

Groupe de Travail sur les Formes Automorphes

La méthode de Rankin-Selberg

par Emmanuel Pedon (20 janvier 2005)

N.B. Cette note est une paraphrase du §1.6 du livre *Automorphic forms and representations* de Daniel Bump.

1 Motivation

Certains théorèmes (dits *converse theorems*) cités dans l'exposé de M. Pevzner sur les fonctions L et Θ (§2.1) permettent d'assurer l'existence de formes modulaires si l'on est en mesure de prouver un certain nombre de propriétés pour « suffisamment » de fonctions L , notamment si l'on peut obtenir un prolongement analytique et une équation fonctionnelle pour ces fonctions.

Dans cette optique, Rankin (1939) et Selberg (1940) ont proposé (indépendamment) une méthode qui vise à représenter certaines fonctions L comme intégrales d'une fonction automorphe contre une série d'Eisenstein, le principe sous-jacent étant que les qualités analytiques et fonctionnelles des séries d'Eisenstein impliqueront alors des propriétés similaires pour ces fonctions L .

2 Séries d'Eisenstein

Notons comme d'habitude \mathcal{H} le demi-plan de Poincaré et $\Gamma(1)$ le groupe modulaire $SL(2, \mathbb{Z})$. Les **séries d'Eisenstein associées à $\Gamma(1)$** sont les fonctions

$$E(z, s) = \frac{\Gamma(s)}{2} \left(\frac{y}{\pi}\right)^s \sum_{\substack{m, n \in \mathbb{Z} \\ (m, n) \neq (0, 0)}} |cz + d|^{-2s} \quad (1)$$

pour $z = x + iy \in \mathcal{H}$ et s dans un domaine de \mathbb{C} à déterminer.

Théorème.

- 1) Pour tout $z \in \mathcal{H}$, $E(z, s)$ converge absolument pour $\operatorname{Re}(s) > 1$.
- 2) Pour tout $z \in \mathcal{H}$, $E(z, s)$ admet un prolongement méromorphe à \mathbb{C} ; ses seuls pôles sont $s = 0$ et $s = 1$, ils sont simples.
- 3) La fonction $z \mapsto E(z, s)$ est **automorphe**, i.e. $\Gamma(1)$ -invariante à gauche.
- 4) Pour tout $z \in \mathcal{H}$ et tout $s \in \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$,

$$E(z, s) = E(z, 1 - s). \quad (2)$$

- 5) Pour tout $s \in \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$,

$$E(x + iy, s) \underset{y \rightarrow \infty}{=} O(y^\sigma), \quad (3)$$

où $\sigma = \max\{\operatorname{Re}(s), 1 - \operatorname{Re}(s)\}$.

- 6) La fonction $z \mapsto E(z, s)$ est une fonction propre du Laplacien : $\Delta E(\cdot, s) = s(1 - s)E(\cdot, s)$.

Rappelons (voir exposé de L. Foissy) que les points 2, 3, 5 et 6 signifient que pour $s \neq 0, 1$, la fonction $z \mapsto E(z, s)$ est une **forme de Maass**.

Démonstration. Les points 1, 3 et 6 ont déjà été vus dans l'exposé de L. Foissy. Nous ne démontrerons donc que les autres assertions. Commençons par le

Lemme. Pour $y > 0$, $\operatorname{Re}(s) > \frac{1}{2}$ et $r \in \mathbb{R}$, soit

$$\varphi(y, r, s) = \left(\frac{y}{\pi}\right)^s \Gamma(s) \int_{\mathbb{R}} dx e^{2i\pi r x} (x^2 + y^2)^{-s}.$$

Alors

$$\varphi(y, r, s) = \begin{cases} \pi^{\frac{1}{2}-s} y^{1-s} \Gamma(s - \frac{1}{2}) & \text{si } r = 0, \\ 2\sqrt{y}|r|^{s-\frac{1}{2}} K_{s-\frac{1}{2}}(2\pi|r|y) & \text{si } r \neq 0, \end{cases}$$

où K_s désigne la fonction de Bessel

$$K_s(y) = \frac{1}{2} \int_0^\infty dt t^{s-1} e^{-\frac{y}{2}(t+\frac{1}{t})}.$$

