diminuisca e cioè vi sia

un flusso di energia termica da  $A$  verso l'esterno. In tal modo  $q$  è effettivamente diretto concordemente al verso in cui fluisce l'energia.

Ricordando la definizione di  $D/Dt$  e usando l'arbitrarietà di  $A_t$ , la (15.40) implica

$$\rho \partial_t \left[ \frac{1}{2} u^2 + e \right] + \rho (u \cdot \nabla_x) \left[ \frac{1}{2} u^2 + e \right] = \operatorname{div} [u \cdot S - q] + \rho [u \cdot b + r], \quad (15.42)$$

ove

$$\operatorname{div} [u \cdot S] = \sum_{i,k=1}^3 \partial_{x_k} u_i S_{i,k} = u \cdot \operatorname{div} S + \operatorname{Tr} (\nabla_x u S),$$

e  $\operatorname{Tr} (\nabla_x u S)$  è la traccia del prodotto tra matrici  $\nabla_x u S$ :

$$\operatorname{Tr} (\nabla_x u S) = \sum_{i,k=1}^3 \partial_{x_k} u_i S_{i,j}.$$

Si noti che, per la simmetria di  $S$  l'ordine degli indici nella matrice  $\nabla_x u$  è irrilevante. Usando il bilancio locale dell'impulso e l'arbitrarietà di  $A_t$ , la (15.41) si scrive anche

$$\rho \frac{De}{Dt} = \operatorname{Tr} (\nabla_x u S) - \operatorname{div} q + \rho r. \quad (15.43)$$

che rappresenta il *bilancio locale dell'energia*. Un'altra utile forma dell'equazione di bilancio dell'energia si ottiene dalla (15.40) utilizzando l'equazione di continuità. Infatti la (15.40) può essere scritta anche nella forma

$$\partial_t \left[ \rho \left( \frac{u^2}{2} + e \right) \right] + \operatorname{div} \left[ \rho u \left( \frac{u^2}{2} + e \right) - Su + q \right] = \rho (u \cdot b + r). \quad (15.44)$$

Quando  $b = 0$  e  $r = 0$  (sistema isolato) allora la (15.44) si presenta nella forma di una legge di conservazione per la densità di energia  $\rho \left( \frac{u^2}{2} + e \right)$ , la cui corrente  $j_E$  è data da

$$j_E = \rho \left( \frac{u^2}{2} + e \right) u - Su + q.$$

Riassumendo, i moti di un sistema continuo soddisfano un sistema di equazioni locali della forma

$$\begin{cases} \partial_t \rho + u \cdot \nabla_x \rho + \rho \operatorname{div} u = 0, \\ \rho (\partial_t u + u \cdot \nabla_x u) = \operatorname{div} S + \rho b, \\ \rho (\partial_t e + u \cdot \nabla_x e) = \operatorname{Tr} (\nabla_x u S) - \operatorname{div} q + \rho r. \end{cases} \quad (15.45)$$

che rappresentano le leggi di bilancio della massa, dell'impulso e dell'energia. Una forma alternativa di queste equazioni che spesso risulta utile è

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \operatorname{div}[\rho u] = 0, \\ \partial_t(\rho u) + \operatorname{div}[\rho u \otimes u - S] = \rho b, \\ \partial_t[\rho(\frac{u^2}{2} + e)] + \operatorname{div}[\rho u(\frac{u^2}{2} + e) - Su + q] = \rho(u \cdot b + r). \end{cases} \quad (15.46)$$

Per i sistemi isolati ( $b = 0$ ,  $r = 0$ ) le equazioni (15.46) divengono

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \operatorname{div}[\rho u] = 0, \\ \partial_t(\rho u) + \operatorname{div}[\rho u \otimes u - S] = 0, \\ \partial_t[\rho(\frac{u^2}{2} + e)] + \operatorname{div}[\rho u(\frac{u^2}{2} + e) - Su + q] = 0. \end{cases} \quad (15.47)$$

Esse rappresentano un sistema di cinque leggi di conservazione.

È opportuno notare che le equazioni ottenute in una delle forme suddette (15.45) o (15.46), sono valide per un qualsiasi sistema continuo, ma contengono un numero eccessivo di funzioni incognite per poter essere effettivamente sufficienti alla determinazione dell'evoluzione del sistema. In esse infatti appaiono le funzioni  $\rho$ ,  $u$ ,  $e$ ,  $S$  e  $q$ , per un totale di  $1 + 3 + 1 + 6 + 3 = 14$  funzioni incognite, avendo supposto dati  $b$  e  $r$ . La discussione precedente infatti si limita a stabilire l'esistenza di tali funzioni ma non fornisce nessun metodo per determinarle. È evidente che occorre stabilire delle relazioni tra le incognite in modo da ridurre il loro numero a cinque, quante sono le equazioni. Queste relazioni, dette *equazioni costitutive*, a differenza dalle equazioni di bilancio, non sono di validità generale, ma dipendono dal modello di sistema continuo che si intende studiare.

## 15.8 I fluidi.

I modelli di sistema continuo di cui ci occuperemo saranno esclusivamente i *fluidi*. La nozione intuitiva di fluido è evidente. Non forniremo qui definizioni generali di fluidi ma ci limiteremo a dare una caratterizzazione sufficiente per i nostri propositi.

Cominciamo con il definire *stato di equilibrio* di un sistema continuo *uno stato del sistema che, assunto inizialmente, persiste indefinitamente nel tempo*. Uno stato di equilibrio è necessariamente uno stato in cui non vi è moto ( $u = 0$ ), non vi è flusso di calore ( $q = 0$ ) e tutte le altre quantità ( $\rho$ ,  $e$  e  $S$ ) non dipendono dal tempo. Lo studio di questi stati è usualmente detto *Idrostatica*.

Diremo poi che il sistema *non esplica sforzi di taglio* se lo sforzo specifico  $\varphi(x, t, n)$  esercitato dal sistema sulla superficie  $\Sigma$  di normale  $n$  non ha componenti tangenziali a  $\Sigma$  (*sforzi di taglio*) e cioè è puramente normale. Quando ciò



si verifica, per il teorema di Cauchy, esiste una funzione reale regolare  $p(x, t)$  tale che

$$\varphi(x, t, n) = -p(x, t)n \quad (15.48)$$

Il campo  $p(x, t)$  è detto *pressione*.

**Definizione 15.1:** Un sistema continuo è un *fluido* quando in equilibrio esso non esplica sforzi di taglio.

Questa definizione traduce la nota proprietà idrostatica dei fluidi di non essere in grado di conservare la *forma*. Infatti, per alterare localmente la forma di un corpo supponiamo di applicare una forza non normale alla superficie del corpo. A tale forza un fluido in equilibrio non è in grado di reagire per definizione di fluido e quindi la forma del fluido può essere alterata arbitrariamente

Denotata con  $S^{(e)}$  la determinazione del tensore degli sforzi all'equilibrio, in modo che in ogni altro stato risulti

$$S = S^{(e)} + N, \quad (15.49)$$

ove  $N$  rappresenta la deviazione del tensore degli sforzi dalla sua determinazione idrostatica, in un fluido risulta allora

$$S_{i,j}^{(e)} = -p\delta_{i,j}. \quad (15.50)$$

La definizione data di fluido stabilisce in sostanza che *un fluido in condizioni idrostatiche può esplicare soltanto pressioni*.

### 15.9 Fluido ideale (o di Eulero).

Il fluido ideale è caratterizzato dalle seguenti proprietà:

- 1) *il fluido ideale non è in grado di esplicare sforzi di taglio;*
- 2) *il fluido ideale non è conduttore di calore.*

La condizione 1) vuol dire che l'assenza di sforzi di taglio non è ristretta soltanto alle situazioni idrostatiche ma si presenta in tutti gli stati del fluido ideale. Pertanto per un fluido ideale

$$N = 0, \quad S_{i,j} = -p\delta_{i,j} \quad (15.51)$$

La condizione 2) equivale ad assumere che non vi sia flusso di calore anche fuori dall'equilibrio (*fluido termicamente isolante*):

$$q = 0. \quad (15.52)$$

Le assunzioni 1) e 2) riducono le incognite per un fluido ideale a  $\rho$ ,  $u$ ,  $p$  ed  $e$  per un totale di  $1 + 3 + 1 + 1 = 6$ , e cioè una in più rispetto alle equazioni disponibili.

Questa indeterminazione residua non è sorprendente in quanto, come sappiamo dalla Termodinamica, la natura di uno specifico fluido è determinata quando sia assegnata la sua *equazione di stato*, cioè una funzione regolare  $\hat{p}(\rho, e)$  tale che per ogni  $x$  e  $t$  la pressione sia data dalla relazione

$$p = \hat{p}(\rho, e). \quad (15.53)$$

In realtà spesso risulta conveniente utilizzare, in luogo della variabile indipendente  $e$  un'altra variabile di più immediata interpretazione empirica, cioè la *temperatura assoluta*  $T(x, t) > 0$ . In tal caso, la Termodinamica fornisce due funzioni regolari  $\tilde{p}(\rho, T)$  e  $\tilde{e}(\rho, T)$  in modo che per ogni  $x$  e  $t$  l'energia interna specifica e la pressione siano date dalle relazioni

$$e(x, t) = \tilde{e}(\rho(x, t), T(x, t)), \quad p(x, t) = \tilde{p}(\rho(x, t), T(x, t)). \quad (15.54)$$

Utilizzando le precedenti assunzioni nelle (15.45) e (15.46), si ottengono le equazioni

$$\begin{cases} \partial_t \rho + u \cdot \nabla_x \rho + \rho \operatorname{div} u = 0, \\ \rho(\partial_t u + u \cdot \nabla_x u) + \nabla_x \tilde{p}(\rho, T) = \rho b, \\ \rho(\partial_t \tilde{e}(\rho, T) + u \cdot \nabla_x \tilde{e}(\rho, T)) + \tilde{p}(\rho, T) \operatorname{div} u = \rho r, \end{cases} \quad (15.55)$$

Equivalentemente

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \operatorname{div}[\rho u] = 0, \\ \partial_t(\rho u) + \operatorname{div}[\rho u \otimes u + \tilde{p}(\rho, T) \mathbb{I}] = \rho b, \\ \partial_t[\rho(\frac{u^2}{2} + \tilde{e}(\rho, T))] + \operatorname{div}[\rho u(\frac{u^2}{2} + \tilde{e}(\rho, T) + \tilde{p}(\rho, T))] = \rho(u \cdot b + r). \end{cases} \quad (15.56)$$

Le equazioni (15.56) appaiono come un sistema di cinque equazioni differenziali a derivate parziali nelle cinque funzioni incognite  $\rho$ ,  $u$  e  $T$ . Nel caso  $r = 0$  e  $b = 0$  esse rappresentano un sistema di cinque leggi di conservazione. Ai due precedenti sistemi di equazioni viene dato il nome di *equazioni di Eulero per un fluido ideale*. Nel seguito ometteremo la *tilde* usata per distinguere le funzioni che esprimono le equazioni di stato dai corrispondenti valori.

#### Fluido perfetto.

Come in Termodinamica il gas perfetto gioca un ruolo privilegiato per la sua semplicità, così in Dinamica dei fluidi un ruolo privilegiato è giocato dal fluido perfetto, caratterizzato dall'equazione di stato dei gas perfetti e dalla linearità della funzione che esprime l'energia interna specifica in termini della temperatura. Infatti, diremo *fluido perfetto* un fluido ideale tale che

$$p = R\rho T, \quad e = c_v T. \quad (15.57)$$

la costante  $R$  prende il nome di *costante dei gas perfetti* mentre

$$c_v = \frac{3}{2}R \quad (15.58)$$

è il cosiddetto *calore specifico a volume costante*. Con un'opportuna scelta delle unità di misura ci si può sempre ridurre al caso  $R = 1$ , in corrispondenza del quale  $c_v = 3/2$ . Nel seguito supporremo di aver fissato unità di misura tali che la costante dei gas perfetti si riduce all'unità. Le *equazioni di Eulero per un fluido perfetto* si scrivono

$$\begin{cases} \partial_t \rho + u \cdot \nabla_x \rho + \rho \operatorname{div} u = 0, \\ \rho(\partial_t u + u \cdot \nabla_x u) + \nabla_x p = \rho b, \\ \frac{3}{2} \rho(\partial_t T + u \cdot \nabla_x T) + p \operatorname{div} u = \rho r, \end{cases} \quad (15.59)$$

Equivalentemente

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \operatorname{div}[\rho u] = 0, \\ \partial_t(\rho u) + \operatorname{div}[\rho u \otimes u + p \mathbf{I}] = \rho b, \\ \partial_t[\rho(\frac{u^2}{2} + \frac{3}{2}T)] + \operatorname{div}[\rho u(\frac{u^2}{2} + \frac{5}{2}T)] = \rho(u \cdot b + r). \end{cases} \quad (15.60)$$

con

$$p = \rho T. \quad (15.61)$$

Una notevole proprietà del fluido ideale, che segue dalle (15.59) è la seguente: si ponga

$$s(\rho, T) = -\log \left[ \frac{\rho}{T^{3/2}} \right]. \quad (15.62)$$

Risulta allora

$$\frac{Ds}{Dt} = \left( -\frac{1}{\rho} \frac{D\rho}{Dt} + \frac{3}{2} \frac{1}{T} \frac{DT}{Dt} \right) = \frac{1}{T} \left( \frac{p}{\rho} \operatorname{div} u + \frac{3}{2} \frac{DT}{Dt} \right) = \frac{r}{T}. \quad (15.63)$$

Per ottenere l'equazione (15.63) basta differenziare la (15.62), sostituire la  $D\rho/Dt$  usando l'equazione di continuità, usare le (15.57) ed infine l'ultima delle (15.59).

