Remarque I. M. M. Feldstein et Sierpiński[4]) ont posé le problème suivant: Existe-t-il une fonction de deuxième classe qui ne soit pas la limite des fonctions presque partout continues? Ce problème a été résolu par M. Zalcwasser[5]). D'après le corollaire, la solution affirmative de ce problème résulte de l'exemple connu d'une fonction de deuxième classe qui n'est équivalente à aucune fonction de première classe.

Remarque II. Dans le corollaire, nous avons énoncé que l'équivalence de la fonction $F(x)$ à une fonction de première classe est nécessaire pour qu'elle soit représentable dans la forme (1).

On pourrait croire, que cette condition est suffisante aussi; or, il en n'est pas ainsi, comme le montre l'exemple suivant:

Soit E un ensemble G_δ de mesure nulle, tel que $C\,E$ est l'ensemble de première catégorie. Désignons par $F(x)$ la fonction caractéristique de l'ensemble E, c'est-à-dire, posons

$$F(x) = \begin{cases} 1 & \text{dans E} \\ 0 & \text{dans CE.} \end{cases}$$

Nous démontrons que la fonction $F(x)$ n'est pas représentable dans la forme (1). En effet, s'il en était autrement, il existait une fonction $\Psi(x)$ du type (G_2), équivalente à $F(x)$ et telle que $\Psi(x) \geqslant F(x)$. Or, l'ensemble $E_1 = E(\Psi(x) > \frac{1}{2}) \supset E$ étant du type F_σ et de deuxième catégorie, il aura forcément une mesure *positive* $m\,E_1 > 0$ et, par conséquent, $\Psi(x)$ n'est pas équivalente à $F(x)$. Donc, il est impossible qu'il existe une fonction $\Psi(x)$ remplissant les conditions du théorème au debut, ce qui prouve notre assertion.

[4]) *Fund. Math.*, t. I, p. 224, problème 10.

[5]) C'est signalé dans les *Fund. Math.* t. IV, p. 369. [L'exemple de M. Zalcwasser est la fonction caractéristique d'un ensemble F_σ qui, en même temps que son complémentaire, est de mesure positive dans tout intervalle. *Rem. de la Rédaction*].

Über Grenzzahlen und Mengenbereiche.

Neue Untersuchungen über die Grundlagen der Mengenlehre.

Von

Ernst Zermelo (Freiburg i. Br).

In der folgenden Arbeit handelt es sich um die Untersuchung der „Bereiche", bestehend aus Mengen und Urelementen, in denen die „allgemeinen" Axiome der Mengenlehre (die „Zermelo-Fraenkelschen Axiome" mit einer Ergänzung) erfüllt sind, und um den Nachweis, daß ein solcher „Normalbereich" bis auf isomorphe Abbildungen bestimmt ist durch zwei Zahlen, durch die Mächtigkeit seiner „Basis" d. h. der Gesamtheit seiner „Urelemente" (die keine eigentlichen Mengen sind) und durch seine „Charakteristik" d. h. den Ordnungstypus aller in ihm enthaltenen „Grundfolgen" oder aller in ihm durch Mengen vertretenen Ordnungszahlen. Es wird gezeigt, daß diese beiden Zahlen unabhängig von einander beliebig gewählt werden können, sofern die „Charakteristik" den Bedingungen einer „Grenzzahl" genügt, nämlich gleichzeitig eine „Kernzahl" oder „reguläre Anfangszahl" und „Eigenwert" oder „kritische Zahl" einer gewissen „Normalfunktion" zu sein. Die schrankenlose Fortsetzbarkeit der transfiniten Zahlenreihe gestattet danach die Darstellung der Mengenlehre in einer ebenso unbegrenzten Folge wohlunterschiedener „Modelle". Und eben die scharfe Unterscheidung zwischen den verschiedenen Modellen des (nicht-kategorischen!) Axiomensystems sichert uns auch eine befriedigende Aufklärung der „ultrafiniten Antinomien", indem immer die „Unmengen" des einen Modells sich als eigentliche „Mengen" darstellen im nächstfolgenden wie in allen höheren Modellen.

Als Hilfsmittel der Untersuchung bieten sich einmal die „Grundfolgen", nämlich die in jedem Normalbereich vorhandenen einfachsten Vertreter der verschiedenen Ordnungszahlen, und zweitens die „Entwickelung" des Normalbereiches, seine Zerlegung in eine wohlgeordnete Folge getrennter „Schichten", wobei die einer Schicht angehörenden Mengen immer in den vorangehenden „wurzeln", sodaß ihre Elemente in diesen liegen, und selbst wieder den folgenden als Material dienen.

§ 1. Die konstituierenden Axiome.

Das unserer Untersuchung zugrunde liegende Axiomensystem der Mengenlehre ist im Wesentlichen das „Zermelo-Fraenkelsche", nämlich das durch das Fraenkelsche „Ersetzungsaxiom" ergänzte System meiner Axiome von 1908*) mit der Abänderung, daß einmal mein „Unendlichkeits-Axiom" als nicht zur „allgemeinen" Mengenlehre gehörig weggelassen und andererseits das „Axiom der Fundierung" hinzugefügt wird, wodurch „zirkelhafte" und „abgründige" Mengen ausgeschlossen werden. Demgemäß bezeichnen wir als „ergänztes *ZF*-System" oder abgekürzt als „ZF'-System" die Gesamtheit der folgenden Axiome:

B) Axiom der Bestimmtheit: Jede Menge ist durch ihre Elemente bestimmt, sofern sie überhaupt Elemente besitzt.