Démonstration du lemme. On a

$$\begin{aligned} \varphi(y, r, s) &= \left(\frac{y}{\pi}\right)^s \int_0^\infty dt t^{s-1} e^{-t} \int_{\mathbb{R}} dx e^{2i\pi r x} (x^2 + y^2)^{-s} \\ &= \int_0^\infty \frac{dt}{t} \int_{\mathbb{R}} dx e^{-t} e^{2i\pi r x} \left(\frac{ty}{\pi(x^2 + y^2)}\right)^s \\ &\quad \text{(on a utilisé le théorème de Fubini puisque } \operatorname{Re}(s) > \frac{1}{2}\text{)} \\ &= \int_0^\infty \frac{du}{u} \int_{\mathbb{R}} dx e^{-\pi \frac{u}{y}(x^2+y^2)} e^{2i\pi r x} u^s \\ &\quad \text{(on a posé } t = \pi u(x^2 + y^2)/y\text{)} \\ &= \int_0^\infty \frac{du}{u} u^s e^{-\pi u y} \int_{\mathbb{R}} dx e^{2i\pi r x} e^{-\pi \frac{u}{y} x^2}. \end{aligned}$$

Mais

$$\int_{\mathbb{R}} dx e^{2i\pi r x} e^{-\pi \frac{u}{y} x^2} = \begin{cases} \sqrt{\frac{y}{u}} & \text{si } r = 0, \\ \sqrt{\frac{y}{u}} e^{-\pi \frac{y}{u} r^2} & \text{sinon,} \end{cases}$$

d'où

$$\begin{aligned} \varphi(y, 0, s) &= \int_0^\infty \frac{du}{u} u^s e^{-\pi u y} \sqrt{\frac{y}{u}} \\ &= \sqrt{y} \int_0^\infty \frac{dt}{t} t^{s-\frac{1}{2}} (\pi y)^{\frac{1}{2}-s} e^{-t} \\ &\quad \text{(on a posé } t = \pi u y\text{)} \\ &= \pi^{\frac{1}{2}-s} y^{1-s} \Gamma(s - \frac{1}{2}). \end{aligned}$$

Et, si $r \neq 0$,

$$\begin{aligned} \varphi(y, r, s) &= \sqrt{y} \int_0^\infty \frac{du}{u} u^{s-\frac{1}{2}} e^{-\pi y(u+\frac{r^2}{u})} \\ &= \sqrt{y} \int_0^\infty \frac{dt}{t} t^{s-\frac{1}{2}} |r|^{s-\frac{1}{2}} e^{-\pi y|r|(t+\frac{1}{t})} \\ &\quad \text{(on a posé } u = |r|t\text{)} \\ &= 2\sqrt{y}|r|^{s-\frac{1}{2}} K_{s-\frac{1}{2}}(2\pi|r|y), \end{aligned}$$

cqfd. ✓

Maintenant, supposons $\text{Re}(s) > 1$. Comme la fonction $z \mapsto E(z, s)$ est automorphe, elle est en particulier 1-périodique, et l'on peut écrire son développement de Fourier :

$$E(z, s) = \sum_{r \in \mathbb{Z}} a_r(y, s) e^{2i\pi r x}, \quad (4)$$

avec

$$a_r(y, s) = \int_0^1 dx e^{-2i\pi r x} E(x + iy, s).$$

Nous allons calculer les coefficients a_r en distinguant, dans la définition (1) de $E(z, s)$, la contribution des termes (m, n) avec $m = 0$ de ceux avec $m \neq 0$. Clairement, les termes avec $m = 0$ donnent l'expression

$$\psi(y, s) = \left(\frac{y}{\pi}\right)^s \Gamma(s) \zeta(2s)$$

qui, étant indépendante de r , ne peut contribuer qu'au coefficient a_0 . Examinons maintenant la contribution des termes (m, n) avec $m \neq 0$:

$$a_r(y, s) \underbrace{-\psi(y, s)}_{\text{seulement lorsque } r = 0} = \left(\frac{y}{\pi}\right)^s \Gamma(s) \sum_{m \in \mathbb{N}^*} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \int_0^1 dx e^{-2i\pi r x} [(mx + n)^2 + (my)^2]^{-s}.$$

