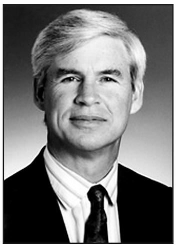
Коинтеграция



В 2003 году Шведская академия наук объявила о присуждении Нобелевской премии по экономике Роберту Энглу и Клайву Грэнджеру за «методы анализа экономических временных рядов с общим трендом», так называемые методы коинтеграции. Их статья, перевод которой приводится ниже, заложила основы в этой области и изменила подходы прикладных макроэкономистов к анализу данных.

Идея коинтеграции является очень естественным развитием идеи экономического равновесия, если принять во внимание нестационарность большинства макроэкономических переменных. В то время как стационарные временные переменные принимают значения недалеко от своего среднего, часто возвращаясь к нему, для нестационарных переменных ожидаемое время возврата к среднему бесконечно, и они обладают свойством далеко уходить от своего среднего. Нестационарность большинства макроиндикаторов — это хорошо изученная эмпирическая данность. Зачастую экономическое равновесие понимается как связь между несколькими переменными, «подталкивающая» некоторую линейную комбинацию этих переменных к нулю настолько сильно, что отклонения от нуля очень незначительны. Таким образом, эта линейная комбинация нестационарных переменных оказывается стационарной, а изначальные переменные коинтегрированными.

Хотя сама концепция коинтеграции очень естественна, эконометрические методы, необходимые для работы с ней, существенно отличаются от классических эконометрических принципов, используемых в микроэконометрике. Различия в методах столь существенны, что при первом прочтении приведенная ниже статья может вызвать удивление у читателя, хорошо знакомого с классической эконометрикой. Начнем с того, что большая часть классического регрессионного анализа построена на понятии экзогенности, в то время как коинтеграционные регрессии дают состоятельные оценки, даже если все переменные эндогенны, более того, прямая и обратная регрессии дают практически одинаковый результат — вещь, невозможная в микроэконометрике.

Сложность работы с коинтеграцией заключается в том, что знакомые эконометристам статистики сходятся к нестандартным асимптотическим распределениям и требуют нестандартных критических значений. Энгл и Грэнджер показывают, что вполне естественное желание избежать эти сложности путем перехода к первым разностям переменных является ошибочным шагом и ведет к существенно смещенным ошибкам. Смещение в оценках возникает из-за того, что та самая стационарная линейная комбинация нестационарных переменных является необходимым регрессором в регрессии первых разностей. Эта регрессия называется моделью коррекции ошибок. Авторы рассматривают вопрос двухшаговой оценки модели коррекции ошибок, а также вопрос тестирования коинтеграции.

Идеи и статьи Энгла и Грэнджера выделили макроэконометрику и теорию временных рядов в отдельный раздел экономики. Роберт Энгл известен также своими работами по стохастической волатильности (модели ARCH и GARCH), которые были названы в официальном объявлении Нобелевского комитета. Клайв Грэнджер является автором известной концепции «причинности по Грэнджеру». Авторы проработали в университете Калифорнии в Сан-Диего около 30 лет, прежде чем вышли на пенсию в 2003 году. Клайв Грэнджер ушел из жизни в 2009 году.

А. Е. Микушева

Прикладная эконометрика, 2015, 39 (3), с. 107–135.
Applied Econometrics, 2015, 39 (3), pp. 107–135.

Co-Integration and Error Correction: Representation, Estimation, and Testing

Robert F. Engle and C. W. J. Granger

Коинтеграция и коррекция ошибок: представление, оценивание и тестирование[1]

Роберт Ф. Энгл, К. У. Дж. Грэнджер[2]

В работе исследуется взаимосвязь между моделями коинтеграции и коррекции ошибок, изначально предложенная в (Granger, 1981), предлагаются новые методы оценивания и тестирования, рассматриваются эмпирические примеры.

Если каждая компонента векторного временного ряда x_t не стационарна, но становится стационарной после взятия первых разностей, а некоторая линейная комбинация $\alpha' x_t$ стационарна, такой временной ряд называется коинтегрированным с коинтеграционным вектором α. Если существует несколько линейно независимых коинтеграционных векторов, то в этом случае α — это матрица, составленная построчно из коинтеграционных векторов. Если интерпретировать равенство $\alpha' x_t = 0$ как долгосрочное равновесие, то наличие коинтеграции означает, что отклонение от равновесия является стационарным, с ограниченной дисперсией, даже в том случае, когда исходные ряды являются нестационарными и имеют бесконечную дисперсию.

В статье доказана теорема о представлении, основанная на статье (Granger, 1983), в которой связываются понятия скользящего среднего, авторегрессии и коррекции ошибок для коинтегрированных систем. Векторная авторегрессия в разностях

---

[1] Оригинальная статья: Robert F. Engle and C. W. J. Granger (1987). Co-Integration and Error Correction: Representation, Estimation, and Testing. Econometrica, Vol. 55, No. 2 (Mar., 1987), pp. 251–276. © Econometric Society.

Редакция благодарит Econometric Society за разрешение на публикацию перевода статьи.

Перевод статьи выполнен под редакцией П. К. Катышева.

[2] **Robert Fry Engle —** Professor, New York University Stern School of Business.
Clive William John Granger (1934–2009).

Авторы выражают благодарность David Hendry и Sam Yoo за множество важных и полезных обсуждений и предложений, так же как и Gene Savin, David Dickey, Alok Bhargava и Marco Lippi. Они признательны двум рецензентам за детальную конструктивную критику, а также Yoshi Baba, Sam Yoo и Alvaro Ecribano за творчески выполненные численные расчеты и примеры. Исследование выполнено при финансовой поддержке Национального научного фонда (США) SES-80–08580 и SES-82–08626. Предыдущая версия этой статьи называлась «Спецификация динамической модели с равновесными ограничениями: Коинтеграция и коррекция ошибок».

несовместима с этими представлениями. В статье предложена простая, но асимптотически эффективная двухшаговая оценка. Тестирование коинтеграции сочетает в себе задачи тестирования единичных корней и тесты с параметрами, неидентифицируемыми при нулевой гипотезе. Предложены и проанализированы семь тестовых статистик. Методом Монте-Карло получены критические значения этих статистик. Мощность предложенных тестов проанализирована с использованием полученных критических значений, и одна процедура тестирования рекомендуется для применения. В ряде примеров было обнаружено, что потребление и доход, краткосрочные и долгосрочные процентные ставки являются коинтегрированными, заработные платы и цены не коинтегрированы, номинальный ВНП коинтегрирован с M2, но не с M1, M3 или с совокупными ликвидными активами.

Ключевые слова: коинтеграция; векторная авторегрессия; единичные корни; коррекция ошибок; многомерные временные ряды; тесты Дики–Фуллера.

JEL classification: C01; C12; C30; C33; C51[3].

1. Введение

Индивидуальная экономическая переменная, рассматриваемая как временной ряд, может меняться весьма значительно, однако встречаются такие переменные, от которых можно ожидать, что, будучи объединенными в пару, подобные ряды будут не слишком удаляться друг от друга. Обычно экономическая теория предлагает некоторый механизм, удерживающий такие ряды вместе. Примерами могут быть краткосрочные и долгосрочные процентные ставки, ассигнования капитала и расходы, доходы и расходы домохозяйств, цены одного товара на различных рынках или цены близких товаров-заменителей на одном рынке. Подобная идея возникает при взгляде на равновесие как на стационарное состояние, в которое стремится вернуться экономика при любом отклонении от этого состояния. Если x_t является вектором экономических переменных, то можно сказать, что равновесие достигается при выполнении линейного ограничения:

$$\alpha' x_t = 0.$$

Как правило, x_t не будет находиться в равновесии, и поэтому одномерную переменную $z_t = \alpha' x_t$ можно назвать ошибкой или отклонением от равновесия. Если понятие равновесия дает правильную спецификацию эконометрической модели, то экономика должна предпочитать малое значение z_t большому.

Эти идеи легли в основу данной статьи, и с их помощью показано, что в классе моделей, известных как модели коррекции ошибок, долгосрочные компоненты переменных связаны условиями равновесия, в то время как краткосрочные имеют гибкую динамическую спецификацию. Для того чтобы это утверждение было верным, используется условие коинтеграции, которое впервые было введено в работах (Granger, 1981) и (Granger, Weiss, 1983); его точное определение дано в следующем разделе. В разделе 3 обсуждаются несколько представлений коинтегрированных систем, раздел 4 содержит описание процедур оценивания, а в разделе 5 приведены соответствующие тесты. Некоторые приложения представлены в разделе 6, раздел 7 содержит выводы. В разделе 4 детально рассмотрен простой пример, который может быть полезен для мотивации изучения таких систем.

---

[3] JEL classification добавлены редактором.

2. Интеграция, коинтеграция и коррекция ошибок

Согласно теореме Вольда, всякий одномерный стационарный временной ряд без детерминированной компоненты может быть представлен как некоторый процесс бесконечного скользящего среднего, который также можно аппроксимировать процессом скользящего среднего конечного порядка. Более подробно см. (Box, Jenkins, 1970) или (Granger, Newbold, 1977). Часто, однако, для обеспечения стационарности экономических рядов необходимо брать разности. Это приводит к следующему известному определению интеграции.

Определение. *Временной ряд без детерминированной компоненты называется интегрированным порядка d и обозначается* $x_t \sim I(d)$, *если его разность порядка d допускает стационарное обратимое ARMA представление*.

В большей части статьи для простоты будут рассмотрены только значения $d = 0$ и $d = 1$, но почти все результаты могут быть обобщены на другие случаи, включая дробную разностную модель. Таким образом, если $d = 0$, то сам ряд x_t будет стационарным, а для $d = 1$ он будет стационарен в первой разности.

Поведение $I(0)$ и $I(1)$ рядов существенно отличается. Для детального рассмотрения см., например, (Feller, 1968) или (Granger, Newbold, 1977).

(a) Если $x_t \sim I(0)$ и имеет нулевое среднее, то: (i) дисперсия x_t ограничена; (ii) инновации (шоки) имеют только кратковременный эффект на значения x_t; (iii) спектр $f(\omega)$ ряда x_t обладает свойством $0 < f(0) < \infty$; (iv) среднее время между последовательными пересечениями уровня $x = 0$ конечно; (v) автокорреляции ρ_k быстро убывают с ростом k, так что их сумма ограничена.

(b) Если $x_t \sim I(1)$ с $x_0 = 0$, то: (i) дисперсия x_t стремится к бесконечности при $t \to \infty$; (ii) инновации имеют постоянный эффект на значение x_t, т. к. x_t представляет из себя сумму всех предыдущих изменений; (iii) при малых ω спектр x_t имеет аппроксимацию $f(\omega) \sim A\omega^{-2d}$, в частности $f(0) = \infty$; (iv) среднее время между последовательными пересечениями уровня $x = 0$ равно бесконечности; (v) теоретические автокорреляции $\rho_k \to 1$ для всех k при $t \to \infty$.

Бесконечность теоретической дисперсии временного ряда $I(1)$ объясняется полностью вкладом низких частот или долгосрочной части этого ряда. Поэтому по сравнению с рядом $I(0)$ ряд $I(1)$ более гладкий, имеет доминирующие длинные колебания. Из-за относительных размеров дисперсий сумма ряда $I(0)$ и ряда $I(1)$ есть ряд $I(1)$. Более того, если a и b константы, $b \neq 0$, и если $x_t \sim I(d)$, то $a + bx_t$ также будет рядом $I(d)$.

