Über die Verallgemeinerung des Begriffes der zueinander konjugierten Potenzen

von

Z. W. BIRNBAUM und W. ORLICZ (Lwów).

Sind $M(u) = |u|^\alpha$ und $N(v) = |v|^\beta$ zwei solche Potenzen, daß $\alpha > 1$ und

$$(1) \qquad \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1,$$

so gelten die folgenden Tatsachen:

I. Aus der bekannten HÖLDERschen Ungleichung ergibt sich unmittelbar, daß die Konvergenz von $\sum_{\nu=1}^{\infty} M(a_\nu)$ und von $\sum_{\nu=1}^{\infty} N(b_\nu)$ die Konvergenz von $\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu b_\nu$ zur Folge hat,

II. Herr E. LANDAU [1]) hat die folgende Umkehrung von I bewiesen: Konvergiert $\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu b_\nu$ für jede Reihe $\sum_{\nu=1}^{\infty} b_\nu$, für welche $\sum_{\nu=1}^{\infty} N(b_\nu)$ konvergiert, so ist auch $\sum_{\nu=1}^{\infty} M(a_\nu)$ konvergent.

Potenzen, welche diese beiden Eigenschaften I, II aufweisen, nennt man zueinander konjugiert. Man zeigt, daß die Exponenten konjugierter Potenzen durch die Beziehung (1) miteinander zusammenhängen müssen.

Während die Kenntnis der in I und II zusammengefaßten Tatsachen, der Analysis unendlich vieler Variablen zu danken ist, haben sich die folgenden Eigenschaften der durch (1) zusammen-

[1]) E. Landau, Über einen Konvergenzsatz, Göttinger Nachr. (1907) p. 25—27.

hängenden Potenzen hauptsächlich im Laufe von Untersuchungen über Orthogonalreihen und Funktionaloperationen ergeben:

I'. Sind $f(x)$ und $g(x)$ in $\langle 0,1\rangle$ meßbare Funktionen und ist sowohl $\int_0^1 M[f(x)]\,dx$ als auch $\int_0^1 N[g(x)]\,dx$ endlich, so folgt daraus die Endlichkeit von $\int_0^1 f(x)g(x)\,dx$.

II'. Ist $f(x)$ eine in $\langle 0,1\rangle$ meßbare Funktion und ist $\int_0^1 f(x)g(x)\,dx$ für jedes $g(x)$ endlich, für welches $\int_0^1 N[g(x)]\,dx$ endlich ist, so folgt daraus die Endlichkeit von $\int_0^1 M[f(x)]\,dx$ [2]).

Es liegt nun die Frage nahe, ob diese Eigenschaften wesentlich daran gebunden sind, daß $M(u)$ und $N(v)$ Potenzen sind, oder ob auch anders geartete Paare von konjugierten Funktionen existieren. Der Beantwortung dieser Frage sind die zwei ersten Kapitel dieser Arbeit gewidmet. Sie findet eine ziemlich erschöpfende Erledigung in Kap. I Satz 6 bzw. Kap. II Satz 3, wo die notwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür angegeben werden, damit zu einer Funktion $M(u)$ — die gewissen, im Wesen der Sache begründeten Einschränkungen unterliegt — eine Funktion $N(v)$ existiere, so daß $M(u)$ und $N(v)$ als im Sinne von I und II bzw. I' und II' zueinander konjugiert angesehen werden können.

Kapitel III enthält eine Übertragung auf die in Kap. I und II definierten konjugierten Funktionen verschiedener, bisher hauptsächlich für Potenzen, aber auch schon für allgemeinere Funktionen untersuchter Eigenschaften der sog. „starken" und „schwachen" Konvergenz von Funktionenfolgen.

Viele bisher für konjugierte Potenzen bekannten Sätze aus verschiedenen Gebieten der Analysis lassen sich auf allgemeine konjugierte Funktionen verallgemeinern, was in einer weiteren Arbeit näher ausgeführt werden soll. Zum Schluß der vorliegenden

[2]) F. Riesz, Untersuchungen über Systeme integrierbarer Funktionen, Math. Ann. 69 (1910) p. 449—497.

Arbeit führen wir als eine einfache Anwendung einige solche Verallgemeinerungen von Sätzen aus der Theorie der Orthogonalreihen an.

Da wir in dieser Arbeit u. a. eine methodisch möglichst einheitliche Darstellung des in Betracht kommenden Gebietes anstrebten, konnten wir nicht umhin, manchmal bereits bekannte Tatsachen in Form von Hilfssätzen anzuführen. So sind die Hilfssätze in Kap. I, § 3 bekannt und auch der Satz 3 dürfte nicht wesentlich neu sein, wiewohl wir weder eine ausdrückliche Formulierung noch einen Beweis davon in der Litteratur finden konnten. In Kap. III wird auch teilweise über bekannte Tatsachen referiert.

Kapitel I.

Reihen.

§ 1.

Definition 1. *Eine Funktion $N(u)$ heißt* N-*Funktion, wenn sie die folgenden Eigenschaften hat:*

1° *Sie ist für alle u aus dem Intervall $-\infty < u < +\infty$ erklärt und stetig,*

2° $N(0) = 0$, $N(u) > 0$ *für* $u > 0$, $N(-u) = N(u)$,

3° *es gibt Zahlen $\alpha > 0$, $\beta > 0$, so daß für $u > \alpha$ immer $N(u) > \beta$ gilt.*

Definition 2. *Eine Reihe $\sum_{\nu=1}^{\infty} u_\nu$ heißt konvergent mit der* N-*Funktion $N(u)$, wenn $\sum_{\nu=1}^{\infty} N(u_\nu)$ konvergiert.*

Satz 1.

Voraussetzung. *$M(u,v)$ und $N(u,v)$ sind für $-\infty < u < +\infty$, $-\infty < v < +\infty$ erklärte und stetige Funktionen mit den Eigenschaften*

1° $M(0,0) = N(0,0) = 0$, 2° $M(u,v) > 0$ *und* $N(u,v) \geqslant 0$ *für* $u^2 + v^2 > 0$, 3° *es gibt Zahlen $\alpha > 0$, $\beta > 0$, so daß für $u^2 + v^2 > \alpha$ die Ungleichung $M(u,v) > \beta$ gilt.*

Behauptung. *Damit für jede Folge von Zahlenpaaren $\{u_\nu, v_\nu\}$, für welche die Reihe $\sum_{\nu=1}^{\infty} M(u_\nu, v_\nu)$ konvergiert, immer auch* die Reihe $\sum_{\nu=1}^{\infty} N(u_\nu, v_\nu)$ *konvergiere, ist folgendes notwendig und hinreichend:*

Es gibt zwei Zahlen $a>0$ und $b>0$, so daß für $u^2+v^2<a$ die Ungleichung

(2) $$N(u,v) \leqslant b\,M(u,v)$$

gilt.

Beweis.

Die Bedingung ist notwendig: Ist sie nicht erfüllt, so gibt es eine Folge von Zahlenpaaren $\{u_n, v_n\}$, so daß $0 < u_n^2 + v_n^2 \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ und $N(u_n, v_n) \geqslant n \,.\, M(u_n, v_n)$. Wir wählen eine Teilfolge — sie heiße wieder $\{u_\nu, v_\nu\}$ — so daß $M(u_n v_n) \leqslant \frac{1}{n^2}$, was nach Voraussetzung 1° und wegen $u_n^2 + v_n^2 \to 0$ möglich ist. Dann bestimmen wir die natürlichen Zahlen k_n so, daß $\frac{1}{n^2} \leqslant k_n M(u_n, v_n) < \frac{2}{n^2}$. Nun erklären wir eine neue Folge von Zahlenpaaren $\{\overline{u}_n, \overline{v}_n\}$:

$$\begin{array}{l}
\overline{u}_1=u_1, \quad \overline{v}_1=v_1; \quad \overline{u}_2=u_1, \quad \overline{v}_2=v_1; \quad \ldots; \overline{u}_{k_1}=u_1, \quad \overline{v}_{k_1}=v_1;\\
\overline{u}_{k_1+1}=u_2, \ \overline{v}_{k_1+1}=v_2; \ \overline{u}_{k_1+2}=u_2, \ \overline{v}_{k_1+2}=v_2; \ldots; \overline{u}_{k_1+k_2}=u_2, \ \overline{v}_{k_1+k_2}=v_2;\\
\vdots\\
\overline{u}_{k_1+\ldots+k_{n-1}+1}=u_n, \ \overline{v}_{k_1+\ldots+k_{n-1}+1}=v_n; \ldots; \overline{u}_{k_1+\ldots+k_n}=u_n, \ \overline{v}_{k_1+\ldots+k_n}=v_n.\\
\vdots
\end{array}$$

Für diese Folge gilt

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} M(\overline{u}_\nu, \overline{v}_\nu) = \sum_{\nu=1}^{\infty} k_\nu M(u_\nu, v_\nu) < \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{2}{\nu^2},$$

also ist die Reihe $\sum_{\nu=1}^{\infty} M(\overline{u}_\nu, \overline{v}_\nu)$ konvergent und wegen

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} N(\overline{u}_\nu, \overline{v}_\nu) = \sum_{\nu=1}^{\infty} k_\nu N(u_\nu, v_\nu) \geqslant \sum_{\nu=1}^{\infty} \nu \,.\, k_\nu M(u_\nu, v_\nu) \geqslant \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu}$$

ist die Reihe $\sum_{\nu=1}^{\infty} N(\overline{u}_\nu, \overline{v}_\nu)$ divergent.

Die Bedingung ist hinreichend: Konvergiert die Reihe $\sum_{\nu=1}^{\infty} M(u_\nu, v_\nu)$, so gilt wegen Voraussetzung 3° $u_n^2+v_n^2 \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, also $u_n^2+v_n^2 < a$ für $n \geqslant \mu$. Daher

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} N(u_\nu, v_\nu) \leqslant \sum_{\nu=1}^{\mu-1} N(u_\nu, v_\nu) + b \sum_{\nu=\mu}^{\infty} M(u_\nu, v_\nu)$$

und die rechte Seite konvergiert bereits.

Satz 1a. *$N(u)$ und $M(u)$ seien* N-*Funktionen. Damit jede mit $M(u)$ konvergente Reihe auch mit $N(u)$ konvergent sei, ist notwendig und hinreichend, daß es Zahlen a und b gibt, so daß*

(3) $$N(u) \leqslant b \,.\, M(u) \text{ gilt für } |u| < a.$$

Den Beweis für Satz 1a führt man ganz analog, wie für Satz 1.

Es stimmt also die Menge derjenigen Reihen, welche mit $N(u)$ konvergent sind, mit der Menge der mit $M(u)$ konvergenten dann und nur dann überein, wenn es Zahlen a, b, c, d gibt, so daß die Ungleichungen gelten

$$\begin{array}{l} N(u) \leqslant a \,.\, M(u) \text{ für } |u| < c\\ M(u) \leqslant b \,.\, N(u) \text{ für } |u| < d. \end{array}$$

Solche $M(u)$, $N(u)$ wollen wir *äquivalent* nennen, oder wir wollen sagen, daß $M(u)$ und $N(u)$ zu *derselben Klasse* gehören.

Definition 3. Eine Eigenschaft einer N-Funktion heißt *„Klasseneigenschaft"*, wenn mit einer N-Funktion $M(u)$ immer auch alle mit $M(u)$ äquivalenten N-Funktionen dieselbe Eigenschaft aufweisen.

Wir wollen sagen, die N-Funktion $M(u)$ genüge der *Dreiecksungleichung* für kleines u, wenn es Zahlen $\delta > 0$ und $P > 0$ gibt, so daß

(Δ) $$M(x+y) \leqslant P(M(x)+M(y)) \text{ für } 0 \leqslant x < \delta,\ 0 \leqslant y < \delta.$$

Die Eigenschaft, einer Dreiecksungleichung für kleines u zu genügen — wir wollen sie kurz als Eigenschaft (Δ) für kleines u bezeichnen — ist eine Klasseneigenschaft. Ist nämlich $\overline{M}(u)$ mit $M(u)$ äquivalent, so gibt es Zahlen a, b, c, so daß $a\,M(u) \leqslant \overline{M}(u) \leqslant b\,M(u)$ für $0 \leqslant u < c$ und wenn $\overline{\delta} = \min\left(\delta, \frac{c}{2}\right)$ gesetzt wird, folgt daraus

$$\overline{M}(x+y) \leqslant b\,M(x+y) \leqslant b\,P[M(x)+M(y)] \leqslant \frac{b}{a} P[\overline{M}(x)+\overline{M}(y)]$$

für $0 \leqslant x \leqslant \overline{\delta}$, $0 \leqslant y \leqslant \overline{\delta}$.

Wir sagen, die N-Funktion $M(u)$ genüge der *Multiplikativungleichung* für kleines u (oder auch: $M(u)$ hat die Eigenschaft

(Δ') für kleines u), wenn es Zahlen $1 > \delta > 0$, $Q > 0$ gibt, so daß die Ungleichung gilt

$$(\Delta') \qquad M(xy) \leqslant Q\,M(x)\,M(y) \text{ für } 0 \leqslant x < \delta,\ 0 \leqslant y < \delta.$$

Auch die Eigenschaft (Δ') für kleines u ist, wie man sich leicht überzeugt, eine Klasseneigenschaft.

Als *Eigenschaft* (Δ_2) für kleines u einer N-Funktion $M(u)$ bezeichnen wir die Tatsache, daß es Zahlen $\delta > 0$, K gibt, so daß

$$(\Delta_2) \qquad M(2u) \leqslant K\,M(u) \text{ für } 0 \leqslant u < \delta$$

gilt.

Offenbar hat jede N-Funktion mit der Eigenschaft (Δ') für kleines u erst recht die Eigenschaft (Δ_2) für kleines u.

Die Eigenschaft (Δ_2) für kleines u ist auch eine Klasseneigenschaft.

Definition 4. *Die* N-*Funktion* $N(v)$ *heißt konjugiert zur* N-*Funktion* $M(u)$, *wenn*

1° *aus der Konvergenz der beiden Reihen* $\sum_{\nu=1}^{\infty} M(u_\nu)$, $\sum_{\nu=1}^{\infty} N(v_\nu)$ *die Konvergenz der Reihe* $\sum_{\nu=1}^{\infty} u_\nu v_\nu$ *folgt,*

2° *aus der Konvergenz der Reihe* $\sum_{\nu=1}^{\infty} u_\nu v_\nu$ *für eine feste Folge* $\{u_\nu\}$ *und alle mit* $N(v)$ *konvergenten Reihen* $\sum_{\nu=1}^{\infty} v_\nu$ *die Konvergenz der Reihe* $\sum_{\nu=1}^{\infty} u_\nu$ *mit* $M(u)$ *folgt.*

Wenn die N-*Funktionen* $M(u)$, $N(v)$ *nur der Bedingung* 1° *genügen, wollen wir sie halbkonjugiert nennen.*

Die Beziehung der Halbkonjugiertheit ist offenbar symmetrisch, die Beziehung der Konjugiertheit nicht. Wenn $N(v)$ zu $M(u)$ und $M(u)$ zu $N(v)$ konjugiert ist, nennen wir $M(u)$ und $N(v)$ *zueinander konjugiert.*

Die Eigenschaft, zu einem festen $M(u)$ konjugiert zu sein, ist eine Klasseneigenschaft. Wenn es also zu einer Funktion $M(u)$ eine konjugierte $N(v)$ gibt, so existieren schon unendlich viele zu $M(u)$ konjugierte Funktionen, nämlich alle mit $N(v)$ äquivalenten.

Es gibt jedoch nicht für jede N-Funktion eine zu ihr konjugierte oder eine solche, zu welcher sie konjugiert wäre. Wir können folgendes zeigen:

Ist $\dfrac{M(u)}{|u|} \geqslant c > 0$ *für* $|u| < k$, *so gibt es keine* N-*Funktion, zu welcher* $M(u)$ *konjugiert wäre.*

Beweis. Aus $M(u) \geqslant c|u|$ folgt, daß jede mit $M(u)$ konvergente Reihe auch absolut konvergiert. Gäbe es nun eine N-Funktion $N(v)$, zu welcher $M(u)$ konjugiert wäre, so wäre jedenfalls die Reihe $1 + 1 + 1 + \ldots$ nicht mit $N(v)$ konvergent. Für jede mit $M(u)$ konvergente Reihe $\sum_{\nu=1}^{\infty} u_\nu$ wäre aber $\sum_{\nu=1}^{\infty} |u_\nu|$ also auch $\sum_{\nu=1}^{\infty} u_\nu \cdot 1$ konvergent, was der Definition 4 Forderung 2° widerspricht.

Ebenso leicht sieht man ein, daß für eine N-Funktion $M(u)$ mit $\dfrac{M(u)}{|u|} \geqslant c > 0$, $|u| < k$ jede N-Funktion halbkonjugiert ist.

Genügt eine N-*Funktion* $M(u)$ *auch nur für eine Folge* $\{u_\nu\}$ *der Bedingung* $\dfrac{M(u_\nu)}{|u_\nu|} \underset{|u_\nu| \to 0}{\longrightarrow} \infty$, *so gibt es keine zu* $M(u)$ *konjugierte* N-*Funktion.*

Beweis. Diese Bedingung bedeutet, daß es keine Zahlen a, b gibt, so daß $M(u) \leqslant a|u|$ wäre für $0 \leqslant |u| < b$. Es gibt daher nach Satz 1a eine mit $L(u) = |u|$, also absolut konvergente Reihe $\sum_{\nu=1}^{\infty} v_\nu$, welche mit $M(u)$ nicht konvergiert. Wie man nun auch die zu $M(u)$ konjugierte Funktion $N(v)$ wählen würde, wäre die Reihe $\sum_{\nu=1}^{\infty} v_\nu w_\nu$ für jede mit $N(v)$ konvergente Reihe $\sum_{\nu=1}^{\infty} w_\nu$ immer konvergent und dennoch wäre $\sum_{\nu=1}^{\infty} v_\nu$ nicht mit $M(u)$ konvergent, was wieder der Definition 4 widerspricht.

Insbesondere folgt aus dem soeben bewiesenen, daß es zu $M(u) = |u|^p$ *für* $0 < p < 1$ *weder eine* N-*Funktion gibt, zu welcher* $M(u)$ *konjugiert wäre, noch eine solche, welche zu* $M(u)$ *konjugiert wäre.*

§ 2.

Wir wollen uns nun auf solche N-Funktionen beschränken, für welche die Grenzbedingungen

(4) $$\frac{M(u)}{|u|}\underset{|u|\to 0}{\longrightarrow} 0, \quad \frac{M(u)}{|u|}\underset{|u|\to\infty}{\longrightarrow}\infty$$

gelten. Die zweite von diesen Bedingungen ist vorläufig keine wesentliche Einschränkung, da nach Satz 1a die Menge der mit $M(u)$ konvergenten Reihen nur vom Verhalten von $M(u)$ in der Nähe der Null abhängt und jedes $M(u)$ durch ein ihm äquivalentes ersetzt werden kann, welches bereits der Bedingung $\frac{M(u)}{|u|}\underset{|u|\to\infty}{\longrightarrow}\infty$ genügt.

Definition 5. *N-Funktionen, welche* (4) *erfüllen, nennen wir N'-Funktionen.*

Die Eigenschaft $\frac{M(u)}{|u|}\underset{|u|\to 0}{\longrightarrow} 0$ ist offenbar eine Klasseneigenschaft.

Zu jeder N'-Funktion $M(u)$ definieren wir für $v\geqslant 0$ eine Funktion $N(v)$ durch die Forderung

(5) $$N(v)=\underset{u\geqq 0}{\mathrm{Max}}\,[uv-M(u)].$$

Daß durch (5) jedem $v>0$ tatsächlich ein endlicher und positiver Wert $N(v)$ zugeordnet wird, sieht man leicht ein, wenn man beachtet, daß bei festem v der Ausdruck

$$uv-M(u)=u\left[v-\frac{M(u)}{u}\right]$$

für hinreichend kleine u positiv wird — wegen $\frac{M(u)}{|u|}\longrightarrow 0$, — und daß er wegen $\frac{M(u)}{|u|}\underset{|u|\to\infty}{\longrightarrow}\infty$ für hinreichend große u negativ wird.

Definition 6. *Die für* $v\geqslant 0$ *durch* (5) *und für* $v<0$ *durch* $N(v)=N(|v|)$ *erklärte Funktion nennen wir komplementär zur N'-Funktion* $M(u)$.

Satz 2. *Die zu einer N'-Funktion* $M(u)$ *komplementäre Funktion* $N(v)$ *ist eine konvexe N'-Funktion.*

Beweis.

1. $N(0)=\underset{u\geqq 0}{\mathrm{Max}}\,[-M(u)]=0.$

2. Für $v\geqslant 0$ ist $N(v)$ konvex:

$$N\left(\frac{v_1+v_2}{2}\right)=\underset{u\geqq 0}{\mathrm{Max}}\left[u\frac{v_1+v_2}{2}-M(u)\right]=\mathrm{Max}\left[\frac{uv_1-M(u)}{2}+\frac{uv_2-M(u)}{2}\right]$$
$$\leqslant\frac{1}{2}\Big[\mathrm{Max}\,(uv_1-M(u))+\mathrm{Max}\,(uv_2-M(u))\Big]=\frac{1}{2}\Big[N(v_1)+N(v_2)\Big].$$

3. Für $v\geqslant 0$ ist $N(v)$ stetig: Zu jedem $v_0>0$ gibt es wegen $\frac{M(u)}{|u|}\underset{|u|\to\infty}{\longrightarrow}\infty$ ein u_0, so daß $v_0-\frac{M(u)}{u}<0$ wird für $u\geqslant u_0$. Daher gilt für $0\leqslant v\leqslant v_0$

$$0\leqslant N(v)=\underset{u\geqq 0}{\mathrm{Max}}\,u\left[v-\frac{M(u)}{u}\right]\leqslant\underset{u\geqq 0}{\mathrm{Max}}\,u\left[v_0-\frac{M(u)}{u}\right]<u_0v_0.$$

Daraus und aus der Konvexität folgt bekanntlich [3]) die Stetigkeit von $N(v)$.