(On a utilisé le fait que (m, n) et $(-m, -n)$ donnent la même contribution, de sorte que l'on somme seulement sur les m positifs.) Fixons $m \in \mathbb{N}^*$, et écrivons la division euclidienne de tout $n \in \mathbb{Z}$ par m sous la forme $n = pm + q$. On obtient

$$\begin{aligned} & \sum_{n \in \mathbb{Z}} \int_0^1 dx e^{-2i\pi r x} [(mx + n)^2 + (my)^2]^{-s} \\ &= \sum_{p \in \mathbb{Z}} \sum_{q=0}^{m-1} \int_0^1 dx e^{-2i\pi r x} [(m(x+p) + q)^2 + (my)^2]^{-s} \\ &= \sum_{p \in \mathbb{Z}} \sum_{q=0}^{m-1} \int_{-p}^{-p+1} dx e^{-2i\pi r x} e^{2i\pi r p} [(mx + q)^2 + (my)^2]^{-s} \\ &= \sum_{q=0}^{m-1} \int_{\mathbb{R}} dx e^{-2i\pi r x} m^{-2s} [(x + \frac{q}{m})^2 + y^2]^{-s} \\ &= m^{-2s} \int_{\mathbb{R}} dx e^{-2i\pi r x} (x^2 + y^2)^{-s} \underbrace{\sum_{q=0}^{m-1} e^{2i\pi r \frac{q}{m}}}_{= \begin{cases} m & \text{si } m \mid r \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}}. \end{aligned}$$

Ainsi nous avons obtenu :

$$a_r(y, s) \underbrace{-\psi(y, s)}_{\text{seulement lorsque } r = 0} = \left(\frac{y}{\pi}\right)^s \Gamma(s) \sum_{m \mid r} m^{1-2s} \int_{\mathbb{R}} dx e^{-2i\pi r x} (x^2 + y^2)^{-s}.$$

Séparons deux cas. Pour $r = 0$ on a

$$a_0(y, s) - \psi(y, s) = \left(\frac{y}{\pi}\right)^s \Gamma(s) \zeta(2s - 1) \int_{\mathbb{R}} dx e^{-2i\pi r x} (x^2 + y^2)^{-s}.$$

En utilisant le lemme précédent, l'expression de ψ et l'équation fonctionnelle bien connue

$$\zeta(1-s) = \pi^{\frac{1}{2}-s} \frac{\Gamma(\frac{s}{2})}{\Gamma(\frac{1-s}{2})} \zeta(s),$$

on trouve finalement

$$a_0(y, s) = \left(\frac{y}{\pi}\right)^s \Gamma(s) \zeta(2s) + \left(\frac{y}{\pi}\right)^{1-s} \Gamma(1-s) \zeta(2-2s). \quad (5)$$

Lorsque $r \neq 0$, on obtient

$$a_r(y, s) = \left(\frac{y}{\pi}\right)^s \Gamma(s) \int_{\mathbb{R}} dx e^{-2i\pi r x} (x^2 + y^2)^{-s} \sum_{m|r} m^{1-2s}.$$

En notant comme d'habitude

$$\sigma_s(n) = \sum_{m|n} m^s \quad (n \in \mathbb{N}^*),$$

et en utilisant de nouveau le lemme précédent, cette expression s'écrit

$$a_r(y, s) = 2\sqrt{y}|r|^{s-\frac{1}{2}} \sigma_{1-2s}(|r|) K_{s-\frac{1}{2}}(2\pi|r|y). \quad (6)$$

Pour conclure cette preuve, nous avons besoin de rappeler quelques propriétés de la fonction de Bessel K_s , à savoir :

- (i) pour $y > 0$, $K_s(y)$ est définie pour tout $s \in \mathbb{C}$;
- (ii) pour $y > 4$, on a la majoration $|K_s(y)| \leq e^{-\frac{y}{2}} K_{\operatorname{Re}(s)}(2)$;
- (iii) pour $y > 0$, $K_s(y) = K_{-s}(y)$.

La propriété (i) montre que les $a_r(y, \cdot)$ admettent un prolongement analytique à tout \mathbb{C} , sauf $a_0(y, \cdot)$ qui possède deux pôles simples en 0 et 1 (dûs à la fonction Γ ; les deux pôles apparents et dûs à ζ en $\frac{1}{2}$ se détruisent). La propriété (ii) implique la convergence de la série (4), et donc les propriétés analytiques visées des séries d'Eisenstein (l'assertion 2) de notre théorème).