Если оба ряда x_t, y_t являются $I(d)$, то в общем случае линейная комбинация

$$z_t = x_t - ay_t$$

также будет $I(d)$. Однако, возможно, что $z_t \sim I(d - b)$, $b > 0$. Это означает, что на долгосрочные компоненты рядов накладывается некоторое специфическое ограничение. Рассмотрим случай $d = b = 1$, т. е. x_t, y_t являются $I(1)$ с доминирующими долгосрочными компонентами, но z_t является $I(0)$ без сильных низких частот. Иными словами, константа a выбрана так, что долгосрочные компоненты x_t и y_t в основном компенсируются. Если же $a = 1$, то расплывчатое утверждение «x_t и y_t не могут отклоняться слишком далеко друг от друга» приобретает более точную форму: «разность x_t и y_t есть $I(0)$». Использование постоянной a попросту означает некоторое масштабирование, которое должно быть использовано перед взятием разности $I(0)$. Следует подчеркнуть, что такое *a*, для которого $z_t \sim I(0)$, может и не существовать.

Аналогичный случай: линейная комбинация z_t пары временных рядов x_t и y_t, каждый из которых содержит значимые сезонные компоненты, не будет содержать сезонности. Понятно, что такое может происходить, но весьма редко.

Для формализации этих идей вводится следующее определение из (Granger, 1981; Granger, Weiss, 1983).

Определение. *Компоненты векторного временного ряда* x_t *называются коинтегрированными порядка d, b и обозначаются* $x_t \sim CI(d,b)$, *если:* (i) *все компоненты* x_t *являются* $I(d)$; (ii) *существует вектор* $\alpha(\neq 0)$ *такой, что* $z_t = \alpha' x_t \sim I(d-b)$, $b > 0$. *Вектор* α *называется коинтеграционным вектором.*

В случае $d = 1$, $b = 1$ наличие коинтеграции означает, что все компоненты вектора x_t являются рядами $I(1)$, а ошибка равновесия z_t есть $I(0)$. Значит, если z_t имеет нулевое среднее, то этот ряд будет редко далеко отклоняться от нуля и часто пересекать нулевой уровень. Иными словами, время от времени будет достигаться точное равновесие или близкое к нему состояние. В то же время, если x_t не является коинтегрированным, процесс z_t может блуждать, далеко отклоняясь от нуля и редко пересекая нулевой уровень, и в этом случае теория равновесия не имеет практического значения. Возможность снижения порядка интеграции означает наличие специальных отношений, следствия которых можно интерпретировать и тестировать. Однако, если все элементы x_t уже являются стационарными, т. е. $I(0)$, то ошибка равновесия z_t не имеет отличительных свойств, если она тоже есть $I(0)$. Возможно, что $z_t \sim I(-1)$, тогда его спектр равен нулю на нулевой частоте, но если любая из переменных содержит ошибку измерения, это свойство может быть не выполнено в общем случае, и поэтому данный случай не представляет практического интереса. При интерпретации концепции коинтеграции можно отметить, что в случае $N = 2$, $d = b = 1$ Granger и Weiss (1983) показали, что необходимым и достаточным условием коинтеграции является когерентность между двумя рядами на нулевой частоте.

Если x_t имеет *N* компонент, может существовать более чем один коинтеграционный вектор α. Очевидно, возможно несколько равновесных соотношений управления совместным поведением переменных. В дальнейшем будем предполагать, что существует ровно *r*, $r \leq N-1$, линейно независимых коинтеграционных векторов, образующих матрицу α размерности $N \times r$. По построению ранг α равен *r*, и это число будет называться коинтеграционным рангом ряда x_t.

Далее будет установлена тесная связь между коинтеграцией и моделями коррекции ошибок. Механизмы коррекции ошибок широко используются в экономике. Ранние версии рассмотрены в (Sargan, 1964; Phillips, 1957). Идея состоит в том, что некоторая доля отклонения от равновесия в какой-то промежуток времени корректируется в следующем промежутке. Например, изменение в цене за один период может зависеть от степени избыточного спроса в предшествующем периоде. Похожая ситуация возникает в задачах оптимального поведения при наличии издержек адаптации или в условиях неполноты информации. В последнее время эти модели вызвали большой интерес с учетом результатов работ (Davidson et al., 1978; Hendry, von Ungern-Sternberg, 1980; Currie, 1981; Dawson, 1981; Salmon, 1982) и многих других.

В типичной модели коррекции ошибок для системы с двумя переменными изменение одной переменной зависит от ошибки равновесия в предыдущие моменты времени и от изменения обеих переменных в прошлом. Для многомерной системы модель коррекции ошибок можно определить с помощью оператора сдвига по времени B следующим образом.

Определение. *Векторный временной ряд* x_t *допускает представление в виде модели коррекции ошибок, если*

$$A(B)(1-B)x_t = -\gamma z_{t-1} + u_t,$$

где u_t *является стационарным многомерным возмущением,* $A(0) = I$, *все элементы матрицы* $A(1)$ *конечны,* $z_\tau = \alpha' x_\tau$ и $\gamma \neq 0$.

В этом представлении объясняющей переменной является только неравновесие в предыдущем периоде. Тем не менее, за счет перегруппировки членов модель с любым числом лагов величины z может быть представлена в этой форме, таким образом, модель позволяет описывать любой способ сходимости к равновесию. Заметное различие между этим определением и большинством встречавшихся приложений состоит в том, что в многомерном случае определение не опирается на экзогенность подмножества переменных. Ситуация, когда одна переменная является слабо экзогенной в смысле (Engle et al., 1983), также может быть исследована в рамках данного подхода, что кратко обсуждается ниже. Второе существенное различие состоит в том, что a рассматривается как вектор неизвестных параметров, а не набор констант, представленных экономической теорией.

3. Свойства коинтеграционных переменных и их представления

Пусть каждая компонента вектора x_t является временным рядом $I(1)$, причем первая разность каждой компоненты есть чисто недетерминированный стационарный случайный процесс с нулевым средним. Любые известные детерминированные компоненты могут быть вычтены перед началом анализа. Тогда процесс x_t допускает многомерное представление Вольда

$$(1-B)x_t = C(B)\varepsilon_t \tag{3.1}$$

в том смысле, что левая и правая части имеют одну и ту же спектральную матрицу. При этом матрица $C(B)$ однозначно определяется такими условиями: нули функции $\det[C(z)]$, $z = e^{i\omega}$ лежат на границе или вне единичного круга, и $C(0) = I_N$ — единичная матрица размерности $N \times N$ (см. (Hannan, 1970, p. 66)). Здесь ε_t — белый шум с нулевым средним,

$$\mathrm{E}[\varepsilon_t \varepsilon_s'] = \begin{cases} 0, & t \neq s, \\ G, & t = s. \end{cases}$$

Перегруппировкой слагаемых полином скользящего среднего $C(B)$ всегда может быть представлен в виде

$$C(B) = C(1) + (1-B)C^*(B). \tag{3.2}$$

Если $C(B)$ имеет конечный порядок, то $C^*(B)$ тоже будет иметь конечный порядок. Если $C^*(1)$ тождественно равен нулю, то можно получить аналогичное представление с сомножителем $(1-B)^2$.

Связь между моделями коррекции ошибок и коинтеграцией впервые была отмечена в статье (Granger, 1981). Теорема о том, что коинтегрированный ряд может быть представлен моделью коррекции ошибок, была сформулирована и доказана в (Granger, 1983). Поэтому ее версия, сформулированная ниже, называется теоремой Грэнджера о представлении. Анализ похожих, но более сложных случаев представлен в статьях (Johansen, 1985; Yoo, 1985).

Теорема Грэнджера о представлении. *Пусть $N\times 1$-вектор x_t в (3.1) является коинтегрированным с $d=1$, $b=1$, и коинтеграционный ранг равен r. Тогда:*

(1) *матрица $C(1)$ имеет ранг $N-r$;*

(2) *существует векторное ARMA представление*

$$A(B)x_t = d(B)\varepsilon_t, \tag{3.3}$$

при этом матрица $A(1)$ имеет ранг r, $d(B)$ является скалярным полиномом, величина $d(1)$ ограничена и $A(0)=I_N$; если $d(B)=1$, то это векторная авторегрессия;

(3) *существуют матрицы α, γ размера $N\times r$ и ранга r такие, что:*

$$\alpha' C(1)=0,\ C(1)\gamma=0,\ A(1)=\gamma\alpha';$$

(4) *существует представление в виде модели коррекции ошибок с вектором стационарных случайных переменных $z_t=\alpha' x_t$ размерности $r\times 1$:*

$$A^*(B)(1-B)x_t = -\gamma z_{t-1} + d(B)\varepsilon_t \tag{3.4}$$

с $A^*(0)=I_N$;

(5) *вектор z_t удовлетворяет соотношениям*

$$z_t = K(B)\varepsilon_t, \tag{3.5}$$

$$(1-B)z_t = -\alpha'\gamma z_{t-1} + J(B)\varepsilon_t, \tag{3.6}$$

где $K(B)$ есть $r\times N$-матрица лаговых полиномов, равная $\alpha' C^*(B)$, все элементы матрицы $K(1)$ конечны и имеют ранг r, и $\det(\alpha'\gamma)>0$;

(6) *если существует представление в виде конечной авторегрессии, то оно имеет вид* (3.3) *и* (3.4) *с $d(\mathrm{B})=1$ и матрицами конечных полиномов $A(B)$ и $A^*(B)$.*

Для доказательства теоремы нам необходимы следующие утверждения о детерминантах и присоединенных матрицах для сингулярных матричных полиномов.

Лемма 1. *Пусть $G(\lambda)$ — матричный полином размерности $N\times N$, принимающий конечные значения для $\lambda\in[0,1]$. Пусть также ранг матрицы $G(0)$ равен $N-r$ для $0\le r\le N$, и пусть $G^*(0)\ne 0$ в разложении*

$$G(\lambda)=G(0)+\lambda G^*(\lambda).$$

Тогда: (i) $\det(G(\lambda))=\lambda^r\,\mathrm{g}(\lambda)I_N$, (ii) $\mathrm{Adj}\,(G(\lambda))=\lambda^{r-1}H(\lambda)$, *где I_N — единичная $N\times N$-матрица, $1\le rank(H(0))\le r$, и $H(0)$ конечна.*

Доказательство. Определитель G может быть представлен в виде степенного ряда по λ:

$$\det(G(\lambda))=\sum_{i=0}^{\infty}\delta_i\lambda^i.$$

Каждый элемент δ_i является суммой конечного числа произведений элементов $G(\lambda)$ и поэтому является конечным. Каждая такая сумма имеет некоторые слагаемые из $G(0)$ и некоторые из $\lambda G^*(\lambda)$. Любое произведение с более чем $N-r$ членами из $G(0)$ будет равно нулю, потому что будет являться определителем подматрицы большего порядка, чем ранг $G(0)$. Поэтому любой ненулевой элемент должен содержать не менее r членов из $\lambda G^*(\lambda)$, а значит, соответствующая степень λ при нем будет не меньше r. Таким образом, первый ненулевой член δ_i есть δ_r. Полагая

$$g(\lambda)=\sum_{i=r}^{\infty}\delta_i\lambda^{i-r},$$

получаем первую часть леммы, т. к. член δ_r должен быть конечным.

Для доказательства второго утверждения разложим присоединенную матрицу для G по степеням λ:

$$\operatorname{Adj}\left(G(\lambda)\right)=\sum_{i=0}^{\infty}\lambda^i H_i .$$

Так как присоединенная матрица — это матрица, состоящая из определителей порядка $N-1$, то, как и выше, получаем, что первые $r-1$ слагаемых должны быть тождественно равны нулю. Поэтому

$$\operatorname{Adj}\left(G(\lambda)\right)=\lambda^{r-1}\sum_{i=0}^{\infty}\lambda^{i-r+1}H_i=\lambda^{r-1}H(\lambda).$$

Поскольку элементы матрицы H_{r-1} являются произведениями конечного числа конечных чисел, матрица $H(0)$ должна быть конечной.