La quantità  $s$  è denominata *entropia specifica (termodinamica)*. La giustificazione di tale nome richiederebbe l'introduzione di un contesto più generale, nel quale la (15.63) è sostituita da una disuguaglianza (*disuguaglianza di Clausius-Duhem*) che esprime la seconda legge della Termodinamica e che, per sistemi reversibili si riduce all'uguaglianza

$$T\rho \frac{Ds}{Dt} = p \operatorname{div} u + \rho \frac{De}{Dt}. \quad (15.64)$$

Non discuteremo tale aspetto in queste note. Osserviamo soltanto che, nell'ambito della Teoria cinetica dei gas, la (15.63) è conseguenza del *Teorema H* di Boltzmann.

La (15.63) può sostituire la terza delle equazioni (15.59), in quanto è ad essa equivalente. È a volte conveniente considerare, in luogo di tale sistema, il sistema

$$\begin{cases} \partial_t \rho + u \cdot \nabla_x \rho + \rho \operatorname{div} u = 0, \\ \rho(\partial_t u + u \cdot \nabla_x u) + \nabla_x p = \rho b, \\ \partial_t s(\rho, T) + u \cdot \nabla_x s(\rho, T) = \frac{r}{T}, \end{cases} \quad (15.65)$$

In particolare, nel caso di sistemi in cui  $r = 0$  (assenza di irraggiamento), ne consegue che *l'entropia specifica è costante lungo le traiettorie delle particelle di un fluido perfetto*. Inoltre, se i dati iniziali sono tali che l'entropia al tempo  $t = 0$  è costante ( $s_0(X) = s_0$ ), allora tale è anche l'entropia specifica all'istante generico  $t$ . In conseguenza di ciò si ottiene la relazione

$$\frac{T^{3/2}}{\rho} = \exp[s_0],$$

che permette di esprimere  $T$  in funzione di  $\rho$ :

$$T = \rho^{2/3} \exp\left[\frac{2s_0}{3}\right].$$

Utilizzando questa relazione nell'equazione di stato si ottiene allora

$$p = B\rho^\gamma, \quad (15.66)$$

con

$$\gamma = \frac{5}{3}, \quad B = \exp\left[\frac{2s_0}{3}\right]. \quad (15.67)$$

In queste condizioni le prime due equazioni (15.65) o (15.60) diventano un sistema di quattro equazioni nelle quattro incognite  $\rho$  ed  $u$  completamente disaccoppiato dall'equazione per l'energia o da quella per l'entropia. Esse si scrivono

$$\begin{cases} \partial_t \rho + u \cdot \nabla_x \rho + \rho \operatorname{div} u = 0, \\ \rho(\partial_t u + u \cdot \nabla_x u) + \nabla_x p(\rho) = \rho b, \end{cases} \quad (15.68)$$

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \operatorname{div}[\rho u] = 0, \\ \partial_t(\rho u) + \operatorname{div}[\rho u \otimes u + p(\rho) \mathbf{I}] = \rho b, \end{cases} \quad (15.69)$$

con

$$p(\rho) = B\rho^\gamma.$$

I flussi del fluido perfetto che soddisfano le equazioni (15.68), (15.69) sono detti *flussi isoentropici*. Si denominano *equazioni di Eulero per un fluido isoentropico* equazioni della forma (15.68) o (15.69) anche se la funzione  $p = p(\rho)$  non è data necessariamente dalla (15.66). Infatti anche se il fluido ideale non è perfetto, è possibile trovare ugualmente una funzione entropia specifica (in generale non data dalla (15.62)) che soddisfa la (15.64)<sup>(5)</sup>. Ammetteremo comunque che risulti sempre  $p'(\rho) \neq 0$ . Le equazioni (15.65) sono una forma alternativa per le equazioni del fluido ideale, anche quando esso non è perfetto. Le considerazioni che seguono la (15.65) sono valide anche in questo contesto ed in particolare, se l'entropia è inizialmente costante, si può utilizzare la relazione  $s(\rho, T) = s_0$  per eliminare la temperatura dall'equazione di stato per la pressione e pervenire in tal modo alle (15.68) e (15.69), con una pressione  $p = p(\rho)$  più generale della (15.66).

### 15.10 Fluido viscoso di Navier-Stokes.

Si vedrà nel seguito che il modello di fluido ideale, pur essendo adeguato a descrivere un fluido in molte situazioni concrete, conduce in certi casi a conclusioni paradossali. Questi paradossi possono essere fatti risalire all'incapacità del fluido ideale di esercitare sforzi di taglio, la quale comporta il fatto che uno strato del fluido che si muove a velocità  $u(x, t)$  possa scivolare su uno strato adiacente che si muove a velocità  $u(x + \Delta x, t)$  senza nessuna resistenza a tale moto. In Meccanica sappiamo che, ad esempio una particella che si muove su una superficie, subisce una forza di attrito che può essere trascurata in situazioni idealizzate, ma invece produce effetti significativi in molte situazioni concrete. Un fenomeno simile si presenta nei fluidi reali, nei quali lo scivolamento di uno strato di fluido su un altro è contrastato da una resistenza viscosa.

È questa uno sforzo di taglio che si manifesta nel fluido in condizioni non idrostatiche.

La necessità di includere fenomeni di questo tipo nel modello di fluido ha portato alla formulazione di numerosi modelli, tra i quali quello di gran lunga più utilizzato e più famoso (anche perché il più semplice) è quello del fluido viscoso di Navier-Stokes che descriviamo qui di seguito.

Rinunceremo ad assumere  $N = 0$ , in quanto il modello deve esercitare sforzi di taglio. Pertanto per il fluido di Navier-Stokes si assumerà

$$S = -p \mathbf{I} + N. \quad (15.70)$$

---

<sup>(5)</sup> Basta infatti trovare  $s(\rho, T)$  tale che

$$\frac{\partial s}{\partial T} = \frac{1}{T} \frac{\partial e}{\partial T}, \quad \frac{\partial s}{\partial \rho} = -\frac{p}{T \rho^2},$$

e questo non presenta difficoltà quando siano note  $e(\rho, T)$  e  $p(\rho, T)$ .

La pressione  $p$  e l'energia interna specifica  $e$  saranno assunte ancora legate alla densità  $\rho$  ed alla temperatura  $T$  dalle relazioni (15.54) assunte per il fluido ideale, in quanto esse sono basate su considerazioni all'equilibrio. Invece non assumeremo più  $q = 0$  in quanto, in presenza di attrito, si ha conversione di energia meccanica in calore che ha la tendenza a spostarsi verso le regioni a temperatura più bassa. Per caratterizzare completamente il modello, occorre fornire delle espressioni per  $N$  e  $q$ . Esse saranno dedotte da alcune assunzioni "naturali", che illustreremo nel seguito.

Cominciamo con l'osservare che, se il campo di velocità  $u$  fosse spazialmente omogeneo, non vi sarebbero fenomeni di attrito. In conseguenza, la quantità rilevante per la determinazione della presenza di attrito è la matrice  $\nabla_x u$ . In realtà non tutta la matrice  $\nabla_x u$ , ma solo la sua parte simmetrica ha un ruolo nel fenomeno di slittamento tra strati di fluido. Infatti, si decomponga

$$\nabla_x u = D + \Omega \quad (15.71)$$

ove  $D$  ed  $\Omega$  denotano rispettivamente la parte simmetrica ed antisimmetrica di  $\nabla_x u$ :

$$D_{i,j} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right), \quad \Omega_{i,j} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right). \quad (15.72)$$

Se  $x$  ed  $x'$  sono punti sufficientemente prossimi ( $|x - x'| < \delta$ ), si ha

$$u(x') = u(x) + D(x)(x' - x) + \Omega(x)(x' - x) + O(\delta^2).$$

Ponendo

$$\omega_i = \sum_{l,m=1}^3 \varepsilon_{i,l,m} \Omega_{l,m},$$

e cioè

$$\omega = \text{rot} u := \nabla_x \wedge u, \quad \begin{cases} \omega_1 = \partial_{x_2} u_3 - \partial_{x_3} u_2 \\ \omega_2 = \partial_{x_3} u_1 - \partial_{x_1} u_3 \\ \omega_3 = \partial_{x_1} u_2 - \partial_{x_2} u_1 \end{cases}, \quad (15.73)$$

si ha

$$u(x') = u(x) + D(x)(x' - x) + \frac{1}{2} \omega(x) \wedge (x' - x) + O(\delta^2). \quad (15.74)$$

La (15.74) mostra che, se  $D = 0$ , il moto è localmente coincidente con un *moto rigido* e  $\omega/2$  rappresenta la velocità angolare di tale moto rigido. Il campo vettoriale  $\omega = \text{rot} u$  è detto *campo di vorticità* a causa di questa interpretazione. Poiché in un moto rigido le distanze tra i punti sono costanti, se  $D = 0$  non vi sono moti relativi tra strati vicini del fluido. Siano  $X$  ed  $X'$  le posizioni al tempo  $t = 0$  delle particelle

che sono rispettivamente in  $x$  ed  $x'$  al tempo  $t$ . Posto  $h(t) = \Phi(X', t) - \Phi(X, t)$ , si ha

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}h(t)^2 &= 2h(t) \cdot [u(\Phi(X', t), t) - u(\Phi(X, t), t)] = 2h(t) \cdot (\nabla_x u)h(t) + O(\delta^2) \\ &= 2h(t) \cdot D(x, t)h(t) + O(\delta^2). \end{aligned}$$

La precedente relazione mostra che  $D$  misura la velocità con cui variano le distanze tra i punti, ed è detto per questo *velocità di deformazione*. In base alla relazione (15.74), il moto si decompone localmente in una rotazione con velocità angolare  $\omega/2$  ed in una deformazione con velocità  $D$ .

Le considerazioni precedenti portano ad assumere che  $N$  è una funzione esclusivamente di  $D$  nulla per  $D = 0$ . Per  $D$  piccoli sarà ragionevolmente approssimata da una funzione lineare. È pertanto “naturale” assumere

1)  $N = N(D)$  è una funzione lineare di  $D$ .

D'altra parte, le matrici  $N$  e  $D$  dipendono dal riferimento prescelto, mentre è naturale presumere che la relazione che le lega sia indipendente dalla scelta del riferimento. Poiché un cambiamento di riferimento è indotto da una matrice ortogonale  $Q$ , si assume che

2)

$$N(QDQ^{-1}) = QN(D)Q^{-1} \quad \text{per ogni matrice ortogonale } Q.$$

Ricordando poi che  $N$  e  $D$  sono entrambe matrici simmetriche, si dimostra che esistono  $\lambda$  e  $\mu$  reali<sup>(6)</sup>, tali che

$$N = 2\mu D + \lambda \operatorname{div} u \mathbf{I}. \quad (15.75)$$

Dim. Poiché  $N$  è funzione lineare di  $D$ ,  $N$  e  $D$  commutano. D'altra parte sono simmetriche e pertanto possono essere diagonalizzate simultaneamente. Fissiamo la base comune di autovettori, visto che per l'ipotesi 2), la relazione che dedurremo sarà valida poi in ogni base. Denotiamo poi con  $n_i$  e  $d_i$ ,  $i = 1, \dots, 3$  i rispettivi autovalori. Gli  $n_i$  sono lineari nei  $d_i$ . Inoltre ancora l'ipotesi 2) assicura che la relazione tra loro è invariante per permutazioni degli assi (una permutazione può essere ottenuta combinando rotazioni e riflessioni). L'unica funzione lineare che soddisfa queste relazioni ha la forma

$$n_i = \lambda(d_1 + d_2 + d_3) + 2\mu d_i,$$

per  $\lambda$  e  $\mu$  reali. Poiché  $d_1 + d_2 + d_3 = \operatorname{Tr} D = \operatorname{div} u$ , ritornando alla base originaria, la (15.75) è provata.

---

<sup>(6)</sup> Naturalmente il fattore 2 è del tutto inessenziale ed ha il solo scopo di bilanciare il fattore  $\frac{1}{2}$  nella definizione di  $D$ .

Il segno dei coefficienti  $\lambda$  e  $\mu$  è di importanza fondamentale. Per fissarlo ricordiamo che  $N$  rappresenta degli sforzi di tipo viscoso, in corrispondenza dei quali vi è perdita di energia meccanica ed aumento di energia interna. Dalla (15.44) si rileva che il contributo alla variazione di energia interna è

$$\text{Tr}(DN) = 2\mu\text{Tr}(D^2) + \lambda(\text{div}u)^2.$$

Questa quantità è positiva per ogni scelta di  $u$  non costante se  $\mu > 0$  e  $\lambda > 0$ .

Si osservi inoltre che  $\mu$  e  $\lambda$ , negli argomenti su esposti, potrebbero dipendere da  $\rho$  e  $T$ . Ma nei sistemi concreti tali dipendenze sono piuttosto deboli. È per questo motivo che nel seguito li assumeremo costanti. I coefficienti  $\lambda$  e  $\mu$  sono detti rispettivamente *coefficiente di viscosità di volume (bulk viscosity)* e *coefficiente di viscosità di slittamento (shear viscosity)*.