D'autre part, il est facile de voir que

$$r^s \sigma_{-2s}(r) = \prod_{d_1 d_2 = r} \left(\frac{d_1}{d_2}\right)^s = r^{-s} \sigma_{2s}(r).$$

Jointe à la parité (iii) des fonctions de Bessel, cette formule établit l'équation fonctionnelle

$$a_r(y, s) = a_r(y, 1-s)$$

lorsque $r \neq 0$. Comme cette équation est clairement valable pour $r = 0$, on en déduit l'assertion 4) du théorème.

Enfin, la décroissance rapide (ii) des fonctions de Bessel implique une décroissance rapide des coefficients $a_r(y, s)$ lorsque $y \rightarrow \infty$. Par conséquent, le comportement à l'infini de $E(z, s)$ est dicté par celui du coefficient $a_0(y, s)$, et cela prouve la dernière assertion 5). \checkmark

Remarque. Une autre méthode pour démontrer les points 2) et 4) du Théorème consiste à introduire la classique fonction

$$\Theta(t) = \sum_{m, n \in \mathbb{Z}} e^{-\pi |mz+n|^2 \frac{t}{y}} \quad (t > 0).$$

En utilisant la formule de Poisson, on établit l'équation fonctionnelle

$$\Theta(t) = \frac{1}{t} \Theta\left(\frac{1}{t}\right).$$

Ensuite on démontre l'identité

$$E(z, s) = \frac{1}{2} \int_0^\infty dt t^{s-1} [\Theta(t) - 1],$$

dont découlent les propriétés visées.

Il est utile de donner une autre expression aux séries d'Eisenstein; elle est d'ailleurs souvent prise comme définition.

Proposition. *On a*

$$E(z, s) = \frac{\Gamma(s) \zeta(2s)}{\pi^s} \sum_{\overline{\Gamma_\infty \gamma} \in \overline{\Gamma_\infty \backslash \Gamma(1)}} (\operatorname{Im} \gamma(z))^s,$$

où

$$\Gamma_\infty = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, n \in \mathbb{Z} \right\}$$

et $\overline{\Gamma}$ désigne l'image d'un sous-groupe Γ de $SL(2, \mathbb{R})$ dans $PSL(2, \mathbb{R})$.

Démonstration. Commençons par un résultat élémentaire.

Lemme. *Pour toutes matrices $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et $\gamma' = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c & d \end{pmatrix}$ de $\Gamma(1)$ possédant la même deuxième ligne, il existe un unique $n \in \mathbb{Z}$ tel que $\gamma' = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \gamma$.*

Démonstration du lemme. De toute évidence,

$$\begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+nc & b+nd \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Comme $ad - bc = 1 = a'd - b'c$, on a $ad \equiv a'd \pmod{c}$. Mais $c \wedge d = 1$, donc il existe $n \in \mathbb{Z}$ tel que $a' - a = nc$. De même, on voit qu'il existe $m \in \mathbb{Z}$ tel que $b' - b = md$. En écrivant alors $1 = a'd - b'c = (a + nc)d - (b + md)c = ad - bc + (n - m)cd$, on trouve que $n = m$. ✓

Soient $c, d \in \mathbb{Z}$ avec $c \wedge d = 1$. Le lemme implique que l'ensemble des matrices de $\Gamma(1)$ ayant $(c \ d)$ pour deuxième ligne s'écrit sous la forme $\Gamma_\infty \gamma$, où $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ avec a, b tels que $\gamma \in \Gamma(1)$ (ils sont fournis par la propriété de Bézout!). Autrement dit, on a une bijection

$$\begin{aligned} \{(c, d) \in \mathbb{Z}^2 : c \wedge d = 1\} &\longrightarrow \Gamma_\infty \backslash \Gamma(1) \\ (c, d) &\longmapsto \Gamma_\infty \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad \text{avec } ad - bc = 1 \end{aligned}$$

Observons maintenant que

$$\mathbb{Z}^2 = \bigcup_{N \in \mathbb{N}} \bigcup_{\substack{c, d \in \mathbb{Z} \\ c \wedge d = 1}} (Nc, Nd).$$

On peut donc réécrire les séries d'Eisenstein (1) sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} E(z, s) &= \frac{\Gamma(s)}{2\pi^s} \sum_{N \in \mathbb{N}} \sum_{\substack{c \wedge d = 1}} \frac{y^s}{|Ncz + Nd|^{2s}} \\ &= \frac{\Gamma(s) \zeta(2s)}{2\pi^s} \sum_{c \wedge d = 1} \frac{y^s}{|cz + d|^{2s}}. \end{aligned}$$