Произведение матрицы на ее сопряженную — это определитель, умноженный на единичную матрицу. Поэтому

$$\lambda^r \mathrm{g}(\lambda)I_N=(G(0)+\lambda G^*(\lambda))H(\lambda)=(G(0)H(\lambda)\lambda^{r-1}+h(\lambda)G^*(\lambda))\lambda^r .$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях λ, получаем:

$$G(0)H(0)=0 .$$

Поэтому ранг матрицы $H(0)$ должен быть не больше r, т. к. каждый ее столбец лежит в ядре матрицы $G(0)$, имеющей ранг $N-r$. Если $r=1$, первое слагаемое в выражении для присоединенной матрицы будет просто присоединенной матрицей для $G(0)$, которая будет иметь ранг 1, т. к. $G(0)$ имеет ранг $N-1$.

Доказательство теоремы Грэнджера о представлении. Условия теоремы предполагают существование многомерного представления Вольда (3.1) для коинтегрированного N-мерного случайного процесса x_t. Пусть α — соответствующая коинтеграционная матрица, такая что процесс

$$z_t=\alpha' x_t$$

является стационарным чисто недетерминированным r-мерным временным рядом, допускающим представление в виде обратимого скользящего среднего. Умножая обе части равенства (3.1) на α, получаем:

$$(1-B)z_t=(\alpha' C(1)+(1-B)\alpha' C^*(B))\varepsilon_t .$$

Для того чтобы z_t был $I(0)$ процессом, необходимо, чтобы вектор $\alpha' C(1)$ был равен 0. Любой вектор, удовлетворяющий этому свойству, будет коинтеграционным. Следовательно, матрица $C(1)$ имеет ранг $N-r$, и все коинтеграционные векторы лежат в ее ядре. Отсюда также следует, что $\alpha' C^*(B)$ — обратимое представление в виде скользящего среднего, в частности, $\alpha' C^*(1) \neq 0$. В противном случае коинтеграция будет с $b=2$ или выше.

Полагая в Лемме 1 $\lambda=(1-B)$, $G(\lambda)=C(B)$, $H(\lambda)=A(B)$ и $g(\lambda)=d(B)$, получаем утверждение (2). Так как матрица $C(B)$ имеет полный ранг и равна I_N при $B=0$, ее обратная матрица есть $A(0)$ и также будет равна I_N.

Утверждение (3) следует из того факта, что $A(1)$ имеет ранг между 1 и r и лежит в ядре матрицы $C(1)$. Поскольку α натянуто на это нулевое пространство, $A(1)$ может быть записана в виде линейной комбинации коинтеграционных векторов

$$A(1)=\gamma\alpha'.$$

Утверждение (4) следует из преобразований авторегрессии. Перегруппировка членов в (3.3) дает:

$$[\tilde{A}(B)+A(1)](1-B)x_t=-A(1)x_{t-1}+d(B)\varepsilon_t,$$
$$A^*(B)(1-B)x_t=-\gamma z_{t-1}+d(B)\varepsilon_t,$$
$$A^*(0)=A(0)=I_N.$$

Пятое утверждение следует из непосредственной замены в представлении Вольда. Определение коинтеграции подразумевает, что это скользящее среднее будет стационарным и обратимым. Перепишем представление в виде модели коррекции ошибки с $A^*(B)=I+A^{**}(B)$, где $A^{**}(0)=0$, и умножим слева на α':

$$(1-B)z_t=-\alpha'\gamma z_{t-1}+[\alpha' d(B)+\alpha' A^{**}(B)C(B)]\varepsilon_t=-\alpha'\gamma z_{t-1}+J(B)\varepsilon_t.$$

Чтобы это представление было эквивалентно стационарному скользящему среднему, авторегрессия должна быть обратимой. Для этого необходимо, чтобы выполнялось условие $\det(\alpha'\gamma)>0$. Действительно, если определитель равен нулю, то существует по крайней мере один единичный корень, а если определитель отрицателен, то для некоторого значения ω от нуля до единицы выполнено равенство

$$\det\big(I_r-(I_r-\alpha'\gamma)\omega\big)=0,$$

а это значит, что существует корень внутри единичного круга.

Повторяя предыдущие шаги с $d(B)=1$, получаем шестое утверждение.

Теорема полностью доказана.

Могут быть получены и более сильные результаты при дополнительных ограничениях на кратность корней в представлении скользящего среднего. Например, Yoo (1985), используя формы Смита–Макмиллана, находит условия, при которых $d(1)\neq 0$, $A^*(1)$ имеет полный ранг, и которые упрощают переход от модели коррекции ошибок к моделям коинтеграции. Однако приведенные выше результаты являются достаточными для задач оценивания и тестирования, рассматриваемых в этой статье.

Авторегрессия и модель коррекции ошибок, заданные формулами (3.3) и (3.4), тесно связаны с часто используемыми в эконометрике моделями векторной авторегрессии (VAR), особенно в случае, когда $d(B)$ можно обоснованно считать равным 1. Тем не менее, каждая из них существенно отличается от стандартной VAR. В представлении авторегрессии

$$A(B)x_t=\varepsilon_t$$

коинтеграция переменных x_t создает ограничение, которое делает матрицу $A(1)$ сингулярной. Для $r=1$ ранг этой матрицы будет равен 1. Анализ таких систем сложен, т. к. некоторые численные методы, используемые для нахождения скользящего среднего, являются крайне неустойчивыми.

Представление в виде модели коррекции ошибок

$$A^*(B)(1-B)x_t = -\gamma\alpha' x_{t-1} + \varepsilon_t$$

выглядит более похожим на стандартную векторную авторегрессию для первых разностей. Здесь коинтеграция приводит к присутствию самих переменных (в уровнях), поэтому, если переменные будут коинтегрированными, чистая VAR для разностей будет неправильной спецификацией модели.

Таким образом, если ряды коинтегрированы, векторная авторегрессия для первых разностей является неверной спецификацией. Если же использовать векторную авторегерессию для уровней, то будут упущены существенные ограничения. Конечно, эти ограничения асимптотически будут выполняться, но если учесть их явно, можно повысить эффективность модели и улучшить многошаговый прогноз.

Так как $x_t \sim I(1)$, $z_t \sim I(0)$, то все члены в модели коррекции ошибок являются $I(0)$. Верно и обратное: если $x_t \sim I(1)$ порождается моделью коррекции ошибок, то x_t обязательно будет коинтегрированным. Также отметим, что если $x_t \sim I(0)$, то этот процесс всегда может быть представлен в виде модели ошибки коррекции, и поэтому в данном случае идея равновесия не имеет значения.

Как уже говорилось выше, в большинстве эмпирических примеров модель коррекции ошибок формулируется как реакция зависимой переменной на шоки независимой переменной. В этой статье все переменные являются совместно эндогенными; тем не менее, структура модели допускает причинность по Грэнджеру или слабые и сильные условия экзогенности, как в статье (Engle et al., 1983). Например, двумерная коинтегрированная система должна иметь причинно-следственную связь по крайней мере в одном направлении. Поскольку вектор z должен включать обе переменные, и γ не может быть тождественно нулем, то они должны входить в одно или оба уравнения. Если слагаемое коррекции ошибок входит в оба уравнения, ни одна из переменных не может быть слабо экзогенной для параметров другого уравнения из-за кросс-ограничений между уравнениями.

Понятие коинтеграции в принципе может быть применено к рядам с трендами или к авторегрессиям, корни которых лежат внутри единичного круга. В этих случаях коинтеграционный вектор по-прежнему будет необходим для приведения рядов к стационарности. Следовательно, тренды должны быть пропорциональными, и корни, лежащие внутри единичного круга, должны быть идентичными для всех рядов. Мы не рассматриваем эти случаи в данной работе и осознаем, что при оценивании и тестировании могут возникнуть существенные сложности.

4. Оценивание коинтегрированных систем

Различные представления коинтегрированных систем неявно предполагают и различные способы их оценивания. Наиболее удобным является представление в виде модели коррекции ошибок (особенно если можно предположить, что нет никакого скользящего среднего).

При этом остаются кросс-ограничения на параметры между уравнениями, поэтому в предположении нормальности оценивание методом максимального правдоподобия требует применение итеративных процедур.

В этом разделе предлагается другой метод оценивания, состоящий из двух этапов. На первом этапе оцениваются параметры коинтеграционного вектора, а на втором они используются в модели коррекции ошибок. На каждом шаге нужно оценивать лишь одно уравнение методом наименьших квадратов, при этом, как будет показано далее, оценки всех параметров будут состоятельными. Эта процедура особенно удобна тем, что не требует спецификации динамики до тех пор, пока структура оценок коррекции не оценена. В качестве «побочного продукта» получаются некоторые статистики, полезные для тестирования коинтеграции.

Из (3.5) можно непосредственно выразить выборочную матрицу моментов. Обозначим

$$M_T = 1/T^2 \sum_t x_t x_t' .$$

Напомним, что $z_t = \alpha' x_t$, тогда из формулы (3.5) следует

$$\alpha' M_T = \sum_t [K(B)\varepsilon_t] x_t' / T^2 .$$

Используя те же аргументы, что и в (Dickey, Fuller, 1979) или (Stock, 1984), можно показать, что для процесса, удовлетворяющего (3.1), справедливы следующие утверждения:

$$\lim_{T\to\infty} E(M_T) = M \tag{4.1}$$

$$\text{и } \alpha' M = 0 \text{ или } (\operatorname{vec} \alpha)'(I \otimes M) = 0 . \tag{4.2}$$

Хотя выборочная матрица моментов для коинтегрированного процесса будет несингулярной для любой выборки, в пределе она будет иметь ранг $N - r$. Это хорошо согласуется с общим наблюдением, что данные экономических временных рядов сильно коллинеарны друг с другом, так что матрицы моментов могут быть близки к сингулярным даже при больших выборках. Таким образом, с аналитической точки зрения коинтеграция является правдоподобной гипотезой.

Уравнения (4.2) не определяют однозначно коинтеграционные векторы, если нет ограничений типа нормализации. Пусть q и Q являются матрицами, задающими эту нормализацию, которая после перепараметризации α в $j \times 1$-вектор может быть записана так:

$$\operatorname{vec} \alpha = q + Q\theta. \tag{4.3}$$

При этом предполагается, что вектор θ лежит в компактном подмножестве пространства R^j.

Обычно q и Q состоят полностью из нулей или единиц, тем самым определяя один коэффициент в каждом столбце матрицы α равным единице, и определяя повороты при $r > 1$. Параметр θ называется идентифицируемым, если существует единственное решение уравнений (4.2) и (4.3). Это решение определяется равенством

$$(I \otimes M)Q\theta = -(I \otimes M)q , \tag{4.4}$$

где по предположению идентифицируемости у матрицы $(I \otimes M)Q$ существует левая обратная матрица, даже если у M ее нет.