Per completare il modello occorre fornire l'espressione di  $q$ . Osserviamo che, quando la temperatura è costante, non vi è flusso di calore, in quanto il calore fluisce dalle parti del sistema a temperatura più alta a quelle a temperatura più bassa, mentre non vi è flusso di calore tra parti alla stessa temperatura (*in equilibrio termico*). In conseguenza di ciò assumeremo che  $q$  sia una funzione esclusivamente di  $\nabla_x T$ , nulla per  $\nabla_x T = 0$ . Per piccoli gradienti di temperatura la funzione  $q = q(\nabla_x T)$  sarà bene approssimata da una funzione lineare e l'indipendenza dal riferimento implica che esista un numero reale  $\kappa$  tale che

$$q = -\kappa\nabla_x T. \quad (15.76)$$

Il fatto che il calore fluisce nel verso opposto al gradiente di temperatura implica poi  $\kappa > 0$ . Anche  $\kappa$  è assunta costante ed è detta *coefficiente di conduzione termica*. La relazione (15.76) è nota come *legge di Fourier*. Usando le precedenti relazioni nelle equazioni di bilancio (15.45) e (15.46), otteniamo le equazioni

$$\begin{cases} \partial_t \rho + u \cdot \nabla_x \rho + \rho \text{div}u = 0, \\ \rho(\partial_t u + u \cdot \nabla_x u) + \nabla_x p(\rho, T) = \mu \Delta_x u + (\lambda + \mu) \nabla_x \text{div}u + \rho b, \\ \rho(\partial_t e(\rho, T) + u \cdot \nabla_x e(\rho, T)) + p(\rho, T) \text{div}u \\ = \kappa \Delta_x T + 2\mu \text{Tr}(D^2) + \lambda(\text{div}u)^2 + \rho r. \end{cases} \quad (15.77)$$

Equivalentemente

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \text{div}[\rho u] = 0, \\ \partial_t(\rho u) + \text{div}[\rho u \otimes u + p(\rho, T) \mathbf{I}] = \mu \Delta_x u + (\lambda + \mu) \nabla_x \text{div}u + \rho b, \\ \partial_t \left[ \rho \left( \frac{u^2}{2} + e(\rho, T) \right) \right] + \text{div} \left[ \rho u \left( \frac{u^2}{2} + e(\rho, T) + p(\rho, T) \right) \right] \\ = \kappa \Delta_x T + 2\mu \text{Tr}(D^2) + \lambda(\text{div}u)^2 + \rho(u \cdot b + r), \end{cases} \quad (15.78)$$



ove

$$\Delta_x f = \sum_{i=1}^3 \left( \frac{\partial f}{\partial x_i} \right)^2$$

è l'operatore *Laplaciano*.

Le precedenti equazioni sono dette *equazioni di Navier-Stokes*.

Se le relazioni tra  $p$ ,  $e$ ,  $\rho$  e  $T$  sono quelle del fluido perfetto allora le equazioni di Navier-Stokes divengono

$$\begin{cases} \partial_t \rho + u \cdot \nabla_x \rho + \rho \operatorname{div} u = 0, \\ \rho(\partial_t u + u \cdot \nabla_x u) + \nabla_x p = \mu \Delta_x u + (\lambda + \mu) \nabla_x \operatorname{div} u + \rho b, \\ \frac{3}{2} \rho(\partial_t T + u \cdot \nabla_x T) + p \operatorname{div} u = \kappa \Delta_x T + 2\mu \operatorname{Tr}(D^2) + \lambda(\operatorname{div} u)^2 + \rho r. \end{cases} \quad (15.79)$$

Equivalentemente

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \operatorname{div}[\rho u] = 0, \\ \partial_t(\rho u) + \operatorname{div}[\rho u \otimes u + p \mathbf{I}] = \mu \Delta_x u + (\lambda + \mu) \nabla_x \operatorname{div} u + \rho b, \\ \partial_t \left[ \rho \left( \frac{u^2}{2} + \frac{3}{2} T \right) \right] + \operatorname{div} \left[ \rho u \left( \frac{u^2}{2} + \frac{5}{2} T \right) \right] \\ = \kappa \Delta_x T + 2\mu \operatorname{Tr}(D^2) + \lambda(\operatorname{div} u)^2 + \rho(u \cdot b + r). \end{cases} \quad (15.80)$$

con

$$p = \rho T.$$

Valutiamo la derivata temporale dell'entropia specifica in corrispondenza di tali equazioni. Differenziando la (15.62) ed usando le (15.79), si ottiene

$$\rho \frac{Ds}{Dt} = -\operatorname{div} \left( \frac{q}{T} \right) + \frac{\rho r}{T} + \pi, \quad (15.81)$$

con

$$\pi = \frac{1}{T} \left( 4\kappa(\nabla_x \sqrt{T})^2 + \lambda(\operatorname{div} u)^2 + 2\mu \operatorname{Tr}(D^2) \right). \quad (15.82)$$

La quantità  $\pi$  è detta *produzione di entropia*. Essa è *non negativa*, come segue dall'esame della sua espressione esplicita. In conseguenza, il fluido ideale di Navier-Stokes soddisfa la *disuguaglianza di Clausius-Duhem*

$$\rho \frac{Ds}{Dt} \geq -\operatorname{div} \left( \frac{q}{T} \right) + \frac{\rho r}{T}, \quad (15.83)$$

che esprime la *seconda legge della Termodinamica* per i sistemi non reversibili.

### 15.11 Fluido incompressibile.

Nella pratica spesso si considerano situazioni nelle quali si possono trascurare le variazioni locali di volume. Quando ciò si verifica si parla di *fluido incompressibile*. Si denoti con

$$\mathcal{V}(A_t) = \int_{A_t} dx$$

la misura di Lebesgue del volume materiale  $\{A_t\}$ , detta anche *volume* di  $A_t$ . Ricordando il teorema del trasporto, si ha

$$\frac{d}{dt} \mathcal{V}(A_t) = \int_{A_t} dx \operatorname{div} u(x, t).$$

Pertanto il volume di ogni parte del fluido è costante nel tempo se e solo se  $\operatorname{div} u = 0$ .

La condizione

$$\operatorname{div} u = 0 \tag{15.84}$$

è detta *condizione di incompressibilità*.

Accanto alla (15.84), sebbene ciò non sia strettamente indispensabile, assumeremo anche che la densità di massa sia costante nello spazio e nel tempo:

$$\rho(x, t) = \bar{\rho}. \tag{15.85}$$

Con tali assunzioni, evidentemente l'equazione di continuità è automaticamente soddisfatta dai fluidi incompressibili. Tuttavia, le altre equazioni per il fluido e cioè le (15.65)<sub>2,3</sub> o le (15.79)<sub>2,3</sub>, con  $p$  data dall'equazione di stato  $p = p(\rho, T)$ , non sono in generale compatibili con tali assunzioni, essendo la (15.84), l'equazione di bilancio dell'impulso e l'equazione di bilancio dell'energia un sistema di cinque equazioni nelle quattro incognite residue  $u$  e  $T$ . Per tale motivo si interpreta la condizione di incompressibilità (15.84) come un *vincolo* sui moti possibili del sistema ed in conseguenza si rinuncia all'equazione di stato per la pressione. Infatti la pressione viene considerata come una nuova incognita da interpretarsi come la *reazione vincolare* al vincolo di incompressibilità. In conseguenza di tale assunzione, l'equazione di bilancio dell'energia risulta disaccoppiata da quella dell'impulso e pertanto le equazioni del fluido incompressibile divengono

$$\begin{cases} \operatorname{div} u = 0, \\ \partial_t u + u \cdot \nabla_x u + \nabla_x \frac{p}{\bar{\rho}} = b, \end{cases} \tag{15.86}$$

nel caso di fluido perfetto e

$$\begin{cases} \operatorname{div} u = 0, \\ \partial_t u + u \cdot \nabla_x u + \nabla_x \frac{p}{\bar{\rho}} = \frac{\mu}{\bar{\rho}} \Delta_x u + b, \end{cases} \tag{15.87}$$

nel caso di fluido viscoso.

Nelle (15.86) scompare ogni traccia della densità costante  $\bar{\rho}$ , in quanto  $p$  è ora un'incognita e nel seguito denoteremo con  $p$  quello che in effetti è il rapporto  $p/\bar{\rho}$ , continuando a chiamarlo pressione. Infatti la densità risulta un parametro irrilevante nel moto di un fluido ideale incompressibile.

Nella (15.87) invece la densità  $\bar{\rho}$  è presente anche nel rapporto  $\mu/\rho$ . Per tale motivo si introduce la quantità

$$\nu = \frac{\mu}{\bar{\rho}}$$

che prende il nome di *coefficiente di viscosità cinematica* e le equazioni di (15.87) si scrivono, senza far apparire esplicitamente la densità, come

$$\begin{cases} \operatorname{div} u = 0, \\ \partial_t u + u \cdot \nabla_x u + \nabla_x p = \nu \Delta_x u + b, \end{cases} \quad (15.88)$$

Le (15.86) sono dette *equazioni di Eulero incompressibili* mentre le (15.88) sono dette *equazioni di Navier-Stokes incompressibili*. Poiché queste ultime rappresentano il caso piú ampiamente studiato di equazioni viscosi, ci si riferisce spesso ad esse semplicemente come *equazioni di Navier-Stokes* riservando alle (15.79) il nome di *equazioni di Navier-Stokes compressibili*.

La precedente discussione è puramente formale, non essendo a priori giustificata la rimozione dell'equazione di stato per la pressione e l'introduzione del vincolo di incompressibilità. Si può però mostrare che le equazioni (15.86) e (15.88) possono essere giustificate in un opportuno limite, che corrisponde alla maggior parte dei liquidi in condizioni normali. Tuttavia, sebbene ciò possa apparire strano, anche l'aria in condizioni normali è ben approssimata dalle equazioni del fluido incompressibile, quando si considerano velocità piccole rispetto a quella del suono, mentre i liquidi, in condizioni di pressione estreme, possono comportarsi come fluidi comprimibili. In conclusione *la proprietà di incompressibilità non deve essere considerata come una proprietà assoluta di uno specifico fluido, ma come una proprietà dei flussi di tale fluido nelle condizioni specificate*. Ciononostante, in conformità con l'uso corrente, ci riferiremo alle equazioni precedenti come equazioni del *fluido* incompressibile.

## 16. Fluidi ideali.

### 16.1 Equazioni dei fluidi ideali.

In questo capitolo studieremo le principali proprietà dei fluidi ideali. Restringere la nostra attenzione ai *fluidi ideali isoentropici* ed ai *fluidi ideali incompressibili*.

Ricordiamo le equazioni ottenute nel capitolo 15. Per il fluido isoentropico si ha

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \operatorname{div}[\rho u] = 0, \\ \rho(\partial_t u + u \cdot \nabla_x u) + \nabla_x p = \rho b, \end{cases} \quad (16.1)$$

dove  $p = p(\rho)$  è l'equazione di stato per il fluido. Sia  $w(z)$  la primitiva di  $p'(z)/z$ :

$$w(z) = \int_1^z \frac{p'(\zeta)}{\zeta} d\zeta,$$

ove l'estremo inferiore dell'integrale è stato posto in  $z = 1$  per fissare le idee.

In particolare, se il fluido isoentropico è ideale,  $p(z) = Bz^\gamma$  con  $\gamma = 5/3$ . Pertanto  $p'(z) = \gamma Bz^{\gamma-1}$ ,  $p'(z)/z = \gamma Bz^{\gamma-2}$  e

$$w(z) = \frac{\gamma}{\gamma-1} Bz^{\gamma-1} + \text{cost.}$$

Utilizzando la funzione  $w$ , le (16.1) si scrivono anche

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \operatorname{div}[\rho u] = 0, \\ \partial_t u + u \cdot \nabla_x u + \nabla_x w(\rho) = b, \end{cases} \quad (16.2)$$

La funzione  $w$  è detta a volte *potenziale di pressione*.

Le equazioni per il fluido ideale incompressibile si scrivono

$$\begin{cases} \operatorname{div} u = 0, \\ \partial_t u + u \cdot \nabla_x u + \nabla_x p = b, \end{cases} \quad (16.3)$$

L'analogia tra l'equazione di bilancio dell'impulso per il fluido isoentropico e per quello incompressibile è evidente: basta sostituire il potenziale di pressione  $w(\rho)$  con la pressione incognita per ottenere l'una dall'altra. Naturalmente le equazioni (16.2)<sub>1</sub> e (16.3)<sub>1</sub> sono molto diverse e molto diversa la loro interpretazione. Tuttavia l'analogia formale consente di discutere alcune delle proprietà che seguono congiuntamente per i due sistemi (16.2) e (16.3).

### Condizioni al contorno.

Le equazioni per il fluido ideale, così come quelle per gli altri casi considerati nel capitolo precedente, sono state ottenute avendo in mente una situazione in cui il fluido riempie tutto lo spazio. Nella pratica il fluido occupa una regione dello spazio. Denoteremo con  $\Omega_t$  la chiusura dell'insieme dei punti di  $\mathbb{R}^3$  occupati dal fluido al tempo  $t$ . In generale tale regione può essere un'incognita del problema, come accade ad esempio se si studia il moto dell'acqua in un bicchiere o le onde del mare, dove il pelo libero dell'acqua è incognito. Problemi di questo tipo sono detti *problemi di frontiera libera* e la loro analisi matematica piuttosto difficile.

Pertanto ci limiteremo a considerare situazioni, come quella di un gas in un contenitore, in cui il dominio  $\Omega_t$  è assegnato a priori, e più in particolare, supporremo che esso non dipenda dal tempo, e cioè il contenitore sia rigido.

Nel seguito  $\Omega$  denota il dominio contenente il fluido e  $\partial\Omega$  la sua frontiera, che si supponrà regolare (cioè con normale infinitamente differenziabile in ogni punto).