Mais rappelons que $\operatorname{Im} \gamma(z) = y|cz + d|^{-2}$ si $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. En utilisant la bijection décrite ci-dessus on obtient donc

$$E(z, s) = \frac{\Gamma(s) \zeta(2s)}{2\pi^s} \sum_{\Gamma_\infty \gamma \in \Gamma_\infty \backslash \Gamma(1)} (\operatorname{Im} \gamma(z))^s,$$

d'où le résultat voulu puisque γ et $-\gamma$ ont même image dans $PSL(2, \mathbb{R})$. ✓

Soit $\phi \in C^\infty(\Gamma(1)\backslash\mathcal{H})$ vérifiant la condition de décroissance

$$\phi(x + iy) \underset{y \rightarrow \infty}{=} O(y^{-k}), \quad \forall k > 0. \quad (7)$$

Notons

$$\phi_0(y) = \int_0^1 dx \phi(x + iy)$$

le **terme constant** du développement en série de Fourier de ϕ , et soit

$$\psi_0(s) = \int_0^\infty dy y^{s-1} \phi_0(y)$$

la transformée de Mellin de ϕ_0 . Elle converge absolument pour $\operatorname{Re} s > 0$, puisque d'après (7) ϕ est bornée sur le domaine fondamental, donc ϕ_0 est aussi bornée et décroît rapidement à l'infini.

Proposition. Pour $\operatorname{Re} s > 1$, notons $\Lambda(s) = \frac{\Gamma(s)\zeta(2s)}{\pi^s} \psi_0(s - 1)$.

1) On a

$$\Lambda(s) = \int_{\Gamma(1)\backslash\mathcal{H}} d\mu(z) E(z, s) \phi(z),$$

où $d\mu(z) = \frac{dx dy}{y^2}$ désigne la mesure habituelle sur \mathcal{H} . En particulier,

$$\Lambda(s) = \Lambda(1 - s).$$

2) La fonction Λ admet un prolongement méromorphe à \mathbb{C} , avec au plus deux pôles simples, en $s = 0$ et $s = 1$.

Démonstration. Supposons $\operatorname{Re} s > 1$. On peut alors utiliser la proposition précédente et écrire

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma(1)\backslash\mathcal{H}} d\mu(z) E(z, s) \phi(z) &= \frac{\Gamma(s)\zeta(2s)}{\pi^s} \sum_{\substack{\Gamma_\infty \gamma \in \Gamma_\infty \backslash \Gamma(1) \\ \gamma \in \Gamma(1)\backslash\mathcal{H}}} \int_{\Gamma(1)\backslash\mathcal{H}} d\mu(z) (\operatorname{Im} \gamma(z))^s \phi(z) \\ &= \frac{\Gamma(s)\zeta(2s)}{\pi^s} \int_{\Gamma_\infty \backslash \mathcal{H}} d\mu(z) (\operatorname{Im} z)^s \phi(z), \end{aligned}$$

car ϕ et $d\mu$ sont automorphes. Un domaine fondamental de l'action $\Gamma_\infty \rightsquigarrow \mathcal{H}$ étant par exemple $\{(x, y) : 0 < x < 1, y > 0\}$, on obtient :

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma(1)\backslash\mathcal{H}} d\mu(z) E(z, s) \phi(z) &= \frac{\Gamma(s)\zeta(2s)}{\pi^s} \int_0^\infty dy y^{s-2} \int_0^1 dx \phi(x + iy) \\ &= \frac{\Gamma(s)\zeta(2s)}{\pi^s} \psi_0(s - 1) \\ &= \Lambda(s), \end{aligned}$$

ce qui prouve la première assertion. En outre, en utilisant le prolongement méromorphe de $E(z, s)$ et sa croissance modérée à l'infini (cf. premier théorème), on voit que $\Lambda(s)$ converge pour tout $s \in \mathbb{C}$, sauf peut-être en les pôles de $E(z, \cdot)$ (si ϕ ne les a pas tués). \checkmark

Nous arrivons maintenant au cœur de l'idée développée par Rankin et Selberg.