Так как матрица моментов M_T будет иметь полный ранг для конечных выборок, разумным подходом к оценке является минимизация суммы квадратов отклонений от равновесия. В случае единственного коинтеграционного вектора оценка $\hat{\alpha}$ будет минимизировать $\alpha' M_T \alpha$ при ограничениях (4.3), и результатом будет оценка обычным методом наименьших квадратов. Для нескольких коинтеграционных векторов определим $\hat{\alpha}$ как результат минимизации следа $\operatorname{tr}(\alpha' M_T \alpha)$. Тогда задача оценки принимает вид:

$$\min_{\alpha,\, s.t.(4.3)} \operatorname{tr}(\alpha' M_T \alpha) = \min_{\alpha,\, s.t.(4.3)} \operatorname{vec}\alpha' (I \otimes M_T) \operatorname{vec}\alpha = \min\,(q + Q\theta)'(I \otimes M_T)(q + Q\theta).$$

Ее решение есть

$$\hat{\theta} = -(Q'(I \otimes M_T)Q)^{-1}(Q'(I \otimes M_T)q, \ \operatorname{vec}\hat{\alpha} = q + Q\hat{\theta}. \tag{4.5}$$

Такой подход к оценке должен обеспечивать очень хорошее приближение к истинному коинтеграционному вектору, поскольку ищутся векторы с минимальной остаточной дисперсией, а асимптотически все линейные комбинации компонент вектора x будут иметь бесконечную дисперсию, за исключением коинтеграционных векторов.

При $r = 1$ эта оценка получается просто регрессией нормализованной переменной, коэффициент при которой равен единице, на остальные переменные. Эта регрессия будет называться «коинтеграционной регрессией», т. к. она стремится реализовать долговременное или равновесное соотношение, не заботясь о динамике. Такую регрессию Granger, Newbold (1974) уничижительно называют «ложной» регрессией в основном потому, что стандартные ошибки приводят к ошибочным выводам. Авторы в первую очередь рассматривали случай отсутствия коинтеграции, когда между переменными не было никакой связи, однако наличие единичного корня в остатках приводило к малому значению статистики Дарбина–Уотсона, большому значению R^2 и высокой значимости коэффициентов. Здесь ищутся только оценки коэффициентов для использования на втором этапе и тестирования долговременного равновесия. Распределение оценок коэффициентов было исследовано в статье (Stock, 1984).

Если $N = 2$, существуют две возможные регрессии в зависимости от выбранной нормализации. Неединственность оценки есть следствие хорошо известного факта, согласно которому оценка параметра обратной регрессии не равна величине, обратной оценке параметра прямой регрессии. Однако в нашем случае нормализация не играет существенной роли: матрица моментов стремится к сингулярной, и, значит, коэффициент детерминации R^2 приближается к 1, а он, в свою очередь, является произведением оценок коэффициентов прямой и обратной регрессий. Это было бы абсолютно верно, если бы существовали только два наблюдения, которые, конечно, определяют сингулярную матрицу. Для переменных, которые имеют общую тенденцию, корреляция стремится к единице, в то время как дисперсия каждой приближается к бесконечности. Линия регрессии практически проходит через крайние точки, как если бы существовали всего два наблюдения.

Stock (1984) в Theorem 3 доказывает следующее утверждение.

Предложение 1. *Предположим, что* x_t *удовлетворяет соотношению* (3.1) *с абсолютно суммируемым* $C^*(B)$, *ошибки имеют четвертый конечный момент, а* x_t *является коинтегрированным* $(1,1)$ *с r коинтеграционными векторами, удовлетворяющими равенству* (4.3), *в котором параметр* θ *идентифицируем. Тогда оценка* $\hat{\theta}$, *определяемая равенством* (4.5), *удовлетворяет соотношению*

$$T^{1-\delta}(\hat{\theta} - \theta) \xrightarrow{P} 0 \ \text{ для } \ \delta > 0. \tag{4.6}$$

Предложение утверждает, что оценки параметров очень быстро сходятся к их вероятностным пределам. Оно также говорит, что для конечной выборки смещение имеет порядок $1/T$. Используя метод Монте-Карло, Stock показал, что на малых выборках это смещение может быть значительным, а также нашел выражения для предельного распределения оценок.

В двухшаговой процедуре, предлагаемой для этой коинтегрированной системы, оценка α из (4.5) используется как известный параметр при оценивании модели коррекции ошибок. Это существенно упрощает процедуру оценки путем наложения кросс-ограничений и позволяет специфицировать индивидуальные уравнения для динамических составляющих независимо друг от друга. Отметим, что для оценивания α не требуется специфицировать динамику. Удивительно, но эта двухшаговая оценка имеет превосходные свойства. Оказывается, она так же эффективна, как и оценка максимального правдоподобия, основанная на известном значении α, что устанавливается в приводимой ниже теореме.

Теорема 2. *Двухшаговая оценка параметров уравнения в модели коррекции ошибки, использующая* $\hat{\alpha}$ *из* (4.5) *как истинное значение* α, *имеет такое же предельное распределение, как и оценка максимального правдоподобия с истинным значением* α. *Стандартные ошибки метода наименьших квадратов будут состоятельными оценками истинных стандартных ошибок.*

Доказательство. Перепишем первое уравнение системы в модели коррекции ошибок (3.4) следующим образом:

$$y_t = \gamma \hat{z}_{t-1} + W_t\beta + \varepsilon_t + \gamma(z_{t-1} - \hat{z}_{t-1}),\ z_t = X_t\alpha,\ \hat{z}_t = X_t\hat{\alpha},$$

где $X_t = x_t'$, W — матрица, элементами которой являются Δx_{t-i}, а y является элементом вектора Δx_t, так что все регрессоры имеют тип $I(0)$. Опуская нижние индексы, получаем:

$$\sqrt{T}\begin{bmatrix} \gamma & -\gamma \\ \beta & -\beta \end{bmatrix} = \left[(\hat{z},W)'(\hat{z},W)/T\right]^{-1}\left[(\hat{z},W)'(\varepsilon+\gamma)(z-\hat{z})/T\right]/\sqrt{T}.$$

Это выражение упрощается, потому что $\hat{z}'(z-\hat{z}) = 0$. Из работ (Fuller, 1976) или (Stock, 1984) следует, что $X'X/T^2$ и $X'W/T$ имеют порядок 1. Значит,

$$W'(z-\hat{z})\big/\sqrt{T} = \left[W'X/T\right]\left[T(\alpha-\hat{\alpha})\right]\big/\left[1/\sqrt{T}\right],$$

и, следовательно, первый и второй коэффициенты справа от знака равенства имеют порядок 1, а третий стремится к нулю, так что все выражение асимптотически равно нулю. Так как слагаемые в $(z-\hat{z})\big/\sqrt{T}$ в пределе исчезают, стандартные ошибки метода наименьших квадратов будут состоятельными.

Пусть $S = \operatorname{p\,lim}\left[(\hat{z},W)'(\hat{z},W)/T\right]$, тогда

$$\sqrt{T}\begin{bmatrix} \gamma & -\gamma \\ \beta & -\beta \end{bmatrix} \xrightarrow{A} D(0,\sigma^2 S^{-1}),$$

где D является предельным распределением. При дополнительных стандартных предположениях можно гарантировать нормальность этого распределения.

Для утверждения, что оценка с использованием истинного значения α имеет то же предельное распределение, достаточно показать, что предел по вероятности последовательности $\left[(z,W)'(z,W)/T\right]$ также равен S, и что $z'\varepsilon/\sqrt{T}$ имеет то же предельное распределение, что и $\hat{z}'\varepsilon/\sqrt{T}$. Рассмотрим сначала внедиагональные элементы S:

$$\hat{z}'W/T - z'W/T = T(\hat{\alpha}-\alpha)'\left[W'X/T\right]/\left(1/T\right).$$

Первый и второй коэффициенты имеют порядок 1, а третий коэффициент — порядок $1/T$, поэтому все выражение асимптотически обращается в ноль:

$$(z-\hat{z})'(z-\hat{z})/T = z'z/T - \hat{z}'\hat{z}/T = T(\hat{\alpha}-\alpha)[X'X/T^2]T(\hat{\alpha}-\alpha)\left(1/T\right).$$

Снова первые три коэффициента имеют порядок 1, а последним коэффициентом является $1/T$, так что даже если разность между этими ковариационными матрицами будет положительно определена, она асимптотически исчезнет. И, наконец,

$$(z-\hat{z})'\varepsilon/\sqrt{T} = T(\hat{\alpha}-\alpha)[X'\varepsilon/T]1/\sqrt{T},$$

что тоже асимптотически исчезает.

При выполнении стандартных условий оценка с использованием истинного значения α будет являться асимптотически нормальной и, следовательно, двухступенчатая оценка также будет асимптотически нормальной в этих условиях. Это завершает доказательство.

Приведем простой пример, который иллюстрирует многие из этих вопросов и обосновывает подход к тестированию, описываемый в следующем разделе. Предположим, что имеется два ряда, x_{1t} и x_{2t}, которые совместно генерируются как функция от возможно коррелированных белых шумов ε_{1t} и ε_{2t} в соответствии со следующей моделью:

$$x_{1t}+\beta x_{2t}=u_{1t},\ u_{1t}=u_{1t-1}+\varepsilon_{1t}, \tag{4.7}$$

$$x_{1t}+\alpha x_{2t}=u_{2t},\ u_{2t}=\rho u_{2t-1}+\varepsilon_{2t},\ |\rho|<1. \tag{4.8}$$

Очевидно, параметры α и β являются неидентифицируемыми в обычном смысле, т. к. нет экзогенных переменных и ошибки коррелируют в один и тот же момент времени.

В приведенной форме этой системы ряды x_{1t} и x_{2t} являются линейными комбинациями u_{1t} и u_{2t}, следовательно, оба имеют тип $I(1)$. Второе уравнение описывает стационарную линейную комбинацию этих переменных. Таким образом, x_{1t} и x_{2t} являются $CI(1,1)$ и вопрос состоит в том, можно ли это выявить и оценить параметры.

Удивительно, но это сделать легко. Линейная регрессии метода наименьших квадратов x_{1t} на x_{2t} дает отличную оценку параметра α. Это и есть «коинтеграционная регрессия». Все линейные комбинации x_{1t} и x_{2t}, за исключением заданной уравнением (4.8), будут иметь бесконечную дисперсию, и, следовательно, метод наименьших квадратов легко сможет оценить α. Корреляция между x_{2t} и u_{2t}, которая приводит к смещению в одновременных уравнениях, имеет по T более низкий порядок, чем дисперсии x_{2t}. На самом деле обратная регрессия x_{2t} на x_{1t} имеет такие же свойства и, следовательно, дает состоятельную оценку параметра $1/\alpha$. Эти оценки сходятся к истинному значению быстрее, чем в стандартных эконометрических моделях.

Хотя существуют и другие состоятельные оценки α, однако некоторые кажущиеся очевидными оценки таковыми не будут. Например, регрессия первых разностей x_{1t} на первые разности x_{2t} не будет состоятельной, и использование процедуры Кохрейна–Оркатта или другой коррекции на автокорреляцию в коинтеграционной регрессии будет приводить к несостоятельным оценкам. После построения оценки параметра α другие параметры на ее основе могут быть оценены различными способами.

Для модели в (4.7) и (4.8) можно получить представление в виде авторегрессии, вычитая лагированные значения из обеих частей равенства и обозначая $\delta = (1-\rho)/(\alpha-\beta)$):

$$\Delta x_{1t} = \beta\delta x_{1t-1} + \alpha\beta x_{2t-1} + \eta_{1t}, \tag{4.9}$$

$$\Delta x_{2t} = -\delta x_{1t-1} + \alpha\delta x_{2t-1} + \eta_{2t}, \tag{4.10}$$

где η представляют собой линейную комбинацию ε. Тогда модель коррекции ошибок приобретает следующий вид:

$$\Delta x_{1t} = \beta\delta z_{t-1} + \eta_{1t}, \tag{4.11}$$

$$\Delta x_{2t} = -\delta z_{t-1} + \eta_{2t}, \tag{4.12}$$

где $z_{t-1} = x_{1t} + \alpha x_{2t}$. В исходной модели есть три неизвестных параметра, представление в виде авторегрессии содержит четыре неизвестных коэффициента, в то время как модель коррекции ошибок содержит два параметра. После того как α становится известно, ограничение в модели коррекции ошибок, которое обуславливает двухшаговую оценку, исчезает. Отметим, что если $\rho \to 1$, ряды превращаются в коррелированные случайные блуждания, которые не являются коинтегрированными.