Un dominio particolarmente studiato sarà il toro tridimensionale di lato  $L > 0$ ,  $\mathbb{T}_L^3$ , ciò che equivale ad assumere che i campi associati al fluido siano funzioni periodiche delle variabili spaziali  $x$  o  $X$  con di periodo  $L$  nelle tre coordinate. Naturalmente si potrebbero considerare senza particolari difficoltà periodi diversi in ciascuna coordinata, ma ci limiteremo a considerare un solo periodo. Con  $\mathbb{T}^3$  intenderemo il toro di lato  $2\pi$  e pertanto, quando assumeremo  $\Omega = \mathbb{T}^3$  ciò significherà che tutte le funzioni coinvolte sono di periodo  $2\pi$ .

Il caso  $\Omega = \mathbb{T}^3$  è molto studiato in quanto si tratta di un dominio compatto ma privo di frontiera, in modo da poter trarre vantaggio dalla limitatezza del dominio senza dover analizzare il comportamento del fluido vicino alla frontiera, problema che può a volte risultare arduo. Quando il dominio non è un toro occorre specificare delle condizioni al contorno che completano le equazioni stabilite in precedenza per i punti interni al dominio.

La natura fisica delle interazioni del fluido con il contenitore è complessa, ma noi ci limiteremo alla schematizzazione che segue, che risulta in molti casi adeguata. Supporremo i campi  $\rho$  ed  $u$  prolungati fino alla frontiera  $\partial\Omega$ . Per determinare i valori da assegnare a  $\rho$  ed  $u$  sul bordo, osserviamo innanzitutto che, se  $\{A_\varepsilon\}$  è una famiglia di parti di  $\Omega$  con frontiera regolare e tale che  $|A_\varepsilon|/|\partial A_\varepsilon| \rightarrow 0$ , e se i campi coinvolti e le loro derivate sono limitati in  $A_\varepsilon$ , allora, con un argomento simile a quello usato nel capitolo precedente per ridurre le equazioni di bilancio alla loro forma locale, si ottiene, per un qualsiasi sistema continuo

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{|\partial A_\varepsilon|} \int_{\partial A_\varepsilon} d\sigma(x) \rho u \cdot n &= 0, \\ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{|\partial A_\varepsilon|} \int_{\partial A_\varepsilon} d\sigma(x) S n &= 0, \\ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{|\partial A_\varepsilon|} \int_{\partial A_\varepsilon} d\sigma(x) [u \cdot S n - q \cdot n] &= 0. \end{aligned} \tag{16.4}$$

Se il fluido è ideale, tali condizioni divengono poi

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{|\partial A_\varepsilon|} \int_{\partial A_\varepsilon} d\sigma(x) \rho u \cdot n &= 0, \\ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{|\partial A_\varepsilon|} \int_{\partial A_\varepsilon} d\sigma(x) p n &= 0, \\ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{|\partial A_\varepsilon|} \int_{\partial A_\varepsilon} d\sigma(x) p u \cdot n &= 0. \end{aligned} \quad (16.5)$$

Ammettiamo ora che i campi  $\rho$  ed  $u$  e le loro derivate siano limitate fino al bordo. Per ogni  $x \in \partial\Omega$  si può allora considerare la famiglia  $\{A_\varepsilon\}$  costituita da cilindri di generatrice  $n(x)$  avente per base cerchi di centro  $x$  e raggio  $\varepsilon$  altezza  $\varepsilon^2$ . Applicando le (16.5) a tale famiglia, con argomenti simili a quelli visti nel capitolo precedente si ottiene che le quantità  $\rho u \cdot n$ ,  $p$  e  $p u \cdot n$  sono continue in  $x \in \partial\Omega$ . La continuità di  $p$  implica ovviamente la continuità di  $\rho$ , poiché  $p'(\rho) \neq 0$ . In conseguenza  $u \cdot n$  è anche continuo. L'ultima delle condizioni (16.5) non aggiunge informazioni.

La discussione precedente mostra che vicino al bordo è naturale prescrivere la pressione e la componente normale della velocità. D'altra parte, in una situazione sperimentale standard, la pressione al bordo è una costante,  $p_e$  e il contenitore a riposo. Pertanto le equazioni (16.2) e (16.3) vengono completate dalle condizioni al bordo

$$p(x, t) = p_e, \quad u(x, t) \cdot n(x) = 0, \quad x \in \partial\Omega \quad (16.6)$$

Che tali condizioni siano anche sufficienti a determinare in modo unico le soluzioni non è evidente. Si rinvia per tale questione a teorema di unicità per i fluidi ideali.

*Osservazione 1:* La condizione  $u \cdot n = 0$  sul bordo può essere interpretata come condizione di impermeabilità del contenitore. Infatti, ricordando che la corrente di massa  $j_\rho = \rho u$ , ne segue che non vi è flusso di massa attraverso  $\partial\Omega$  e quindi la massa totale del sistema si conserva.

Conservazione della massa totale:

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} dx \rho(x, t) = 0 \quad (16.7)$$

*Osservazione 2:* Nulla è specificato per la componente tangenziale di  $u$ , che può essere non nulla: il fluido ideale può infatti scivolare sulle pareti del contenitore. Questa è una differenza fondamentale rispetto alle proprietà del fluido viscoso per il quale, come si vedrà, anche la componente tangenziale della velocità deve annullarsi al bordo, cioè il fluido aderisce alle pareti.

## 16.2 Conservazione dell'energia.

Assumiamo le equazioni del fluido isoentropico. Consideriamo la variazione dell'energia cinetica totale del sistema,  $\mathcal{K}_t(\Omega)$  nel tempo.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\mathcal{K}_t(\Omega) &= \int_{\Omega} dx \left[ \frac{u^2}{2} \partial_t \rho + \rho u \cdot \partial_t u \right] = \\ &= \int_{\Omega} dx \left\{ -\operatorname{div}[\rho u] \frac{u^2}{2} - \rho(u \cdot \nabla_x u) \cdot u - \rho u \cdot \nabla_x w(\rho) + \rho u \cdot b \right\}. \end{aligned}$$

Scrivendo

$$\rho(u \cdot \nabla_x u) \cdot u = \rho u \cdot \nabla_x \frac{u^2}{2} = \operatorname{div}[\rho u \frac{u^2}{2}] - \frac{u^2}{2} \operatorname{div}[\rho u]$$

ed usando la definizione di  $w$ , cioè  $\nabla_x w = \rho^{-1} \nabla_x p$ , si ha allora

$$\frac{d}{dt}\mathcal{K}_t(\Omega) = \int_{\Omega} dx \left\{ -\operatorname{div}[\rho u \frac{u^2}{2}] - u \cdot \nabla p + \rho u \cdot b \right\}.$$

Usando il teorema di Gauss e la condizione al bordo  $u \cdot n = 0$ , questa diviene poi

$$\frac{d}{dt}\mathcal{K}_t(\Omega) = - \int_{\Omega} dx u \cdot \nabla p + \int_{\Omega} dx \rho u \cdot b.$$

D'altra parte, poiché per le condizioni al bordo

$$\int_{\partial\Omega} p u \cdot n = 0,$$

introdotta la funzione  $W(z)$  tale che  $W'(z) = p(z)/z^2$ , si ha

$$\begin{aligned} - \int_{\Omega} dx u \cdot \nabla p &= \int_{\Omega} dx p \operatorname{div} u = - \int_{\Omega} dx \frac{p}{\rho} \frac{D\rho}{Dt} \\ &= - \int_{\Omega} dx \rho W'(\rho) \frac{D\rho}{Dt} = - \int_{\Omega} dx \rho \frac{DW(\rho)}{Dt} = - \frac{d}{dt} \int_{\Omega} dx \rho W(\rho). \end{aligned}$$

Pertanto la funzione  $W(\rho)$  si interpreta come *energia interna specifica* e la quantità

$$E = \int_{\Omega} dx \rho \left[ \frac{u^2}{2} + W(\rho) \right],$$

detta *energia totale* soddisfa la relazione

$$\frac{d}{dt}E = \int_{\Omega} dx \rho u \cdot b.$$

*Osservazione:* Tali conclusioni si potevano ottenere direttamente dall'equazione di bilancio dell'energia in forma integrale, in quanto

$$\int_{\partial\Omega} u \cdot Sn = - \int_{\partial\Omega} pu \cdot n = 0.$$

La funzione  $W(\rho)$  coincide con ciò che si ottiene sostituendo in  $e(\rho, T)$  l'espressione  $T = T(\rho)$  che è fornita dalla conservazione dell'entropia. È immediato controllare tale uguaglianza nel caso del fluido perfetto ove  $p = B\rho^\gamma$ . Si noti inoltre che in questo caso  $W = \gamma^{-1}w$ .

Se  $b = 0$  allora *l'energia totale è conservata*:

$$\frac{d}{dt}E = 0 \quad (16.8).$$

Se  $b$  non è nulla ma è una forza conservativa ( $b(x) = -\nabla_x U(x)$ ), allora

$$\int_{\Omega} dx \rho u \cdot b = - \int_{\Omega} dx \rho u \cdot \nabla_x U(x) = \int_{\Omega} dx \rho \frac{DU}{Dt} = - \frac{d}{dt} \int_{\Omega} dx \rho U.$$

In tal caso la grandezza conservata è  $E + \int_{\Omega} \rho U$ .

Le considerazioni precedenti si applicano (più semplicemente) al caso del fluido ideale incompressibile: si consideri di nuovo la variazione temporale dell'energia cinetica totale. Procedendo come in precedenza, ma tenendo conto che  $\rho(x, t) = \bar{\rho}$ , e  $\text{div} u = 0$ , si ha

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \mathcal{K}_t(\Omega) &= \frac{d}{dt} \int_{\Omega} dx \frac{u^2}{2} = \int_{\Omega} dx u \cdot \frac{Du}{Dt} = \\ &= \int_{\Omega} dx [-u \cdot \nabla_x p + u \cdot b]. \end{aligned}$$

Usando il teorema di Gauss e la condizione al bordo  $u \cdot n = 0$ , si ha quindi

$$\frac{d}{dt} \mathcal{K}_t(\Omega) = \int_{\Omega} dx u \cdot b.$$

Pertanto, se  $b = 0$  oppure deriva da un potenziale, a causa della condizione  $\text{div} u = 0$ , *l'energia cinetica totale*

$$\mathcal{K}_t = \int_{\Omega} dx \frac{u^2}{2},$$

*è conservata.*



### 16.3 Teorema di Bernoulli.

Diremo *linea di flusso* passante per  $x$  al tempo  $t$  la traiettoria percorsa dall'elemento materiale che transita per  $x$  al tempo  $t$ , cioè la soluzione dell'equazione

$$\dot{\gamma}(\tau) = u(\gamma(\tau), \tau)$$

soddisfacente la condizione "iniziale"

$$\gamma(t) = x.$$

Con le notazioni del capitolo precedente,  $\gamma(\tau) = \Phi(\Phi^{-1}(x, t), \tau)$ .

Accanto alle linee di flusso si introducono anche le *linee di corrente al tempo  $t$* . Si dice *linea di corrente al tempo  $t$*  passante per  $x$  la curva passante per  $x$ , tangente in ogni suo punto al campo di velocità al tempo fissato  $t$ , cioè la funzione  $s \rightarrow y(s)$  soluzione dell'equazione differenziale

$$\frac{d}{ds}y(s) = u(y(s), t),$$

soddisfacente la condizione iniziale

$$y(s_0) = x$$

per qualche  $s_0$ .

Evidentemente le due nozioni coincidono se il campo di velocità  $u(x, t)$  non dipende dal tempo, caso nel quale il flusso si dice *stazionario*. In questo caso vale il teorema di Bernoulli, che rappresenta una condizione puntuale sull'*energia*.

**Teorema 16.1 (di Bernoulli):** *Si consideri un flusso stazionario per un fluido isoentropico, soggetto ad un campo di forze esterne  $b$  di potenziale  $U$ . Allora, per ogni  $x$  la quantità*

$$\mathcal{E} := \frac{u^2}{2} + w + U$$

*è costante lungo le linee di corrente. Se il invece del fluido isoentropico si considera il fluido incompressibile, la stessa conclusione vale per*

$$\mathcal{E} := \frac{u^2}{2} + p + U.$$

*Osservazione:* Si noti che la quantità  $u^2/2 + w + U$  non rappresenta l'energia per unità di massa, in quanto  $w$  non è l'energia interna specifica. Per tale motivo si è usato la parola energia in corsivo.

Dim. Si noti l'identità

$$\frac{1}{2}\nabla_x u^2 = (u \cdot \nabla_x)u + u \wedge (\nabla_x \wedge u). \quad (16.9)$$

Per provarla osserviamo che

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\partial_i(\sum_j u_j^2) &= \sum_j u_j \partial_i u_j = \sum_j u_j \partial_j u_i + \sum_j u_j (\partial_i u_j - \partial_j u_i) = \\ &= (u \cdot \nabla_x)u_i + \sum_j u_j \varepsilon_{i,j,k} (\nabla_x \wedge u)_k = (u \cdot \nabla_x)u_i + [u \wedge (\nabla_x \wedge u)]_i. \end{aligned}$$

Poiché il flusso è stazionario,  $u$  soddisfa l'equazione di Eulero stazionaria

$$(u \cdot \nabla_x)u + \nabla_x(w + U) = 0.$$

Usando l'identità precedente risulta allora

$$\nabla_x\left(\frac{1}{2}u^2 + w + U\right) = u \wedge (\nabla_x \wedge u).$$

Sia  $s \rightarrow y(s)$  una linea di corrente, in modo che  $y'(s) = u(y(s))$ . Si ha

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds}\left[\frac{1}{2}u(y(s))^2 + w(\rho(y(s))) + U(y(s))\right] &= u(y(s)) \cdot \nabla_x\left(\frac{1}{2}u^2 + w(\rho) + U\right)(y(s)) = \\ &= u(y(s)) \cdot u(y(s)) \wedge (\nabla_x \wedge u(y(s))) = 0, \end{aligned}$$

in quanto  $u \wedge (\nabla_x \wedge u)$  è ortogonale ad  $u$ .  $\square$

Ricordiamo che il campo vettoriale  $\omega = \text{rot}u$  introdotto nel capitolo precedente e detto *vorticità*, rappresenta la velocità di rotazione locale del flusso. Pertanto un flusso è detto *irrotazionale* se e solo se  $\text{rot}u = 0$ .