4. $N(v)$ ist für $-\infty<v<+\infty$ stetig und konvex: Aus 1, 2, 3 folgt, daß $N(v)$ für $v\geqslant 0$ eine nichtabnehmende Funktion ist. Daher gilt auch für $\operatorname{sgn} v_1=-\operatorname{sgn} v_2$ die Ungleichung

$$N\left(\frac{v_1+v_2}{2}\right)=N\left(\frac{|v_1+v_2|}{2}\right)\leqslant N\left(\frac{|v_1|+|v_2|}{2}\right)\leqslant\frac{1}{2}[N(v_1)+N(v_2)].$$

5. $\frac{N(v)}{v}\underset{v\to 0}{\longrightarrow}0$: Wir bezeichnen mit u_v ein solches u, für welches $N(v)=u_v v-M(u_v)$ gilt. Für $v\longrightarrow\infty$ muß nun auch $u_v\longrightarrow 0$ gelten; sonst würde es eine Folge $\{v_n\}$ geben, so daß $0<v_n\longrightarrow 0$, $u_{v_n}>\alpha>0$ wäre, daher würde in $N(v_n)=u_{v_n}\left[v_n-\frac{M(u_{v_n})}{u_{v_n}}\right]$ der Ausdruck $\frac{M(u_{v_n})}{u_{v_n}}$ oberhalb einer positiven Schranke bleiben und $v_n-\frac{M(u_{v_n})}{u_{v_n}}$ wäre von einem gewissen n an negativ, also auch $N(v_n)<0$, was unmöglich. Daher $\frac{N(v)}{v}=\frac{1}{v}[u_v\cdot v-M(u_v)]=u_v-\frac{M(u_v)}{v}\leqslant u_v\longrightarrow 0$.

6. $\frac{N(v)}{|v|}\longrightarrow\infty$ für $|v|\longrightarrow\infty$. Aus der Definition der komplementären Funktion folgt unmittelbar

(6) $$uv\leqslant M(u)+N(v).$$

[3]) J. L. W. V. Jensen, Sur les fonctions convexes et les inégalités entre es valeurs moyennes, Acta Math. 30 (1906) p. 175—193, insbes. p. 189.

Zu jedem vorgegebenen n und ε gibt es ein v_0, so daß für $v > v_0$ die Ungleichung $\frac{M(n+\varepsilon)}{v} < \varepsilon$ gilt, also

$$n + \varepsilon \leqslant \frac{M(n+\varepsilon)}{v} + \frac{N(v)}{v}$$

und

$$n \leqslant \frac{N(v)}{v} \quad \text{für } v \geqslant v_0.$$

Wegen (6) sind $M(u)$ und $N(v)$ offenbar halbkonjugiert.

Als Beispiel einer Anwendung der bisherigen Ausführungen wollen wir die bekannte Höldersche Ungleichung herleiten [4]). Wir setzen $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1$, $\alpha > 1$, $M(u) = \frac{1}{\alpha}|u|^\alpha$. Dann suchen wir $N(v) = \operatorname*{Max}_{u \geqq 0}\left[uv - \frac{1}{\alpha}u^\alpha\right]$. Dieses Maximum wird für $u_v = v^{\frac{1}{\alpha-1}}$ angenommen und beträgt $N(v) = v^{\frac{1}{\alpha-1}}.v - \frac{1}{\alpha}v^{\frac{\alpha}{\alpha-1}} = \frac{1}{\beta}v^\beta$. Daher gilt die Ungleichung

$$uv \leqslant \frac{1}{\alpha}u^\alpha + \frac{1}{\beta}v^\beta, \quad u \geqslant 0,\ v \geqslant 0 \tag{7}$$

und das Gleichheitszeichen gilt genau für $u = v^{\frac{1}{\alpha-1}}$, d. h. für $u^\alpha = v^\beta$. Ist nun die Reihe $\sum_{\nu=1}^{\infty} u_\nu$ mit $|u|^\alpha$, die Reihe $\sum_{\nu=1}^{\infty} v_\nu$ mit $|v|^\beta$ konvergent, so setzen wir $u_n' = \frac{|u_n|}{\left(\sum_{\nu=1}^{\infty}|u_\nu|^\alpha\right)^{\frac{1}{\alpha}}}$, $v_n' = \frac{|v_n|}{\left(\sum_{\nu=1}^{\infty}|v_\nu|^\beta\right)^{\frac{1}{\beta}}}$ und erhalten nach (7)

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} u_\nu' v_\nu' \leqslant \frac{1}{\alpha}\sum_{\nu=1}^{\infty} u_\nu'^{\alpha} + \frac{1}{\beta}\sum_{\nu=1}^{\infty} v_\nu'^{\beta} = \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1,$$

d. h.

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} |u_\nu v_\nu| \leqslant \left(\sum_{\nu=1}^{\infty}|u_\nu|^\alpha\right)^{\frac{1}{\alpha}} \left(\sum_{\nu=1}^{\infty}|v_\nu|^\beta\right)^{\frac{1}{\beta}}$$

und das ist die Höldersche Ungleichung. Das Gleichheitszeichen gilt genau dann, wenn $u_n'^{\alpha} = v_n'^{\beta}$, d. h. für

[4]) Vgl. F. Riesz, Su alcune disuguaglianze, Boll. dell' Un. Mat. Ital. 2 (1928).

$$\frac{|u_n|^\alpha}{\sum_{\nu=1}^{\infty}|u_\nu|^\alpha} = \frac{|v_n|^\beta}{\sum_{\nu=1}^{\infty}|v_\nu|^\beta}.$$

§ 3.

Unter einer konvexen Funktion verstehen wir, wie üblich, eine für alle reellen x erklärte Funktion $f(x)$, welche für beliebige x_1, x_2 der Bedingung $f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \leqslant \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}$ genügt. Eine stetige konvexe Funktion erfüllt bekanntlich für beliebige $x_1 < x_2 < x_3$ die Ungleichung

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leqslant \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2}.$$

Hilfssatz 1. Eine stetige konvexe Funktion ist entweder monoton, oder es gibt ein ξ_0, so daß $f(x)$ eine nichtzunehmende Funktion ist für $x \leqslant \xi_0$ und eine nichtabnehmende Funktion für $x \geqslant \xi_0$.

Beweis. Der Punkt ξ heiße ein m-Punkt, wenn für beliebige $x < x' < \xi$ die Ungleichung $f(x) > f(x')$ gilt. Wir setzen $\xi_0 =$ obere Grenze aller m-Punkte. Ist $f(x)$ nicht monoton, so ist $\xi_0 < +\infty$. Für $x \leqslant \xi_0$ ist $f(x)$ offenbar nichtzunehmend. Für $x \geqslant \xi_0$ kann $f(x)$ nicht abnehmen, da aus $x_2 > x_1 > \xi_0$, $f(x_1) > f(x_2)$ wegen der Konvexität von $f(x)$ für beliebige $x < x' < x_1$

$$\frac{f(x') - f(x)}{x' - x} \leqslant \frac{f(x_1) - f(x')}{x_1 - x'} \leqslant \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} < 0,$$

also $f(x) > f(x')$ folgen würde, d. h. x_1 ein m-Punkt sein müßte, gegen die Definition von ξ_0.

Hilfssatz 2. Eine konvexe stetige Funktion ist in jedem endlichen Intervall totalstetig und genügt sogar der Lipschitzschen Bedingung.

Beweis. Aus der Konvexität der Funktion folgt, daß für $a < x < y < b$ die Ungleichungen

$$f(a) - f(a-1) \leqslant \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \leqslant \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \leqslant \frac{f(b) - f(y)}{b - y} \leqslant f(b+1) - f(b)$$

gelten, was den Satz unmittelbar impliziert.

Hilfssatz 3. Die rechtsseitige Ableitung einer stetigen, konvexen Funktion existiert überall und ist eine überall rechtsseitig stetige, nichtabnehmende Funktion[5]).

Beweis. Die aus der Konvexität sich ergebende Beziehung

$$\frac{f(x)-f(x-1)}{1} \leqslant \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \leqslant \frac{f(x+h')-f(x)}{h'} \quad \text{für } 0<h\leqslant h'$$

gewährleistet die Existenz von $f'_+(x)=\lim\limits_{0<h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$. Die für $x_1<x_1+h<x_2$ geltende Ungleichung

$$\frac{f(x_1+h)-f(x_1)}{h} \leqslant \frac{f(x_2)-f(x_1+h)}{x_2-x_1-h} \leqslant \frac{f(x_2+h)-f(x_2)}{h}$$

ergibt

$$f'_+(x_1)\leqslant f'_+(x_2) \text{ für } x_1<x_2,$$

also ist $f'_+(x)$ nichtabnehmend. Wäre $f'_+(x)$ an einer Stelle x_1 rechtsseitig unstetig, so würde $\lim\limits_{x_1<x\to x_1} f'_+(x)=l$ existieren und es wäre $l>f'_+(x_1)$, also auch $\frac{f(x_1+h)-f(x_1)}{h}<l$ für hinreichend kleines $h>0$ und daher ($f(x)$ ist ja stetig) für hinreichend kleines $x_2-x_1>0$ auch noch

$$\frac{f(x_2+h)-f(x_2)}{h}<l.$$

Wegen $f'_+(x_2)\leqslant\frac{f(x_2+h)-f(x_2)}{h}$ hätten wir also

$$f'_+(x_2)<l$$

für hinreichend kleines $x_2-x_1>0$, was der Monotonie von $f'_+(x)$ und der Annahme $\lim\limits_{x_1<x\to x_1} f'_+(x)=l$ widerspricht.

Ganz analog beweist man für eine stetige konvexe Funktion die Existenz überall der linksseitigen nichtabnehmenden Ableitung und ihre linksseitige Stetigkeit. Es folgt daraus bekanntlich die Existenz der Ableitung überall, abgesehen von einer abzählbaren Punktmenge. Wir bemerken noch, daß — wie leicht nachzuprüfen ist — stets $f'_-(x)\leqslant f'_+(x)$ und für $x_1<x_2$ $f'_+(x_1)\leqslant f'_-(x_2)$ ist.

[5]) l. c. [3]) p. 190. Die rechtsseitige Stetigkeit von $f'_+(x)$ wurde von Jensen nicht bewiesen.

Satz 3. *Jede stetige konvexe Funktion $f(x)$ mit $f(a)=0$ kann in der Form*

$$(8)\qquad f(x)=\int_a^x p(\xi)\,d\xi$$

dargestellt werden, wo $p(x)$ eine nichtabnehmende, rechtsseitig stetige und eindeutig bestimmte Funktion ist.

Beweis. Nach Hilfssatz 2 ist $f(x)$ das unbestimmte Integral ihrer rechtsseitigen Ableitung $f'_+(x)$ und diese ist nach Hilfssatz 3 bereits eine nichtabnehmende, rechtsseitig stetige Funktion. Ist nun $p(x)$ eine zweite nichtabnehmende, rechtsseitig stetige Funktion, mit welcher die Darstellung (8) gilt, so ist sowohl $f'_+(x)$ als $p(x)$ bis auf eine abzählbare Menge stetig und $=f'(x)$, also $p(x)=f'_+(x)$. Ist aber x_0 ein Unstetigkeitspunkt von $f'_+(x)$ oder von $p(x)$, so ist er Häufungspunkt von Punkten $x_n>x_0$, in welchen beide Funktionen stetig sind und aus $f'_+(x_n)=p(x_n)$, $x_n>x_0$, $x_n\to x_0$ folgt wegen der rechtsseitigen Stetigkeit von $f'_+(x)$ und $p(x)$, daß auch $f'_+(x_0)=p(x_0)$ ist.

Wenn die Funktion $f(x)$ nicht monoton ist, so gibt es nach Hilfssatz 1 ein ξ_0, so daß für $x\leqslant\xi_0$ die Funktion $f(x)$ nichtzunehmend und für $x\geqslant\xi_0$ nichtabnehmend ist; die Funktion $p(\xi)$ muß also für $\xi\leqslant\xi_0$ nichtpositiv und für $\xi\geqslant\xi_0$ nichtnegativ sein.

Auch die Umkehrung von Satz 3 ist richtig:

Jede Funktion der Form $f(x)=\int\limits_a^x p(\xi)\,d\xi$, wo $p(x)$ eine nichtabnehmende Funktion ist, ist stetig und konvex.

Es sei nämlich $u<v$; dann findet man

$$\frac{1}{2}[f(u)+f(v)]=\frac{1}{2}\left[\int_a^u p(\xi)\,d\xi+\int_a^v p(\xi)\,d\xi\right]$$

$$=\int_a^{\frac{u+v}{2}} p(\xi)\,d\xi+\frac{1}{2}\int_{\frac{u+v}{2}}^{v} p(\xi)\,d\xi-\frac{1}{2}\int_u^{\frac{u+v}{2}} p(\xi)\,d\xi\geqslant\int_a^{\frac{u+v}{2}} p(\xi)\,d\xi=f\left(\frac{u+v}{2}\right).$$

§ 4.

Wir wollen jetzt konvexe N'-Funktionen betrachten.

Nach Satz 3 ist eine solche Funktion $M(u)$ in der Form

$$M(u)=\int_0^u p(\xi)\,d\xi$$

darstellbar, wo $p(\xi)$ eine nichtabnehmende, rechtsseitig stetige und eindeutig bestimmte Funktion ist. Die Funktion $p(\xi)$ besitzt die folgenden Eigenschaften:

α) $p(\xi)>0$ für $\xi>0$;

β) $\lim\limits_{\xi\to 0} p(\xi)=p(0)=0$;

γ) $p(\xi)\longrightarrow+\infty$ für $\xi\longrightarrow+\infty$

δ) $p(-\xi)=-\lim\limits_{\eta<\xi} p(\eta)$.

Es genügt natürlich nur zu beweisen, daß die Funktion $p(\xi)$ die Eigenschaften β), γ) und δ) aufweist. Wir haben

$$\frac{M(2u)}{2u}>\frac{\int_u^{2u} p(\xi)\,d\xi}{2u}\geqslant\frac{u\,.\,p(u)}{2u}=\frac{1}{2}\,p(u) \text{ für } u>0$$

und für $u<0$ analog

$$\frac{M(2u)}{2u}\leqslant\frac{1}{2}\,p(u);$$

da $\lim\limits_{u\to 8}\dfrac{M(2u)}{2u}=0$ ist, so folgt aus den letzten Ungleichungen die Beziehung β). Ebenso folgt aus der Relation

$$\frac{M(u)}{u}=\frac{1}{u}\int_0^u p(\xi)\,d\xi\leqslant p(u) \text{ für } u>0,$$

wegen $\lim\limits_{u\to+\infty}\dfrac{M(u)}{u}=+\infty$, die Beziehung γ).

Nach der früheren Definition von $p(\xi)$ ist die Beziehung δ) mit

$$\delta') \qquad M'_+(-\xi)=-\lim_{\eta<\xi} M'_+(\eta)$$

identisch. Da für $\eta<\xi$ $M'_-(\eta)\leqslant M'_+(\eta)\leqslant M'_-(\xi)$ und die linksseitige Ableitung von $M(u)$ linksseitig stetig ist, so haben wir

$\lim\limits_{\eta<\xi} M'_+(\eta)=M'_-(\xi)$, was wegen $M'_+(-\xi)=-M'_-(\xi)$ die Beziehung δ) ergibt.

Sind die Eigenschaften α) bis δ) für eine nichtabnehmende und rechtsseitig stetige Funktion $p(\xi)$ erfüllt, so ist die Funktion $M(u)=\int_0^u p(\xi)\,d\xi$ eine konvexe N'-Funktion; den Beweis überlassen wir dem Leser.

Ist $y=p(x)$ eine nichtabnehmende, rechtsseitig stetige und den Bedingungen α) — δ) genügende Funktion, so ist die inverse Funktion $x=p^{(-1)}(y)$ nicht für alle Werte von y eindeutig oder auch nur überhaupt definiert. Wir wollen nun *unter $p^{(-1)}(y)$ die folgendermaßen überall und eindeutig erklärte Funktion verstehen:*

Wird ein Wert y_0 von $p(x)$ mehr als einmal angenommen, so sei x_0 die obere Grenze aller x, für welche $p(x)=y_0$; wir setzen dann $p^{(-1)}(y_0)=x_0$. Nimmt $p(x)$ einen Wert y_0 überhaupt nicht an, so suchen wir alle Zahlen $y<y_0$, welche als Werte von $p(x)$ vorkommen und definieren $p^{(-1)}(y_0)=\text{obere Grenze}_{y<y_0}\, p^{(-1)}(y)$.

Man kann leicht zeigen, daß die so definierte Funktion $p^{(-1)}(y)$ eine ebenfalls nichtabnehmende, rechtsseitig stetige und den Bedingungen α) bis δ) genügende Funktion ist; ferner gelten für jedes x die Relationen

$$p\,(p^{(-1)}(x))\geqslant x, \qquad \lim_{0<h\to 0} p\,(p^{(-1)}(x)-h)\leqslant x.$$

Unter Berücksichtigung dieser Verabredungen gilt der folgende

Satz 4. *Ist $M(u)=\int_0^u p(\xi)\,d\xi$ eine konvexe* N'-*Funktion, so hat die zu ihr komplementäre Funktion die Form*

$$N(v)=\int_0^v p^{(-1)}(\xi)\,d\xi. \tag{9}$$

In der Ungleichung

$$M(u)+N(v)\geqslant uv$$

gilt das Gleichheitszeichen — wenn u vorgegeben ist — für $v=\operatorname{sgn} u\,.\,p(|u|)$, und bei vorgegebenem v für $u=\operatorname{sgn} v\,.\,p^{(-1)}(|v|)$.

Die zu $N(v)$ komplementäre Funktion ist wieder $M(u)$ [6].

Beweis. Es genügt offenbar (9) für $v \geqslant 0$ zu beweisen. Nach (5) haben wir das $\operatorname*{Max}_{u \geqq 0}[uv - M(u)]$ zu bestimmen. Dieses Maximum wird bei festem v für $u = p^{(-1)}(v)$ angenommen. Es gilt nämlich für $h > 0$

$$\int_{p^{(-1)}(v)}^{p^{(-1)}(v)+h} p(\xi)\, d\xi \geqslant h\, p(p^{(-1)}(v)) \geqslant hv$$

und für $h < 0$

$$\int_{p^{(-1)}(v)}^{p^{(-1)}(v)+h} p(\xi)\, d\xi = \lim_{0<\varepsilon\to 0} \int_{p^{(-1)}(v)-\varepsilon}^{p^{(-1)}(v)+h} p(\xi)\, d\xi \geqslant \lim_{0<\varepsilon\to 0} (h+\varepsilon)\, p(p^{(-1)}(v)-\varepsilon) \geqslant v\, h;$$

infolgedessen erhalten wir für beliebiges h

$$[p^{(-1)}(v)+h]v - \int_0^{p^{(-1)}(v)+h} p(\xi)\, d\xi = p^{(-1)}(v)v - \int_0^{p^{(-1)}(v)} p(\xi)\, d\xi + hv$$

$$-\int_{p^{(-1)}(v)}^{p^{(-1)}(v)+h} p(\xi)\, d\xi \leqslant p^{(-1)}(v)\, v - \int_0^{p^{(-1)}(v)} p(\xi)\, d\xi.$$

Es ist daher

$$N(v) = p^{(-1)}(v) . v - \int_0^{p^{(-1)}(v)} p(\xi)\, d\xi = \int_0^v p^{(-1)}(\xi)\, d\xi$$

und es gilt die Gleichung

$$M[p^{(-1)}(v)] + N(v) = p^{(-1)}(v) . v .$$

Nun ist aber $N(v)$ nach Satz 2 wieder eine konvexe N′-Funktion und nach Satz 3 auf genau eine Art in der Form $N(v) = \int_0^v q(\xi)\, d\xi$ darstellbar, wo $q(x)$ eine nichtabnehmende, rechtsseitig stetige Funktion ist. Da bereits $p^{(-1)}(x)$ rechtsseitig stetig und nichtabnehmend ist und die Darstellung (9) liefert, muß $q(x) = p^{(-1)}(x)$ gelten. Nach dem bisher bewiesenen ist die zu $N(v)$ komplementäre Funktion $\int_0^u q^{(-1)}(\xi)\, d\xi = \int_0^u [p^{(-1)}(\xi)]^{(-1)}\, d\xi = \int_0^u p(\xi) d\xi = M(u)$ und es gilt die Gleichung

$$u . q^{(-1)}(u) = M(u) + N[q^{(-1)}(u)] = M(u) + N[p(u)].$$

[6]) Dieser Satz enthält die präzise Fassung eines Satzes von Herrn W. H. Young, On Classes of Summable Functions and their Fourier Series, Proc. Royal Soc. (A) 87 (1912) p. 225—229.

§ 5.

$N(v)$ sei eine konvexe N′-Funktion.