5. Тестирование коинтеграции

Проблема тестирования коинтеграции возникает довольно часто. Например, при ответе на вопрос, находится ли экономическая система в долговременном равновесии. Целесообразно также проверить подобную гипотезу прежде, чем оценивать многомерную динамическую систему.

К сожалению, эта ситуация является нестандартной, и проверка гипотезы не сводится к применению обычных тестов типа теста Вальда, отношения правдоподобия или теста множителей Лагранжа. Эта проблема тесно связана с задачей тестирования единичных корней в наблюдаемых рядах, которую первоначально сформулировали Fuller (1976) и Dickey, Fuller (1979,1981) и затем Evans, Savin (1981), Sargan, Bhargava (1983), Bhargava (1984) и Nelson, Plosser (1983). Она также связана с задачей тестирования с параметрами, не идентифицируемыми при нулевой гипотезе, как это описано в работах (Davies, 1977) и (Watson, Engle, 1982).

Для иллюстрации проблем, возникающих при тестировании подобных гипотез, рассмотрим простую модель (4.7) и (4.8). В данном случае нулевая гипотеза — это отсутствие коинтеграции или $\rho = 1$. Если бы параметр α был известен, то тест можно было построить по аналогии с тестом Дики–Фуллера, считая, что ряд z_t имеет единичный корень при нулевой гипотезе. Уже в данном случае распределение не будет стандартным, оно вычислено с помощью метода Монте-Карло и описано в статье (Dickey, 1976). Однако, когда параметр α неизвестен, он должен быть оценен. Но если нулевая гипотеза утверждает, что $\rho = 1$, параметр α не идентифицируем. Таким образом, только если ряды коинтегрированы, α может быть просто оценен с помощью «коинтеграционной регрессии», но тест должен быть основан на распределении статистики, когда верна нулевая гипотеза. МНК строит оценку параметра α, минимизируя дисперсию остатков и делая остатки как можно более стационарными. Иными словами, тест Дики–Фуллера будет отвергать нулевую гипотезу слишком часто, если параметр α оценивается.

В этой статье предлагается набор из семи тестовых статистик для проверки нулевой гипотезы отсутствия коинтеграции против альтернативной гипотезы ее существования. Предполагается, что истинная система является двумерной линейной векторной авторегрессией с гауссовскими ошибками, причем каждый из рядов является $I(1)$. Так как нулевая гипотеза является составной, эти тесты строились таким образом, чтобы вероятность ее отвергнуть была постоянной по набору параметров, включенных в нулевую гипотезу. Более подробно см. (Cox, Hinkley, 1974, pp. 134–136).

Можно выделить два случая. В первом случае система имеет первый порядок, и поэтому нулевая гипотеза описывается соотношениями

$$\begin{aligned}\Delta y_t &= \varepsilon_{1t} \\ \Delta x_t &= \varepsilon_{2t}\end{aligned}, \quad \begin{bmatrix}(\varepsilon_{1t}) \\ (\varepsilon_{2t})\end{bmatrix} \sim N(0,\Omega). \tag{5.1}$$

Очевидно, что это — модель (4.11) и (4.12), когда $\rho = 1$, откуда следует, что $\delta = 0$. Составная нулевая гипотеза включает в себя все положительно определенные ковариационные матрицы Ω. Как будет показано ниже, распределения всех тестовых статистик инвариантны относительно матрицы Ω, поэтому без ограничения общности можно считать, что $\Omega = I$.

Во втором случае предполагается, что система стационарна в разностях. Следовательно, нулевая гипотеза включает все коэффициенты стационарных моделей авторегрессии и скользящего среднего, а также Ω. Описываемые ниже «расширенные» тесты в этом случае имеют асимптотически инвариантные распределения подобно тому, что было установлено Дики и Фуллером для тестов в одномерном случае.

Семь предложенных тестовых статистик вычисляются с помощью метода наименьших квадратов. Для каждой из них путем моделирования $10\,000$ повторений найдены критические значения. С использованием симуляций вычисляются мощности тестов для различных альтернатив. Ниже дается краткое описание каждого теста.

1. CRDW. Оценивается коинтеграционная регрессия и вычисляется статистика Дарбина–Уотсона (DW) для проверки стационарности остатков. Если они не стационарны, DW стремится к нулю и, следовательно, если DW принимает слишком большие значения, тест отвергает отсутствие коинтеграции (находит коинтеграцию). Этот тест был предложен Bhargava (1984) для случая, когда нулевая и альтернативная гипотезы являются моделями первого порядка.
2. DF. Этот тест проверяет остатки коинтеграционной регрессии, оценивая дополнительную регрессию, как описано Дики и Фуллером и показано в табл. I. Также предполагается, что модель первого порядка верна.
3. ADF. Расширенный тест Дики–Фуллера допускает более сложную динамику в регрессии DF и, следовательно, имеет слишком много параметров в случае модели первого порядка, но правильно специфицирован в случае высших порядков.
4. RVAR. Тест для векторной авторегрессии с ограничениями похож на двухшаговую оценку. На основании коинтеграционной регрессии оценивается коинтеграционный вектор, который затем участвует в оценке модели коррекции ошибок. Тест проверяет, является ли переменная коррекции ошибок значимой. Этот тест требует, чтобы динамика системы была полностью специфицирована. При этом предполагается, что система имеет первый порядок. Приведение системы к треугольному виду делает ошибки некоррелированными, и в пред-

положении нормальности t-статистики будут независимы. Тест основан на сумме квадратов t-статистик.

5. ARVAR. Расширенный RVAR — тест аналогичен RVAR за исключением того, что система по предположению имеет более высокий порядок.

6. UVAR. Тест VAR без ограничения основан на векторной авторегрессии в уровнях при отсутствии ограничений на коинтеграцию. При нулевой гипотезе коинтеграции и так нет, поэтому тест просто проверяет, может ли модель быть выражена адекватно исключительно через разности. Снова, приводя матрицу коэффициентов к треугольной форме, можно независимо вычислить F-статистики каждой из двух регрессий, и общая тестовая статистики будет являться их суммой, умноженной на их степени свободы, т. е. на 2. При этом вновь предполагается, что система имеет первый порядок.

7. AUVAR. Это расширенная версия предыдущего теста для систем более высокого порядка.

Чтобы установить сходство этих тестов в случае систем первого порядка для всех положительно определенных симметричных матриц Ω, достаточно показать, что остатки от регрессии y на x для общей матрицы Ω отличаются скалярным множителем от остатков для случая $\Omega = I$. Чтобы установить это, предположим, что ε_{1t} и ε_{2t}, являются независимыми стандартными нормальными случайными величинами. Тогда

$$y_t = \sum_{i=1,t} \varepsilon_{1i}, \; x_t = \sum_{i=1,t} \varepsilon_{2i} \tag{5.2}$$

$$\text{и} \;\; u_t = y_t - x_t \sum x_t y_t \Big/ \sum x_t^2 . \tag{5.3}$$

Для создания y^* и x^* в случае произвольной матрицы Ω положим

$$\varepsilon_{2t}^* = c\varepsilon_{2t}, \quad \varepsilon_{1t}^* = a\varepsilon_{2t} + b\varepsilon_{1t}, \tag{5.4}$$

где

$$c = \sqrt{\omega_{xx}}, \; a = \omega_{yx} / c, \; b^2 = \omega_{yy} - \omega_{yx}^2 / \omega_{xx} .$$

Тогда, подставляя (5.4) в (5.2), получаем:

$$x^* = cx, \; y^* = ay + bx,$$

$$ay_t + bx_t - cx \sum \left(ay_t + bx_t \right) cx_t \Big/ \sum c^2 x_t^2 = au ,$$

что и устанавливает инвариантность распределений тестов. Если используются одни и те же случайные числа, вне зависимости от Ω будут получены одни и те же тестовые статистики.

В более сложном, но вполне реалистичной случае, когда система имеет бесконечный порядок, но может быть аппроксимирована авторегрессией порядка p, распределения статистики будут совпадать только асимптотически. Хотя точное совпадение достигается в гауссовских моделях с фиксированными регрессорами, в моделях временных рядов эта ситуация не реализуется, и совпадение только асимптотическое. Поэтому тесты 5 и 7 асимптотически подобны, если модель порядка p верна, но тесты 1, 2, 4 и 6 заведомо не являются даже асимптотически подобными, т. к. в них опущены лагированные значения переменных (ситуация аналогична возникновению смещений стандартных ошибок при наличии автокорреляции ошибочных членов). На этом основании мы предпочитаем не предлагать эти последние упомянутые тесты, кроме случая первого порядка. Тест 3 также будет асимптотически подобным в предположении, что u, остаток от коинтеграционной регрессии, является процессом порядка p. Этот результат был доказан в статье (Dickey, Fuller, 1981, pp. 1065–1066). Хотя предположение, что система имеет порядок p, допускает остатки бесконечного порядка, существует, вероятно, конечная модель авторегрессии, возможно, меньшего порядка, чем p, которая будет хорошим приближением. Поэтому целесообразно провести некоторое исследование для нахождения наиболее подходящего значения p в обоих случаях. Альтернативной стратегией является выбор параметра p, который медленно растет как неслучайная функция от T, что тесно связано с тестом, предложенным Phillips (1985) и Phillips, Durlauf (1985). Только численное моделирование позволит понять, предпочтительно ли использовать выбранное на основе данных p для этой тестовой процедуры, хотя ниже показано, что оценка лишних параметров приводит к снижению мощности теста.

В таблице I формально описаны статистики семи тестов. В таблице II представлены критические значения и мощности тестов, когда система имеет первый порядок. Следует ожидать, что расширенные тесты будут менее мощными, потому что они оценивают параметры, которые в действительности являются нулями и при нулевой, и при альтернативной гипотезах. Остальные четыре теста не оценивают внешние параметры и правильно специфицированы для этого эксперимента.

С помощью табл. II можно на 5%-ном уровне проверить гипотезу отсутствия коинтеграции, просто вычислив статистику Дарбина–Уотсона DW в коинтеграционной регрессии, и, если это значение DW превышает 0.386, отвергнуть нулевую гипотезу и найти коинтеграцию. Если истинная модель — это модель II с $\rho = 0.9$, а не 1, это будет выявлено только в 20% случаев; однако если $\rho = 0.8$, частота выявления составит 66%. Ясно, что тест 1 является лучшим по мощности и должен быть выбран для этой спецификации, а показатели теста 2 почти в каждом случае находятся на втором месте после теста 1. Заметим также, что расширенные тесты имеют практически те же критические значения, что и базовые, но, как и ожидалось, они имеют несколько меньшую мощность. Таким образом, если известно, что система имеет первый порядок, не следует вводить дополнительные лаги. Вопрос о том, полезен ли предварительный тест для установления порядка системы, остается открытым.

В таблице III и при нулевой, и при альтернативной гипотезах система есть авторегрессия четвертого порядка. Поэтому использование нерасширенных тестов приводит к неправильной спецификации, и корректным является применение расширенных тестов (хотя некоторые из промежуточных лагов могут быть обнулены, если это известно). Заметим, что уменьшение критических значений в тестах 1, 2, 4 и 6 вызвано отсутствием инвариантности распределения, о котором говорилось выше. При этих новых критических значениях тест 3 является самым мощным для локальной альтернативы, а при $\rho = 0.8$ тест 1 является лучшим, в то время как тесты 2 и 3 слегка уступают. Неправильно специфицированные или нерасширенные тесты 4 и 6 в этой ситуации работают плохо. Хотя таблица II демонстрирует их умеренную мощность, рассматривать их здесь нет необходимости.