Gli argomenti precedenti forniscono informazioni ancora più accurate nel caso di flussi irrotazionali. La quantità  $\mathcal{E}$  che è costante lungo le linee di corrente di un flusso stazionario, può variare da linea di corrente a linea di corrente. Se il flusso è irrotazionale, ciò non accade. Questo è il contenuto del seguente

**Teorema 16.2 (Bernoulli)** *In ogni flusso stazionario ed irrotazionale di un fluido ideale isoentropico o incompressibile la quantità  $\mathcal{E}$  è una costante:*

$$\nabla_x \mathcal{E} = 0.$$

Dim. Usando la precedente identità, nel caso di fluido isoentropico si ha

$$\nabla_x \mathcal{E} = (u \cdot \nabla_x)u + \nabla_x(w + U) + u \wedge \omega = (u \cdot \nabla_x u) + \nabla_x(w + U) = 0.$$

Nel secondo passo si è usato  $\omega = 0$  e nel terzo l'equazione di Eulero.  $\square$

*Osservazione 1:* In assenza di forze esterne, in un flusso stazionario irrotazionale, la pressione è maggiore quando la velocità è minore e viceversa.

*Osservazione 2:* In idrostatica,  $u = 0$ , per un fluido incompressibile risulta

$$\nabla_x(p + U) = 0.$$

Se  $U = -gx_3$  (potenziale della gravità), allora

$$p = -gx_3,$$

che è nota come *legge di Stevino*.

#### 16.4 Teorema di Kelvin.

L'assenza di sforzi di taglio, che caratterizza il fluido ideale, induce a ritenere che non si possano mettere in rotazione elementi di fluido che non ruotino inizialmente. Il teorema di Kelvin e le sue conseguenze rappresentano la dimostrazione di tale congettura.

Sia  $\mathcal{C}_0$  una qualsiasi curva regolare chiusa

$$\mathcal{C}_0 = \{X = \gamma(\lambda), \lambda \in [0, 1], \gamma(0) = \gamma(1)\}$$

e  $\lambda \rightarrow \gamma(\lambda)$  una sua rappresentazione parametrica. Fissato il flusso  $(X, t) \rightarrow \Phi(X, t)$ , per ogni  $t$  si denoti con  $X \rightarrow \Phi_t(X) = \Phi(X, t)$  la funzione che trasforma le posizioni iniziali delle particelle nelle posizioni attuali. Sia inoltre  $\mathcal{C}_t = \Phi_t(\mathcal{C}_0)$ , di equazione parametrica  $\lambda \rightarrow \gamma_t(\lambda) = (\Phi_t \circ \gamma)(\lambda)$ . La famiglia  $\{\mathcal{C}_t, t \in [0, T]\}$  si dice *curva materiale*. Analogamente, se  $\Sigma$  è una superficie e  $\Sigma_t = \Phi_t(\Sigma)$ , diremo che la famiglia  $\{\Sigma_t, t \in [0, T]\}$  è una *superficie materiale*.

Si definisce *circuitalità* della curva  $\mathcal{C}$  la quantità

$$\Gamma(\mathcal{C}) := \oint_{\mathcal{C}} dl \cdot u.$$

**Teorema 16.3 (Kelvin).** *Per ogni flusso di un fluido isoentropico o incompressibile soggetto a forze esterne conservative di potenziale  $U$  e per ogni curva materiale  $\{\mathcal{C}_t, t \in [0, T]\}$  risulta*

$$\frac{d}{dt}\Gamma(\mathcal{C}_t) = 0.$$

La prova è basata sulla seguente identità:

**Lemma 16.4.** *Se  $u$  è differenziabile, per ogni curva materiale regolare  $\{\mathcal{C}_t, t \in [0, T]\}$  risulta*

$$\frac{d}{dt} \oint_{\mathcal{C}_t} dl \cdot u = \oint_{\mathcal{C}_t} dl \cdot \frac{D}{Dt} u.$$

Dim. (del Lemma 16.4). Si ha

$$\oint_{\mathcal{C}_t} dl \cdot u = \int_0^1 d\lambda u(\gamma_t(\lambda), t) \cdot \gamma'_t(\lambda) = \int_0^1 d\lambda u(\Phi_t(\gamma(\lambda))) \cdot \frac{\partial}{\partial \lambda} \Phi_t(\gamma(\lambda)).$$

Differenziando,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \oint_{\mathcal{C}_t} dl \cdot u &= \int_0^1 d\lambda \frac{Du}{Dt}(\Phi_t(\gamma(\lambda))) \cdot \frac{\partial}{\partial \lambda} \Phi_t(\gamma(\lambda)) \\ &\quad + \int_0^1 d\lambda u(\Phi_t(\gamma(\lambda))) \cdot \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial}{\partial \lambda} \Phi_t(\gamma(\lambda)). \end{aligned}$$

Il secondo integrale vale

$$\begin{aligned} \int_0^1 d\lambda u(\Phi_t(\gamma(\lambda))) \cdot \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial}{\partial \lambda} \Phi_t(\gamma(\lambda)) &= \int_0^1 d\lambda u(\Phi_t(\gamma(\lambda))) \cdot \frac{\partial}{\partial \lambda} u(\Phi_t(\gamma(\lambda))) \\ \int_0^1 d\lambda \frac{\partial}{\partial \lambda} \frac{1}{2} [u(\Phi_t(\gamma(\lambda)))]^2 &= 0. \end{aligned}$$

Nell'ultimo passaggio si è usato che la curva è chiusa.  $\square$

Dim. (del Teorema 16.3). Se  $u$  soddisfa le equazioni di Eulero, si ottiene allora

$$\frac{d}{dt} \Gamma(\mathcal{C}_t) = - \oint_{\mathcal{C}_t} dl \cdot [\nabla_x (w + U)] = 0,$$

avendo di nuovo usato il fatto che la curva è chiusa.  $\square$

Conseguenze del Teorema di Kelvin.

Per il Teorema di Stokes, se  $\Sigma$  è una superficie avente  $\mathcal{C}$  come frontiera, e  $g$  è un campo vettoriale differenziabile, si ha

$$\int_{\Sigma} d\sigma(x) \text{rot} g(x) \cdot n(x) = \oint_{\mathcal{C}} dl \cdot g,$$

ove  $n(x)$  è la normale alla superficie in  $x$  orientata in modo tale che l'orientamento della curva, visto da  $n$  sia levogiro. La quantità

$$\int_{\Sigma} d\sigma(x) g \cdot n(x)$$

si dice *flusso di  $g$  attraverso  $\Sigma$* .

Pertanto, poiché per ogni superficie materiale  $\Sigma_t$  avente come frontiera la curva materiale  $\mathcal{C}_t$  risulta

$$\Gamma(\mathcal{C}_t) = \int_{\Sigma_t} d\sigma(x) \operatorname{rot} u(x) \cdot n(x) = \int_{\Sigma_t} d\sigma(x) \omega(x) \cdot n(x),$$

il teorema di Kelvin implica che *il flusso di vorticità attraverso la superficie materiale  $\Sigma_t$  è costante nel tempo*.

In particolare, se al tempo  $t = 0$  si suppone il campo  $u_0$  irrotazionale ( $\omega_0 = 0$ ),  $u(x, t)$  è irrotazionale ad ogni istante successivo in quanto, per ogni superficie materiale risulta

$$\int_{\Sigma_t} d\sigma(x) \omega(x, t) \cdot n(x) = \int_{\Sigma} d\sigma(X) \omega_0(X) \cdot n(X) = 0.$$

In effetti la vorticità al tempo  $t$  può essere ottenuta trasportando quella iniziale lungo le traiettorie, come mostrato dal teorema che segue. In esso porremo

$$\zeta = \frac{\omega}{\rho}.$$

Nel caso incompressibile si potrà identificare  $\zeta$  con  $\omega$  da cui differisce per una inessenziale costante moltiplicativa.

**Teorema 16.5** *Per un fluido isoentropico o incompressibile risulta*

$$\frac{D}{Dt} \zeta - (\zeta \cdot \nabla_x) u = 0 \quad (16.10)$$

e quindi

$$\zeta(\Phi(X, t), t) = F(X, t) \zeta(X, 0) \quad (16.11).$$

*Osservazione 1:* La (16.11) fornisce una prova diretta della conservazione del carattere irrotazionale di un flusso. In effetti essa fornisce anche un modo per valutare in generale la vorticità al tempo  $t$  nel punto  $x = \Phi(X, t)$ : basta infatti propagare il valore  $\omega(X, 0)$  e ruotare ed allungare il vettore così ottenuto applicando la matrice  $F(X, t)$ . Per questa operazione si usa in letteratura il termine inglese “stirring”.

*Osservazione 2:* Si noti inoltre che nel (16.10) non figurano più  $w$  o  $p$ . Tale circostanza rende particolarmente utile l'equazione nel caso incompressibile in quanto permette di eliminare l'incognita pressione (si tratta cioè di un'equazione pura nel senso della Meccanica dei sistemi vincolati).

Dim. Ricordando l'identità (16.9), si ha

$$(u \cdot \nabla_x)u = \frac{1}{2}\nabla_x(u \cdot u) - u \wedge \omega.$$

Pertanto l'equazione di Eulero si può riscrivere

$$\partial_t u - u \wedge \omega = -\nabla_x(w + U + \frac{1}{2}u^2).$$

Applicando il rotore ad entrambi i membri si ha quindi

$$\partial_t \omega - \text{rot}[u \wedge \omega] = 0.$$

È facile controllare che

$$\text{rot}[u \wedge \omega] = (\omega \cdot \nabla_x)u - \omega \text{div}u - (u \cdot \nabla_x)\omega + u \text{div}\omega.$$

Infatti

$$\begin{aligned} \text{rot}[u \wedge \omega]_i &= \sum_{j,k,l,m=1}^3 \varepsilon_{i,j,k} \varepsilon_{k,l,m} \partial_j (u_l \omega_m) = \\ &= \sum_{j,l,m=1}^3 [\delta_{i,l} \delta_{j,m} - \delta_{i,m} \delta_{j,l}] [\omega_m \partial_j u_l + u_l \partial_j \omega_m] = \\ &= (\omega \cdot \nabla_x)u_i - \omega_i \text{div}u - (u \cdot \nabla_x)\omega + u_i \text{div}\omega. \end{aligned}$$

L'ultimo termine è nullo perché divergenza di un rotore. Pertanto

$$\frac{D}{Dt} \omega - (\omega \cdot \nabla_x)u + \omega \text{div}u = 0$$

D'altra parte

$$\begin{aligned} \frac{D}{Dt} \frac{\omega}{\rho} &= \frac{1}{\rho} \frac{D\omega}{Dt} - \frac{\omega}{\rho^2} \frac{D\rho}{Dt} = \\ &= \frac{1}{\rho} (\omega \cdot \nabla_x)u - \frac{1}{\rho} \omega \text{div}u + \frac{\omega}{\rho} \text{div}u = (\zeta \cdot \nabla_x)u. \end{aligned}$$

La prova della (16.11) si ottiene differenziando i due membri rispetto al tempo. Si denotino con  $H(X, t)$  e  $G(X, t)$  rispettivamente il primo e secondo membro.

Ovviamente  $H(X, 0) = G(X, 0)$ . La derivata temporale del primo membro è, per l'equazione (16.10)

$$\partial_t H = (H \cdot \nabla_x)u.$$

La derivata del secondo membro è

$$\partial_t G(X, t) = \partial_t F(X, t)\zeta(X, 0) = \nabla_x u(\Phi(X, t), t)F(X, t)\zeta(X, 0) = G(X, t) \cdot \nabla_x u.$$

avendo usato l'espressione della derivata di  $F$  ottenuta nel Capitolo 15. Quindi  $G$  ed  $H$  soddisfano la stessa equazione lineare e lo stesso dato iniziale. Pertanto essi coincidono.  $\square$

### 16.5 Flussi bidimensionali.

Per *flusso bidimensionale* intenderemo ogni flusso per il quale valgono le due seguenti condizioni:

- 1) è invariante per traslazioni lungo un asse (ad esempio  $x_3$ );
- 2) la velocità nella direzione  $x_3$  è nulla.