Wir bezeichnen zur Abkürzung die ganze Zahlenfolge $\{a_\nu\}$ mit dem Buchstaben a und setzen

$$\varrho(a) = \sum_{\nu=1}^{\infty} N(a_\nu).$$

Es ist dann und nur dann $\varrho(a)$ endlich, wenn $\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu$ mit $N(v)$ konvergiert.

Hilfssatz 4. Gegeben sei eine Folge positiver Zahlen $b_1, b_2, \ldots$ Für jede Folge positiver Zahlen $a = \{a_1, a_2, \ldots\}$ definieren wir die abzählbar vielen Zahlen

$$f_r(a) = \sum_{i=1}^{r} b_i a_i .$$

Wenn für jedes a mit endlichem $\varrho(a)$ die $f_r(a)_{r=1,2,\ldots}$ eine beschränkte Zahlenfolge bilden, so gibt es eine Zahl L mit der Eigenschaft:

Für alle a mit $\varrho(a) \leqslant 1$ gilt

$$f_r(a) < L \qquad (r = 1, 2, \ldots),$$

Beweis. Angenommen, die Behauptung wäre falsch. Dann gibt es Folgen

$$a^{(1)} = \{a_\nu^{(1)}\}, \quad a^{(2)} = \{a_\nu^{(2)}\}, \ldots, \quad a^{(k)} = \{a_\nu^{(k)}\}, \ldots,$$

so daß die Ungleichungen bestehen

$$\varrho(a^{(1)}) \leqslant 1, \quad \varrho(a^{(2)}) \leqslant 1, \ldots, \quad \varrho(a^{(k)}) \leqslant 1, \ldots$$

und

$$f_{r_1}(a^{(1)}) > 2^1 \cdot 1$$
$$f_{r_2}(a^{(2)}) > 2^2 \cdot 2$$
$$\vdots \qquad \vdots$$
$$f_{r_l}(a^{(l)}) > 2^l \cdot l$$
$$\vdots \qquad \vdots$$

Wir bilden die neue Folge $c = \{c_\nu\}$ mit den Elementen

$$c_1 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} a_1^{(k)}, \ldots, \quad c_\nu = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} a_\nu^{(k)}, \ldots$$

Es ist

$$\varrho(c) = \sum_{\nu=1}^{\infty} N(c_\nu) = \sum_{\nu=1}^{\infty} N\left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} a_\nu^{(k)}\right)$$

und da für konvexe Funktionen die Ungleichung gilt

$$N\left(\sum_{\nu=1}^{\infty} d_\nu c_\nu\right) \leqslant \sum_{\nu=1}^{\infty} d_\nu N(c_\nu), \text{ wenn } \sum_{\nu=1}^{\infty} d_\nu = 1,$$

so ist

$$\varrho(c) \leqslant \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} N(a_\nu^{(k)}) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \varrho(a^{(k)}) \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = 1.$$

Es ist aber auch

$$f_{r_l}(c) = \sum_{i=1}^{r_l} b_i \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} a_i^{(k)} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \sum_{i=1}^{r_l} b_i a_i^{(k)}$$
$$= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} f_{r_l}(a^{(k)}) \geqslant \frac{1}{2^l} f_{r_l}(a^{(l)}) > l,$$

also $\varrho(c)$ endlich und $f_{r_l}(c) \underset{l \to \infty}{\longrightarrow} \infty$, was der Voraussetzung widerspricht.

Hilfssatz 5. Unter denselben Voraussetzungen und mit denselben Bezeichnungen, wie in Hilfssatz 4, gilt

$$f_r(a) < L \cdot \varrho(a), \text{ wenn } \varrho(a) \geqslant 1.$$

Beweis. Es sei $\varrho(a) = \sum_{\nu=1}^{\infty} N(a_\nu) \geqslant 1$. Bezeichnen wir die Folge $\left\{\frac{a_\nu}{\varrho(a)}\right\}$ mit $\frac{a}{\varrho(a)}$, so ist

$$\varrho\left(\frac{a}{\varrho(a)}\right) = \sum_{\nu=1}^{\infty} N\left(\frac{a_\nu}{\varrho(a)}\right)$$

und da für konvexe Funktionen die Ungleichung

$$N(k u) \leqslant k \cdot N(u)$$

gilt, wenn $k \leqslant 1$, so ist

$$\varrho\left(\frac{a}{\varrho(a)}\right) \leqslant \frac{1}{\varrho(a)} \sum_{\nu=1}^{\infty} N(a_\nu) = 1.$$

Nach Hilfssatz 4 wird daher

$$f_r\left(\frac{a}{\varrho(a)}\right) = \frac{1}{\varrho(a)} f_r(a) < L, \text{ w. z. b. w.}$$

Hilfssatz 6. Die in Hilfssatz 4 definierte Konstante L, welche noch von der Folge $\{b_i\}$ abhängen kann, hat die folgende Eigenschaft: Wir bilden die konvexe N'-Funktion $\overline{N}(v) = L.N(v)$ und finden die zu ihr komplementäre Funktion $\overline{M}(u)$. Wenn für jede Folge $\{a_\nu\}$, für welche $\sum_{\nu=1}^{\infty} N(a_\nu)$ endlich ist, auch die Reihe $\sum_{\nu=1}^{\infty} b_\nu a_\nu$ konvergiert, so konvergiert $\sum_{\nu=1}^{\infty} \overline{M}(b_\nu)$.

Beweis. Wir wählen eine Folge $a = \{a_\nu\}$, so daß

$$a_\nu b_\nu = \overline{N}(a_\nu) + \overline{M}(b_\nu)$$

gilt und bezeichnen mit $\overset{n}{a}$ die Folge

$$\{a_1, a_2, \ldots, a_n, 0, 0, 0, \ldots\} = \overset{n}{a}.$$

Dann ist für $r \geqslant n$

$$f_r(\overset{n}{a}) = \sum_{i=1}^{n} b_i a_i = \sum_{i=1}^{n} \overline{N}(a_i) + \sum_{i=1}^{n} \overline{M}(b_i). \tag{10}$$

Wäre nun $\varrho(\overset{n}{a}) \geqslant 1$, so wäre nach Hilfssatz 5

$$f_r(\overset{n}{a}) < L \cdot \varrho(\overset{n}{a}),$$

was wegen

$$\sum_{i=1}^{n} \overline{N}(a_i) = L \sum_{i=1}^{n} N(a_i) = L\,\varrho(\overset{n}{a})$$

und (10) nicht möglich ist. Daher ist $\varrho(\overset{n}{a}) < 1$, also

$$\varrho(a) = \lim_{n \to \infty} \varrho(\overset{n}{a}) \leqslant 1.$$

Nach Hilfssatz 4 folgt daraus

$$f_r(a) < L$$

und aus (10) ergibt sich somit

$$\sum_{i=1}^{\infty} \overline{M}(b_i) \leqslant L.$$

Satz 5.

Voraussetzung. *$M(u)$ ist eine konvexe N′-Funktion mit der Eigenschaft (Δ_2) für kleines u:*

$$(\Delta_2) \qquad M(2u) \leqslant k\, M(u) \text{ für } 0 \leqslant u < \delta.$$

Behauptung. *Die zu $M(u)$ komplementäre Funktion $N(v)$ ist zu $M(u)$ konjugiert.*

Beweis. Nach Hilfssatz 6 gibt es für eine feste Folge $b = \{b_\nu\}$, für welche $\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu b_\nu$ konvergiert bei beliebigem mit $N(v)$ konvergenten $\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu$, eine Konstante L, so daß $\sum_{\nu=1}^{\infty} b_\nu$ mit der zu $\overline{N}(v) = L \,.\, N(v)$ komplementären Funktion $\overline{M}(u)$ konvergiert.

Nun kann man leicht zeigen, daß

$$\overline{M}(u) = L \,.\, M\left(\frac{u}{L}\right)$$

ist: Die zu $N(v)$ bzw. $\overline{N}(v)$ komplementäre Funktion ist $M(u)$ bzw. $\overline{M}(u)$. Nach der Definition der komplementären Funktion (dabei beschränken wir uns nur auf positive Werte u, v) ist $M\left(\frac{u}{L}\right)$ bzw. $\overline{M}(u)$ als $\operatorname*{Max}_{v>0} \left[\frac{uv}{L} - N(v)\right]$ bzw. $\operatorname*{Max}_{v>0} \left[u\, v - \overline{N}(v)\right]$ definiert. Für ein gewisses v_u bzw. $\bar{v}_u$ ist $M\left(\frac{u}{L}\right) = v_u \frac{u}{L} - N(v_u)$, $\overline{M}(u) = \bar{v}_u u - \overline{N}(\bar{v}_u)$. Es bestehen also die beiden Ungleichungen

$$L\, M\left(\frac{u}{L}\right) = v_u\, u - L\, N(v_u) \geqslant \bar{v}_u u - L N(\bar{v}_u) = \overline{M}(u),$$

$$\overline{M}(u) = \bar{v}_u\, u - \overline{N}(\bar{v}_u) \geqslant v_u\, u - \overline{N}(v_u) = L\, M\left(\frac{u}{L}\right).$$

Wir können L einer natürlichen Zahl gleich annehmen.

Es ist dann $\frac{1}{L} \leqslant 1$, also wegen der Konvexität von $M(u)$

$$(11) \qquad \overline{M}(u) = L\, M\left(\frac{u}{L}\right) \leqslant M(u) \qquad \text{für } u \geqslant 0$$

und wegen (Δ_2)

$$(12) \qquad M(u) = M\left(2^L \frac{L}{2^L} \frac{u}{L}\right) \leqslant k^L M\left(\frac{L}{2^L} \frac{u}{L}\right) \leqslant k^L M\left(\frac{u}{L}\right) = \frac{k^L}{L} \overline{M}(u) \qquad \text{für } 0 \leqslant u < \delta.$$

Wegen (11) und (12) sind nach Satz 1a $M(u)$ und $\overline{M}(u)$ äquivalent, also konvergiert $\sum_{\nu=1}^{\infty} b_\nu$ auch mit $M(u)$, w. z. b. w.

Korollar. Genügen beide konvexe komplementäre N′-Funktionen $M(u)$ und $N(v)$ Bedingungen der Form (Δ_2) für kleines u, so sind sie zueinander konjugiert.

Satz 5′. Genügt die konvexe N′-Funktion $M(u)$ der Dreiecksungleichung (Eigenschaft (Δ)) für kleines u, so ist die zu ihr komplementäre N′-Funktion $N(v)$ zu $M(u)$ konjugiert.

Beweis. Die Eigenschaft (Δ) für kleines u hat die Eigenschaft (Δ_2) für kleines u zur Folge, so daß Satz 5 angewandt werden kann.

§ 6.

Hilfssatz 7.

Voraussetzung. $M(u)$ und $N(v)$ sind halbkonjugierte N-Funktionen.

Behauptung. Es gibt Zahlen $\delta > 0$, $k > 0$, so daß die Ungleichung

$$u\, v \leqslant k\,[M(u) + N(v)]$$

besteht für $\qquad 0 \leqslant u < \delta,\ 0 \leqslant v < \delta.$

Beweis. Unmittelbar aus Satz 1, wenn

$$M(u, v) = M(u) + N(v),$$
$$N(u, v) = u\, v$$

gesetzt wird.

Definition 7. Wir sagen, die N-Funktion $M(u)$ besitze die Eigenschaft (Δ_α) für kleines u, wenn es zu jeder Zahl $\alpha > 0$ ein $\delta_\alpha > 0$ und ein k_α gibt, so daß die Ungleichung

$$M(\alpha u) \leqslant k_\alpha M(u) \qquad \text{für } 0 \leqslant u < \delta_\alpha$$

besteht.

Hilfssatz 8.

Voraussetzung. $M(u)$ und $N(v)$ sind N-Funktionen, $M(u)$ ist zu $N(v)$ konjugiert.

Behauptung. $N(v)$ besitzt die Eigenschaft (Δ_α) für kleines v.

Beweis. $M(u)$ und $N(v)$ sind halbkonjugiert, also gibt es nach Hilfssatz 7 ein $\delta > 0$ und ein $k > 0$, so daß

$$uv \leqslant k[M(u) + N(v)] \text{ für } 0 \leqslant u < \delta,\ 0 \leqslant v < \delta$$

ist, also auch die Ungleichung

$$u\frac{v}{\alpha} \leqslant k\left[M(u) + N\left(\frac{v}{\alpha}\right)\right] \text{ für } 0 \leqslant u < \delta,\ 0 \leqslant v < \delta\alpha$$

und

$$uv \leqslant \alpha k\left[M(u) + N\left(\frac{v}{\alpha}\right)\right] \text{ für } 0 \leqslant u < \delta,\ 0 \leqslant v < \delta\alpha \tag{13}$$

besteht. Wir setzen

$$N_1(v) = N\left(\frac{v}{\alpha}\right).$$

Aus der Konvergenz von $\sum_{\nu=1}^{\infty} N_1(v_\nu)$ folgt für jede Folge $\{u_n\}$, für welche $\sum_{\nu=1}^{\infty} M(u_\nu)$ konvergiert, wegen (13) die Konvergenz von $\sum_{\nu=1}^{\infty} u_\nu v_\nu$, also, da $M(u)$ zu $N(v)$ konjugiert ist, die Konvergenz von $\sum_{\nu=1}^{\infty} N(v_\nu)$. Nach Satz 1a gibt es also ein a und ein b, so daß die Ungleichung

$$N(v) \leqslant b N_1(v) = b N\left(\frac{v}{\alpha}\right) \text{ für } 0 \leqslant v < a$$

besteht. Setzt man $v = \alpha s$, $b = k_\alpha$, $\delta_\alpha = \frac{a}{\alpha}$, so hat man

$$N(\alpha s) \leqslant k_\alpha . N(s) \qquad \text{für } 0 \leqslant s < \delta_\alpha .$$

Hilfssatz 9.

Voraussetzung. $M(u)$ ist eine N'-Funktion und ist zu einer N-Funktion $\bar{N}(v)$ konjugiert. $N(v)$ ist die zu $M(u)$ komplementäre Funktion.

Behauptung. $\bar{N}(v)$ und $N(v)$ sind äquivalent.

Beweis. $M(u)$ und $\bar{N}(v)$ sind halbkonjugiert, also gilt nach Hilfssatz 7

$$uv \leqslant k[M(u) + \bar{N}(v)] \qquad \text{für } 0 \leqslant u < \delta,\ 0 \leqslant v < \delta$$

bei gewissen k, δ, wobei wir, ohne Beschränkung der Allgemeinheit $\delta < 1$, $k > 1$ annehmen dürfen. Daher

$$uvk \leqslant k[M(u) + \bar{N}(vk)] \text{ und}$$

$$uv - M(u) \leqslant \bar{N}(vk) \qquad \text{für } 0 \leqslant u < \delta,\ 0 \leqslant v < \frac{\delta}{k}.$$

Es ist

$$N(v) = u_v . v - M(u_v).$$

Wir wählen $\bar{\delta} > 0$ so klein, daß für $0 \leqslant v < \bar{\delta}$ die Ungleichung $0 \leqslant u_v < \delta$ gilt. Dann haben wir

$$N(v) \leqslant \bar{N}(vk) \qquad \text{für } 0 \leqslant v < \operatorname{Min}\left(\frac{\delta}{k},\ \bar{\delta}\right) = \bar{\bar{\delta}},$$

und da nach Hilfssatz 8 $\bar{N}(v)$ die Eigenschaft (Δ_α) für kleines v besitzt, folgt daraus für $\alpha = k$

$$N(v) \leqslant \bar{k}\,\bar{N}(v) \qquad \text{für } 0 \leqslant v < \delta^*.$$

Andererseits folgt aus der Konvergenz von $\sum_{\nu=1}^{\infty} N(v_\nu)$ für jede Folge $\{u_n\}$ mit konvergentem $\sum_{\nu=1}^{\infty} M(u_\nu)$ immer die Konvergenz von $\sum_{\nu=1}^{\infty} u_\nu v_\nu$, also auch die Konvergenz von $\sum_{\nu=1}^{\infty} \bar{N}(v_\nu)$. Daher nach Satz 1a

$$\bar{N}(v) \leqslant k' N(v) \qquad \text{für } 0 \leqslant v < \delta'.$$

Folgerung. Eine N-Funktion $N(v)$, zu welcher es eine konjugierte N'-Funktion $M(u)$ gibt, ist mit einer konvexen N'-Funktion (nämlich mit der zu $M(u)$ komplementären) äquivalent.

Definition 8. Wir nennen eine Funktion $r(u) \geqslant 0$ *pseudomonoton* im Intervall $\langle c, d\rangle$, wenn es eine Konstante b gibt, so daß immer

$$r(u_1) \leqslant b\, r(u_2)$$

ist für $c \leqslant u_1 \leqslant u_2 \leqslant d$

Hilfssatz 10. $M(u)$ sei eine N'-Funktion. Damit $M(u)$ mit einer Funktion der Form $P(u)=s(|u|).|u|$ mit für $u \geqslant 0$ nichtabnehmendem, rechtsseitig stetigem $s(u)$, $s(0)=0$, $s(u) \underset{u\to\infty}{\longrightarrow} \infty$ äquivalent sei, ist notwendig und hinreichend, daß $\frac{M(u)}{u}$ in $\langle 0, \delta \rangle$ mit $\delta > 0$ pseudomonoton ist.

Beweis.

Die Bedingung ist notwendig: Wir setzen $\frac{M(u)}{u}=r(u)$.

Die Äquivalenz von $M(u)$ und $P(u)$ besagt

$$0<\alpha \leqslant \frac{r(u)}{s(u)} \leqslant \beta \qquad \text{für } 0<u \leqslant \delta,$$

also

$$r(u_1) \leqslant \beta s(u_1) \leqslant \beta s(u_2) \leqslant \frac{\beta}{\alpha} r(u_2) = b\, r(u_2)$$

mit $b=\frac{\beta}{\alpha}$ für $0 \leqslant u_1 \leqslant u_2 \leqslant \delta$.

Die Bedingung ist hinreichend: Wir ersetzen erst $r(u)=\frac{M(u)}{u}$ für $u \geqslant 0$ durch eine streckenweise konstante, rechtsseitig stetige Funktion $\bar{r}(u)$, u. zw. so, daß die Endpunkte der Intervalle, in welchen $\bar{r}(u)$ konstant ist, keinen Häufungspunkt außer 0 haben und daß die Ungleichung besteht

$$0<\varkappa \leqslant \frac{r(u)}{\bar{r}(u)} \leqslant \lambda \qquad \text{für } 0<u \leqslant \delta.$$

Wir definieren durch Induktion eine Folge $u_1>u_2>\ldots>u_n>\ldots>0$ und die Werte der Funktion $s(u)$ für $0 \leqslant u < u_1$:

$u_1=\delta$,

$u_2=$ obere Grenze derjenigen $u<u_1$, für welche $\bar{r}(u)<\lim\limits_{0<\varepsilon\to 0} \bar{r}(u_1-\varepsilon)$,

$\vdots$

$u_n=$ obere Grenze derjenigen $u<u_{n-1}$, für welche $\bar{r}(u)<\lim\limits_{0<\varepsilon\to 0} \bar{r}(u_{n-1}-\varepsilon)$,

$s(u)=\lim\limits_{0<\varepsilon\to 0} \bar{r}(u_{n-1}-\varepsilon)$ für $u_n \leqslant u < u_{n-1}$,

$s(0)=0$.

Für $u \geqslant u_1$ definieren wir $s(u)$ stetig, monoton und so, daß $s(u) \underset{u\to\infty}{\longrightarrow} \infty$, sonst beliebig.

Für $u_n \leqslant u < u_{n-1}$ gelten die Ungleichungen

$$1 \geqslant \frac{\lim\limits_{0<\varepsilon\to 0} \bar{r}(u_{n-1}-\varepsilon)}{\bar{r}(u)} = \frac{s(u)}{\bar{r}(u)} \geqslant \frac{\lim\limits_{0<\varepsilon\to 0} r(u_{n-1}-\varepsilon)}{r(u)} \cdot \frac{\varkappa}{\lambda} = \frac{r(u_{n-1})}{r(u)} \cdot \frac{\varkappa}{\lambda} \geqslant \frac{\varkappa}{\lambda b},$$

also

$$\frac{\varkappa}{\lambda^2 b} \leqslant \frac{s(u)}{r(u)} \leqslant \frac{1}{\varkappa},$$

womit die Äquivalenz von $M(u)$ und $s(u).u$ nachgewiesen ist.

Hilfssatz 11. Ist $s(u)$ für $u \geqslant 0$ eine nichtnegative und nichtabnehmende Funktion mit $s(0)=0$ und hat $s(u)$ die Eigenschaft (Δ_2) für kleines u, so sind die Funktionen

$$M(u)=\int_0^u s(\xi)\, d\xi, \quad \overline{M}(u)=s(u).u$$

äquivalent.

Beweis. $M(u) \leqslant u.s(u)=\overline{M}(u)$,

$$M(u) \geqslant \int_{\frac{u}{2}}^{u} s(\xi)\, d\xi \geqslant \frac{u}{2} s\left(\frac{u}{2}\right) \geqslant \frac{1}{2k} u\, s(u) = \frac{1}{2k} \overline{M}(u).$$

Hilfssatz 12.

Voraussetzung. $M(u)$ ist eine N'-Funktion. Die zu $M(u)$ komplementäre Funktion $N(v)$ hat die Eigenschaft (Δ_2) für kleines u. $M_1(u)$ ist eine mit $M(u)$ äquivalente N'-Funktion, u. zw. ist $M_1(u)$ so normiert, daß für $0 \leqslant u < \delta$ die Ungleichung $1 \leqslant \frac{M(u)}{M_1(u)} \leqslant b$ besteht. $N_1(v)$ ist die zu $M_1(u)$ komplementäre Funktion.