Несмотря на то что тест 1 имеет в целом лучшее качество, его следует использовать с осторожностью, поскольку критическое значение очень чувствительно к значениям параметров в рамках нулевой гипотезы. Для большинства экономических данных разности не являются белым шумом, и поэтому на практике не всегда понятно, какими критическими значениями следует пользоваться. Тест 3, расширенный тест Дики–Фуллера, по существу, имеет то же критическое значение для обеих конечных выборок, использовавшихся в экс-

Таблица I. Тестовые статистики: отвергать нулевую гипотезу для больших значений

1. Коинтеграционная регрессия Дарбина–Уотсона $y_t = \alpha x_t + c + u_t$.
$\xi_1 = DW$. Нулевая гипотеза: $DW = 0$.

2. Регрессия Дики–Фуллера: $\Delta u_t = -\phi u_{t-1} + \varepsilon_t$.
$\xi_2 = \tau_\phi$: t статистика для ϕ.

3. Расширенная регрессия Дики–Фуллера: $\Delta u_t = -\phi u_{t-1} + b_1 \Delta u_{t-1} + ... + b_1 \Delta u_t - p + \varepsilon_t$.
$\xi_3 = \tau_\phi$.

4. VAR с ограничениями: $\Delta y_t = \beta_1 u_{t-1} + \varepsilon_{1t}$, $\Delta x_t = \beta_2 u_{t-1} + \gamma \Delta y_t + \varepsilon_{2t}$.
$\xi_4 = \tau^2_{\beta 1} + \tau^2_{\beta 2}$.

5. Расширенная VAR с ограничениями: такая же, как в 4, но с p лагами Δy_t и Δx_t в каждом уравнении.
$\xi_5 = \tau^2_{\beta 1} + \tau^2_{\beta 2}$.

6. VAR без ограничений: $\Delta y_t = \beta_1 y_{t-1} + \beta_2 x_{t-1} + c_1 + \varepsilon_{1t}$, $\Delta x_t = \beta_3 y_{t-1} + \beta_4 x_{t-1} + \gamma \Delta y_t + c_2 + \varepsilon_{2t}$.
$\xi_6 = 2\left[F_1 + F_2\right]$, где F_1 — F-статистика для тестирования гипотезы о равенстве нулю β_1 и β_2 в первом уравнении, F_2 — аналогичная F-статистика для второго уравнения.

7. Расширенная VAR без ограничений: такая же, как в 6, но с p лагами Δx_t и Δy_t в каждом уравнении.
$\gamma_7 = 2\left[F_1 + F_2\right]$.

Примечание. y_t и x_t — исходные ряды данных, u_t — остатки из коинтеграционной регрессии.

периментах, то же теоретическое критическое значение для большой выборки в обоих случаях, и почти такие же хорошо наблюдаемые свойства мощности в большинстве сравнений, и, значит, именно этот тест рекомендуется использовать.

Из-за своей простоты тест CRDW может быть применен для быстрого получения приближенного результата. Замечательно, что лучшие из предложенных тестов не требуют оценки всей системы, а только коинтеграционной регрессии, а затем, возможно, вспомогательных временных регрессий.

Этот анализ оставляет много вопросов без ответа. Критические значения построены только для выборки одного размера и только в двумерном случае, хотя в последнее время Engle, Yoo (1986) подсчитали критические значения для нескольких переменных и разных размеров выборки, используя тот же общий подход. Теории оптимальности для таких тестов пока нет, и, возможно, альтернативные подходы могут дать лучшие результаты. Исследования теории предельного распределения в статьях (Phillips, 1985) и (Phillips, Durlauf, 1985) могут привести к улучшению качества тестов.

Тем не менее, кажется, что критические значения для ADF, приведенные в табл. II, могут быть использованы как хороший ориентир в прикладных исследованиях по данному вопросу. В следующем разделе рассмотрены некоторые примеры.

6. Примеры

Эмпирические примеры, рассматриваемые ниже, демонстрируют качество тестов на практике. Довольно подробно будет изучено соотношение между потреблением и доходом, подобно тому, как оно было проанализировано с помощью модели коррекции ошибок в (Davidson et al., 1978) и с помощью анализа временных рядов в работе (Hall, 1978) и дру-

Таблица II. Критические значения и мощность

I модель: Δy_t, Δx_t независимые стандартные нормальные, 100 наблюдений, 10 000 повторений, $p = 4$.

		Критические значения		
Статистика	Название	1%	5%	10%
1	CRDW	0.511	0.386	0.322
2	DF	4.07	3.37	3.03
3	ADF	3.77	3.17	2.84
4	RVAR	18.3	13.6	11.0
5	ARVAR	15.8	11.8	9.7
6	UVAR	23.4	18.6	16.0
7	AUVAR	22.6	17.9	15.5

II модель: $y_t + 2x_t = u_t$, $\Delta u_t = (\rho - 1)u_{t-1} + \varepsilon_t$, $x_t + y_t = \nu_t$, $\Delta \nu_t = \eta_t$; $\rho = 0.8, 0.9$,
100 наблюдений, 1000 повторений, $p = 4$.

		Отклонений на 100: $\rho = 0.9$		
Статистика	Название	1%	5%	10%
1	CRDW	4.8	19.9	33.6
2	DF	2.2	15.4	29.0
3	ADF	1.5	11.0	22.7
4	RVAR	2.3	11.4	25.3
5	ARVAR	1.0	9.2	17.9
6	UVAR	4.3	13.3	26.1
7	AUVAR	1.6	8.3	16.3

		Отклонений на 100: $\rho = 0.8$		
Статистика	Название	1%	5%	10%
1	CRDW	34.0	66.4	82.1
2	DF	20.5	59.2	76.1
3	ADF	7.8	30.9	51.6
4	RVAR	15.8	46.2	67.4
5	ARVAR	4.6	22.4	39.0
6	UVAR	19.0	45.9	63.7
7	AUVAR	4.8	18.3	33.4

гих. Более кратко анализируется связь заработной платы и цен, краткосрочных и долгосрочных процентных ставок. Обсуждение скорости обращения денег завершит этот раздел.

В работе (Davidson et al., 1978) приведены эмпирические и теоретические аргументы в пользу модели коррекции ошибок для описания потребительского поведения. Потребители формируют планы, которые могут не реализоваться. Тогда потребители корректируют планы на следующий период, чтобы компенсировать долю ошибки между доходом и по-

Таблица III. Критические значения и мощность с лагами

Модель I: $\Delta y_t = 0.8\Delta y_{t-4} + \varepsilon_t$, $\Delta x_t = 0.8\Delta x_{t-4} + \eta_t$, 100 наблюдений, 10 000 повторений, $p = 4$, ε_t, η_t — независимые стандартные нормальные.

		Критические значения		
Статистика	Название	1%	5%	10%
1	CRDW	0.455	0.282	0.209
2	DF	3.90	3.05	2.71
3	ADF	3.73	3.17	2.91
4	RVAR	37.2	22.4	17.2
5	ARVAR	16.2	12.3	10.5
6	UVAR	59.0	40.3	31.4
7	AUVAR	28.0	22.0	19.2

Модель II: $y_t + 2x_t = u_t$, $\Delta u_t = (\rho - 1)u_{t-1} + .8\Delta u_{t-4} + \varepsilon_t$, $y_t + x_t = \nu_t$, $\Delta \nu_t = 0.8\Delta \nu_{t-4} + \eta_t$; $\rho = 0.9, 0.8$, 100 наблюдений, 1000 повторений, $p = 4$.

		Отклонений на 100 : $\rho = 0.9$		
Статистика	Название	1%	5%	10%
1	CRDW	15.6	39.9	65.6
2	DF	9.4	25.5	37.8
3	ADF	36.0	61.2	72.2
4	RVAR	0.3	4.4	10.9
5	ARVAR	26.4	48.5	62.8
6	UVAR	0.0	0.5	3.5
7	AUVAR	9.4	26.8	40.3

		Отклонений на 100 : $\rho = 0.8$		
Статистика	Название	1%	5%	10%
1	CRDW	77.5	96.4	98.6
2	DF	66.8	89.7	96.0
3	ADF	68.9	90.3	94.4
4	RVAR	7.0	42.4	62.5
5	ARVAR	57.2	80.5	89.3
6	UVAR	2.5	10.8	25.9
7	AUVAR	32.2	53.0	67.7

треблением. Hall считает, что потребление в США является случайным блужданием, и последние значения дохода не имеют объясняющей силы. Отсюда вытекает, что доходы и потребления являются некоинтегрированными, по крайней мере, если доход не зависит от переменной коррекции ошибок. Ни одна из рассмотренных теорий не моделирует доход сам по себе, и в (Davidson et al., 1978) он является экзогенным.

Используются квартальные данные реального потребления на душу населения товаров недлительного пользования и реального располагаемого дохода на душу населения в США с 1947 : I по 1981 : II. Первоначально было проверено, что временные ряды являются $I(1)$. При оценивании регрессии первой разности потребления на его прошлый уровень и две первых лагированных разности было получено значение t-статистики, равное $+0.77$, даже знак этой статистики указывает на неверность гипотезы о стационарности потребления. Оценивание аналогичной регрессии вторых разностей на прошлые значения первых разностей и два лагированных значения вторых разностей дает значение t-статистики, равное -5.36, что свидетельствует о стационарности ряда первых разностей. Для дохода были использованы четыре последних лага, и две t-статистики оказались равными -0.01 и -6.27 соответственно, что снова говорит о стационарности первой разности. Иными словами, доход также является $I(1)$.

Было проведено оценивание коинтеграционной регрессии потребления на доход (Y) и константу. Коэффициент при Y в этой регрессии равен 0.23 (со значениями t-статистики и R^2, равными 123 и 0.99 соответственно). Статистика DW оказалась равной 0.465, что в соответствии с обоими табличными критическими значениями позволяет отвергнуть нулевую гипотезу «отсутствия коинтеграции» на 5%-ном уровне, т. е. принять гипотезу о наличии коинтеграции. Регрессия первой разности остатков на предыдущий уровень и четыре лагированных разности дает t-статистику для коэффициента при уровне, равную 3.1, что является 5%-ным критическим значением для ADF теста. Поскольку лаги незначимы, оценивается DF регрессия, которая дает значение тестовой статистики, равное 4.3, что является 1%-ным критическим значением. Это иллюстрирует тот факт, что если DF тест подходит, то он имеет бóльшую мощность, чем ADF тест. В обратной регрессии Y на C коэффициент равен 4.3, обратное этому числу равно 0.23 — такое же, как коэффициент в прямой регрессии. Статистика DW теперь равна 0.463, и t-статистика теста ADF есть 3.2. Опять обычный DF представляется целесообразным и дает тестовую статистику 4.4. Какую бы регрессию ни запускать, данные отвергают гипотезу отсутствия коинтеграции на любом уровне выше 5%.

Чтобы установить, что совместное распределение и Y является системой коррекции ошибок, оценивается несколько моделей. В таблице IV представлена векторная авторегрессия (без ограничения) разности потребления на четыре лагированных значения разности потребления и разности дохода плюс лагированные значения уровней потребления и дохода. Коэффициенты при лагированных значениях уровней потребления и дохода имеют «правильные» знаки, а коэффициенты при корректирующем слагаемом — «правильные» размеры. Эти коэффициенты индивидуально значимы или почти значимы. Из всех лагированных значений разностей значимым является только первый лаг разности дохода. Таким образом, итоговая модель включает переменную коррекции ошибок, оцененную из коинтеграционной регрессии, и один лаг разности дохода. Стандартная ошибка этой модели даже ниже, чем модели VAR. Для этой модели был проведен ряд диагностических тестов на автокорреляцию, лаги зависимых переменных, нелинейность, ARCH и пропущенные переменные, такие как временной тренд и другие лаги.