Théorème. Soient $f, g \in M_k(\Gamma(1))$ des formes propres de Hecke normalisées [cf. exposé de M. Pevzner sur les opérateurs de Hecke], avec f ou/et g cuspidale(s). On note comme d'habitude $f(z) = \sum_{n \in \mathbb{N}} A(n)q^n$ et $g(z) = \sum_{n \in \mathbb{N}} B(n)q^n$ leurs développements respectifs en série de Fourier. Posons, pour $\operatorname{Re} s$ suffisamment grand :

$$\begin{aligned} L(s, f \times g) &= \zeta(2s - 2k + 2) \sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{A(n)B(n)}{n^s}, \\ \Lambda(s, f \times g) &= \frac{\Gamma(s)\Gamma(s - k + 1)}{(2\pi)^{2s}} L(s, f \times g). \end{aligned}$$

Alors la fonction $\Lambda(\cdot, f \times g)$ admet un prolongement méromorphe à \mathbb{C} , avec au plus deux pôles simples en $s = k - 1$ et $s = k$. Elle vérifie en outre l'équation fonctionnelle

$$\Lambda(s, f \times g) = \Lambda(2k - 1 - s, f \times g).$$

Démonstration. Posons $\phi(z) = f(z)\overline{g(\bar{z})}y^k$. Comme f ou g est cuspidale, on voit que ϕ vérifie la condition de décroissance (7). D'autre part on a déjà expliqué que ϕ est automorphe [cf. produit scalaire de Petersson, troisième exposé de L. Jager]. Par suite, on peut définir les fonctions $\phi_0, \psi_0, \Lambda(s)$ comme précédemment. Commençons par calculer

$$\begin{aligned} \phi_0(y) &= \int_0^1 dx f(x + iy)\overline{g(x + iy)}y^k \\ &= \sum_{n,m \in \mathbb{N}} \int_0^1 dx A(n)e^{2i\pi nx} e^{-2\pi ny} \overline{B(m)}e^{-2i\pi mx} e^{-2\pi my} y^k \\ &= \sum_{n,m \in \mathbb{N}} A(n)\overline{B(m)}e^{-2\pi(n+m)y} y^k \int_0^1 dx e^{2i\pi(n-m)x} \\ &= \sum_{n \in \mathbb{N}} A(n)B(n)e^{-4\pi ny} y^k. \end{aligned}$$

Ici, on a utilisé le fait que les $B(n)$ sont réels, puisque ce sont des valeurs propres pour les opérateurs de Hecke (c'est ici que sert le fait que f et g sont normalisées), qui sont autoadjoints. Ensuite, on trouve

$$\begin{aligned} \psi_0(y) &= \sum_{n \in \mathbb{N}} A(n)B(n) \int_0^\infty dy y^{s+k-1} e^{-4\pi ny} \\ &= \frac{\Gamma(s+k)}{(4\pi)^{s+k}} \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{A(n)B(n)}{n^{s+k}}, \end{aligned}$$

et donc

$$\Lambda(s) = \frac{\Gamma(s)\zeta(2s)}{\pi^s} \frac{\Gamma(s+k-1)}{(4\pi)^{s+k-1}} \sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{A(n)B(n)}{n^{s+k-1}}.$$

On en déduit immédiatement que

$$\Lambda(s-k+1) = \pi^{k-1} \Lambda(s, f \times g),$$

si bien que les résultats escomptés découlent de la proposition précédente. \checkmark

Le produit $f \times g$ s'appelle **convolution de f et g** . Il faut bien comprendre qu'il n'a (en général) qu'une existence formelle à travers la fonction $L(\cdot, f \times g)$, même si les *converse theorems* cités dans l'introduction suggèrent que ce soit un bon candidat pour définir une forme automorphe.

Avant d'énoncer le dernier résultat de cet exposé, rappelons les développements eulériens valables pour des formes propres de Hecke normalisées f et g [cf. exposé de M. Pevzner sur les opérateurs de Hecke] :

$$\begin{aligned} L(s, f) &= \sum_{n \in \mathbb{N}} A(n)n^{-s} = \prod_{p \in \mathbb{P}} (1 - A(p)p^{-s} + p^{k-1-2s})^{-1}, \\ L(s, g) &= \sum_{n \in \mathbb{N}} A(B)n^{-s} = \prod_{p \in \mathbb{P}} (1 - B(p)p^{-s} + p^{k-1-2s})^{-1}, \end{aligned}$$

et factorisons les polynômes de Hecke correspondants :

$$1 - A(p)X + p^{k-1}X^2 = (1 - \alpha_1(p)X)(1 - \alpha_2(p)X), \quad (8)$$

$$1 - B(p)X + p^{k-1}X^2 = (1 - \beta_1(p)X)(1 - \beta_2(p)X). \quad (9)$$

Théorème. Avec les hypothèses et les notations précédentes, on a :

$$L(s, f \times g) = \prod_{p \in \mathbb{P}} \prod_{i,j=1}^2 (1 - \alpha_i(p)\beta_j(p)p^{-s})^{-1}.$$