Behauptung. $N_1(v)$ ist mit $N(v)$ äquivalent.

Beweis. Die Voraussetzungen besagen u. a.:

(α) $$uv \leqslant M(u)+N(v),$$

(β) $$uv \leqslant M_1(u)+N_1(v),$$

(γ) $$1 \leqslant \frac{M(u)}{M_1(u)} \leqslant b \qquad \text{für } 0 \leqslant u < \delta;$$ wir dürfen $b=2^c$ annehmen;

(δ) $$N(2v) \leqslant k N(v) \qquad \text{für } 0 \leqslant v < \delta_1.$$

Wegen (α) und (γ) ist

$$u\,v \leqslant b\,M_1(u) + N(v) \leqslant b\,[M_1(u) + N(v)] \quad \text{für } 0 \leqslant u < \delta,$$

also

$$u\,v\,b \leqslant b\,[M_1(u) + N(v\,b)]$$
$$u\,v \leqslant M_1(u) + N(v\,b) \qquad \text{für } 0 \leqslant u < \delta.$$

Nun ist

$$N_1(v) = u_v'\,v - M_1(u_v')$$

und da bei hinreichend kleinem δ_2 aus $0 \leqslant v < \delta_2$ die Ungleichung $0 \leqslant u_v < \delta$ folgt, so haben wir

$$N_1(v) = u_v'\,v - M_1(u_v') \leqslant N(v\,b) \quad \text{für } 0 \leqslant v < \delta_2.$$

Daraus folgt wegen (δ)

(ε) $$N_1(v) \leqslant k^c\,N(v) \quad \text{für } 0 \leqslant v < \operatorname{Min}\left(\frac{\delta_1}{2^c}, \delta_2\right) = \delta_3.$$

Umgekehrt folgt aus (β) und (γ)

$$u\,v \leqslant M(u) + N_1(v),$$

also durch eine der vorhergehenden analoge Schlußweise

(φ) $$N(v) \leqslant N_1(v) \qquad \text{für } 0 \leqslant v < \delta_4.$$

Die Ungleichungen (ε) und (φ) enthalten die Behauptung.

Satz 6. *Damit zu einer N'-Funktion $M(u)$ eine Funktion $L(v)$ existiert, so daß $M(u)$ und $L(v)$ zueinander konjugiert sind, ist folgendes notwendig und hinreichend:*

1° *$M(u)$ hat die Eigenschaft (Δ_2) für kleines u;*

2° *$\dfrac{M(u)}{u}$ ist pseudomonoton in $\langle 0, \delta\rangle$ für ein gewisses $\delta > 0$;*

3° *die zu $M(u)$ komplementäre Funktion $N(v)$ hat die Eigenschaft (Δ_2) für kleines u.*

Sind die Bedingungen 1°, 2°, 3° erfüllt, so sind schon $M(u)$ und $N(v)$ zueinander konjugiert.

Beweis.

Die Bedingungen sind notwendig:

1° Nach Hilfssatz 8 hat $M(u)$ die Eigenschaft (Δ_2) für kleines u.

3° Sind $M(u)$ und $L(v)$ zueinander konjugiert, so ist $L(v)$ nach Hilfssatz 9 mit der zu $M(u)$ komplementären Funktion $N(v)$ äquivalent. Da $L(v)$ nach Hilfssatz 8 die Eigenschaft (Δ_2) für kleines u hat, so hat auch $N(v)$ diese Eigenschaft.

2° $L(v)$ und $N(v)$ sind äquivalent, also sind auch $M(u)$ und $N(v)$ zueinander konjugiert. $N(v)$ ist eine (sogar konvexe) N'-Funktion. Wir bilden die zu ihr komplementäre Funktion $\overline{M}(u)$. Nach Hilfssatz 9 ist $M(u)$ mit $\overline{M}(u)$ äquivalent. $\overline{M}(u)$ ist eine konvexe N'-Funktion. Setzt man $\dfrac{\overline{M}(u)}{u} = s(u)$, so findet man für $u_1 \leqslant u_2$

$$s(u_1) = \frac{\overline{M}(u_1)}{u_1} = \frac{\overline{M}\left(u_2\dfrac{u_1}{u_2}\right)}{u_1} \leqslant \frac{\dfrac{u_1}{u_2}\overline{M}(u_2)}{u_1} = \frac{\overline{M}(u_2)}{u_2} = s(u_2),$$

$s(u)$ ist also eine nichtabnehmende Funktion mit $s(0) = 0$, $s(u) \underset{u\to\infty}{\longrightarrow} \infty$. Da nun $M(u)$ mit $s(u)\,.\,u$ äquivalent ist, ist nach Hilfssatz 10 $M(u)$ pseudomonoton in $\langle 0, \delta\rangle$ für ein gewisses $\delta > 0$.

Die Bedingungen sind hinreichend:

$M(u)$ genüge den Bedingungen 1°, 2°, 3°. Wegen 2° ist $M(u)$ nach Hilfssatz 10 mit einer Funktion der Form $s(|u|)\,.\,|u|$, wo $s(0) = 0$ und $s(u)$ für $u \geqslant 0$ nichtabnehmend ist, äquivalent und wegen 1° hat $s(u)\,u$, also auch $s(u)$ die Eigenschaft (Δ_2) für kleines u. Nach Hilfssatz 11 ist $s(u)\,.\,u$ mit $\overline{M}(u) = \int\limits_0^u s(\xi)\,d\xi$ äquivalent, also ist auch $M(u)$ mit der konvexen N'-Funktion $\overline{M}(u)$ äquivalent und auch $\overline{M}(u)$ hat die Eigenschaft (Δ_2) für kleines u. Wir denken uns $\overline{M}(u)$ durch Multiplikation mit einer Konstanten so normiert, daß die Äquivalenz von $M(u)$ und $\overline{M}(u)$ in den Ungleichungen $1 \leqslant \dfrac{M(u)}{\overline{M}(u)} \leqslant b$ ihren Ausdruck findet. Nach Satz 5 ist die zu $\overline{M}(u)$ komplementäre Funktion $\overline{N}(v)$ zu $\overline{M}(u)$ konjugiert. Wegen 3° und Hilfssatz 12 ist die zu $M(u)$ komplementäre Funktion $N(v)$ mit $\overline{N}(v)$ äquivalent, also zu $\overline{M}(u)$ und auch zu $M(u)$ konjugiert. Nach 3° hat $N(v)$, also auch $\overline{N}(v)$ die Eigenschaft (Δ_2) für kleines v und wieder nach Satz 5 ist die zu $\overline{N}(v)$ komplementäre Funktion $\overline{M}(u)$ zu $\overline{N}(v)$ konjugiert. Also sind $\overline{M}(u)$ und $\overline{N}(v)$ zueinander konjugiert und da $M(u)$ mit $\overline{M}(u)$, $N(v)$ mit $\overline{N}(v)$ äquivalent sind, so sind auch $M(u)$ und $N(v)$ zueinander konjugiert.

Korollar. Zu einer konvexen N'-Funktion $M(u)$ gibt es dann und nur dann eine Funktion $L(v)$, so daß $M(u)$ und $L(v)$

zueinander konjugiert sind, wenn sowohl $M(u)$ als auch die zu ihr komplementäre Funktion $N(v)$ die Eigenschaft (Δ_2) für kleines u aufweisen. Ist diese Bedingung erfüllt, so sind schon $M(u)$ und $N(v)$ zueinander konjugiert (vgl. Korollar zu Satz 5).

Satz 7. *Ist $M(u)$ eine N′-Funktion, welche die Eigenschaft (Δ') für alle u*[7] *aufweist und ist $\frac{M(u)}{u}$ pseudomonoton für $0<u\leqslant\delta$, so sind $M(u)$ und die zu $M(u)$ komplementäre Funktion $N(v)$ zueinander konjugiert.*

Beweis. Nach Hilfssatz 10 ist $M(u)$ mit einer Funktion $P(u)=s(|u|).|u|$ äquivalent, wo $s(u)$ eine für $u\geqslant 0$ nichtabnehmende, rechtsseitig stetige Funktion ist und $s(0)=0$, $s(u)\underset{u\to+\infty}{\longrightarrow}+\infty$ gilt. Auch $P(u)$, also $s(u)$ besitzt daher die Eigenschaften (Δ') und (Δ_2) für kleines u. Nach Hilfssatz 11 ist $P(u)$, also auch $M(u)$ mit der konvexen N′-Funktion $\overline{M}(u)=\int\limits_0^u s(\xi)\,d\xi$ äquivalent und $\overline{M}(u)$ hat ebenfalls die Eigenschaft (Δ_2) für kleines u. Wir zeigen nun, daß die zu $s(u)$ inverse Funktion $s^{(-1)}(u)=t(u)$ die Eigenschaft (Δ_2) für kleines u hat: Aus der Eigenschaft (Δ') für kleines u von $s(u)$ folgt zunächst die Existenz von Konstanten $\lambda>0$, $\varepsilon>0$, so daß die Ungleichung

$$(14)\qquad t(xy)\geqslant\lambda\,t(x)\,t(y)\quad\text{für }0\leqslant x<\varepsilon,\ 0\leqslant y<\varepsilon,\ \varepsilon\leqslant 1$$

besteht. Widrigenfalls gäbe es eine Folge $0<x_n\longrightarrow 0$ und eine Folge $0<y_n\longrightarrow 0$, so daß

$$t(x_n y_n)<\frac{1}{n}\,t(x_n)\,t(y_n),$$

also auch

$$t(x_n y_n)<\frac{1}{n}[t(x_n)-h].[t(y_n)-h]\quad\text{für }0\leqslant h<h_n$$

wäre. Wegen

$$s(t(xy))\geqslant xy,$$

$$s\left(\frac{1}{n}[t(x_n)-h].[t(y_n)-h]\right)\leqslant Q^2 s\left(\frac{1}{n}\right).s[t(x_n)-h].s[t(y_n)-h],$$

$$\lim_{h\to 0}s[t(x_n)-h]\leqslant x_n,\quad\lim_{h\to 0}s[t(y_n)-h]\leqslant y_n,$$

würde daraus

$$0<x_n y_n\leqslant Q^2.s\left(\frac{1}{n}\right)x_n y_n$$

folgen und das würde wegen $s\left(\frac{1}{n}\right)\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}0$ zu einem Widerspruch führen. Aus (14) folgt aber für $x=\frac{2u}{\varepsilon}$, $y=\frac{\varepsilon}{2}$

$$t(u)\geqslant\lambda\,t\left(\frac{2u}{\varepsilon}\right)t\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)$$

und wegen $2u\leqslant\frac{2u}{\varepsilon}$, $t(2u)\leqslant t\left(\frac{2u}{\varepsilon}\right)$ die Ungleichung

$$t(2u)\leqslant\frac{1}{\lambda\,t\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)}\,t(u)=\mu\,t(u)$$

für hinreichend kleines u.

Die zu $\overline{M}(u)$ komplementäre Funktion $\overline{N}(v)$ hat also nach Hilfssatz 11 auch die Eigenschaft (Δ_2) für kleines u und die Funktionen $\overline{M}(u)$, $\overline{N}(v)$ sind nach dem Korollar zu Satz 5 zueinander konjugiert. Auch $M(u)$ und $\overline{N}(v)$ sind also zueinander konjugiert und nach Hilfssatz 9 sind $\overline{N}(v)$ und $N(v)$ äquivalent, also $M(u)$ und $N(v)$ zueinander konjugiert.

Herr R. Cooper[8]) hat den folgenden, in diesen Ideenkreis gehörenden Satz bewiesen:

Es seien $s(u)$, $t(u)$ zwei zueinander inverse, für $u\geqslant 0$ erklärte, stetige, in strengem Sinne wachsende Funktionen mit $s(0)=t(0)=0$, $s(u)\underset{u\to\infty}{\longrightarrow}\infty$, $t(u)\underset{u\to\infty}{\longrightarrow}\infty$ und $s(u)$ erfülle die Voraussetzung

$$(15)\qquad s(xy)\leqslant s(x).s(y)$$

für kleine x,y. Wir bezeichnen $P(u)=u.s(u)$, $Q(v)=v.t(v)$. Wenn $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty}u_\nu v_\nu$ bei festen $\{v_n\}$ und jeder Folge $\{u_n\}$ mit konvergentem $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty}P(u_\nu)$ konvergiert, so konvergiert $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty}Q(v_\nu)$.

Dieser Satz kann auf Grund unserer Sätze teilweise verschärft werden. Wenn wir nämlich die Voraussetzung (15) durch die Voraussetzung (Δ') für alle u ersetzen, können wir zeigen, daß $P(u)$ und $Q(u)$ *zueinander konjugiert* sind. Das sieht man folgendermaßen ein: Nach Hilfssatz 11 ist $P(u)$ mit $M(u)=\int\limits_0^u s(\xi)\,d\xi$ äqui-

[7]) d. h. die Ungleichung $M(xy)\leqslant Q.M(x)M(y)$ soll für alle $x\geqslant 0$, $y\geqslant 0$ erfüllt sein. Aus (Δ') für alle u folgt offenbar (Δ_2).

[8]) R. Cooper, The Converses of the Cauchy-Hölder Inequality and the Solutions of the Inequality $g(x+y)\leqslant g(x)+g(y)$, Proc. Lond. Math. Soc. (2) 26 (1927) p. 415—432, Theorem II.

valent und auch $M(u)$ hat die Eigenschaft (Δ_2) für kleines u. Nach einer Überlegung, die im Beweise von Satz 7 vorkommt, hat $t(u)$ die Eigenschaft (Δ_2) für kleines u und daher ist nach Hilfssatz 11 $Q(v)$ mit $\int_0^v t(\xi)\,d\xi = N(v)$ äquivalent und $N(v)$ hat die Eigenschaft (Δ_2) für kleines v. Nach dem Korollar zu Satz 5 aber sind $M(u)$ und $N(v)$ zueinander konjugiert, also sind es auch $P(u)$ und $Q(v)$.

Herr Cooper gibt in seiner Arbeit [9]) einige Beispiele von Funktionen der Form $P(u) = s(u).u$, welche die Voraussetzungen seines Satzes erfüllen und nicht gewöhnliche Potenzen $P(u) = |u|^\alpha$, $\alpha > 1$ sind. Doch sind diese Beispiele sämtlich so konstruiert, daß sie, wie man sofort erkennen kann, gewissen Potenzen in der Nähe von $u = 0$ äquivalent sind. Um also zu diesen Funktionen die konjugierten zu finden, genügt es die mit ihnen äquivalenten Potenzen zu betrachten und zu diesen konjugierte Potenzen anzugeben.

Wir wollen nun noch Beispiele von N'-Funktionen angeben, welche die Voraussetzungen von Satz 7 erfüllen und mit keiner Potenz äquivalent sind. Solche Funktionen sind z. B.:

$$M(u) = |u|^\alpha (|\log|u|| + 1)$$

für beliebiges $\alpha > 1$.

Der Vollständigkeit wegen formulieren wir noch den folgenden

Satz 8. *$M(u)$ sei eine N-Funktion. Damit eine zu $M(u)$ konjugierte N'-Funktion existiert, ist notwendig und hinreichend, daß 1° $M(u)$ die Eigenschaft (Δ_2) besitzt, 2° $\frac{M(u)}{u}$ pseudomonoton ist in $\langle 0, \delta\rangle$ für ein $\delta > 0$.*

Beweis.

Die Bedingungen sind notwendig: 1° folgt aus Hilfssatz 8. 2° beweist man so: $N(v)$ sei die zu $M(u)$ konjugierte N'-Funktion, $\overline{M}(u)$ die zu $N(v)$ komplementäre, konvexe N'-Funktion. Nach Hilfssatz 9 ist $M(u)$ mit $\overline{M}(u)$ äquivalent. Nach einer im Beweis zu Satz 6 vorkommenden Überlegung ist $\overline{M}(u) = s(u).u$, wo $s(u)$ für $u > 0$ eine nichtabnehmende, rechtsseitig stetige Funktion ist mit $s(0) = 0$, $s(u) \underset{u\to\infty}{\longrightarrow} \infty$. Nach Hilfssatz 10 ist also $\frac{M(u)}{u}$ pseudomonoton in $\langle 0, \delta\rangle$ für ein $\delta > 0$.

[9]) l. c. [8]) p. 426—427.

Die Bedingungen sind hinreichend: Wegen 2° ist $M(u)$ nach Hilfssatz 10 mit einer Funktion der Form $s(u).u$, $s(u)$ nichtabnehmend, $s(0) = 0$, $s(u) \underset{u\to\infty}{\longrightarrow} \infty$, äquivalent und mit $M(u)$ hat auch $s(u).u$, also auch $s(u)$ die Eigenschaft (Δ_2) für kleines u. Nach Hilfssatz 11 ist $M(u)$ mit $\overline{M}(u) = \int_0^u s(\xi)\,d\xi$ äquivalent. $\overline{M}(u)$ ist eine konvexe N'-Funktion mit der Eigenschaft (Δ_2) für kleines u. Nach Satz 5 ist die zu $\overline{M}(u)$ komplementäre Funktion $\overline{N}(v)$ konjugiert zu $\overline{M}(u)$, also auch zu $M(u)$.

§ 7.

Für spätere Anwendungen brauchen wir noch die folgenden Verallgemeinerungen der Sätze aus § 5:

Hilfssatz 4a. Gegeben sind abzählbar viele Zahlenfolgen $b_r = \{b_1^{(r)}, b_2^{(r)}, \ldots, b_n^{(r)}, \ldots\}$, wobei die $b_n^{(r)}$ nicht positiv zu sein brauchen. Wenn für jede Zahlenfolge $a = \{a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\}$ (auch mit beliebigen Vorzeichen) mit endlichem $\rho(a)$ die Ausdrücke

$$f_r(a) = \sum_{\nu=1}^{\infty} b_\nu^{(r)} a_\nu$$

alle endlich sind und für jedes einzelne derartige a eine beschränkte Zahlenfolge bilden, so gibt es eine Konstante L mit der Eigenschaft:

Für alle a mit $\rho(a) \leqslant 1$ und $r = 1, 2, \ldots$ gelten die Ungleichungen

$$|f_r(a)| \leqslant L.$$

Beweis. Ist die Behauptung falsch, so gibt es Folgen $a_1 = \{a_n^{(1)}\}$, $a_2 = \{a_n^{(2)}\}, \ldots, a_k = \{a_n^{(k)}\}, \ldots$, so daß die Ungleichungen gelten

$$\rho(a_k) \leqslant 1 \qquad (k = 1, 2, \ldots)$$
$$|f_{r_1}(a_1)| > 2^2 . 1$$
$$|f_{r_2}(a_2)| > 2^3 . 2$$
$$\vdots \qquad \vdots$$
$$|f_{r_l}(a_l)| > 2^{l+1} . l$$
$$\vdots \qquad \vdots$$

Wir betrachten nun die Folgen $b_{r_1}, b_{r_2}, \ldots, b_{r_l}, \ldots$. Es gibt unter ihnen unendlich viele $b_{s_1}, b_{s_2}, \ldots, b_{s_j}, \ldots$, in denen die ersten Elemente $b_1^{(s_1)}, b_1^{(s_2)}, \ldots, b_1^{(s_j)}, \ldots$ gleiche Vorzeichen haben. Wir nennen $b_{s_1} = \overline{b_1}$. Unter den Folgen $b_{s_2}, b_{s_3}, \ldots, b_{s_j}, \ldots$ gibt es wieder unendlich viele, in welchen die zweiten Elemente $b_2^{(t_1)}, b_2^{(t_2)}, \ldots, b_2^{(t_j)}, \ldots$ gleiches Vorzeichen haben. Wir nennen $b_{t_1} = \overline{b_2}$. Unter den Folgen $b_{t_2}, b_{t_3}, \ldots, b_{t_j}$ gibt es wieder unendlich viele, deren dritte

Elemente gleiches Vorzeichen haben. Die erste von ihnen nennen wir $\overline{b}_3$. Durch Fortsetzung dieses Verfahrens erhalten wir abzählbar viele Folgen $\overline{b}_1, \overline{b}_2, \dots, \overline{b}_l, \dots$ mit der Eigenschaft, daß das Vorzeichen des ersten Elementes in allen $\overline{b}_l$ gleich ist, das Vorzeichen des zweiten Elementes von $\overline{b}_2$ an gleich bleibt, allgemein das Vorzeichen des l-ten Elementes sich von $\overline{b}_l$ an nicht mehr ändert. Wir bezeichnen noch die Elemente von $\overline{b}_l$ mit $\overline{b}_n^{(l)}$, also $\overline{b}_l = \{\overline{b}_1^{(l)}, \overline{b}_2^{(l)}, \dots, \overline{b}_n^{(l)}, \dots\}$.