Можно заметить, что удобная стратегия построения модели в этом случае предлагает оценить сначала простейшую модель коррекции ошибок, а затем тестировать значимость дополнительных лагов и Y, следуя методу «от частного к общему».

Подход к построению модели для дохода Y аналогичен. Оценивается та же векторная авторегрессия без ограничений, а затем она приводится к простой модели, содержащей кор-

Таблица IV. Регрессии дохода и потребления

	C	ΔEC	ΔEC	ΔC	ΔEC
Y	0.23 (123)				
$C(-1)$				−0.19 (−2.5)	
$Y(-1)$				0.046 (2.5)	
$EC(-1)$		−0.22 (−3.1)	−0.26 (−4.3)		−0.14 (−2.2)
$\Delta C(-1)$				0.092 (0.9)	
$\Delta C(-2)$				0.017 (0.2)	
$\Delta C(-3)$				0.016 (1.5)	
$\Delta C(-4)$				0.009 (0.1)	
$\Delta Y(-1)$				0.059 (1.8)	0.068 (2.5)
$\Delta Y(-2)$				−0.023 (−0.7)	
$\Delta Y(-3)$				−0.027 (−0.8)	
$\Delta Y(-4)$				−0.020 (−0.7)	
$\Delta EC(-1)$		−0.13 (−1.4)			
$\Delta EC(-2)$		0.12 (1.4)			
$\Delta EC(-3)$		0.03 (0.4)			
$\Delta EC(-4)$		−0.13 (−1.6)			
CONST	0.52 (85)			0.10 (2.4)	0.003 (2.6)
σ	0.01628	0.00999	0.01015	0.01094	0.01078
DW	0.46	2.0	2.2	2.0	1.9
	Y	ΔEY	ΔEY	ΔY	ΔY
C	4.29 (123)				
$C(-1)$				0.15 (0.67)	
$Y(-1)$				−0.034 (0.63)	
$EY(-1)$					−0.053 (−1.1)
$\Delta C(-1)$				0.79 (2.5)	0.66 (2.4)
$\Delta C(-2)$				−0.48 (−1.5)	
$\Delta C(-3)$				0.68 (2.2)	
$\Delta C(-4)$				0.56 (1.8)	0.60 (2.1)
$\Delta Y(-1)$				−0.027 (−0.3)	
$\Delta Y(-2)$				−0.051 (−0.5)	
$\Delta Y(-3)$				0.011 (0.1)	
$\Delta Y(-4)$				−0.23 (−2.5)	−0.19 (2.1)
$\Delta EY(-1)$		−0.13 (−1.5)			
$\Delta EY(-2)$		0.12 (1.4)			
$\Delta EY(-3)$		0.03 (0.4)			
$\Delta EY(-4)$		−0.14 (−1.6)			
CONST	2.22 (−50)			−0.071 (−0.6)	0.016 (4.6)
σ	0.07012	0.04279	0.04350	0.03255	0.03321
DW	0.046	2.0	2.2	2.1	2.2

Примечание. Данные с 1947:I по 1981:II. EC — остатки из первой регрессии, EY — остатки из шестой регрессии. В скобках указаны t-статистики.

ректирующее слагаемое, первый и четвертый лаги первой разности и четвертый лаг первой разности Y. Переменная коррекции ошибок в данном случае незначима (t-статистика равна -1.1). Это означает, что доход может быть слабо экзогенным, даже несмотря на то, что переменные коинтегрированы. Стандартная ошибка в модели с ограничением немного выше, но разница несущественна. Как и раньше, модель «выдерживает» соответствующие диагностические тесты.

Campbell (1985) применяет аналогичный подход для проверки гипотезы постоянства дохода, которая включает в себя поведение «экономия на черный день». В этом случае переменная коррекции ошибок приближенно представляет сбережение, которое должно быть больше, когда ожидается уменьшение дохода (например, когда текущий доход выше постоянного дохода). Расширяя меру потребления и сужая меру дохода, он получает значимой переменную коррекции ошибок в уравнении дохода.

Во втором примере анализируется связь между ежемесячной заработной платой и ценами в США. Данные представлены в логарифмах индекса потребительских цен и зарплаты работников обрабатывающей промышленности за три десятилетия — 50-е, 60-е и 70-е годы. Снова проводится тест в обоих направлениях, чтобы показать небольшое различие в результатах. Для каждого из десятилетий имеется 120 наблюдений, поэтому можно пользоваться табличными критическими значениями.

Для коинтеграционной регрессии по полной выборке статистика Дарбина–Уотсона в любом направлении равна 0.0054. Она незначимо отличается от нуля даже для выборок, значительно больших, чем эта. Значение тестовой статистики в расширенном тесте Дики–Фуллера для p на w равно -0.6 и для w на p равно $+0.2$. Добавление двенадцатого лага в ADF тестах приводит к существенному улучшению подгонки модели и увеличивает тестовую статистику до 0.88 и 1.50 соответственно. Ни в одном из случаев критическое значение 3.2 не достигается. Поэтому принимается нулевая гипотеза об отсутствии коинтеграции заработной платы и цен за период тридцать лет.

Для отдельных десятилетий ни один из ADF тестов не является значимым даже на 10%-ном уровне. Наибольшая из этих шести тестовых статистик для 50-х годов в регрессии p на w равна 2.4, что все еще ниже 10%-ного уровня 2.8. Таким образом, можно сделать вывод о том, что заработная плата и цены в США не коинтегрированы. Конечно, если бы была доступна третья переменная, например производительность, и она тоже была бы $I(1)$, возможно, коинтеграция была бы выявлена.

В следующем примере исследуется коинтеграция краткосрочных и долгосрочных процентных ставок. В качестве долгосрочных ставок R_t используется ежемесячная доходность к погашению 20-летних государственных облигаций, а краткосрочная ставка r_t — это ставка одномесячных казначейских векселей. Оценка коинтеграционной регрессии долгосрочной ставки на краткосрочную на промежутке времени с февраля 1952 г. по декабрь 1982 г. дает следующие результаты:

$$R_t = 1.93 + 0.785 r_t + ER_t, \quad DW = 0.126, \quad R^2 = 0.866,$$

t-статистика коэффициента при короткой ставке равна 46. В соответствии с табл. II и III статистика DW незначимо отличается от нуля, однако точное критическое значение зависит от динамики ошибок (и, конечно, размер выборки в 340 намного больше, чем для табличных значений). Результаты ADF теста с четырьмя лагами:

$$\Delta ER_t = \underset{(-3.27)}{-0.06}\ ER_{t-1} + \underset{(4.55)}{0.25}\,\Delta ER_{t-1} - \underset{(-4.15)}{0.24}\,\Delta ER_{t-2} + \underset{(4.15)}{0.24}\,\Delta ER_{t-3} - \underset{(-1.48)}{0.09}\,\Delta ER_{t-4}\,.$$

Когда добавляется двенадцатый лаг вместо четвертого, тестовая статистика увеличивается до 3.49. Обратная регрессия дает похожие результаты: статистики равны 3.61 и 3.89 соответственно. Каждая из этих тестовых статистик превышает 5%-ные критические значения из табл. III. Поэтому эти процентные ставки можно считать коинтегрироваными.

Этот вывод полностью согласуется с гипотезой эффективного рынка. Однопериодная избыточная доходность долгосрочных облигаций в соответствии с линеаризацией (Shiller, Campbell, 1984) есть

$$EHY = DR_{t-1} - (D-1)R_t - r_t\,,$$

где D — дюрация облигации, определяемая равенством

$$D = ((1+c)^i - 1)\big/(c(1+c)^{i-1})\,,$$

где c — ставка купона, i — число периодов до даты погашения. Гипотеза эффективного рынка предполагает, что ожидание EHY постоянно и представляет собой премию за риск, если агенты не склонны к риску. Определяя $EHY = k + \varepsilon$ и переставляя слагаемые, получаем модель коррекции ошибок

$$\Delta R_t = (D-1)^{-1}(R_{t-1} - r_{t-1}) + k_t' + \varepsilon_t\,,$$

в которой R и r являются коинтегрированными с единичным коэффициентом, и для длительных сроков погашения коэффициент при переменной коррекции ошибок равен c, т.е. ставке купона. Если премия за риск меняется с течением времени, но является рядом $I(0)$, то не нужно включать ее в тест на коинтеграцию.

Последний пример основан на уравнении количественной теории: $MV = PY$. Эмпирические выводы вытекают из предположения, что скорость постоянна или, по крайней мере, стационарна. При этом условии $\log M$, $\log P$ и $\log Y$ должны быть коинтегрированы с единичными параметрами. Также коинтегрированными должны быть номинальная денежная масса и номинальный ВНП. Была проведена проверка этой гипотезы для четырех денежных агрегатов: M1, M2, M3 и L (все ликвидные активы). В каждом случае использовались квартальные данные с $1959:\mathrm{I}$ по $1981:\mathrm{II}$. Ниже приведены статистики ADF тестов:

M1	1.81	1.90
M2	3.23	3.13
M3	2.65	2.55
L	2.15	2.13

Первый столбец соответствует регрессиям, где зависимой переменной является логарифм соответствующего денежного агрегата, второй — логарифм ВНП. Только один из тестов для M2 значим на 5%-ном уровне, и ни один из других агрегатов не являются значимым даже на 10%-ном уровне (в некоторых случаях можно было бы использовать DF тест и получить большую мощность). Таким образом, наиболее устойчивое соотношение имеется между M2 и номинальным ВНП, а для других агрегатов коинтеграция и стационарность скорости отвергаются.

7. Выводы

Если каждый элемент вектора временного ряда x_t является стационарным только после взятия первой разности, но при этом линейная комбинация $\alpha' x_t$ является стационарной, временной ряд x_t является коинтегрированным порядка (1,1) с коинтегрирующим вектором α. Если интерпретировать равенство $\alpha' x_t = 0$ как долгосрочное равновесие, коинтеграция означает, что долговременное равновесие существует с точностью до стационарных возмущений с конечной дисперсией, даже если исходные временные ряды не являются стационарными и имеют бесконечную дисперсию.

В статье приведено несколько представлений коинтегрированных систем, включая авторегрессии и модель коррекции ошибок. Векторная авторегрессия в разностях несовместна с этими представлениями, потому что в ней отсутствует корректирующее слагаемое. Векторная авторегрессия в уровнях игнорирует перекрестные ограничения и порождает сингулярный авторегрессионный оператор. Обсуждается состоятельность и эффективность оценки моделей коррекции ошибок и описывается двухшаговая процедура оценивания. Для проверки коинтеграции предложены семь тестовых статистик. Методом Монте-Карло получены их критические значения. С помощью полученных критических значений исследованы мощности тестов, и одна из процедур тестирования рекомендована для применения.

Рассмотренные примеры показывают, что потребление и доход являются коинтегрированными, а заработная плата и цены нет, краткосрочные и долгосрочные процентные ставки коинтегрированы, а номинальный ВНП не является коинтегрированным с M1, M3 или всеми ликвидными активами, но возможно, коинтегрирован с M2.

Департамент экономики Университета Калифорнии — Сан-Диего, США.

Рукопись получена в сентябре 1983 г.,
окончательный вариант получен в июне 1986 г.

Список литературы

Bhargava Alok (1984). On the theory of testing for unit roots in observed time series. Manuscript, ICERD, London School of Economics.

Box G. E. P., Jenkins G. M. (1970). *Time series analysis, forecasting and control*. San Francisco: Holden Day.