In un flusso bidimensionale l'equazione (16.10) si semplifica notevolmente. Infatti, se  $u = (u_1, u_2, 0)$  allora  $\omega = (0, 0, \omega_3)$  con

$$\omega_3 = \partial_1 u_2 - \partial_2 u_1.$$

In altri termini  $\omega$  è caratterizzato da una sola quantità scalare  $\omega_3$  che nel seguito indicheremo semplicemente con  $\omega$ . In conseguenza di ciò si ha

$$(\omega \cdot \nabla_x)u = 0.$$

Pertanto la (16.10) diviene (con  $\omega = \omega_3$  e  $\zeta = \zeta_3$ )

$$\frac{D}{Dt}\zeta = 0 \tag{16.12}$$

Quindi *il rapporto  $\zeta = \omega/\rho$  è conservato lungo le traiettorie del flusso:*

$$\zeta(\Phi(X, t), t) = \zeta(X, 0).$$

In particolare, nel caso del fluido incompressibile, per il quale  $\rho = \text{cost}$ , si ha

$$\partial_t \omega + (u \cdot \nabla_x)\omega = 0 \tag{16.13}$$

o equivalentemente

$$\omega(\Phi(X, t), t) = \omega(X, 0)$$

Tale equazione, assieme alle condizioni

$$\operatorname{div} u = 0 \quad (16.14)$$

$$\omega = \partial_1 u_2 - \partial_2 u_1 \quad (16.15)$$

e le opportune condizioni al contorno, caratterizza completamente, come si vedrà nel seguito, i moti del fluido incompressibile bidimensionale ed è il motivo della relativa semplicità di tale sistema.

#### Equazione della vorticità in dimensione 2.

L'equazione (16.13) si presenta in forma molto semplice, ma la sua utilizzabilità pratica sarebbe molto limitata se si dovesse preliminarmente conoscere il campo di velocità  $u$ . Una semplice derivazione fornirebbe allora  $\omega$  senza alcun ricorso alla (16.13). In effetti, mostreremo che il campo  $u$  può in molti casi essere ricostruito a partire da  $\omega$ , fornendo in tal modo un'equazione chiusa nella sola incognita  $\omega$ . In conseguenza di ciò, la soluzione delle equazioni Eulero è ricondotta a quella della (16.13), che è una sola equazione scalare e non contiene l'incognita pressione.

In effetti la costruzione di  $u$  a partire da  $\omega$  è un caso particolare di un problema classico, che pur essendo nato in Idrodinamica, è di interesse più generale:

**Problema:** *dato il campo vettoriale  $\omega$  nell'aperto  $D \subset \mathbb{R}^d$ ,  $d = 2, 3$ , determinare il campo vettoriale  $u$  differenziabile in  $D$  e continuo in  $\overline{D}$ , tale che*

$$\begin{aligned} \omega &= \operatorname{rot} u, & \operatorname{div} u &= 0, & x &\in D, \\ u \cdot n &= 0, & x &\in \partial D. \end{aligned} \quad (16.16)$$

Cominceremo a discutere questo problema nel caso  $d = 2$  e per un dominio  $D$  limitato, semplicemente connesso e dotato di frontiera regolare.

Conviene introdurre la notazione seguente: se  $a = (a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$  è un vettore, il vettore  $a^\perp = (a_2, -a_1)$  denota il vettore che si ottiene da  $a$  con una rotazione di  $\pi/2$  nel verso destrogiro. Analogamente  $\nabla^\perp = (\partial_2, -\partial_1)$ . In  $d = 2$  si ha dunque

$$\operatorname{rot} u = \operatorname{div} u^\perp, \quad \operatorname{div} u = -\operatorname{rot} u^\perp.$$

Inoltre

$$\operatorname{rot} \nabla^\perp = -\Delta.$$

La condizione  $\operatorname{div} u = 0$  equivale ad affermare che  $u^\perp$  ha rotore nullo e questo implica, poiché il dominio  $D$  è semplicemente connesso, che esiste una funzione  $\Psi$  tale che

$$u = \nabla^\perp \Psi. \quad (16.17)$$



La funzione  $\Psi$  è detta *potenziale di corrente* o *stream function* in inglese.

Ricordando che

$$\omega = \operatorname{rot} u = \operatorname{rot} \nabla^\perp \Psi = -\Delta \Psi,$$

e che

$$0 = n \cdot u = n \cdot \nabla^\perp \Psi = \tau \cdot \nabla \Psi,$$

ove  $\tau$  è il versore della tangente a  $\partial D$ , possiamo concludere che  $\Psi$  è determinato come la soluzione del seguente problema al contorno:

$$\begin{aligned} \Delta \Psi &= -\omega & x \in D \\ \Psi &= 0, & x \in \partial D. \end{aligned} \quad (16.18)$$

Infatti, l'annullarsi della derivata tangenziale di  $\Psi$  sul bordo assicura che  $\Psi$  è costante sul bordo e la costante può essere fissata a 0 visto che  $\Psi$  è definito a meno di una costante.

Il problema (16.18) è il problema di Dirichlet per l'equazione di Poisson con densità  $-\omega$ . La sua soluzione esiste unica per  $\omega$  sufficientemente regolare e si scrive

$$\Psi(x) = \int_D dy G_D(x, y) \omega(y),$$

ove  $G_D(x, y)$  è la funzione di Green relativa al dominio  $D$ , cioè la soluzione fondamentale dell'equazione di Laplace in  $D$  con condizioni di Dirichlet:

$$\Delta_x G_D(x, y) = -\delta(x - y), \quad x, y \in D, \quad G_D(x, y) = 0 \quad x \in \partial D. \quad (16.19)$$

Pertanto, posto

$$K_D(x, y) = \nabla_x^\perp G_D(x, y), \quad (16.20)$$

abbiamo

$$u(x) = \int_D dy K_D(x, y) \omega(y) \quad (16.21)$$

o, piú brevemente

$$u = K_D * \omega. \quad (16.22)$$

Si noti che l'espressione (16.21) non è una vera e propria convoluzione, ma useremo ugualmente la notazione (16.22).

Occorre ancora mostrare che la  $u$  così ottenuta è l'unica soluzione del problema (16.16). Basta osservare che, se  $u'$  è un'altra, posto  $v = u - u'$ ,  $v$  soddisfa

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} v &= 0, & \operatorname{div} v &= 0, & x \in D, \\ v \cdot n &= 0, & x \in \partial D. \end{aligned}$$

Essendo  $D$  semplicemente connesso allora  $v = \nabla\phi$  con  $\phi$  soluzione del problema di Neumann

$$\begin{aligned}\Delta\phi &= 0, & x \in D \\ \frac{\partial\phi}{\partial n} &= 0, & x \in \partial D,\end{aligned}$$

che ammette la sola soluzione costante. Pertanto  $v = 0$ .

Per avere un'espressione piú esplicita di  $K_D$ , notiamo che la funzione

$$G(x, y) = -\frac{1}{2\pi} \ln|x - y| \quad (16.23)$$

è la soluzione fondamentale dell'equazione di Laplace in  $\mathbb{R}^2$  che tende a 0 all'infinito. Naturalmente essa non soddisfa le condizioni al bordo su  $\partial D$ . Pertanto  $G_D$  può scriversi

$$G_D = G + \gamma_D,$$

con  $\gamma_D$  soddisfacente le condizioni

$$\begin{aligned}\Delta_x \gamma_D &= 0, & x, y \in D, \\ \gamma_D(x, y) &= -G(x, y), & x \in \partial D, y \in D.\end{aligned}$$

Essendo  $\gamma_D$  una soluzione del problema di Dirichlet per l'equazione di Laplace con dominio e dati regolari, essa è regolare in tutti i punti di  $D$  e le singolarità di  $G_D$  coincidono con quelle di  $G$ . Posto quindi

$$K(x, y) = \nabla_x G(x, y) = -\frac{1}{2\pi} \frac{(x - y)^\perp}{|x - y|^2}, \quad (16.24)$$

si ha

$$K_D = K + \mathcal{K}_D, \quad (16.25)$$

con  $\mathcal{K}_D$  funzione infinitamente differenziabile delle variabili  $x$  ed  $y$ .

Si noti che, per dare senso all'espressione così ottenuta per  $u$  in funzione di  $\omega$  è sufficiente che  $\omega \in L_\infty(D)$ .

Un altro dominio sufficientemente semplice in cui risolvere il problema (16.16) è  $D = \mathbb{R}^2$ . In questo caso molte delle considerazioni svolte prima continuano a essere valide. Le modifiche sono le seguenti:

- a) la condizione  $u \cdot n = 0$  sul bordo non ha piú senso;
- b)  $\mathcal{K}_D = 0$  e quindi  $K_D$  si riduce a  $K$  e la (16.22) è una vera convoluzione;
- c) perché l'espressione  $K * \omega$  abbia senso non basta che  $\omega \in L_\infty(D)$ . È tuttavia sufficiente assumere  $\omega \in L_\infty(D) \cap L_1(D)$ ;
- d) L'unicità non vale piú nel senso precedente, in quanto non vi è piú la condizione al contorno. Occorre specificare il valore  $u_\infty$  di  $u$  per  $|x| \rightarrow \infty$ . Con questa ulteriore condizione la soluzione del problema è unica e si scrive

$$u = K * \omega + u_\infty.$$

Consideriamo ora il caso  $D = \mathbb{T}^2$ , il toro bidimensionale di lato  $2\pi$ . Non essendo bordo, la condizione  $u \cdot n = 0$  perde di senso. Cerchiamo quindi un campo  $u$  *periodico*, di periodo  $2\pi$  in entrambe le variabili, soddisfacente le condizioni del problema (16.16). Osserviamo che, per il teorema di Stokes, se indichiamo con  $\mathcal{C}$  la frontiera del quadrato  $[0, 2\pi] \times [0, 2\pi]$ , si ha

$$\int_{\mathbb{T}^2} \omega dx = \oint_{\mathcal{C}} dl \cdot u$$

e quindi risulta

$$\int_{\mathbb{T}^2} \omega dx = 0, \quad (16.26)$$

in quanto  $u$  è periodico e i contributi dovuti ai lati opposti si cancellano a due a due. Cerchiamo la soluzione  $\Psi$  dell'equazione di Poisson in termini di serie di Fourier: per  $k \in \mathbb{Z}^2$ , avremo

$$k^2 \hat{\Psi}(k) = \hat{\omega}(k), \quad (16.27)$$

ove

$$\hat{f}(k) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{\mathbb{T}^2} dx f(x) e^{-ik \cdot x}$$

sono i coefficienti di Fourier della funzione  $f$ . Per la (16.26) risulta  $\hat{\omega}(0) = 0$  e quindi è soddisfatta la condizione necessaria per la risolubilità della (16.27). Se  $\omega$  è sufficientemente regolare, grazie al teorema di Fourier la serie di Fourier corrispondente è assolutamente convergente e si ha per  $u$  l'espressione

$$u(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^2} \frac{ik^\perp}{|k|^2} \hat{\omega}(k) e^{ik \cdot x}, \quad (16.28)$$

L'unicità segue come prima.

Non discuteremo per brevità i casi, notevolmente più interessanti, dei domini non semplicemente connessi quali l'esterno di un aperto di  $\mathbb{R}^2$ .

### 16.6 Equazione della vorticità in dimensione 3.

In questo caso l'equazione della vorticità è più complessa per la presenza del termine  $\omega \cdot \nabla_x u$ . Si ha infatti, per un fluido incompressibile

$$\partial_t \omega + (u \cdot \nabla_x) \omega - (\omega \cdot \nabla_x) u = 0, \quad (16.29)$$

con  $\omega = \text{rot} u$  e  $\text{div} u = 0$ . Tuttavia, se esprimiamo  $u$  in funzione di  $\omega$ , otteniamo un'equazione (vettoriale) nella sola  $\omega$  che non coinvolge la pressione.

Si tratta quindi di determinare  $u$  tale che

$$\operatorname{div} u = 0, \quad \operatorname{rot} u = \omega$$

per ogni  $\omega$  regolare in un dominio  $D$ . Restringeremo la nostra attenzione ai domini  $D = \mathbb{R}^3$  e  $D = \mathbb{T}^3$ , in quanto negli altri casi, come si vedrà, il problema non è ben posto.

Caso  $D = \mathbb{R}^3$

Poiché  $\operatorname{div} u = 0$ , esiste un *potenziale vettore*  $A$  tale che  $u = \operatorname{rot} A$ . In realtà ne esistono infiniti, in quanto, se  $A' = A + \nabla_x \phi$ , risulta anche  $\operatorname{rot} A' = u$ . Grazie a questo si può assumere  $\operatorname{div} A = 0$ , con un'opportuna scelta di  $\phi$ . Questo è utile in quanto vale l'identità vettoriale

$$\operatorname{rot}(\operatorname{rot} A) = -\Delta A + \nabla_x(\operatorname{div} A).$$

Usando  $\operatorname{div} A = 0$  si ottiene allora per  $A$  l'equazione di Poisson

$$\Delta A = -\omega.$$

La soluzione è

$$A(x) = \frac{1}{4\pi} \int dy \frac{\omega(y)}{|x-y|}$$

e quindi

$$u(x) = \frac{1}{4\pi} \int dy \frac{(x-y) \wedge \omega(y)}{|x-y|^3} := \mathbf{K}\omega,$$

ove

$$(\mathbf{K}\omega)_i(x) = \sum_{j=1}^3 \int dy K_{i,j}(x-y) \omega_j(y)$$

e  $K_{i,j}$  è la matrice definita dalla posizione

$$\mathbf{K}(x)\xi = \frac{1}{4\pi} \frac{x}{|x|^3} \wedge \xi$$

per ogni vettore  $\xi \in \mathbb{R}^3$ .