Démonstration. L'essentiel réside dans le

Lemme. Si

$$\sum_{r \in \mathbb{N}} A(r)x^r = (1 - \alpha_1 x)^{-1}(1 - \alpha_2 x)^{-1} \quad \text{et} \quad \sum_{r \in \mathbb{N}} B(r)x^r = (1 - \beta_1 x)^{-1}(1 - \beta_2 x)^{-1},$$

alors

$$\sum_{r \in \mathbb{N}} A(r)B(r)x^r = (1 - \alpha_1 \alpha_2 \beta_1 \beta_2 x^2) \prod_{i,j=1}^2 (1 - \alpha_i \beta_j x)^{-1}.$$

Démonstration du lemme. Notons $\phi(y) = \sum A(r)y^r$ et $\psi(y) = \sum B(r)y^r$ et observons que ϕ (resp. ψ) admet pour pôles simples $1/\alpha_1$ et $1/\alpha_2$ (resp. $1/\beta_1$ et $1/\beta_2$). Soit $x \in \mathbb{C}$, et soit \mathcal{C}_x un cercle centré en l'origine, orienté dans le sens positif et tel que

- (i) les pôles de $y \mapsto \psi(\frac{1}{y})$, à savoir β_1 et β_2 , sont situés à l'intérieur de \mathcal{C}_x ;
- (ii) les pôles de $y \mapsto \phi(xy)$, à savoir $\frac{1}{\alpha_1 x}$ et $\frac{1}{\alpha_2 x}$, sont situés à l'extérieur de \mathcal{C}_x .

Ceci est possible dès que x est assez petit, ce qui est suffisant. Posons

$$I(x) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\mathcal{C}_x} \frac{dy}{y} \phi(xy)\psi(y^{-1}).$$

D'une part,

$$\begin{aligned} I(x) &= \sum_{r,r' \in \mathbb{N}} A(r)B(r')x^r \frac{1}{2i\pi} \int_{\mathcal{C}_x} \frac{dy}{y} y^{r-r'} \\ &= \sum_{r \in \mathbb{N}} A(r)B(r)x^r, \end{aligned}$$

puisque

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{\mathcal{C}_x} \frac{dy}{y} y^{r-r'} = \begin{cases} 0 & \text{si } r \neq r', \\ \text{ind}_{\mathcal{C}_x}(0) = 1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

D'autre part,

$$I(x) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\mathcal{C}_x} \frac{dy}{y} (1 - \alpha_1 xy)^{-1} (1 - \alpha_2 xy)^{-1} (1 - \frac{\beta_1}{y})^{-1} (1 - \frac{\beta_2}{y})^{-1}.$$

Vu la définition de \mathcal{C}_x , cette expression vaut la somme des résidus de l'intégrand en $y = \beta_1$ et $y = \beta_2$, c'est-à-dire l'expression voulue. \checkmark

L'application de ce lemme à $x = p^{-s}$ donne alors

$$\begin{aligned} \prod_{p \in \mathbb{P}} \prod_{i,j=1}^2 (1 - \alpha_i(p)\beta_j(p)p^{-s})^{-1} &= \prod_{p \in \mathbb{P}} (1 - \underbrace{\alpha_1(p)\alpha_2(p)\beta_1(p)\beta_2(p)}_{= p^{2k-2} \text{ d'après (8) et (9)}} p^{-2s})^{-1} \\ &\quad \times \prod_{p \in \mathbb{P}} \sum_{r \in \mathbb{N}} A(r)B(r)p^{-rs} \\ &= \zeta(2s - 2k + 2) \sum_{n \in \mathbb{N}^*} A(n)B(n)n^{-s} \\ &= L(s, f \times g), \end{aligned}$$

cqfd. \checkmark