Campbell J. Y. (1985). Does saving anticipate declining labor income? An alternative test of the permanent income hypothesis. Manuscript, Princeton University.

Cox D. R., Hinkley C. V. (1974). *Theoretical statistics*. London: Chapman and Hall.

Currie D. (1981). Some long-run features of dynamic time-series models. *The Economic Journal*, 91, 704–715.

Davidson J. E. H., Hendry D. F., Srba F., Yeo S. (1978). Econometric modelling of the aggregate time-series relationship between consumer’s expenditure and income in the United Kingdom. *Economic Journal*, 88, 661–692.

Davies R. R. (1977). Hypothesis testing when a nuisance parameter is present only under the alternative. *Biometrika*, 64, 247–254.

Dawson A. (1981). Sargan’s wage equation: A theoretical and empirical reconstruction. *Applied Economics*, 13, 351–363.

Dickey D. A. (1976). Estimation and hypothesis testing for nonstationary time series. PhD. Thesis, Iowa State University, Ames.

Dickey D. A., Fuller W. A. (1979). Distribution of the estimators for autoregressive time series with a unit root. *Journal of the American Statistical Association*, 74, 427–431.

Dickey D. A., Fuller W. A. (1981). The likelihood ratio statistics for autoregressive time series with a unit root. *Econometrica*, 49, 1057–1072.

Engle R. F., Hendry D. F., Richard J. F. (1983). Exogeneity. *Econometrica*, 51, 277–304.

Engle R. F., Yoo B. S. (1986). Forecasting and testing in co-integrated systems. UCSD Discussion Paper.

Evans G. B. A., Savin N. E. (1981). Testing for unit roots: 1. *Econometrica*, 49, 753–779.

Feller W. (1968). *An introduction to probability theory and its applications, volume I*. New York: John Wiley.

Fuller W. A. (1976). *Introduction to statistical time series*. New York: John Wiley.

Granger C. W. J. (1981). Some properties of time series data and their use in econometric model specification. *Journal of Econometrics*, 121–130.

Granger C. W. J. (1983). Co-integrated variables and error-correcting models. Unpublished UCSD Discussion Paper 83–13.

Granger C. W. J., Newbold P. (1977). *Forecasting economic time series*. New York: Academic Press.

Granger C. W. J., Newbold P. (1974). Spurious regressions in econometrics. *Journal of Econometrics*, 26, 1045–1066.

Granger C. W. J., Weiss A. A. (1983). Time series analysis of error-correcting models. In: *Studies in Econometrics*, *Time Series, and Multivariate Statistics*. New York: Academic Press, 255–278.

Hall R. E. (1978). A stochastic life cycle model of aggregate consumption. *Journal of Political Economy*, 971–987.

Hannan E. J. (1970). *Multiple time series*. New York: Wiley.

Hendry D. F., von Ungern-Sternberg T. (1981). Liquidity and inflation effects on consumer‘s expenditure. In: *Essays in the Theory and Measurement of Consumer's Behavior*, ed. by A. S. Deaton. Cambridge: Cambridge University Press.

Johansen S. (1985). The mathematical structure of error correction models. Manuscript, University of Copenhagen.

Nelson C. R., Plosser C. (1982). Trends and random walks in macroeconomic time series. *Journal of Monetary Economics*, 10, 139–162.

Pagan A. R. (1984). Econometric issues in the analysis of regressions with generated regressor. *International Economic Review*, 25, 221–248.

Phillips A. W. (1957). Stabilization policy and the time forms of lagged responses. *Economic Journal*, 67, 265–277.

Phillips P. C. B. (1985). Time series regression with unit roots. *Cowles Foundation Discussion Paper* No. 740, Yale University.

Phillips P. C. B., Durlauf S. N. (1985). Multiple time series regression with integrated processes. *Cowles Foundation Discussion Paper* 768.

Salmon M. (1982). Error correction mechanisms. *The Economic Journal*, 92, 615–629.

Sargan J. D. (1964). Wages and prices in the United Kingdom: A study in econometric methodology. In: *Econometric Analysis for National Economic Planning*, ed. by P. E. Hart, G. Mills, and J. N. Whittaker. London: Butterworths.

Sargan J. D., Bhargava A. (1983). Testing residuals from least squares regression for being generated by the Gaussian random walk. *Econometrica*, 51, 153–174.

Shiller R. J., Campbell J. Y. (1984). A simple account of the behaviour of long-term interest rates. *American Economic Review*, 74, 44–48.

Stock J. H. (1984). Asymptotic properties of least squares estimators of co-integrating vectors. Manuscript, Harvard University.

Watson M. W., Engle R. F. (1985). A test for regression coefficient stability with a stationary AR(1) alternative. Forthcoming in *Review of Economics and Statistics*[4].

Yoo S. (1985). Multi-co-integrated time series and generalized error correction models. Manuscript in preparation, U.C.S.D.

Engle R. F., Granger C. W. J. Co-integration and error correction: Representation, estimation, and testing. *Applied Econometrics*, 2015, 39 (3), pp. 107–135 (translation in Russian from *Econometrica*, Vol. 55, No. 2 (March, 1987), 251–276).

Robert F. Engle
New York University Stern School of Business, USA

Clive W. J. Granger

Co-integration and error correction: Representation, estimation, and testing

The relationship between co-integration and error correction models, first suggested in Granger (1981), is here extended and used to develop estimation procedures, tests, and empirical examples.
If each element of a vector of time series x_t first achieves stationarity after differencing, but a linear combination $a'x_t$ is already stationary, the time series x_t are said to be co-integrated with co-integrating vector a. There may be several such co-integrating vectors so that a becomes a matrix. Interpreting $a'x_t = 0$ as a long run equilibrium, co-integration implies that deviations from equilibrium are stationary, with finite variance, even though the series themselves are nonstationary and have infinite variance. The paper presents a representation theorem based on Granger (1983), which connects the moving average, autoregressive, and error correction representations for co-integrated systems. A vector autoregression in differenced variables is incompatible with these representations. Estimation of these models is discussed and a simple but asymptotically efficient two-step estimator is proposed. Testing for co-integration combines the problems of unit root tests and tests with parameters unidentified under the null. Seven statistics are formulated and analyzed. The critical values of these statistics are calculated based on a Monte Carlo simulation. Using these critical values, the power properties of the tests are examined and one test procedure is recommended for application.
In a veries of examples it is found that consumption and income are co-integrated, wages and prices are not, short and long interest rates are, and nominal GNP is co-integrated with M2, but not Ml, M3, or aggregate liquid assets.

Keywords: co-integration; vector autoregression; unit roots; error correction; multivariate time series; Dickey–Fuller tests.

JEL classification: C01; C12; C30; C33; C51.

[4] Опубликовано в *Review of Economics and Statistics*, 1985, 67, 341–346 — *Прим. ред.*

References

Bhargava Alok (1984). On the theory of testing for unit roots in observed time series. Manuscript, ICERD, London School of Economics.

Box G. E. P., Jenkins G. M. (1970). *Time series analysis, forecasting and control*. San Francisco: Holden Day.

Campbell J. Y. (1985). Does saving anticipate declining labor income? An alternative test of the permanent income hypothesis. Manuscript, Princeton University.

Cox D. R., Hinkley C. V. (1974). *Theoretical statistics*. London: Chapman and Hall.

Currie D. (1981). Some long-run features of dynamic time-series models. *The Economic Journal*, 91, 704–715.

Davidson J. E. H., Hendry D. F., Srba F., Yeo S. (1978). Econometric modelling of the aggregate time-series relationship between consumer's expenditure and income in the United Kingdom. *Economic Journal*, 88, 661–692.

Davies R. R. (1977). Hypothesis testing when a nuisance parameter is present only under the alternative. *Biometrika*, 64, 247–254.

Dawson A. (1981). Sargan's wage equation: A theoretical and empirical reconstruction. *Applied Economics*, 13, 351–363.

Dickey D. A. (1976). Estimation and hypothesis testing for nonstationary time series. PhD. Thesis, Iowa State University, Ames.

Dickey D. A., Fuller W. A. (1979). Distribution of the estimators for autoregressive time series with a unit root. *Journal of the American Statistical Association*, 74, 427–431.

Dickey D. A., Fuller W. A. (1981). The likelihood ratio statistics for autoregressive time series with a unit root. *Econometrica*, 49, 1057–1072.

Engle R. F., Hendry D. F., Richard J. F. (1983). Exogeneity. *Econometrica*, 51, 277–304.

Engle R. F., Yoo B. S. (1986). Forecasting and testing in co-integrated systems. UCSD Discussion Paper.

Evans G. B. A., Savin N. E. (1981). Testing for unit roots: 1. *Econometrica*, 49, 753–779.

Feller W. (1968). *An introduction to probability theory and its applications, volume I*. New York: John Wiley.

Fuller W. A. (1976). *Introduction to statistical time series*. New York: John Wiley.

Granger C. W. J. (1981). Some properties of time series data and their use in econometric model specification. *Journal of Econometrics*, 121–130.

Granger C. W. J. (1983). Co-integrated variables and error-correcting models. Unpublished UCSD Discussion Paper 83–13.

Granger C. W. J., Newbold P. (1977). *Forecasting economic time series*. New York: Academic Press.

Granger C. W. J., Newbold P. (1974). Spurious regressions in econometrics. *Journal of Econometrics*, 26, 1045–1066.

Granger C. W. J., Weiss A. A. (1983). Time series analysis of error-correcting models. In: *Studies in Econometrics*, *Time Series, and Multivariate Statistics*. New York: Academic Press, 255–278.

Hall R. E. (1978). A stochastic life cycle model of aggregate consumption. *Journal of Political Economy*, 971–987.

Hannan E. J. (1970). *Multiple time series*. New York: Wiley.

Hendry D. F., von Ungern-Sternberg T. (1981). Liquidity and inflation effects on consumer's expenditure. In: *Essays in the Theory and Measurement of Consumer's Behavior*, ed. by A. S. Deaton. Cambridge: Cambridge University Press.

Johansen S. (1985). The mathematical structure of error correction models. Manuscript, University of Copenhagen.

Nelson C. R., Plosser C. (1982). Trends and random walks in macroeconomic time series. *Journal of Monetary Economics*, 10, 139–162.

Pagan A. R. (1984). Econometric issues in the analysis of regressions with generated regressor. *International Economic Review*, 25, 221–248.

Phillips A. W. (1957). Stabilization policy and the time forms of lagged responses. *Economic Journal*, 67, 265–277.

Phillips P. C. B. (1985). Time series regression with unit roots. *Cowles Foundation Discussion Paper* 740, Yale University.

Phillips P. C. B., Durlauf S. N. (1985). Multiple time series regression with integrated processes. *Cowles Foundation Discussion Paper* 768.

Salmon M. (1982). Error correction mechanisms. *The Economic Journal*, 92, 615–629.

Sargan J. D. (1964). Wages and prices in the United Kingdom: A study in econometric methodology. In: *Econometric Analysis for National Economic Planning*, ed. by P. E. Hart, G. Mills, and J. N. Whittaker. London: Butterworths.

Sargan J. D., Bhargava A. (1983). Testing residuals from least squares regression for being generated by the Gaussian random walk. *Econometrica*, 51, 153–174.

Shiller R. J., Campbell J. Y. (1984). A simple account of the behaviour of long-term interest rates. *American Economic Review*, 74, 44–48.

Stock J. H. (1984). Asymptotic properties of least squares estimators of co-integrating vectors. Manuscript, Harvard University.

Watson M. W., Engle R. F. (1985). A test for regression coefficient stability with a stationary AR(1) alternative. Forthcoming in *Review of Economics and Statistics*.

Yoo S. (1985). Multi-co-integrated time series and generalized error correction models. Manuscript in preparation, U.C.S.D.