Caso  $D = \mathbb{T}^3$

Scrivendo

$$A(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^3} \hat{A}(k) e^{ik \cdot x},$$

$$\hat{A}(k) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{\mathbb{T}^3} dx A(x) e^{-ik \cdot x},$$

l'equazione di Poisson diventa

$$k^2 \hat{A}(k) = \hat{\omega}(k),$$

da cui

$$\hat{A}(k) = k^{-2} \hat{\omega}(k),$$

espressione che ha senso perché, come nel caso  $d = 2$   $\hat{\omega}(0) = 0$ . Pertanto

$$\hat{u}(k) = -2 \frac{k}{|k|^2} \wedge \hat{\omega}(k)$$

e quindi

$$u(x) = -2 \sum_{k \in \mathbb{Z}^3} \frac{k}{|k|^2} \wedge \hat{\omega}(k) e^{ik \cdot x}.$$

Concludiamo spiegando perché per un dominio generico il precedente problema della determinazione di  $u$  dato  $\omega$  è mal posto. È facile controllare che, se  $\omega = \text{rot} u$  in  $D$  e  $u \cdot n = 0$  su  $\partial D$ , allora risulta

$$u(x) = \text{rot} \left\{ \int_D dy G(x-y) \omega(y) - \int_{\partial D} d\sigma(y) G(x,y) n(y) \wedge u(y) \right\}, \quad (16.30)$$

ove  $G(x, y)$  è la soluzione fondamentale dell'equazione di Poisson in  $\mathbb{R}^3$ . Per provare tale relazione basta osservare che ovviamente risulta

$$u(x) = -\Delta \int dy G(x, y) u(y),$$

che

$$\Delta = \nabla \text{div} - \text{rot rot}$$

e che

$$\text{rot}_x [G(x, y) u(y)] = -(\nabla_y G(x, y)) \wedge u(y) = G \text{rot} u - \text{rot}_y (G u).$$

Integrando per parti ed usando  $\text{div} u = 0$  si ottiene la (16.30).

La (16.30) non è una soluzione del problema in quanto  $u$  è presente anche nel membro destro, per il tramite della sua parte tangenziale sul bordo. Se si potesse assegnare anche la componente tangenziale di  $u$  sul bordo, essa fornirebbe l'espressione di  $u$  in funzione di  $\omega$ . D'altra parte, assegnare la componente tangenziale di  $u$  sul bordo porterebbe ad un problema al contorno sovradeterminato per l'equazione di Eulero incompressibile, come dimostra il seguente teorema di unicità, la cui dimostrazione è omessa in queste note.

**Teorema di unicità.** *Se  $u$  è una soluzione infinitamente differenziabile dell'equazione di Eulero incompressibile in un dominio limitato  $D$ , soddisfacente la condizione iniziale  $u(x, 0) = u_0(x)$  e la condizione al bordo  $u \cdot n = 0$  su  $\partial D$ . Allora  $u(x, t)$  è l'unica soluzione.*

### 16.7 Flussi potenziali.

Si dice che un flusso  $(X, t) \rightarrow \Phi(X, t)$  è un *flusso potenziale* se il suo campo di velocità è un gradiente, cioè se esiste una funzione scalare  $(x, t) \rightarrow \varphi(x, t)$  tale che  $u(x, t) = \nabla_x \varphi(x, t)$ . Naturalmente *ogni flusso potenziale è irrotazionale*. Il viceversa è in generale falso. Condizione sufficiente perché questo sia vero è che il dominio  $D$  sia semplicemente connesso.

Supponiamo il dominio semplicemente connesso. Allora, ricordando l'identità (16.9), l'equazione di Eulero per un flusso isoentropico irrotazionale soggetto ad una forza conservativa di potenziale  $U$  si scrive

$$\partial_t u + \nabla_x \left\{ \frac{1}{2} u^2 + w + U \right\} = 0.$$

Usando il fatto che il flusso è potenziale, questa diviene

$$\nabla_x \left\{ \partial_t \varphi + \frac{1}{2} u^2 + w + U \right\} = 0$$

e quindi

$$\partial_t \varphi + \frac{1}{2} u^2 + w + U = \text{cost.}$$

Per un fluido incompressibile la stessa condizione vale con  $w$  sostituito da  $p$ . Si noti la relazione tra tale conclusione ed il secondo teorema di Bernoulli, che, nel caso stazionario assicura la costanza di

$$\frac{1}{2} u^2 + w + U$$

per ogni flusso irrotazionale, anche per domini non semplicemente connessi.

Assumiamo ora il fluido incompressibile.

Se il dominio  $D$ , oltre che semplicemente connesso è anche limitato, le condizioni di irrotazionalità e incompressibilità comportano la non esistenza di flussi non banali. Infatti per quanto osservato in precedenza, ogni flusso irrotazionale è potenziale e la condizione di incompressibilità impone a  $\varphi$  di essere armonico:  $\Delta \varphi = 0$ . La condizione al contorno  $u \cdot n$  diviene poi

$$\frac{\partial}{\partial n} \varphi = 0, \quad x \in \partial D$$

e pertanto  $\varphi = \text{cost}$  in quanto questa è l'unica soluzione del problema di Neumann per l'equazione di Laplace su un dominio limitato. In conclusione si ha allora  $u = 0$ .

Pertanto si potranno avere flussi incompressibili irrotazionali interessanti soltanto se il dominio  $D$  è non limitato o non semplicemente connesso.

Lo studio di flussi incompressibili irrotazionali potrebbe apparire di scarso interesse, ma essi invece rappresentano semplici soluzioni stazionarie dell'equazione di Eulero incompressibile. Infatti, usando l'identità (16.9), possiamo concludere che un qualsiasi flusso irrotazionale incompressibile indipendente dal tempo  $u(x)$  è soluzione stazionaria dell'equazione di Eulero: basta infatti scegliere la pressione  $p$  della forma

$$p = -\left[U + \frac{1}{2}u^2\right]$$

per mostrare che esso risolve l'equazione di Eulero stazionaria incompressibile.

D'altra parte, esistono situazioni fisiche molto comuni che sono ben descritte da flussi di questo tipo. Una di queste corrisponde al caso di un dominio  $D$  che è il complemento di un insieme convesso  $\mathcal{O}$  (*flusso con ostacolo*). Tale dominio, in dimensione  $d = 3$  è semplicemente connesso, mentre non lo è in dimensione  $d = 2$ .

Poiché il dominio è illimitato, occorre specificare anche il valore di  $u$  all'infinito:

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} u(x) = u_\infty.$$

Il flusso  $u = u_\infty$  è un flusso potenziale in quanto  $u_\infty = \nabla_x(u_\infty \cdot x)$ . Naturalmente questo flusso non soddisfa la condizione al contorno su  $\partial\mathcal{O}$ . Pertanto, in  $d = 3$  il flusso potenziale  $u$  deve avere la forma

$$u = \nabla_x[\varphi + u_\infty \cdot x]$$

con  $\varphi$  tale che

$$\Delta\varphi = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial n}\varphi + u_\infty \cdot n = 0, \quad x \in \partial\mathcal{O}.$$

e

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} \nabla_x\varphi(x) = 0.$$

La soluzione di tale problema è esplicita in alcuni casi. Si consideri ad esempio

$$\mathcal{O} = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid |x| = 1\}$$

e si assuma  $u_\infty = (1, 0)$ . Ricordando che in coordinate polari si ha

$$\Delta = \partial_r^2 + r^{-1}\partial_r + r^{-2}\partial_\theta^2,$$

si vede subito che in questo caso il flusso potenziale è dato da

$$u = \nabla_x \left[ x_1 + \frac{x_1}{|x|^2} \right].$$

### 16.8 Paradosso di D'Alambert.

Per illustrare le anomalie del comportamento di un fluido ideale incompressibile, si consideri il caso di un fluido incompressibile in un tubo disposto lungo l'asse  $x_1$  e si supponga di applicare in  $x_1 = 0$  una pressione  $p_1$  ed in  $x_1 = L$  una pressione  $p_2 < p_1$ , in modo che il fluido è spinto da sinistra a destra. Cerchiamo una soluzione di forma laminare. cioè

$$u(x, t) = (u_1(x_1, t), 0, 0); \quad p(x, t) = p(x_1, t).$$

Per l'incompressibilità allora  $\partial_1 u_1 = 0$  e quindi l'equazione di Eulero si riduce a

$$\partial_t u_1 = -\partial_1 p.$$

Differenziando quindi

$$\partial_1^2 p = 0$$

e pertanto

$$p = p_1 - \frac{p_1 - p_2}{L} x_1,$$

per cui la pressione risulta stazionaria. In conseguenza

$$u_1 = \frac{p_1 - p_2}{L} t + u_0.$$

In definitiva  $u$  cresce linearmente con il tempo. Tale comportamento contrasta con l'esperienza comune e la ragione risiede nel fatto di aver ignorato gli effetti di attrito interno.

Consideriamo il flusso con ostacolo e domandiamoci quale è la forza che occorre applicare in una situazione concreta per mantenere l'ostacolo fermo. Naturalmente essa è data dall'opposto del risultante degli sforzi che il fluido esercita sull'ostacolo. Essa è cioè, per definizione

$$\mathcal{F} = \int_{\partial\mathcal{O}} d\sigma(x) S(x, t) n(x) = - \int_{\partial\mathcal{O}} d\sigma(x) p(x, t) n(x),$$

avendo tenuto conto che il fluido ideale non esercita sforzi di taglio.

È possibile dimostrare il seguente teorema, di cui si omette la dimostrazione:

**Teorema di Kutta-Joukowski:** *Si consideri il problema con ostacolo in  $d = 2$ . Sia  $u$  il campo di velocità di un flusso irrotazionale incompressibile che tende ad  $u_\infty$  per  $|x| \rightarrow \infty$ . Allora risulta*

$$\mathcal{F} = -\Gamma u_\infty^\perp,$$



ove  $\Gamma$  è la circuitazione di  $u$  su  $\partial\mathcal{O}$ .

Si noti l'aspetto poco intuitivo che la forza è ortogonale a  $u_\infty$ , cioè non vi è una forza che si contrappone al flusso. Inoltre, se  $\Gamma = 0$  la forza è addirittura nulla.

In dimensione  $d = 3$  la situazione è ancora più paradossale:

**Teorema 16.6.** *Nelle stesse condizioni di prima, ma con  $d = 3$  si ha  $\mathcal{F} = 0$ .*

Omettiamo la dimostrazione di tale teorema, ma forniamo un argomento euristico che giustifica tale risultato paradossale.

Cominciamo con il notare che, se  $\Sigma$  è una qualsiasi superficie che contiene  $\mathcal{O}$ , risulta

$$\mathcal{F} = - \int_{\Sigma} d\sigma(x) [u(u \cdot n) + pn].$$

Tale relazione segue integrando l'equazione di Eulero stazionaria sulla regione  $A$  compresa tra le due superfici  $\partial\mathcal{O}$  e  $\Sigma$ , applicando il teorema di Gauss ed usando la condizione al contorno  $u \cdot n = 0$  su  $\partial\mathcal{O}$ . Pertanto la valutazione di  $\mathcal{F}$  può essere ricondotta alla stima di  $u$  e  $p$  su una superficie che va all'infinito.

In dimensione  $d = 3$ , a differenza che in dimensione  $d = 2$ , il dominio  $\mathbb{R}^3 - \mathcal{O}$  è semplicemente connesso e quindi il campo di velocità  $u$  è potenziale. A grande distanza da  $\mathcal{O}$  la soluzione dell'equazione di Laplace è data dal potenziale di dipolo, in quanto la condizione al bordo

$$\frac{\partial}{\partial n} \phi = -u_\infty \cdot n$$

su  $\partial\mathcal{O}$  equivale ad una densità di carica con carica totale nulla.

$$\phi(x) = \frac{C}{|x|^2} + O\left(\frac{1}{|x|^3}\right).$$

Pertanto si ha

$$u = \nabla_x \phi, \quad \varphi = u_\infty \cdot x + \frac{C}{|x|^2} + O\left(\frac{1}{|x|^3}\right)$$

e quindi

$$u = u_\infty + \frac{C}{|x|^3} + O\left(\frac{1}{|x|^4}\right).$$

La pressione  $p$  è data da

$$p = -\frac{1}{2}u^2 = -\frac{1}{2}u_\infty^2 - \frac{1}{2}(u - u_\infty) \cdot (u + u_\infty) = p_\infty + \frac{D}{|x|^3} + O\left(\frac{1}{|x|^4}\right).$$

Quindi, scelta per  $\Sigma$  la superficie di una sfera di raggio  $R$ ,

$$\mathcal{F} = - \int_{\Sigma} d\sigma(x) [p_{\infty} n + u_{\infty} (u_{\infty} \cdot n)] + O\left(\frac{1}{R^3}\right) |\Sigma| = 0 + O\left(\frac{1}{R}\right) \rightarrow 0, \quad R \rightarrow \infty.$$

*Osservazione* Se  $\mathcal{O} = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid |x| < a\}$ ,

$$\varphi(x) = \left(\frac{a^3}{|x|^3} + 1\right) u_{\infty} \cdot x$$

e quindi

$$u = \nabla_x \varphi = u_{\infty} - \frac{a^3}{|x|^3} \left(u_{\infty} - \frac{3(x \cdot u_{\infty})x}{|x|^2}\right).$$

In questo caso l'argomento precedente è rigoroso.