Jedem $\overline{b}_l$ entsprach eine Folge a, wir wollen sie mit $\overline{a}_l = \{\overline{a}_1^{(l)}, \overline{a}_2^{(l)}, \dots, \overline{a}_n^{(l)}, \dots\}$ bezeichnen, so daß

$$\overline{f}_l(\overline{a}_l) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \overline{b}_\nu^{(l)} \overline{a}_\nu^{(l)} > 2^{l+1} . l$$

und

$$\rho(\overline{a}_l) \leqslant 1$$

war für $l = 1, 2, \dots$. Wenn

$$\overline{\overline{a}}_n^{(l)} = |\,\overline{a}_n^{(l)}\,| . \operatorname{sign} \overline{b}_n^{(l)}, \quad (n = 1, 2, \dots;\ l = 1, 2, \dots)$$

$$\overline{\overline{a}}_l = \{\overline{\overline{a}}_1^{(l)}, \overline{\overline{a}}_2^{(l)}, \dots, \overline{\overline{a}}_n^{(l)}, \dots\}$$

gesetzt wird, so wird erst recht

$$\overline{f}_l(\overline{\overline{a}}_l) = \sum_{\nu=1}^{\infty} b_\nu^{(l)} \overline{\overline{a}}_\nu^{(l)} > 2^{l+1} . l$$

und

$$\rho(\overline{\overline{a}}_l) = \rho(\overline{a}_l) \leqslant 1$$

sein; außerdem gilt

$$\overline{b}_\nu^{(l)} \overline{\overline{a}}_\nu^{(l)} \geqslant 0 .$$

In $\overline{b}_l = \{\overline{b}_\nu^{(l)}\}$ kann es positive ($\geqslant 0$) und negative (< 0) Zahlen $\overline{b}_\nu^{(l)}$ geben. Indem wir die positiven $\overline{b}_\nu^{(l)}$ mit $\overline{b}_{\nu_p}^{(l)}$ $(p = 1, 2, \dots)$ und die negativen mit $\overline{b}_{\nu_n}^{(l)}$ bezeichnen, können wir schreiben

$$\overline{f}_l(\overline{\overline{a}}_l) = \sum_{p=1}^{\infty} \overline{b}_{\nu_p}^{(l)} \overline{\overline{a}}_{\nu_p}^{(l)} + \sum_{n=1}^{\infty} \overline{b}_{\nu_n}^{(l)} \overline{\overline{a}}_{\nu_n}^{(l)} > 2^{l+1} . l .$$

Entweder gibt es nun unendlich viele Indizes l_i, so daß

1° $$\sum_{p=1}^{\infty} \overline{b}_{\nu_p}^{(l_i)} \overline{\overline{a}}_{\nu_p}^{(l_i)} > 2^{l_i} . l_i ,$$

oder es gibt unendlich viele Indizes l_i, so daß

2° $$\sum_{n=1}^{\infty} \overline{b}_{\nu_n}^{(l_i)} \overline{\overline{a}}_{\nu_n}^{(l_i)} > 2^{l_i} . l_i .$$

Im Falle 1° bilden wir eine Zahlenfolge $a = \{a_1, a_2, \dots\}$, indem wir definieren

$$a_{\nu_p} = \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{2^l} \overline{\overline{a}}_{\nu_p}^{(l)}$$

$$a_{\nu_n} = 0 .$$

Dann ist

$$\rho(a) = \sum_{p=1}^{\infty} N(a_{\nu_p}) = \sum_{p=1}^{\infty} N\left(\sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{2^l} \overline{\overline{a}}_{\nu_p}^{(l)}\right) \leqslant \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{2^l} N(\overline{\overline{a}}_{\nu_p}^{(l)})$$

$$= \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{2^l} \sum_{p=1}^{\infty} N(\overline{\overline{a}}_{\nu_p}^{(l)}) \leqslant \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{2^l} \sum_{\nu=1}^{\infty} N(\overline{\overline{a}}_\nu^{(l)}) = \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{2^l} \rho(\overline{\overline{a}}_l) \leqslant 1$$

und

$$\overline{f}_{l_i}(a) = \sum_{p=1}^{\infty} \overline{b}_{\nu_p}^{(l_i)} a_{\nu_p} \geqslant \frac{1}{2^{l_i}} \sum_{p=1}^{\infty} b_{\nu_p}^{(l_i)} \overline{\overline{a}}_{\nu_p}^{(l_i)} > l_i \underset{i \to \infty}{\longrightarrow} \infty ,$$

was der Voraussetzung widerspricht.

Im Falle 2° gelangt man zu demselben Widerspruch, indem man

$$a_{\nu_n} = \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{2^l} \overline{\overline{a}}_{\nu_n}^{(l)}$$

$$a_{\nu_p} = 0$$

$$a = \{a_1, a_2, \dots\}$$

setzt.

Hilfssatz 5a. Unter denselben Voraussetzungen und mit denselben Bezeichnungen, wie in Hilfssatz 4a, gilt

$$|\,f_r(a)\,| < L . \rho(a),$$

wenn $\rho(a) \geqslant 1$ ist.

Beweis. Die Behauptung ergibt sich aus Hilfssatz 4a wörtlich so, wie diejenige von Hilfssatz 5 aus Hilfssatz 4.

Hilfssatz 6a. Die in Hilfssatz 4a definierte Konstante L, welche noch von abzählbar vielen Folgen $b_r = \{b_n^{(r)}\}$ abhängt, hat die folgende Eigenschaft: Wir bilden die zur konvexen N'-Funktion $\overline{N}(v) = L\, N(v)$ komplementäre Funktion $\overline{M}(u)$. Wenn für jede Folge $a = \{a_\nu\}$, für welche $\sum_{\nu=1}^{\infty} \overline{N}(a_\nu) = L \sum_{\nu=1}^{\infty} N(a_\nu)$ konvergiert, auch alle Reihen $f_r(a) = \sum_{\nu=1}^{\infty} b_\nu^{(r)} a_\nu$ $(r = 1, 2, \dots)$ konvergent sind und ihre Summen für jedes solche a eine beschränkte Zahlenfolge bilden, so konvergieren alle Reihen $\sum_{\nu=1}^{\infty} \overline{M}(b_\nu^{(r)})$ $(r = 1, 2, \dots)$ und es ist

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \overline{M}(b_\nu^{(r)}) \leqslant L \text{ für } r = 1, 2, \dots .$$

Beweis. Bei festem r finden wir zu jedem $b_\nu^{(r)}$ ein $a_\nu^{(r)}$, so daß $0 \leqslant b_\nu^{(r)} a_\nu^{(r)} = \overline{N}(a_\nu^{(r)}) + \overline{M}(b_\nu^{(r)})$ wird, und setzen

$$a_r = \{a_1^{(r)}, a_2^{(r)}, \dots, a_\nu^{(r)}, \dots\}$$

$$\overset{n}{a}_r = \{a_1^{(r)}, a_2^{(r)}, \dots, a_n^{(r)}, 0, 0, \dots\} .$$

Wäre $\rho\left(\overset{n}{a}_r\right) \geqslant 1$, so wäre nach Hilfssatz 5a für $r \geqslant n$

$$|\,f_r\left(\overset{n}{a}_r\right)| = \sum_{\nu=1}^{n} b_\nu^{(r)} a_\nu^{(r)} < L\, \rho\left(\overset{n}{a}_r\right),$$

also $\sum_{\nu=1}^{n}\overline{N}(a_\nu^{(r)})+\sum_{\nu=1}^{n}\overline{M}(b_\nu^{(r)})<\sum_{\nu=1}^{n}\overline{N}(a_\nu^{(r)})$, was unmöglich. Daher ist $\rho\binom{n}{a_r}<1$, also $\rho(a_r)\leqslant 1$ und nach Hilfssatz 4a $L\geqslant\sum_{\nu=1}^{\infty}b_\nu^{(r)}a_\nu^{(r)}=\sum_{\nu=1}^{\infty}\overline{N}(a_\nu^{(r)})+\sum_{\nu=1}^{\infty}\overline{M}(b_\nu^{(r)})$, woraus die Behauptung folgt.

Satz 5a.

Voraussetzung. *$M(u)$ sei eine konvexe N'-Funktion und habe die Eigenschaft (Δ_2) für kleines u. $N(v)$ sei die zu $M(u)$ komplementäre Funktion. $\{b_n^{(1)}\}$, $\{b_n^{(2)}\},\ldots,\{b_n^{(k)}\}\ldots$ seien abzählbar viele Zahlenfolgen mit der folgenden Eigenschaft: Für jede Folge $a=\{a_\nu\}$, für welche $\sum_{\nu=1}^{\infty}N(a_\nu)$ konvergiert, konvergieren auch alle Reihen $f_r(a)=\sum_{\nu=1}^{\infty}b_\nu^{(r)}a_\nu$ für $r=1,2,\ldots$ und die Zahlen $f_r(a)$ bilden für jedes a eine beschränkte Zahlenfolge.*

Behauptung. *Alle Reihen $\sum_{\nu=1}^{\infty}M(b_\nu^{(r)})$ konvergieren und es gibt eine von r unabhängige Konstante P, so daß*

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}M(b_\nu^{(r)})<P \qquad \text{für } r=1,2,\ldots.$$

Beweis. Nach Hilfssatz 6a folgt aus der Voraussetzung die Existenz einer Konstanten L, so daß $\sum_{\nu=1}^{\infty}\overline{M}(b_\nu^{(r)})\leqslant L$ für $r=1,2,\ldots$ gilt, wobei $\overline{M}(u)$ die zu $LN(v)$ komplementäre Funktion bedeutet. Wir wissen (vgl. Beweis zu Satz 5), daß

$$M(u)\leqslant\frac{k^L}{L}\overline{M}(u)$$

ist, daher ist auch

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}M(b_\nu^{(r)})\leqslant k^L=P.$$

Kapitel II.

Funktionen.

§ 1.

Definition 1. *Eine im Intervall $\langle 0,1\rangle$ erklärte, meßbare Funktion $f(x)$ heißt mit der N-Funktion $M(u)$ integrierbar, wenn das Integral $\int_0^1 M[f(x)]\,dx$ einen endlichen Wert hat.*

Satz 1. *$M(u,v)$ und $N(u,v)$ seien zwei für $-\infty<u<+\infty$, $-\infty<v<+\infty$ erklärte, nichtnegative und stetige Funktionen und es gebe Zahlen $r\geqslant 0$, $\beta>0$, so daß $M(u,v)>\beta$ ist für $u^2+v^2\geqslant r$.*

Damit für jedes Paar in $\langle 0,1\rangle$ meßbarer Funktionen $f(x)$, $g(x)$, für welches $\int_0^1 M[f(x),g(x)]\,dx$ endlich ist, auch $\int_0^1 N[f(x),g(x)]\,dx$ endlich sei, ist folgendes notwendig und hinreichend:

Es gibt zwei Zahlen $a\geqslant 0$, $b>0$, so daß

$$N(u,v)\leqslant b\,M(u,v) \qquad \text{für } u^2+v^2\geqslant a$$

gilt.

Beweis.

Die Bedingung ist notwendig: Ist sie nicht erfüllt, so gibt es zwei Zahlenfolgen $\{u_n\}$, $\{v_n\}$, so daß die Beziehungen bestehen

$$N(u_n,v_n)\geqslant 2^n M(u_n,v_n)$$
$$r\leqslant u_n^2+v_n^2\longrightarrow\infty.$$

Wir definieren

$$x_0=0,\quad x_n=x_{n-1}+\frac{\beta}{M(u_n,v_n)\,.\,2^n}$$

$$\left.\begin{array}{ll} f(x)=u_n & \text{für } x_{n-1}\leqslant x<x_n \\ g(x)=v_n & \text{für } x_{n-1}\leqslant x<x_n \end{array}\right\} \quad (n=1,2,\ldots)$$

$$f(x)=g(x)=0 \text{ für alle übrigen Punkte von } \langle 0,1\rangle.$$

Es ist dann $\int_0^1 M[f(x),g(x)]\,dx$ endlich, denn

$$\int_0^1 M[f(x),g(x)]\,dx=\sum_{n=1}^{\infty}\int_{x_{n-1}}^{x_n}M[f(x),g(x)]\,dx$$
$$+\int_{\lim x_n}^{1}M(0,0)\,dx\leqslant\beta+M(0,0)$$

und doch ist

$$\int_0^1 N[f(x),g(x)]\,dx\geqslant\sum_{n=1}^{\infty}\int_{x_{n-1}}^{x_n}N[f(x),g(x)]\,dx$$
$$\geqslant\beta\sum_{n=1}^{\infty}\frac{M(u_n,v_n)\,2^n}{M(u_n,v_n)\,2^n}=\infty.$$

Die Bedingung ist hinreichend:

$$\int_0^1 N[f(x), g(x)]\,dx = \int\limits_{E[f^2(x)+g^2(x)<a]} + \int\limits_{E[f^2(x)+g^2(x)\geqq a]}$$

$$\leqslant \operatorname*{Max}_{u^2+v^2<a} N(u,v) + b\int_0^1 M[f(x), g(x)]\,dx\,.$$

Satz 1a. *$M(u)$ und $N(u)$ seien* N-*Funktionen. Damit jede mit $M(u)$ integrierbare Funktion auch mit $N(u)$ integrierbar sei, ist notwendig und hinreichend, daß es Zahlen a, b gibt, so daß die Ungleichung besteht*

$$N(u) \leqslant b\,M(u) \qquad \textit{für } u \geqslant a. \tag{16}$$

Beweis: Analog zum Beweise von Satz 1.

Definition 2. Zwei N-Funktionen $M(u)$, $N(u)$ heißen *„äquivalent inbezug auf Integration"* — in diesem Kapitel werden wir sie immer kurz „äquivalent" nennen — wenn alle und nur diejenigen Funktionen mit $M(u)$ integrierbar sind, welche es mit $N(u)$ sind.

Aus Satz 1a sehen wir, daß für die Äquivalenz zweier N-Funktionen $M(u)$ und $N(u)$ die Existenz von vier Zählen a, b, c, d charakteristisch ist, so daß die Ungleichungen gelten

$$N(u) \leqslant a\,M(u) \qquad \text{für } u \geqslant c$$
$$M(u) \leqslant b\,N(u) \qquad \text{für } u \geqslant d.$$

Unter *Klasseneigenschaften* von N-Funktionen wollen wir wieder solche Eigenschaften verstehen, welche beim Übergang von einer N-Funktion zu einer äquivalenten erhalten bleiben. Solche Klasseneigenschaften sind

1. Die Eigenschaft (Δ) für großes u:

$$M(x+y) \leqslant P[M(x)+M(y)] \qquad \text{für } x \geqslant D, y \geqslant D$$

(*Dreiecksungleichung*).

2. Die Eigenschaft (Δ'):

$$M(xy) \leqslant Q\,M(x)\,M(y) \qquad \text{für } x \geqslant 0, y \geqslant 0$$

(*Multiplikativungleichung*).

3. Die Eigenschaft (Δ_2) für großes u:

$$M(2u) \leqslant K\,M(u) \qquad \text{für } u \geqslant D.$$

Definition 3. *Die* N-*Funktion $N(v)$ heißt konjugiert inbezug auf Integration* — in diesem Kapitel wollen wir kurz „konjugiert" sagen — *zur* N-*Funktion $M(u)$, wenn*

1° *daraus, daß $f(x)$ mit $M(u)$ und $g(x)$ mit $N(v)$ integrierbar ist, die Endlichkeit von $\int_0^1 f(x)\,g(x)\,dx$ folgt;*

2° *daraus, daß für ein bestimmtes $f(x)$ und jedes mit $N(v)$ integrierbare $g(x)$ das Integral $\int_0^1 f(x)\,g(x)\,dx$ endlich ist, folgt, daß $f(x)$ mit $M(u)$ integrierbar ist.*

Wenn $M(u)$ und $N(v)$ nur die Eigenschaft 1° *haben, nennen wir sie halbkonjugiert.*

Wenn $M(u)$ zu $N(v)$ und $N(v)$ zu $M(u)$ konjugiert ist, nennen wir $M(u)$ und $N(v)$ *zueinander konjugiert.*

Die Eigenschaft, zu einem festen $M(u)$ konjugiert zu sein, ist eine Klasseneigenschaft, ebenso die Eigenschaft, ein festes $N(v)$ zur konjugierten Funktion zu haben. Ersetzt man in einem Paar halbkonjugierter Funktionen jede dieser Funktionen durch eine äquivalente, so erhält man wieder ein Paar halbkonjugierter Funktionen.

Wir beschränken uns wieder auf N'-Funktionen. Daß diese Einschränkung zweckmäßig ist, sieht man auf Grund folgender Tatsachen ein:

1. Die Eigenschaft $\dfrac{M(u)}{u} \xrightarrow[u\to 0]{} 0$ ist für die Untersuchungen dieses Kapitels unwesentlich, da man jede N-Funktion durch eine inbezug auf Integration äquivalente ersetzen kann, welche diese Eigenschaft aufweist.

2. *Sind zwei* N-*Funktionen $M(u)$, $N(v)$ auch nur halbkonjugiert, so haben sie die Eigenschaften $\dfrac{M(u)}{|u|} \xrightarrow[|u|\to\infty]{} \infty$, $\dfrac{N(v)}{|v|} \xrightarrow[|v|\to\infty]{} \infty$.*

Beweis. Setzt man in Satz 1 $N(u,v) = uv$, $M(u,v) = M(u) + N(v)$, so findet man

$$uv \leqslant b[M(u) + N(v)] \qquad \text{für } u^2 + v^2 \geqslant a\,.$$

Daraus schließt man analog wie im Absatz 6 des Beweises zu Satz 2, Kap. I, daß $\dfrac{N(v)}{|v|} \xrightarrow[|v|\to\infty]{} \infty$ und genau so daß auch $\dfrac{M(u)}{|u|} \xrightarrow[|u|\to\infty]{} \infty$ gelten muß.

Aus der zuletzt bewiesenen Bemerkung ergibt sich, *daß es zu* $M(u)=|u|^p$, $0<p<1$ *keine auch nur halbkonjugierte* N-*Funktion geben kann.*

Für N'-Funktionen gelten nun alle Sätze aus Kap. I, § 2. Aus der Herleitung der arithmetischen HÖLDERschen Ungleichung welche am Schluß von Kap. I, § 2 gegeben wurde, gewinnt man auch leicht die CAUCHY-RIESZsche Integralungleichung[10]):

Aus (7) folgt, wenn

$$u=\frac{|f(x)|}{\left[\int\limits_0^1 |f(x)|^\alpha dx\right]^{\frac{1}{\alpha}}},\quad v=\frac{|g(x)|}{\left[\int\limits_0^1 |g(x)|^\beta dx\right]^{\frac{1}{\beta}}}$$

gesetzt wird,

$$\frac{|f(x)g(x)|}{\left[\int\limits_0^1 |f(x)|^\alpha dx\right]^{\frac{1}{\alpha}}\left[\int\limits_0^1 |g(x)|^\beta dx\right]^{\frac{1}{\beta}}}\leqslant\frac{1}{\alpha}\cdot\frac{|f(x)|^\alpha}{\int\limits_0^1 |f(x)|^\alpha dx}+\frac{1}{\beta}\cdot\frac{|g(x)|^\beta}{\int\limits_0^1 |g(x)|^\beta dx}$$

und daraus durch Integration

$$\frac{\int\limits_0^1 |f(x)g(x)|\,dx}{\left[\int\limits_0^1 |f(x)|^\alpha dx\right]^{\frac{1}{\alpha}}\left[\int\limits_0^1 |g(x)|^\beta dx\right]^{\frac{1}{\beta}}}\leqslant\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=1\,.$$

Das Gleichheitszeichen gilt für $u^\alpha=v^\beta$, d. h. in unserem Falle, wenn

$$\frac{|f(x)|^\alpha}{\int\limits_0^1 |f(x)|^\alpha dx}=\frac{|g(x)|^\beta}{\int\limits_0^1 |g(x)|^\beta dx}$$

fast überall stattfindet. Betrachten wir nur konvexe N'-Funktionen, so gilt die ganze Theorie von Kap. I, § 3 und 4. Neu zu beweisen sind erst die den Sätzen aus Kap. I, § 5 und 6 entsprechenden Behauptungen über Funktionen und Integrale.

[10]) S. l. c. [3]).

§ 2.

$N(v)$ sei eine konvexe N'-Funktion. Wir bezeichnen

$$\varrho[f(x)]=\int\limits_0^1 N[f(x)]\,dx\,.$$

Hilfssatz 1. $\{f_r(x)\}$ sei eine Folge von in $\langle 0,1\rangle$ meßbaren Funktionen. Wir bilden die Folge von Funktionaloperationen

$$F_r[g(x)]=\int\limits_0^1 f_r(x)\,g(x)\,dx\,.$$

Wir behaupten: Wenn für jedes $g(x)$ mit endlichem $\varrho(g(x))$ alle Ausdrücke $\underset{(r=1,2,\ldots)}{|F_r[g(x)]|}$ endlich sind und für jedes solche $g(x)$ eine beschränkte Zahlenfolge bilden, dann gibt es eine Konstante L, so daß für alle $g(x)$ mit $\varrho(g(x))\leqslant 1$ die Ungleichungen

$$|F_r[g(x)]|<L \qquad \text{für } r=1,2,\ldots$$

bestehen.

Beweis. Wäre die Behauptung falsch, so gäbe es eine Folge von meßbaren Funktionen $g_1(x), g_2(x),\ldots,g_p(x),\ldots$ und eine (nicht notwendig wachsende) Folge natürlicher Zahlen $r_1, r_2,\ldots,r_p$, so daß

$$\varrho(g_p(x))\leqslant 1$$

und

$$F_{r_p}[g_p(x)]>3\,.\,2^p\cdot p \qquad \text{für } p=1,2,\ldots \tag{17}$$

wäre. Wir dürfen auch annehmen, daß

$$\operatorname{sign} g_p(x)=\operatorname{sign} f_{r_p}(x),$$

also

$$F_{r_p}[g_p(x)]=\int\limits_0^1 |f_{r_p}(x)|\;|g_p(x)|\,dx$$

ist. Wir bilden die Funktionen

$$\gamma_n(x)=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2^k}|g_k(x)|\,.$$

Es ist

$$\int_0^1 N[\gamma_n(x)]\,dx \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k} \int_0^1 N[g_k(x)]\,dx < 1\,. \tag{18}$$

Nun ist $N(v)$ eine wachsende Funktion, die $\gamma_n(x)$ bilden eine nichtabnehmende Funktionenfolge, also bilden auch die Funktionen $\mu_n(x) = N[\gamma_n(x)]$ eine nichtabnehmende Funktionenfolge. Aus $\int_0^1 \mu_n(x)\,dx < 1$, $\mu_n(x) \leqslant \mu_{n+1}(x)$ $(n=1,2,\ldots)$ folgt die Existenz einer Funktion $\mu(x)$, so daß

$$\lim_{n\to\infty} \mu_n(x) = \mu(x)$$

fast überall und

$$\int_0^1 \mu(x)\,dx \leqslant 1$$

ist. Wenn nun an einer Stelle x_0 $\lim\limits_{n\to\infty} N[\gamma_n(x_0)] = \mu(x_0)$ gilt, so sind die Zahlen $\gamma_n(x_0)$ beschränkt und da sie nicht abnehmen, gibt es einen $\lim\limits_{n\to\infty} \gamma_n(x_0)$. Die Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k}|g_k(x)|$ konvergiert also fast überall und stellt eine meßbare Funktion dar

$$\gamma(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k}|g_k(x)|\,.$$

Aus (18) folgt

$$\varrho(\gamma(x)) \leqslant 1\,.$$

Wir setzen nun $p_1 = 1$. Es ist nach (17)

$$\int_0^1 f_{r_{p_1}}(x)\,g_{p_1}(x)\,dx > 3\,.\,2^{p_1}.\,p_1\,.$$

Wir wählen $\overline{p}_2$ so groß, daß für $p_2 \geqslant \overline{p}_2$ die Ungleichung

$$\int_0^1 |f_{r_{p_1}}(x)| \sum_{k=p_2}^{\infty} \frac{1}{2^k}|g_k(x)|\,dx < p_1$$

gilt. Nach Voraussetzung ist die Folge der Zahlen $\left|\int_0^1 f_r(x)\,g_{p_1}(x)\,dx\right|$ $(r=1,2,\ldots)$

beschränkt, wir können daher $p_2 \geqslant \overline{p}_2$ so groß wählen, daß unter Berücksichtigung von (17)

$$\int_0^1 f_{r_{p_2}}(x)\,g_{p_2}(x)\,dx > 3\,.\,2^{p_2}.\,p_2 > 3\,.\int_0^1 f_{r_{p_2}}(x)\,g_{p_1}(x)\,dx$$

wird. Dann wählen wir $\overline{p}_3$ so groß, das für $p_3 \geqslant \overline{p}_3$ die Ungleichung

$$\int_0^1 |f_{r_{p_2}}(x)| \sum_{k=p_3}^{\infty} \frac{1}{2^k}|g_k(x)|\,dx < p_2$$

gilt.

Sind schon die Zahlen $p_1, p_2, \ldots, p_{n-1}, \overline{p}_n$ bestimmt, so definieren wir

a) $p_n \geqslant \overline{p}_n$, so daß unter Berücksichtigung von (17)

$$\frac{1}{2^{p_n}}\int_0^1 f_{r_{p_n}}(x)\,g_{p_n}(x)\,dx > 3\,p_n > 3\left|\int_0^1 f_{r_{p_n}}(x) \sum_{s=1}^{n-1} \frac{1}{2^{p_s}}\,g_{p_s}(x)\,dx\right| \tag{19}$$

gilt, was immer erreicht werden kann, da nach Voraussetzung die Zahlen $\left|\sum\limits_{s=1}^{n-1} \frac{1}{2^{p_s}} \int_0^1 f_r(x)\,g_{p_s}(x)\,dx\right|$ $(r=1,2,\ldots)$ eine beschränkte Folge bilden;

b) $\overline{p}_{n+1}$ so groß, daß

$$\int_0^1 |f_{r_{p_n}}(x)| \sum_{k=p_{n+1}}^{\infty} \frac{1}{2^k}|g_k(x)|\,dx < p_n \qquad \text{für } p_{n+1} \geqslant \overline{p}_{n+1} \tag{20}$$

wird.

Schließlich setzen wir

$$g(x) = \sum_{s=1}^{\infty} \frac{1}{2^{p_s}}\,g_{p_s}(x).$$

Diese Reihe konvergiert fast überall absolut, da sie von $\gamma(x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k}|g_k(x)|$ majorisiert wird. Aus demselben Grunde ist auch

$$\varrho(g(x)) \leqslant 1\,.$$

Es ist jedoch nach (17), (19) und (20)

$$F_{r_{p_n}}[g(x)]=\int_0^1 f_{r_{p_n}}(x)\sum_{s=1}^{n-1}\frac{1}{2^{p_s}}g_{p_s}(x)\,dx+\frac{1}{2^{p_n}}\int_0^1 f_{r_{p_n}}(x)\,g_{p_n}(x)\,dx$$
$$+\int_0^1 f_{r_{p_n}}(x)\sum_{s=n+1}^{\infty}\frac{1}{2^{p_s}}g_{p_s}(x)\,dx>-p_n+3p_n-p_n=p_n\xrightarrow[n\to\infty]{}\infty,$$

was der Voraussetzung widerspricht.

Hilfssatz 2. Bei unveränderten Voraussetzungen und Bezeichnungen gelten für jedes $g(x)$ mit endlichem $\varrho(g(x))>1$ die Ungleichungen

$$F_r[g(x)]<L\varrho(g(x)) \qquad r=1,2,\ldots,$$

wo L die in Hilfssatz 1 bestimmte Konstante bedeutet.

Beweis. Es ist

$$\varrho\left[\frac{g(x)}{\varrho(g(x))}\right]=\int_0^1 N\left[\frac{g(x)}{\varrho(g(x))}\right]dx\leqslant\frac{1}{\varrho(g(x))}\int_0^1 N[g(x)]\,dx=1,$$

also nach Hilfssatz 1

$$F_r\left[\frac{g(x)}{\varrho(g(x))}\right]=\frac{1}{\varrho(g(x))}\,F_r[g(x)]<L, \text{ w. z. b. w.}$$

Hilfssatz 3. Bei unveränderten Voraussetzungen und Bezeichnungen hat die in Hilfssatz 1 eingeführte Konstante L die folgende Eigenschaft: Wir bilden die neue konvexe N′-Funktion

$$\overline{N}(v)=L\,N(v);$$

Die zu $\overline{N}(v)$ komplementäre Funktion heiße $\overline{M}(u)$; wir behaupten, daß die Ungleichungen

$$\int_0^1 \overline{M}[f_r(x)]\,dx\leqslant L \qquad \text{für } r=1,2,\ldots$$

gelten.

Beweis. Wir bezeichnen

$$\overset{n}{f}_r(x)=\begin{cases} f_r(x) & \text{für diejenigen } x, \text{ für welche } |f_r(x)|\leqslant n \text{ ist}\\ n\,.\,\mathrm{sign}\, f_r(x) & \text{für diejenigen } x, \text{ für welche } |f_r(x)|>n \text{ ist.}\end{cases}$$

$\overline{N}(v)$ sei nach Kap. I, Satz 3 in der Form

$$\overline{N}(v)=\int_0^1\overline{p}(\xi)\,d\xi$$

darstellbar, wo $\overline{p}(x)$ eine nichtabnehmende, rechtsseitig stetige Funktion ist. Dann ist nach Satz 4 $M(u)=\int_0^u\overline{p}^{(-1)}(\xi)\,d\xi$ und wenn

$$\overset{n}{g}_r(x)=\overline{p}(|\overset{n}{f}_r(x)|)\,.\,\mathrm{sign}\, f_r(x)$$

gesetzt wird, gilt die Identität

$$0\leqslant\overset{n}{f}_r(x)\,\overset{n}{g}_r(x)=\overline{M}[\overset{n}{f}_r(x)]+\overline{N}[\overset{n}{g}_r(x)]$$

Mit $|\overset{n}{f}_r(x)|$ ist auch $|\overset{n}{g}_r(x)|$ beschränkt und als monotone Funktion von einer meßbaren Funktion auch meßbar, also $\overset{n}{g}_r(x)$ mit $N(v)$ integrierbar. Wir haben daher

$$\int_0^1\overset{n}{f}_r(x)\,\overset{n}{g}_r(x)\,dx=\int_0^1\overline{M}[\overset{n}{f}_r(x)]\,dx+\int_0^1\overline{N}[\overset{n}{g}_r(x)]\,dx. \tag{21}$$

Wäre $\varrho(\overset{n}{g}_r(x))>1$, so wäre nach Hilfssatz 2

$$L\varrho(\overset{n}{g}_r(x))>\int_0^1 f_r(x)\,\overset{n}{g}_r(x)\,dx\geqslant\int_0^1\overset{n}{f}_r(x)\,\overset{n}{g}_r(x)\,dx$$

also nach (21)

$$L\varrho(\overset{n}{g}_r(x))>\int_0^1\overline{M}[\overset{n}{f}_r(x)]\,dx+L\varrho(\overset{n}{g}_r(x)),$$

was unmöglich. Es ist daher immer

$$\varrho(\overset{n}{g}_r(x))\leqslant 1,$$

also nach Hilfssatz 1

$$\int_0^1\overset{n}{f}_r(x)\,\overset{n}{g}_r(x)\,dx\leqslant\int_0^1 f_r(x)\,\overset{n}{g}_r(x)\,dx<L$$

und nach (21)

$$L>\int_0^1\overline{M}[\overset{n}{f}_r(x)]\,dx,$$

woraus durch Grenzübergang $n\longrightarrow\infty$ die Behauptung folgt.

Satz 2.

Voraussetzung. *$M(u)$ ist eine konvexe N'-Funktion und hat die Eigenschaft (Δ_2) für großes u. $N(v)$ ist die zu $M(u)$ komplementäre Funktion. Die abzählbar vielen Funktionen $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_r(x), \ldots$ haben die folgende Eigenschaft: Für jedes mit $N(v)$ integrierbare $g(x)$ sind alle Integrale $F_r[g(x)] = \int_0^1 f_r(x) g(x)\, dx$ $(r=1,2,\ldots)$ endlich und bilden eine beschränkte Zahlenfolge.*

Behauptung. *Die Integrale $\int_0^1 M[f_r(x)]\, dx$ sind alle endlich und es gibt eine von r unabhängige Konstante P, so daß die Ungleichungen bestehen*

$$\int_0^1 M[f_r(x)]\, dx \leqslant P \qquad \textit{für } r = 1, 2, \ldots.$$

Beweis. Nach Hilfssatz 1 gibt es eine Konstante L, mit welcher die Funktion $\overline{M}(u)$ aus Hilfssatz 3 gebildet werden kann und ebenfalls nach Hilfssatz 3 ist

$$\int_0^1 \overline{M}[f_r(x)]\, dx \leqslant L \qquad \text{für } r = 1, 2, \ldots.$$

Wie schon im Beweise zu Satz 5, Kap. I gezeigt wurde, ist

$$M(u) \leqslant \frac{k^L}{L} \cdot \overline{M}(u),$$

also ist

$$\int_0^1 M[f_r(x)]\, dx \leqslant k^L = P.$$

Korollar. Ist $M(u)$ eine konvexe N'-Funktion und genügt sie der Bedingung (Δ_2) für großes u, so ist die zu ihr komplementäre Funktion $N(v)$ zu $M(u)$ konjugiert.

Beweis. Die Funktion $f(x)$ habe die Eigenschaft, daß für jedes $g(x)$ mit endlichem $\int_0^1 N[g(x)]\, dx$ das Integral $\int_0^1 f(x) g(x)\, dx$ endlich ausfällt. Wir nehmen in Satz 2 $f_r(x) = f(x)$ für $r = 1, 2, \ldots$. Dann sind alle Voraussetzungen von Satz 2 erfüllt, also sind alle Integrale $\int_0^1 M[f_r(x)]\, dx = \int_0^1 M[f(x)]\, dx$ endlich, w. z. b. w.

§ 3.

Dieser § enthält Sätze über Integrale und Funktionen, welche den in Kap. I, § 6 bewiesenen Sätzen über Reihen entsprechen. Wir beschränken uns darauf, den Wortlaut dieser Sätze anzugeben. Alle Hilfssätze und Beweise lauten wörtlich wie die entsprechenden Hilfssätze und Beweise für Reihen, mit dem einzigen Unterschied, daß statt des Punktes 0 konsequent der Punkt $+\infty$ bevorzugt werden muß. Insbesondere sind also in allen Hilfssätzen die Voraussetzungen (Δ), (Δ'), (Δ_2), (Δ_α) „für kleines u" durch dieselben Voraussetzungen „für großes u" d. h. für $u \geqslant D \geqslant 0$ zu ersetzen. Ferner ist das Korollar zu Satz 2 dieses Kapitels überall dort heranzuziehen, wo in den Beweisen von Kap. I von dem Satz 5 Gebrauch gemacht wurde.

Satz 3. *Damit zu einer N'-Funktion $M(u)$ eine Funktion $L(v)$ existiert, so daß $M(u)$ und $L(v)$ zueinander inbezug auf Integration konjugiert sind, ist folgendes notwendig und hinreichend:*

1° *$M(u)$ hat die Eigenschaft (Δ_2) für großes u;*

2° *$M(u)$ ist pseudomonoton in $\langle D, \infty)$ für ein gewisses $D \geqslant 0$;*

3° *die zu $M(u)$ komplementäre Funktion $N(v)$ hat die Eigenschaft (Δ_2) für großes u.*

Sind die Bedingungen 1°, 2°, 3° erfüllt, so sind $M(u)$ und $N(v)$ zueinander konjugiert.

Dieser Satz entspricht dem Satz 6 aus Kap. I. Dem Satz 7 aus Kap. I entspricht der folgende

Satz 4. *Ist $M(u)$ eine N'-Funktion mit der Eigenschaft (Δ') und $M(u)$ pseudomonoton für $u \geqslant 0$, so sind $M(u)$ und die zu $M(u)$ komplementäre Funktion $N(v)$ zueinander konjugiert inbezug auf Integration.*

In Satz 4 ist der folgende Satz des Herrn Cooper[11]) enthalten:

[11]) l. c.[8]), Theorem IV.

Unter den Voraussetzungen, welche im auf S. 29 angeführten Satze des Herrn COOPER vorkommen und der Voraussetzung (15) für alle $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$ folgt aus der Endlichkeit von $\int_0^1 f(x)\, g(x)\, dx$ für jedes $g(x)$ mit endlichem $\int_0^1 t[g(x)]\, g(x)\, dx$ die Endlichkeit von $\int_0^1 s[f(x)] f(x)\, dx$

Der zu Satz 8 in Kap. I analoge Satz lautet:

Satz 5. *Damit zu einer* N′-*Funktion* $M(u)$ *eine inbezug auf Integration konjugierte* N′-*Funktion existiert, ist notwendig und hinreichend, daß* 1° $M(u)$ *die Eigenschaft* (Δ_2) *für großes* u *besitzt,* 2° $M(u)$ *pseudomonoton ist für* $u \geqslant D \geqslant 0$.

Kapitel III.

§ 1.

Starke und schwache Konvergenz.

In der Klasse der mit einer Potenz $M(u) = |u|^p$, $p > 1$ integrierbaren Funktionen definiert und untersucht man die sog. „Konvergenz im Mittel" und die „schwache Konvergenz". Diese Begriffe kann man auch für die mit einer Potenz konvergenten Reihen definieren. In diesem Kapitel sollen Eigenschaften der entsprechend definierten Konvergenz im Mittel und schwachen Konvergenz von Funktionen, die mit einer N-Funktion integrierbar sind, bzw. von Reihen, die mit einer N′-Funktion konvergieren, besprochen werden. Die diesbezüglichen Fragestellungen waren bereits, besonders was Funktionen betrifft, Gegenstand verschiedener Untersuchungen. Der Vollständigkeit wegen stellen wir hier die wichtigsten Definitionen und Sätze zusammen, trotzdem es sich meist um Bekanntes handelt, da sie sonst in verschiedenen Arbeiten verstreut und schwer aufzusuchen sind. Die Definitionen und die Sätze über Reihen, deren zumeist recht einfache Beweise wir überschlagen zu dürfen glaubten, sind nach dem Muster der entsprechenden Definitionen bzw. Sätze über Funktionen gebildet.

Durch Vergleich mit der angeführten Litteratur wird der aufmerksame Leser in verschiedenen Sätzen gewisse Verallgemeinerungen sowie Vereinfachungen in der Beweisführung feststellen können. Insbesondere halten wir den Satz 8, welcher eine weitgehende Analogie zwischen konjugierten Potenzen und konjugierten N-Funktionen aufdeckt, in dieser Allgemeinheit für neu.

Definition 1. Eine Folge meßbarer Funktionen $\{f_n(x)\}$ heißt *konvergent im Mittel mit der* N-*Funktion* $M(u)$, wenn

$$\lim_{\substack{p\to\infty\\ q\to\infty}} \int_0^1 M[f_p(x) - f_q(x)]\, dx = 0 \tag{22}$$

ist. Eine Reihe heißt im Mittel konvergent mit $M(u)$, wenn ihre Partialsummen mit $M(u)$ im Mittel konvergent sind.

Definition 1′. Eine Folge von Reihen $\sum_{i=1}^{\infty} a^{(n)}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ heißt konvergent im Mittel mit der N-Funktion $M(u)$, wenn

$$\lim_{\substack{p\to\infty\\ q\to\infty}} \sum_{i=1}^{\infty} M[a_i^{(p)} - a_i^{(q)}] = 0 \tag{22′}$$

ist.

Satz 1. *Ist eine Folge meßbarer Funktionen* $\{f_n(x)\}$ *konvergent im Mittel mit der* N-*Funktion* $M(u)$, *so gibt es genau eine solche Funktion* $f(x)$, *so daß*

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 M[f_n(x) - f(x)]\, dx = 0 \tag{23}$$

gilt[12]).

Aus (22) folgt also (23). Die Funktion $f(x)$ heißt „Limes im Mittel mit $M(u)$ der Folge $\{f_n(x)\}$" und wir sagen auch, die Folge $\{f_n(x)\}$ konvergiere im Mittel mit $M(u)$ gegen $f(x)$.

Satz 1′. *Sind die Reihen* $\sum_{i=1}^{\infty} a_i^{(n)}$ *im Mittel konvergent mit* $M(u)$, *so gibt es genau eine Reihe* $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$, *so daß*

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{\infty} M[a_i^{(n)} - a_i] = 0 \tag{23′}$$

ist.

[12]) Diesen Satz hat zum erstenmal Herr Noaillon bewiesen, jedoch u. W. nicht veröffentlicht. Einen einfachen Beweis gab Herr S. Banach; vgl. P. Lévy, Sur le théorème de MM. Fischer et Fr. Riesz sur la convergence en moyenne, Bull. des Sc. Math. (2) 49 (1925) p. 344—352, 374—380, insbes. p. 378. Vgl. auch l. c.[15]).

Die Beziehungen (22), (23), (22′), (23′) *haben den Charakter von Klasseneigenschaften*, d. h., wenn eine dieser Beziehungen für eine gewisse Folge von Funktionen bzw. Reihen und eine N-Funktion $M(u)$ besteht, so besteht sie auch für dieselbe Folge und jede andere mit $M(u)$ äquivalente N-Funktion. Der Beweis dafür ergibt sich z. B. für Funktionen aus Satz 4 dieses Kapitels und Kap. II, Satz 1 a.

Satz 2. *Hat die N-Funktion $M(u)$ die Eigenschaft (Δ_2) für großes u und ist mindestens eines der Integrale*

$$\int_0^1 M[f_n(x)]\,dx \qquad n=1,2,\ldots \tag{24}$$

endlich, so folgt aus (22) *die Endlichkeit aller Integrale* (24), *die Integrierbarkeit mit $M(u)$ des nach* Satz 1 *existierenden mittleren Limes $f(x)$, d. h. die Endlichkeit von*

$$\int_0^1 M[f(x)]\,dx$$

und die Beziehung

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 M[f_n(x)]\,dx=\int_0^1 M[f(x)]\,dx\ [13].$$

Satz 2′. *Hat die N-Funktion $M(u)$ die Eigenschaft (Δ_2) für kleines u und ist mindestens eine der Reihen*

$$\sum_{i=1}^{\infty} M[a_i^{(n)}] \qquad n=1,2,\ldots \tag{24′}$$

konvergent, so folgt aus (22′) *die Konvergenz aller Reihen* (24′), *die Konvergenz mit $M(u)$ des nach Satz* 1′ *existierenden mittleren Limes $\sum_{i=n}^{\infty} a_i$, d. h. die Konvergenz von $\sum_{i=1}^{\infty} M(a_i)$ und die Beziehung*

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{\infty} M[a_i^{(n)}]=\sum_{i=1}^{\infty} M(a_i).$$

[13]) J. C. Burkill, Strong and Weak Convergence of Functions of General Type, Proc. Lond. Math. Soc. (2) 28 (1928) p. 493—500, insbes. p. 496.

Satz 3. *Ist $M(u)$ eine stetige konvexe Funktion, $\sum_{\nu=1}^{\infty}|b_\nu|$ konvergent und gelten die Ungleichungen*

$$\int_0^1 M[f_n(x)]\,dx\leqslant K \qquad \text{für } n=1,2,\ldots, \tag{25}$$

so ist die Reihe $\sum_{\nu=1}^{\infty} b_\nu f_\nu(x)$ im Mittel konvergent mit $M(u)$.