# A. Alcuni ausili matematici

## A.1 Principio di Contrazione.

Sia  $f$  una funzione da uno spazio metrico  $S$  in sé e sia  $d(x, y)$  la metrica in esso definita. Un punto  $x \in S$  si dice *punto fisso* per  $f$  se

$$f(x) = x.$$

Una funzione  $f$  da  $S$  in sé si dice una *contrazione* se esiste  $\lambda$  reale positivo,  $\lambda < 1$ , tale che

$$d(f(x), f(y)) \leq \lambda d(x, y), \quad \forall x, y \in S.$$

**Teorema A.1 (Principio di Contrazione):** *In uno spazio metrico completo, se  $f$  è una contrazione, allora esiste ed è unico il punto fisso per  $f$ .*

Dim:

Unicità: Se  $x_1$  ed  $x_2$  sono due punti fissi,  $x_i = f(x_i)$ . Ma  $f$  è una contrazione. Pertanto

$$d(x_1, x_2) = d(f(x_1), f(x_2)) \leq \lambda d(x_1, x_2),$$

con  $\lambda < 1$ . Ciò è possibile solo se  $d(x_1, x_2) = 0$  e quindi  $x_1 = x_2$ .

Esistenza: Sia  $x_0$  arbitrario ed  $x_n = f(x_{n-1})$  per  $n \geq 1$ . La successione  $\{x_n\}$  è di Cauchy. Infatti, supposto  $m > n$ , risulta

$$d(x_n, x_m) \leq \sum_{k=n}^{m-1} d(x_k, x_{k+1}) \leq \sum_{k=n}^{m-1} \lambda d(x_{k-1}, x_k) \leq \dots \leq \sum_{k=n}^{m-1} \lambda^k d(x_0, x_1).$$

In conseguenza

$$d(x_n, x_m) \leq \lambda^n \sum_{\ell=0}^{m-n-1} \lambda^\ell d(x_0, x_1) \leq d(x_0, x_1) \frac{\lambda^n}{1 - \lambda},$$

che può rendersi minore di un arbitrario  $\varepsilon$  a patto di scegliere  $n$  sufficientemente grande.

Poiché lo spazio metrico è completo, la successione  $\{x_n\}$  è convergente. Sia  $x$  il suo limite. Passando al limite nella relazione  $x_n = f(x_{n-1})$ , si ha

$$x = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n) = f(x),$$

il penultimo passaggio essendo dovuto al fatto che  $f$ , essendo una contrazione, è continua. Ciò prova che  $x$  è punto fisso.

*Osservazione:* Se  $B(x_0, r)$  denota una sfera chiusa di raggio  $r$  di  $S$ , ed  $f$  trasforma  $B(x_0, r)$  in sé, allora il precedente teorema può applicarsi con  $S = B(x_0, r)$ .

## A.2 Teorema della funzione implicita.

Siano  $E$  un sottoinsieme aperto di  $\mathbb{R}^n$ , ed  $F$  e  $G$  due sottoinsiemi aperti di  $\mathbb{R}^m$ . Sia inoltre

$$f : E \times F \rightarrow G,$$

una funzione continua, differenziabile in  $E \times F$  ed ivi limitata. Con  $x$  ed  $y$  si denoteranno il generico elemento di  $E$  e di  $F$  rispettivamente. Inoltre  $D_x f$  e  $D_y f$  denotano i differenziali parziali rispetto alle variabili in  $E$  ed  $F$  rispettivamente.

**Teorema A.2 (della funzione implicita):** *Si supponga che esistono  $a \in E$  e  $b \in F$ , tali che  $f(a, b) = 0$ . Si supponga inoltre che la matrice  $m \times m$ ,  $D_y f(a, b)$  sia non singolare e  $D_y f(x, y)$  continuo in  $(x, y)$ . Allora esistono  $\delta > 0$  e  $\rho > 0$  tali che per  $x \in B_\delta(a) = \{x \mid (x - a)^2 \leq \delta^2\}$ , è definita la funzione*

$$Y : B_\delta(a) \rightarrow B_\rho(b) = \{y \mid (y - b)^2 \leq \rho^2\}$$

tale che

$$f(x, Y(x)) = 0 \tag{A.1}$$

Inoltre  $Y$  è una funzione continua e differenziabile in  $B_\delta(a)$  ed il suo differenziale è dato dall'espressione

$$D_x Y(x) = -D_y f(x, Y(x))^{-1} D_x f(x, Y(x)),$$

il prodotto tra le matrici  $D_y f(x, Y(x))^{-1}$  e  $D_x f(x, Y(x))$  essendo l'usuale prodotto righe per colonne.

Dim: Poiché  $D_y f(a, b)$  è non singolare, per ogni  $Y(x)$  che soddisfa (A.1), vale l'identità

$$D_y f(a, b)^{-1} [D_y f(a, b)Y(x) - f(x, Y(x))] = Y(x)$$

pertanto la trasformazione  $A$  su  $C(E; F)$  definita da

$$(AY)(x) = D_y f(a, b)^{-1} [D_y f(a, b)Y(x) - f(x, Y(x))]$$

avrebbe un punto fisso in corrispondenza della funzione  $Y$  implicitamente definita da (A.1). La dimostrazione dell'esistenza di  $Y$  consiste nella costruzione di un punto fisso per  $A$  in un opportuno spazio metrico.

Tale spazio è definito come segue: sia  $\delta$  tale che  $B_\delta(a) \subset E$  e  $\rho$  tale che  $B_\rho(b) \subset F$ .

$$C_{\delta, \rho} = \{u : B_\delta(a) \rightarrow F \mid u \text{ è continua in } B_\delta(a), u(a) = b \text{ e } |u(x) - b| \leq \rho\}$$

Si definisce la seguente *metrica* su  $C_{\delta,\rho}$ :

$$d(u, v) \equiv \|u - v\| = \sup_{|x-a| \leq \delta} |u(x) - v(x)|.$$

È facile controllare che tale spazio metrico è completo.

$Au$  è ovviamente continua e

$$(Au)(a) = u(a) - D_y f(a, b)^{-1} f(a, u(a)) = u(a) - D_y f(a, b)^{-1} f(a, b) = u(a) = b.$$

**Lemma:** Esistono  $\rho > 0$  e  $\delta > 0$  tali che, se  $u, v \in C_{\delta,\rho}$ , allora

$$|(Au)(x) - (Av)(x)| \leq \frac{1}{2} |u(x) - v(x)|$$

Dim: Siano  $u$  e  $v$  due funzioni in  $C_{\delta,\rho}$ . Aggiungendo e sottraendo  $D_y f(x, u(x))(u(x) - v(x))$ , risulta:

$$\begin{aligned} |(Au)(x) - (Av)(x)| &= |D_y f(a, b)^{-1} \{ [D_y f(a, b) - D_y f(x, u(x))] (u(x) - v(x)) \\ &\quad - [f(x, u(x)) - f(x, v(x))] + D_y f(x, u(x))(u(x) - v(x)) \}| \leq \\ &= \|D_y f(a, b)^{-1}\| [|D_y f(a, b) - D_y f(x, u(x))| \\ &\quad + |D_y f(x, \xi_x) - D_y f(x, u(x))|] |u(x) - v(x)|, \end{aligned}$$

con  $\xi_x$  un opportuno punto del segmento di estremi  $u(x)$  e  $v(x)$ , che si può determinare, a norma del teorema di Lagrange, in modo tale che

$$f(x, u(x)) - f(x, v(x)) = D_y f(x, \xi_x)[u(x) - v(x)].$$

Poiché  $D_y f(x, y)$  è continuo, esistono  $\delta$  e  $\rho$  tali che se  $|x - x'| < \delta$  ed  $|y - y'| < \rho$ , allora

$$|D_y f(x, y) - D_y f(x', y')| \|D_y f(a, b)^{-1}\| \leq \frac{1}{4}.$$

Scegliendo  $\delta$  e  $\rho$  nella definizione di  $C_{\delta,\rho}$  in accordo a tali condizioni risulta

$$|(Au)(x) - (Av)(x)| \leq \frac{1}{2} |u(x) - v(x)|. \quad (A.2)$$

ed il Lemma è dimostrato.

Si definisca  $v(x) = b$  per ogni  $x$ . Ovviamente  $v \in C_{\delta,\rho}$ .

$$(Au)(x) - (Av)(x) = (Au)(x) - b + D_y f(a, b)^{-1}(f(x, b) - f(a, b)),$$

poiché  $f(a, b) = 0$ , mentre  $f(x, b)$  non è in generale nullo. Pertanto, se  $u \in C_{\delta, \rho}$ , allora, per la continuità di  $f$  si può scegliere  $\delta$  in modo tale che

$$\sup_{x \in B_\delta(a)} |D_y f(a, b)^{-1}(f(x, b) - f(a, b))| \leq \frac{1}{2}\rho.$$

Si ha quindi

$$\begin{aligned} |(Au)(x) - b| &\leq |(Au)(x) - (Av)(x)| + |D_y f(a, b)^{-1}(f(x, b) - f(a, b))| \\ &\leq \frac{1}{2}|u(x) - v(x)| + \frac{1}{2}\rho = \frac{1}{2}|u(x) - b| + \frac{1}{2}\rho \leq \rho. \end{aligned}$$

Pertanto  $A$  trasforma  $C_{\delta, \rho}$  in se per  $\delta$  e  $\rho$  sufficientemente piccoli ed inoltre (A.2) implica che  $A$  è una contrazione su  $C_{\delta, \rho}$ , in quanto

$$\|Au - Av\| \leq \frac{1}{2}\|u - v\|.$$

Pertanto il principio di contrazione assicura l'esistenza del punto fisso cercato. Questo può costruirsi come limite della successione  $\{Y_n(x)\}_{n=0}^\infty$  definita dalle posizioni

$$\begin{aligned} Y_0(x) &= b, \\ Y_n(x) &= (AY_{n-1})(x). \end{aligned}$$

La differenziabilità e la formula per la derivata si ottengono facilmente quando si osservi che, per la regola di derivazione della funzione composta, poiché  $f(x, Y(x)) = 0$  per ogni  $x \in B_\delta(a)$ , se la  $Y(x)$  è differenziabile, risulta:

$$0 = D_x[f(x, Y(x))] = D_x f(x, Y(x)) + D_y f(x, Y(x))D_x Y(x).$$

Poiché d'altra parte  $D_y f(x, Y(x))$  è continuo e non singolare per  $x = a$ , tale sarà anche in un intorno di  $(a, b)$  e pertanto la funzione  $D_x Y(x)$  sarà data da

$$D_x Y(x) = -D_y f(x, Y(x))^{-1} D_x f(x, Y(x)). \quad (\text{A.3})$$

Poiché il membro di destra della (A.3) è definito e continuo nell'intorno di  $a$ , per provare la differenziabilità di  $Y(x)$  è sufficiente far vedere che il suo rapporto incrementale converge a  $D_x Y(x)$ . A questo scopo si noti che se  $h \in \mathbb{R}$  è tale che  $x + he_i$  è in  $B_\delta(a)$  e  $Y(x + he_i) \in B_\rho(b)$ , risulta

$$\begin{aligned} 0 &= f(x + he_i, Y(x + he_i)) - f(x, Y(x)) \\ &= [f(x + he_i, Y(x + he_i)) - f(x + he_i, Y(x))] + [f(x + he_i, Y(x)) - f(x, Y(x))] \\ &= D_y f(x + he_i, \xi_{x, h})[Y(x + he_i) - Y(x)] + D_x f(\eta_{x, h}, Y(x))[he_i] \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

per il teorema di Lagrange, con  $\xi_{x,h}$  ed  $\eta_{x,h}$  opportunamente scelti, in dipendenza di  $x$  ed  $h$ , sui segmenti  $\lambda Y(x) + (1 - \lambda)Y(x + he_i)$  e  $\lambda x + (1 - \lambda)(x + he_i)$ , con  $\lambda \in (0, 1)$  rispettivamente. Applicando ad ambo i membri  $D_y f(x + he_i, \xi_{x,h})^{-1}$ , che non è singolare nell'intorno considerato, ed aggiungendo e sottraendo alla (A.4) la quantità  $D_x Y(x)[he_i]$  definita dal secondo membro della (A.3), si ottiene:

$$\begin{aligned} Y(x + he_i) - Y(x) - D_x Y(x)[he_i] = \\ - D_y f(x + he_i, \xi_{x,h})^{-1} D_x f(\eta_{x,h}, Y(x))[he_i] - D_x Y(x)[he_i]. \end{aligned}$$

Il secondo membro di tale equazione, diviso per  $h$ , tende a 0 al tendere di  $h$  a 0, in quanto  $\eta_{x,h} \rightarrow x$  e  $\xi_{x,h} \rightarrow Y(x)$  ed inoltre i differenziali di  $f$  rispetto ad  $x$  ed  $y$  sono continui, per cui

$$\begin{aligned} D_y f(x + he_i, \xi_{x,h})^{-1} D_x f(\eta_{x,h}, Y(x))[e_i] &\rightarrow D_y f(x, Y(x))^{-1} D_x f(x, Y(x))[e_i] \\ &= -D_x Y(x)[e_i]. \end{aligned}$$

Pertanto si ha

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{Y(x + he_i) - Y(x)}{h} - D_x Y(x)[e_i] = 0,$$

che implica la differenziabilità di  $Y(x)$ .

#### TESTI CONSIGLIATI

- L. Arnold *Problemi matematici in Meccanica Classica*, Mir 1980
- C. Cercignani *Spazio, Tempo, Movimento*, Zanichelli, 1987
- G. Gallavotti, *Meccanica Elementare*, Boringhieri 1980
- F.R. Gantmacher *Lezioni di Meccanica Analitica*, Editori Riuniti 1980
- L.D. Landau, E.M. Lifshitz *Meccanica*, Editori Riuniti 1982
- T. Levi-Civita, E. Amaldi *Lezioni di Meccanica Razionale* Zanichelli, 1949
- E. Olivieri *Appunti di Meccanica Razionale*, Aracne 1990