Beweis. Für so großes n_0, m, daß $\sum_{\nu=n_0}^{\infty}|b_\nu|\leqslant 1$, folgt aus der Konvexität von $M(u)$ die Abschätzung für $n, m > n_0$

$$\int_0^1 M\left[\sum_{\nu=m}^{n} b_\nu f_\nu(x)\right]dx\leqslant \sum_{\nu=m}^{n}|b_\nu|\int_0^1 M[f_\nu(x)]\,dx\leqslant K\sum_{\nu=m}^{n}|b_\nu|.$$

Satz 3′. *Ist $M(u)$ eine stetige konvexe Funktion, $\sum_{\nu=1}^{\infty}|b_\nu|$ konvergent und gelten die Ungleichungen*

$$\sum_{i=1}^{\infty} M[a_i^{(n)}]\leqslant K \qquad (n=1,2,\ldots), \tag{25′}$$

so konvergiert die Folge der Reihen $\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{\nu=1}^{n} b_\nu a_i^{(\nu)}$ für $n\longrightarrow\infty$ im Mittel mit $M(u)$.

Hilfssatz 1. $M(u)$ sei eine N-Funktion, $h(x)$ eine beschränkte meßbare Funktion. Es gibt dann eine Folge von a) stetigen Funktionen $g_n(x)$, b) streckenweise konstanten Funktionen $p_n(x)$, so daß

$$|g_n(x)|\leqslant \operatorname{Max}|h(x)|, \qquad |p_n(x)|\leqslant \operatorname{Max}|h(x)|$$

und

$$\lim_{n\to\infty} g_n(x)=\lim_{n\to\infty} p_n(x)=h(x) \text{ fast überall},$$

also auch

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 M[h(x)-g_n(x)]\,dx=\lim_{n\to\infty}\int_0^1 M[h(x)-p_n(x)]\,dx=0$$

gilt.

Hilfssatz 1a. $M(u)$ sei eine für $u\geqslant 0$ nichtabnehmende N-Funktion mit der Eigenschaft (Δ_2) für großes u und $f(x)$ eine mit $M(u)$ integrierbare Funktion.

Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es a) eine stetige Funktion $g(x)$, b) eine streckenweise konstante Funktion $p(x)$, so daß die Ungleichungen gelten:

$$\int_0^1 M[f(x)-g(x)]\,dx < \varepsilon, \qquad \int_0^1 M[f(x)-p(x)]\,dx < \varepsilon.$$

Den Beweis von Hilfssatz 1a haben wir in einer anderen Arbeit geführt[14]). Der Hilfssatz 1 wird mit ähnlichen Methoden, nur bedeutend einfacher bewiesen.

Definition 2. Eine Folge von mit $M(u)$ integrierbaren Funktionen $\{f_n(x)\}$ heißt *gegen eine Funktion* $f(x)$ *mit* $M(u)$ *schwach konvergent*, wenn für jedes t aus $\langle 0,1\rangle$

$$(26) \qquad \lim_{n\to\infty} \int_0^t f_n(x)\,dx = \int_0^t f(x)\,dx$$

ist und die Ungleichungen (25) gelten.

Definition 2'. Die Folge der mit $M(u)$ konvergenten Reihen $\sum_{i=1}^{\infty} a_i^{(n)}$ $(n=1,2,\ldots)$ heißt gegen die Reihe $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ mit $M(u)$ schwach konvergent, wenn

$$(26') \qquad \lim_{n\to\infty} a_i^{(n)} = a_i \qquad (i=1,2,\ldots)$$

ist und die Ungleichungen (25') gelten.

Aus den Definitionen 2, 2' folgt unmittelbar, daß der „schwache Limes" $f(x)$ bzw. $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ eindeutig bestimmt ist ($f(x)$ bis auf eine Nullmenge).

Satz 4. *$M(u)$ und $N(u)$ seien N-Funktionen. Damit jede im Mittel mit $M(u)$ konvergente Folge von mit $M(u)$ integrierbaren Funktionen auch im Mittel mit $N(u)$ konvergent sei, ist die Bedingung* (16) *notwendig und hinreichend. Ist die Bedingung erfüllt, so sind die beiden mittleren Limites fast überall identisch*[15]).

Beweis. Die Notwendigkeit der Bedingung (16) folgt unmittelbar aus Kap. II, Satz 1a. Wir zeigen noch, daß sie hinreichend ist:

Angenommen, die Behauptung sei falsch. Dann gibt es eine Folge $\{f_n(x)\}$ von mit $M(u)$ integrierbaren Funktionen — wegen (16) sind sie nach Kap. II, Satz 1a auch mit $N(u)$ integrierbar —, so daß

$$(27) \qquad \lim_{\substack{p\to\infty\\ q\to\infty}} \int_0^1 M[f_p(x)-f_q(x)]\,dx = 0$$

und zwei Folgen von Indizes $p_i \to \infty$, $q_i \to \infty$, so daß

$$\int_0^1 N[f_{p_i}(x)-f_{q_i}(x)]\,dx \geqslant d > 0 \qquad (i=1,2,\ldots)$$

ist. Wegen (27) kann man nach einem bekannten Verfahren aus der Folge der Zahlenpaare $p_1, q_1;\ p_2, q_2; \ldots;\ p_i, q_i; \ldots$ eine Teilfolge herausgreifen, welche wir wieder mit p_i, q_i bezeichnen wollen und für welche

$$(28) \qquad \lim_{i\to\infty} |f_{p_i}(x)-f_{q_i}(x)| = 0$$

fast überall gilt. Nun sei A_i die Menge derjenigen x, für welche $|f_{p_i}(x)-f_{q_i}(x)| > a$ ist (a ist die in (16) vorkommende Konstante), B_i die Menge der übrigen x aus $\langle 0,1\rangle$. Wir definieren

$$\Psi_i(x) = N[f_{p_i}(x)-f_{q_i}(x)] \qquad \text{für } x \in A_i$$
$$\Psi_i(x) = 0 \qquad \text{für } x \in B_i.$$

Es ist $|\Psi_i(x)| < a$, also ist auch die Funktionenfolge $N[\Psi_i(x)]$ $(i=1,2,\ldots)$ beschränkt und wegen (28) ist $\lim_{i\to\infty} N[\Psi_i(x)] = 0$ fast überall. Daher ist $\lim_{i\to\infty} \int_0^1 N[\Psi_i(x)]\,dx = 0$. Aus der Abschätzung

$$0 < d \leqslant \int_0^1 N[f_{p_i}(x)-f_{q_i}(x)]dx \leqslant \int_{A_i} N[\Psi_i(x)]dx + b\int_0^1 M[f_{p_i}(x)-f_{q_i}(x)]dx$$
$$\leqslant \int_0^1 N[\Psi_i(x)]dx + b\int_0^1 M[f_{p_i}(x)-f_{q_i}(x)]dx \xrightarrow[i\to\infty]{} 0$$

folgt ein Widerspruch.

[14]) Z. W. Birnbaum und W. Orlicz, Über Approximation im Mittel, Studia Math. 2 (1930) p. 197—206, Satz 1.

[15]) Vgl. St. Kaczmarz et L. Nikliborc, Sur les suites des fontions convergentes en moyenne, Fund. Math. 11 (1928) p. 151—168, insbes. p. 156.

Satz 4′. *$M(u)$ und $N(u)$ seien* N-*Funktionen. Damit jede im Mittel mit $M(u)$ konvergente Folge von mit $M(u)$ konvergenten Reihen auch mit $N(u)$ im Mittel konvergiere, ist die Bedingung* (3) *notwendig und hinreichend. Ist sie erfüllt, so stimmen die beiden mittleren Limites überein.*

Satz 5. *$M(u)$ sei eine* N-*Funktion. Damit jede Folge $\{f_n(x)\}$ von mit $M(u)$ integrierbaren Funktionen, welche mit $M(u)$ im Mittel konvergiert und die Ungleichungen* (25) *erfüllt, gegen ihren mittleren Limes auch schwach konvergent sei, ist das Bestehen der Ungleichung*

$$(29) \qquad \frac{M(u)}{|u|} \geqslant c > 0 \qquad \text{für } |u| \geqslant u_0$$

notwendig und hinreichend.

Beweis. Die Bedingung (29) ist hinreichend: Nach Satz 4 konvergiert die Folge auch mit $N(u)=|u|$ im Mittel gegen $f(x)$, d. h. es ist

$$(30) \qquad \lim_{n\to\infty}\int_0^1 |f_n(x)-f(x)|\,dx = 0$$

und daher

$$(31) \qquad \left|\int_0^t (f_n(x)-f(x))\,dx\right| \leqslant \int_0^1 |f_n(x)-f(x)|\,dx \to 0$$

für $0\leqslant t\leqslant 1$.

Da nach Kap. II, Satz 1a aus der Integrierbarkeit von $f_n(x)$ mit $M(u)$ die Endlichkeit der Integrale $\int_0^1 |f_n(x)|\,dx$ folgt, ist wegen (31) auch $\int_0^1 |f(x)|\,dx$ endlich, also

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^t f_n(x)\,dx = \int_0^t f(x)\,dx.$$

Die Notwendigkeit der Bedingung (29) ergibt sich sofort aus Kap. II, Satz 1a.

Satz 5′. *Jede Folge von mit der* N-*Funktion $M(u)$ konvergenten Reihen $\sum_{i=1}^{\infty} a_i^{(n)}$ $(n=1,2,\ldots)$, welche im Mittel mit $M(u)$ konvergiert und den Ungleichungen* (25′) *genügt, ist auch schwach mit $M(u)$ gegen ihren mittleren Limes konvergent.*

Hilfssatz 2. $M(u)$ sei eine N′-Funktion, $\{f_n(x)\}$ eine mit $M(u)$ schwach gegen $f(x)$ konvergierende Funktionenfolge. Dann ist für jedes beschränkte meßbare $h(x)$

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)\,h(x)\,dx = \int_0^1 f(x)\,h(x)\,dx.$$

Beweis. Ist K die Konstante aus (25) und $\varepsilon>0$ beliebig, so setzen wir $k=\frac{K}{\varepsilon}$. Zur beschränkten Funktion $kh(x)$ gibt es nach Hilfssatz 1 eine Folge streckenweise konstanter Funktionen $\{p_n(x)\}$, so daß $p_n(x)\underset{n\to\infty}{\longrightarrow} kh(x)$ fast überall und $\int_0^1 N[kh(x)-p_n(x)]dx \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

Ist $N(v)$ die zu $M(u)$ komplementäre Funktion, so ist nach (6)

$$\left|\int_0^1 f_i(x)\left[h(x)-p_n(x)\right]dx\right| \leqslant \frac{1}{k}\int_0^1 M[f_i(x)]\,dx$$
$$+\frac{1}{k}\int_0^1 N[kh(x)-p_n(x)]\,dx < \varepsilon + \frac{1}{k}\int_0^1 N[kh(x)-p_n(x)]\,dx.$$

Daraus folgt, wegen $\lim\limits_{i\to\infty}\int_0^1 f_i(x)\,\frac{p_n(x)}{k}\,dx = \int_0^1 f(x)\,\frac{p_n(x)}{k}\,dx$, durch Grenzübergang $i\to\infty$

$$\left|\underline{\lim_{i\to\infty}}\int_0^1 f_i(x)\,h(x)\,dx - \int_0^1 f(x)\frac{p_n(x)}{k}\,dx\right| \leqslant \varepsilon + \frac{1}{k}\int_0^1 N[kh(x)-p_n(x)]dx,$$

$$\left|\overline{\lim_{i\to\infty}}\int_0^1 f_i(x)\,h(x)\,dx - \int_0^1 f(x)\frac{p_n(x)}{k}\,dx\right| \leqslant \varepsilon + \frac{1}{k}\int_0^1 N[kh(x)-p_n(x)]dx$$

und durch noch einen Grenzübergang $n\to\infty$

$$\left|\underline{\lim_{i\to\infty}}\int_0^1 f_i(x)\,h(x)\,dx - \int_0^1 f(x)\,h(x)\,dx\right| \leqslant \varepsilon,$$

$$\left| \varliminf_{i\to\infty} \int_0^1 f_i(x)\, h(x)\, dx - \int_0^1 f(x)\, h(x)\, dx \right| \leqslant \varepsilon .$$

Satz 6. *$M(u)$ sei eine konvexe N'-Funktion. Ist die Folge $\{f_n(x)\}$ mit $M(u)$ schwach konvergent gegen $f(x)$, so besteht die Ungleichung*

(32) $$\int_0^1 M[f(x)]\, dx \leqslant \varliminf_{n\to\infty} \int_0^1 M[f_n(x)]\, dx$$ [16].

Beweis. Ist $N(v)$ die zu $M(u)$ komplementäre Funktion, so hat man für jedes beschränkte $h(x)$

$$\int_0^1 f_n(x)\, h(x)\, dx \leqslant \int_0^1 M[f_n(x)]\, dx + \int_0^1 N[h(x)]\, dx .$$

Nach Hilfssatz 2 folgt daraus für jedes $h(x)$ mit $\operatorname{sign} h(x) = \operatorname{sign} f(x)$ durch Grenzübergang $n \longrightarrow \infty$

(33) $$\int_0^1 |f(x)|\, |h(x)|\, dx \leqslant \varliminf_{n\to\infty} \int_0^1 M[f_n(x)]\, dx + \int_0^1 N[h(x)]\, dx .$$

Wir definieren

$\varphi_n(x) = |f(x)|$ für diejenigen x, für welche $|f(x)| \leqslant n$ ist,
$\varphi_n(x) = n$ für die übrigen x.

Dann folgt aus (33)

(34) $$\int_0^1 |\varphi_n(x)|\, |h(x)|\, dx \leqslant \varliminf_{n\to\infty} \int_0^1 M[f_n(x)]\, dx + \int_0^1 N[h(x)]\, dx .$$

Setzt man

$$h_n(x) = p[\varphi_n(x)],$$

wenn $M(u) = \int_0^u p(\xi)\, d\xi$ die in Kap. I, Satz 3 festgelegte Darstellung ist, so erhält man

[16]) Vgl. W. H. Young, On Successions with Subsequences converging to an Integral, Proc. Lond. Math. Soc. (2) 24 (1925) p. 1—20. In dieser Arbeit beweist Herr W. H. Young, allerdings auf anderem Wege, einen allgemeineren Satz, aus welchem sich Satz 6 ergibt.

$$\int_0^1 |\varphi_n(x)|\, h_n(x)\, dx = \int_0^1 M[\varphi_n(x)]\, dx + \int_0^1 N[h_n(x)]\, dx .$$

Daraus und aus der sich aus (34) ergebenden Ungleichung folgt

$$\int_0^1 M[\varphi_n(x)]\, dx \leqslant \varliminf_{n\to\infty} \int_0^1 M[f_n(x)]\, dx ,$$

also durch Grenzübergang $n \longrightarrow \infty$, nach einem bekannten Fatouschen Lemma, die Ungleichung (32).

Satz 6'. *$M(u)$ sei eine N-Funktion. Konvergiert die Folge der Reihen $\sum_{i=1}^{\infty} a_i^{(n)}$ $(n = 1, 2, \dots)$ mit $M(u)$ schwach gegen $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$, so besteht die Ungleichung*

$$\sum_{i=1}^{\infty} M(a_i) \leqslant \varliminf_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{\infty} M[a_i^{(n)}].$$

Satz 7. *$M(u)$ sei eine konvexe N'-Funktion. Aus jeder Folge von mit $M(u)$ integrierbaren Funktionen $\{f_n(x)\}$, welche die Ungleichungen (25) erfüllen, kann man eine mit $M(u)$ schwach konvergente Teilfolge $\{f_{n_i}(x)\}$ herausgreifen. Die Funktion $f(x)$, gegen welche diese Teilfolge schwach konvergiert, ist mit $M(u)$ integrierbar und es besteht die Ungleichung*

$$\int_0^1 M[f(x)]\, dx \leqslant \varliminf_{i\to\infty} \int_0^1 M[f_{n_i}(x)]\, dx$$ [17]).

Beweis. Für $|u| \geqslant u_1$ sei $\dfrac{M(u)}{|u|} \geqslant \dfrac{K}{\varepsilon}$, wo K die in (25) auftretende Konstante ist. Ist E eine beliebige meßbare Teilmenge von $\langle 0, 1\rangle$ und bezeichnet man

mit E_n' diejenige Teilmenge von E, in welcher $|f_n(x)| < u_1$ ist,
mit E_n'' die Menge aller übrigen Punkte von E,

so findet man die Abschätzung

(35) $$\int_E |f_n(x)|\, dx \leqslant |E_n'| \,.\, M(u_1) + \frac{\varepsilon}{K} \int_{E_n''} M[f_n(x)]\, dx \leqslant |E| \,.\, M(u_1) + \varepsilon .$$

[17]) Vgl. l. c. [16]).

Wir setzen

$$F_n(t) = \int_0^t f_n(x)\, dx .$$

Ist E insbesondere eine Summe von endlich vielen, bis auf die Enden punktfremden Intervallen $\langle t_{i-1}, t_i \rangle$ $(i = 1, 2, \ldots, p)$, deren Gesamtlänge $< \eta = \frac{\varepsilon}{M(u_1)}$ ist, so folgt aus (35)

$$\sum_{i=1}^{p} |F_n(t_i) - F_n(t_{i-1})| \leqslant 2\varepsilon \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

Die Funktionen $F_n(t)$ sind also gleichgradig totalstetig. Aus (35) ersieht man auch ohne weiteres, daß die $F_n(t)$ auch gleichmäßig beschränkt sind. Daher kann man aus der Folge $\{F_n(t)\}$ eine gleichmäßig konvergente Teilfolge $\{F_{n_i}(t)\}$ herausgreifen und $F(t) = \lim\limits_{i\to\infty} F_{n_i}(t)$ ist ebenfalls totalstetig, also in der Form $F(t) = \int\limits_0^t f(x)\, dx$ darstellbar. Damit haben wir aber schon

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^t f_n(x)\, dx = \int_0^t f(x)\, dx .$$

Satz 7′. *$M(u)$ sei eine* N-*Funktion. Aus jeder Folge von mit $M(u)$ konvergenten Reihen $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i^{(n)}$ $(n = 1, 2, \ldots)$, welche die Ungleichungen (25′) erfüllen, kann eine mit $M(u)$ schwach konvergente Teilfolge $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i^{(n_j)}$ $(j = 1, 2, \ldots)$ herausgegriffen werden. Die Reihe $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i$, gegen welche diese Teilfolge schwach konvergiert, ist mit $M(u)$ konvergent und es besteht die Ungleichung*

$$\sum_{i=1}^{\infty} M(a_i) \leqslant \lim_{j\to\infty} \sum_{i=1}^{\infty} M[a_i^{(n_j)}] .$$

Satz 8. *$M(u)$ und $N(v)$ seien zueinander konjugierte* N′-*Funktionen. Dann behaupten wir:*

1° *Damit eine Folge $\{f_n(x)\}$ von mit $M(u)$ integrierbaren Funktionen gegen eine Funktion $f(x)$ mit $M(u)$ schwach konvergiere, ist folgendes notwendig und hinreichend:*

$f(x)$ ist mit $M(u)$ integrierbar,
für jedes mit $N(v)$ integrierbare $g(x)$ gilt

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\, g(x)\, dx = \int_0^1 f(x)\, g(x)\, dx \tag{36}$$ [18].

2° *Aus jeder Folge $\{f_n(x)\}$ von mit $M(u)$ integrierbaren Funktionen, für welche die Ungleichungen (25) gelten, kann eine gegen ein mit $M(u)$ integrierbares $f(x)$ schwach mit $M(u)$ konvergierende Teilfolge herausgegriffen werden.*

Beweis der Behauptung 1°.

Die Bedingungen sind hinreichend: Nach Kap. II, Satz 3 und demjenigen Satz über Funktionen, welcher dem Hilfssatz 9 über Reihen aus Kap. I entspricht, ist $M(u)$ mit einer konvexen N′-Funktion $\overline{M}(u)$ mit der Eigenschaft (Δ_2) für großes u äquivalent und ebenso $N(v)$ mit der zu $\overline{M}(u)$ komplementären Funktion $\overline{N}(v)$. Nach Kap. II, Satz 2 gibt es daher eine Konstante P, so daß

$$\int_0^1 \overline{M}[f_n(x)]\, dx \leqslant \overline{P} \qquad (n = 1, 2, \ldots),$$

also auch

$$\int_0^1 M[f_n(x)]\, dx \leqslant P \qquad (n = 1, 2, \ldots),$$

womit (25) nachgewiesen wäre. Setzt man nun in (36)

$$g(x) = 1 \text{ für } 0 \leqslant x \leqslant t$$
$$g(x) = 0 \text{ für } t \leqslant x \leqslant 1,$$

so hat man

$$\int_0^t f_n(x)\, dx \to \int_0^t f(x)\, dx ,$$

also (26).

Die Bedingungen sind notwendig: Wir nehmen an, daß (25) und (26) gilt. $\overline{M}(u)$ und $\overline{N}(v)$ seien wieder die mit $M(u)$ bzw. $N(v)$ äquivalenten konvexen N′-Funktionen mit der Eigenschaft (Δ_2) für großes u. Aus (25) und $\int\limits_0^1 M[f(x)]\, dx \leqslant K$ (dies folgt aus Satz 6)

[18]) Wegen der hinreichenden Bedingungen siehe l. c.[13]), p. 499, Theorem 5.

ergibt sich wegen der Eigenschaft (Δ_2) für großes u von $M(u)$ die Existenz eines K', so daß

$$\int_0^1 M[f_n(x)-f(x)]\,dx \leqslant K' \qquad (n=1,2,\ldots)$$

ist. Wir setzen

$$f_n(x)-f(x)=\varphi_n(x);$$

es existiert ein $\overline{K}$, so daß auch

$$\int_0^1 \overline{M}[\varphi_n(x)]\,dx < \overline{K};$$

wegen (26) haben wir

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^t \varphi_n(x)\,dx=0$$

für jedes t, $0\leqslant t\leqslant 1$. Die Folge $\{\varphi_n(x)\}$ konvergiert also mit $\overline{M}(u)$ schwach gegen 0. Unmittelbar aus (26) hat man

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 \varphi_n(x)\,p(x)\,dx=0 \tag{37}$$

für jedes streckenweise konstante $p(x)$. Nun sei $g(x)$ eine mit $N(v)$, also auch mit $\overline{N}(v)$ integrierbare Funktion; auch $\frac{\overline{K}}{\varepsilon}\,g(x)$ ist dann mit $\overline{N}(v)$ integrierbar. Wir wählen nach Hilfssatz 1a $p(x)$ so, daß

$$\int_0^1 \overline{N}\left[\frac{\overline{K}}{\varepsilon}\,g(x)-\frac{\overline{K}}{\varepsilon}\,p(x)\right]dx<\overline{K}$$

wird; es ist

$$\left|\int_0^1 \varphi_n(x)\,[g(x)-p(x)]\,dx\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{\overline{K}}\int_0^1 \overline{M}[\varphi_n(x)]\,dx$$
$$+\frac{\varepsilon}{\overline{K}}\int_0^1 \overline{N}\left[\frac{\overline{K}}{\varepsilon}\,g(x)-\frac{\overline{K}}{\varepsilon}\,p(x)\right]dx<2\varepsilon,$$

also

$$\left|\int_0^1 \varphi_n(x)\,g(x)\,dx-\int_0^1 \varphi_n(x)\,p(x)\,dx\right|<2\varepsilon,$$

woraus wegen (37)

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 \varphi_n(x)\,g(x)\,dx=0,$$

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)\,g(x)\,dx=\int_0^1 f(x)\,g(x)\,dx$$

folgt.

Beweis der Behauptung 2°.

Aus (25) folgt $\int_0^1 \overline{M}[f_n(x)]\,dx<K_1$ und da $\overline{M}(u)$ bereits die Voraussetzungen von Satz 7 erfüllt, ergibt dieser Satz sofort die Behauptung.

Satz 8'. *$M(u)$ und $N(v)$ seien zueinander konjugierte N'-Funktionen. Wir behaupten:*

1° *Damit eine Folge von mit $M(u)$ konvergenten Reihen $\sum_{i=1}^{\infty} a_i^{(n)}$ $(n=1,2,\ldots)$ gegen $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ schwach mit $M(u)$ konvergiere, ist notwendig und hinreichend, daß $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ mit $M(u)$ konvergiert und für jede mit $N(v)$ konvergente Reihe $\sum_{i=1}^{\infty} b_i$ die Beziehung*

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{\infty} a_i^{(n)}\,b_i=\sum_{i=1}^{\infty} a_i\,b_i$$

gilt[19]).

2° *Aus jeder Folge von mit $M(u)$ konvergenten Reihen, für welche (25') gilt, kann eine Teilfolge herausgegriffen werden, welche gegen eine mit $M(u)$ konvergente Reihe mit $M(u)$ schwach konvergiert.*

---

[19]) Der Beweis dieser Behauptung wird mit Hilfe von Satz 5a, Kap. I, § 7 geführt.

§ 2.

Orthogonalreihen.

Als *T-Methoden* wollen wir in diesem § *zeilenfinite* TOEPLITZsche[20]) Summationsmethoden bezeichnen. Es sei nun

$$T=(b_{pq})$$

die einer T-Methode zugeordnete Matrix. Als Folge der *T-Transformierten* einer Folge $\{s_i\}$ bezeichnen wir die Folge

$$\sigma_i=\sum_{\nu=1}^{N(i)} b_{i\nu} s_\nu \text{ }^{21)}.$$

Die mit einer T-Methode erhaltene verallgemeinerte Summe der Reihe $\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu$ bezeichnen wir mit

$$(T)\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu .$$

In $\langle 0, 1\rangle$ sei ein *orthogonales* und *normiertes Funktionensystem* $\{\varphi_i(x)\}$ gegeben. Wir wollen es in der Folge mit O. S. $\{\varphi_i(x)\}$ bezeichnen. Entspricht einer Funktion $f(x)$ eine formale Entwicklung nach O. S. $\{\varphi_i(x)\}$, so kann die n-te T-Transformierte $\sigma_n[f(x)]$ der Folge der Partialsummen dieser Entwicklung folgendermaßen geschrieben werden:

$$\sigma_n[f(x)]=\int_0^1 K_n(x,t)f(x)\,dx,$$

wo

$$K_n(x,t)=\sum_{\nu=1}^{N(n)} b_{n\nu}\left(\sum_{i=1}^{\nu}\varphi_i(x)\varphi_i(t)\right)$$

gesetzt wurde. Von dem O. S. $\{\varphi_i(x)\}$ wollen wir nun voraussetzen, daß es die folgenden Bedingungen erfüllt:

(38 a) $$|\varphi_n(t)|<L_n \qquad (n=1,2,\ldots),$$

(38 b) $$\int_0^1 |K_n(x,t)|\,dx<L \qquad (n=1,2,\ldots).$$

[20]) O. Toeplitz, Über lineare Mittelbildungen, Prace matematyczno-fizyczne, 22 (1911) p. 113—119.

[21]) $N(i)$ bedeutet eine solche Zahl, daß $b_{in}=0$ ist für $n>N(i)$.

Dabei hängen die Konstanten L_n, L von der T-Methode und dem O. S. ab und man kann $L>1$ voraussetzen.

Satz 1[22]). *$M(u)$ sei eine konvexe N′-Funktion mit der Eigenschaft* (Δ_2) *für großes u und das O. S. $\{\varphi_i(x)\}$ erfülle* (38 a) *und* (38 b).

Damit die Orthogonalreihe

(39) $$\sum_{\nu=1}^{\infty} c_\nu \varphi_\nu(t)$$

die Orthogonalentwicklung einer mit $M(u)$ integrierbaren Funktion sei, ist die Existenz einer Konstanten K notwendig und hinreichend, mit welcher die Beziehungen

(40) $$\int_0^1 M[\sigma_n(x)]\,dx<K \qquad (n=1,2,\ldots)$$

gelten. Dabei bedeutet $\sigma_n(x)$ die n-te T-Transformierte der Reihe (39).

Beweis.

Die Bedingung (40) ist hinreichend: Nach Kap. III, § 1, Satz 7 folgt aus (40) die Existenz einer Teilfolge $\{\sigma_{n_i}(x)\}$, welche mit $M(u)$ schwach gegen ein mit $M(u)$ integrierbares $f(x)$ konvergiert. Nach Kap. III, § 1, Hilfssatz 2 ist daher

$$\lim_{i\to\infty}\int_0^1 \sigma_{n_i}(x)\varphi_p(x)\,dx=\int_0^1 f(x)\varphi_p(x)\,dx \qquad (p=1,2,\ldots),$$

also

$$\lim_{i\to\infty} c_p\sum_{\nu=1}^{N(n_i)} b_{n_i\nu}=\int_0^1 f(x)\varphi_p(x)\,dx \qquad (p=1,2,\ldots),$$

und da für jede T-Methode $\lim_{n\to\infty}\sum_{\nu=1}^{N(n_i)} b_{n\nu}=1$ ist, bedeutet das

$$c_p=\int_0^1 f(x)\varphi_p(x)\,dx.$$

[22]) Die Sätze dieses §-en sind Verallgemeinerungen entsprechender Sätze aus §§ 1 und 2 der Arbeit: W. Orlicz, Beiträge zur Theorie der Orthogonalentwicklungen I, Studia Math. 1 (1929) p. 1—39.

Die Bedingung (40) ist notwendig: Wir machen von der folgenden, von JENSEN[23]) angegebenen Eigenschaft konvexer Funktionen Gebrauch:

Ist $M(u)$ konvex und stetig, $f(x)$ meßbar, $p(x)$ nichtnegativ, meßbar und nicht $\equiv 0$, so gilt die Ungleichung

$$M\left[\frac{\int_0^1 f(x)\,p(x)\,dx}{\int_0^1 p(x)\,dx}\right] \leqslant \frac{1}{\int_0^1 p(x)\,dx}\int_0^1 M[f(x)]\,p(x)\,dx. \tag{41}$$

Ist noch $M(0)=0$, so folgt aus (41)

$$M\left[\int_0^1 f(x)\,p(x)\,dx\right] \leqslant \int_0^1 M[f(x)]\,p(x)\,dx, \quad \text{wenn } 0<\int_0^1 p(x)\,dx \leqslant 1. \tag{41'}$$

Nun sei $f(x)$ mit $M(u)$ integrierbar.

Ist t ein Punkt aus $\langle 0,1\rangle$, in welchem $\int_0^1 |K_n(x,t)|\,dx \geqslant 1$ wird, so findet man nach (41)

$$M\left[\frac{\sigma_n[f(t)]}{L}\right] \leqslant M\left[\frac{\int_0^1 |K_n(x,t)|\,.\,|f(x)|\,dx}{L}\right]$$

$$\leqslant M\left[\frac{\int_0^1 |K_n(x,t)|\,.\,|f(x)|\,dx}{\int_0^1 |K_n(x,t)|\,dx}\right]$$

$$\leqslant \frac{1}{\int_0^1 |K_n(x,t)|\,dx}\int_0^1 M[f(x)]\,|K_n(x,t)|\,dx \leqslant \int_0^1 M[f(x)]\,|K_n(x,t)|\,dx.$$

Für ein t, in welchem $\int_0^1 |K_n(x,t)|\,dx < 1$ ist, erhält man nach (41′) ebenfalls die Ungleichung

[23]) l. c.[3]), p. 186.

$$M\left[\frac{\sigma_n[f(t)]}{L}\right] \leqslant \int_0^1 M[f(x)]\,|K_n(x,t)|\,dx \quad (n=1,2,\ldots), \tag{42}$$

welche somit allgemein gilt. Durch Integration findet man daraus

$$\int_0^1 M\left[\frac{\sigma_n[f(t)]}{L}\right] dt \leqslant \int_0^1 dx\, M[f(x)]\int_0^1 |K_n(x,t)|\,dt \leqslant L\int_0^1 M[f(x)]\,dx. \tag{43}$$

Es sei $M(Lu)\leqslant CM(u)$ für $|u|>u_0$ (Eigenschaft (Δ_2)). Wird mit A_n die Menge derjenigen t bezeichnet, für welche $|\sigma_n[f(t)]|>u_0 L$ gilt, mit B_n die Menge aller übrigen Punkte von $\langle 0,1\rangle$, so hat man nach (43)

$$\int_0^1 M[\sigma_n[f(t)]]\,dt = \int_0^1 M\left[L\frac{\sigma_n[f(t)]}{L}\right] dt \leqslant C\int_{A_n} M\left[\frac{\sigma_n[f(t)]}{L}\right] dt$$

$$+\int_{B_n} M[u_0 L]\,dt \leqslant CL\int_0^1 M[f(x)]\,dx + M[u_0 L] = K.$$

Satz 2. *Voraussetzungen wie in Satz 1.*

Dafür, daß die Reihe (39) *die Entwicklung einer mit* $M(u)$ *integrierbaren Funktion nach dem O. S.* $\{\varphi_i(x)\}$ *sei, ist die Beziehung*

$$\lim_{\substack{p\to\infty\\ q\to\infty}}\int_0^1 M[\sigma_p(x)-\sigma_q(x)]\,dx = 0 \tag{44}$$

notwendig und hinreichend.

Beweis.

Die Bedingung (44) ist hinreichend: Nach Kap. III, § 1, Satz 2 folgt aus (44) die Ungleichung (40), also kann Satz 1 angewendet werden. Einen anderen Beweis könnte man mit Hilfe der Sätze 1 und 5 von Kap. III, § 1 führen.

Die Bedingung (44) ist notwendig: Wir beweisen zuerst, daß für jedes *beschränkte* $h(x)$ die Beziehung

$$\lim_{\substack{m\to\infty\\ n\to\infty}}\int_0^1 M\left[\frac{1}{2L}(\sigma_n[h(x)]-\sigma_m[h(x)])\right] dx = 0 \tag{45}$$

besteht. Nach dem RIESZ-FISCHERschen Satze ist nämlich

$$\lim_{\substack{m\to\infty\\ n\to\infty}} \int_0^1 (\sigma_m[h(x)] - \sigma_n[h(x)])^2 dx = 0,$$

daher gibt es zu jedem $\delta > 0$ ein $N(\delta)$, so daß für $m, n > N(\delta)$

$$\int_0^1 |\sigma_n[h(x)] - \sigma_m[h(x)]|^2 dx < \delta^3$$

ist. Dann hat aber die Menge E_{mn} derjenigen Punkte, in welchen $|\sigma_n[h(x)] - \sigma_m[h(x)]| > \delta$ ist, ein Maß

$$|E_{mn}| < \delta \qquad (m, n > N(\delta)). \tag{46}$$

Mit Rücksicht auf (40), (43) und (46) findet man

$$\int_0^1 M\left[\frac{1}{2L}(\sigma_n[h(x)] - \sigma_m[h(x)])\right] dx \leqslant \int_{CE_{mn}} M\left[\frac{1}{2L}(\sigma_n[h(x)] - \sigma_m[h(x)])\right] dx$$

$$+ \int_{E_{mn}} M\left[\frac{1}{2L}(\sigma_m[h(x)] - \sigma_n[h(x)])\right] dx \leqslant |CE_{mn}| \cdot M\left[\frac{\delta}{2L}\right]$$

$$+ \int_{E_{mn}} M\left[\frac{\sigma_n[h(x)]}{L}\right] dx + \int_{E_{mn}} M\left[\frac{\sigma_m[h(x)]}{L}\right] dx$$

$$\leqslant M\left[\frac{\delta}{2L}\right] + 2\delta L K = r(\delta),$$

wo

$$K = \int_0^1 M[h(x)]\, dx$$

ist, und $r(\delta)$ kann beliebig klein gemacht werden.

Aus (43) folgt nun für beliebiges mit $M(u)$ integrierbares $f(x)$ und beschränktes $h(x)$

$$\int_0^1 M\left[\frac{1}{2L}(\sigma_n[f(x) - h(x)] - \sigma_m[f(x) - h(x)])\right] dx$$

$$\leqslant \int_0^1 M\left[\frac{\sigma_n[f(x) - h(x)]}{L}\right] dx + \int_0^1 M\left[\frac{\sigma_m[f(x) - h(x)]}{L}\right] dx$$

$$\leqslant 2L \int_0^1 M[f(x) - h(x)]\, dx.$$

Wir wählen nun ein $\delta > 0$, so daß $r(\delta) < \frac{\varepsilon}{2}$ und ein stetiges $h(x)$ nach Hilfssatz 1a aus Kap. III, § 1, so daß $\int_0^1 M[f(x) - h(x)]\, dx < \frac{\varepsilon}{4L}$ wird. Dann finden wir für $m, n > N(\delta, h(x))$

$$\int_0^1 M\left[\frac{1}{4L}(\sigma_n[f(x)] - \sigma_m[f(x)])\right] dx \leqslant \int_0^1 M\left[\frac{1}{2L}(\sigma_n[h(x)] - \sigma_m[h(x)]\right] dx$$

$$+ \int_0^1 M\left[\frac{1}{2L}(\sigma_n[f(x) - h(x)] + \sigma_m[f(x) - h(x)])\right] dx \leqslant \varepsilon.$$

Um daraus die Beziehung (44) zu erhalten, genügt es zu bemerken, daß $M\left[\frac{1}{4L}u\right]$ und $M(u)$ äquivalente N-Funktionen sind und daß das Bestehen der Beziehung (22), wie schon in einer Bemerkung zu Satz 1, 2, 1′, 2′ in Kap. III, § 1 festgestellt wurde, den Charakter von Klasseneigenschaft hat.

S a t z 3. *Das O. S.* $\{\varphi_i(x)\}$ *erfülle* (38 a) *und* (38 b). $M(u)$ *und* $N(v)$ *seien zueinander konjugierte* N′-*Funktionen.*

Ist $\{f_i\}$ *die Folge der Entwicklungskoeffizienten inbezug auf O. S.* $\{\varphi_i(x)\}$ *einer mit* $M(u)$ *integrierbaren Funktion* $f(x)$ *und* $\{g_i\}$ *die Folge ebensolcher Koeffizienten einer mit* $N(v)$ *integrierbaren Funktion* $g(x)$, *so hat die Reihe*

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} f_\nu g_\nu$$

eine endliche T-Summe $(T)\sum_{\nu=1}^{\infty} f_\nu g_\nu$.

S a t z 3′. *Das O. S.* $\{\varphi_i(x)\}$ *erfülle* (38 a). $M(u)$ *und* $N(v)$ *seien zueinander konjugierte* N′-*Funktionen.*

Hat die Zahlenfolge $\{g_i\}$ *die Eigenschaft, daß für jede Folge* $\{f_i\}$ *von Entwicklungskoeffizienten einer mit* $M(u)$ *integrierbaren Funktion* $f(x)$ *die T-Summe* $(T)\sum_{\nu=1}^{\infty} f_\nu g_\nu$ *endlich ausfällt, so sind die Zahlen* g_i *Entwicklungskoeffizienten einer mit* $N(v)$ *integrierbaren Funktion* $g(x)$.

Den Beweis dieser Sätze führt man mit Hilfe von Satz 2 aus Kap. 3, § 2 und von Satz 5 und 8 aus Kap. III, § 1.

Satz 4. *Das O. S.* $\{\varphi_i(x)\}$ *erfülle* (38a) *und* (38b). $M(u)$ *und* $N(v)$ *seien zueinander konjugierte* N'-*Funktionen.*

Eine Faktorenfolge $\{\lambda_i\}$ *führt dann und nur dann die Folge* $\{f_i\}$ *von Entwicklungskoeffizienten jeder mit* $M(u)$ [bzw. $N(v)$] *integrierbaren Funktionen* $f(x)$ *wieder in eine Folge* $\{\lambda_i f_i\}$ *von Entwicklungskoeffizienten einer mit* $M(u)$ [bzw. $N(v)$] *integrierbaren Funktion über, wenn sie die Folge* $\{g_i\}$ *von Entwicklungskoeffizienten jeder mit* $N(v)$ [bzw. $M(u)$] *integrierbaren Funktion* $g(x)$ *wieder in eine Folge* $\{\lambda_i g_i\}$ *von Entwicklungskoeffizienten einer mit* $N(v)$ [bzw. $M(u)$] *integrierbaren Funktion überführt.*

Der Beweis ergibt sich leicht aus den Sätzen 3 und 3' dieses §.

Wir wollen sagen, das O. S. $\{\varphi_i(x)\}$ sei *vollständig* im Bereiche der mit einer N-Funktion $M(u)$ integrierbaren Funktionen, wenn für jede mit $M(u)$ integrierbare Funktion $f(x)$ aus

$$\int_0^1 f(x)\,\varphi_n(x)\,dx=0 \qquad (n=1,2,\ldots)$$

die Beziehung

$$f(x)=0$$

fast überall folgt.

Ein O. S. $\{\varphi_i(x)\}$ soll im Bereiche der mit einer N-Funktion $M(u)$ integrierbaren Funktionen *abgeschlossen* heißen, wenn es zu jedem mit $M(u)$ integrierbaren $f(x)$ und jedem $\varepsilon>0$ ein lineares Aggregat

$$w(x)=\sum_{\nu=1}^{n} a_\nu\,\varphi_\nu(x)$$

gibt, so daß die Ungleichung

$$\int_0^1 M[f(x)-w(x)]\,dx<\varepsilon$$

gilt

Sind $M(u)$ und $N(v)$ zueinander konjugierte N'-Funktionen, so folgt aus der Abgeschlossenheit eines O. S. im Bereiche der mit $M(u)$ integrierbaren Funktionen die Vollständigkeit dieses O. S. im Bereiche der mit $N(v)$ integrierbaren Funktionen.

Satz 5. *Das O. S.* $\{\varphi_i(x)\}$ *erfülle* (38a) *und* (38b). $M(u)$ *und* $N(v)$ *seien konjugierte* N'-*Funktionen. Dann sind die folgenden drei Eigenschaften dieses O. S. äquivalent:*

1° *die Vollständigkeit im Bereiche der mit* $M(u)$ *integrierbaren Funktionen,*

2° *die Abgeschlossenheit der mit* $N(v)$ *integrierbaren Funktionen,*

3° *das Bestehen der verallgemeinerten Parsevalschen Formel*

$$(7)\ \sum_{\nu=1}^{\infty} f_\nu g_\nu=\int_0^1 f(x)\,g(x)\,dx,$$

für die Entwicklungskoeffizienten f_i *bzw.* g_i *einer beliebigen mit* $M(u)$ *integrierbaren Funktion* $f(x)$ *bzw. einer beliebigen mit* $N(v)$ *integrierbaren Funktion* $g(x)$.

*(Reçu par la Rédaction le 19. 10. 1930; les passages entre astériques * * ont été modifiés le 9. 1. 1931).*