A) Axiom der Aussonderung: Durch jede Satzfunktion $\mathfrak{f}(x)$ wird aus jeder Menge m eine Untermenge $m_{\mathfrak{f}}$ ausgesondert, welche alle Elemente x umfasst, für die $\mathfrak{f}(x)$ wahr ist. Oder: jedem Teil einer Menge entspricht selbst eine Menge, welche alle Elemente dieses Teiles enthält [1]).

P) Axiom der Paarung: Sind a, b irgend zwei Elemente, so gibt es eine Menge, welche beide als Elemente enthält.

U) Axiom der Potenzmenge: Jeder Menge m entspricht eine Menge $\mathfrak{U}m$, welche alle Untermengen von m als Elemente enthält, einschließlich der Nullmenge und m selbst. An die Stelle der „Nullmenge" tritt hier ein beliebig ausgewähltes „Urelement" u_0.

V) Axiom der Vereinigung: Jeder Menge m entspricht eine Menge $\mathfrak{S}m$, welche die Elemente ihrer Elemente enthält.

E) Axiom der Ersetzung: Ersetzt man die Elemente x einer Menge m eindeutig durch beliebige Elemente x' des Bereiches, so enthält dieser auch eine Menge m', welche alle diese x' zu Elementen hat.

F) Axiom der Fundierung: Jede (rückschreitende) Kette von Elementen, in welcher jedes Glied Element des vorangehenden ist, bricht mit endlichem Index ab bei einem Urelement. Oder, was gleichbedeutend ist: Jeder Teilbereich T enthält wenigstens ein Element t_0, das kein Element t in T hat.

Dieses letzte Axiom, durch welches alle „zirkelhaften" namentlich auch alle „sich selbst enthaltenden", überhaupt alle „wurzellosen" Mengen ausgeschlossen werden, war bei allen praktischen Anwendungen der Mengenlehre bischer immer erfüllt, bringt also vorläufig keine wesentliche Einschränkung der Theorie.

Auf die „Unabhängigkeit" der Axiome kommt es uns hier nicht an: bei geeigneter Fassung ließe sich etwa A) aus E) ableiten oder P) aus U) und E). Das „Auswahl-Axiom" ist hier nicht ausdrücklich formuliert, da es einen anderen Charakter hat als die übrigen und nicht zur Abgrenzung der Bereiche dienen kann. Es wird aber unserer ganzen Untersuchung als allgemeines logisches Prinzip zugrunde gelegt, und namentlich wird auf Grund dieses Prinzipes im Folgenden jede vorkommende Menge auch als wohlordnungsfähig vorausgesetzt werden.

Dieses Axiomensystem BAPUVEF, das wir als das „ZF'-System" bezeichnen wollen, nehmen wir hier zum Ausgangspunkt und bezeichnen als einen „Normalbereich" einen Bereich von „Mengen" und „Urelementen", der in Bezug auf die „Grundrelation" $a \varepsilon b$ unserem ZF'-System genügt. „Bereiche" dieser Art, ihre „Elemente", ihre „Unterbereiche", ihre „Summen und „Durchschnitte" werden wir dabei nach den allgemeinen mengentheoretischen Begriffen und Axiomen genau wie Mengen behandeln, von denen sie sich auch in keinem sachlich wesentlichen Punkte unterscheiden, wir werden sie aber immer nur als „Bereiche" und nicht als „Mengen" bezeichnen zur Unterscheidung von den „Mengen" als den Elementen des betrachteten Bereiches.

§ 2. Die Grundfolgen eines Normalbereiches und seine Charakteristik.

Als „*Grundfolge*" bezeichne ich *eine wohlgeordnete Menge, in welcher jedes Element (mit Ausnahme des ersten, das ein „Urelement" sein muß), identisch ist mit der Menge aller ihm vorangehenden Elemente.*

*) Math. Ann. Bd. 65, S. 261—281.

[1]) Die Satzfunktion $\mathfrak{f}(x)$ kann hier ganz *beliebig* sein, wie auch die Ersetzungsfunktion in E), und alle aus ihrer Beschränkung auf eine besondere Klasse von Funktionen gezogenen Folgerungen kommen für den hier angenommen Standpunkt in Wegfall. Eine eingehende Erönterung der „Definitheitsfrage" in Auschluß an meine letzte Note in dieser Zeitschrift (Fund. Math. T. XIV, S. 339—344) und an die kritischen „Bemerkungen" des Herrn Th. Skolem (ebendort T. XV S. 337—341) behalte ich mir vor.

So entstammen dem Urelement u die Grundfolgen

$$g_0 = u,\ g_1 = \{u\},\ g_2 = \{u, \{u\}\},\ g_3 = \{u, \{u\}, \{u, \{u\}\}\},$$

und so fort nach der Regel

$$g_{\alpha+1} = g_\alpha + \{g_\alpha\} \quad \text{und} \quad g_\alpha = \sum_{\beta<\alpha} g_\beta, \text{ wenn } \alpha \text{ eine Limeszahl ist.}$$

Allgemein ist eine Grundfolge *eine durch die ε-Beziehung geordnete Menge*, die dann wegen F) auch *wohlgeordnet* sein muß, und es gelten für sie u. a. die folgenden leicht zu verifizierenden Sätze:

1) Jedes in einer Grundfolge enthaltene Element ist Element aller folgenden und enthält alle vorangehenden als Elemente.

2) Jedes Element sowie jeder Abschnitt einer Grundfolge ist selbst eine Grundfolge.

3) Aus jeder Grundfolge entsteht eine neue, wenn man zu ihren Elementen die Menge selbst als letztes Element hinzufügt: $g' = g + \{g\}$, wobei ihr Ordnungstypus gerade um 1 vermehrt wird.

4) Aus jeder Menge T von Grundfolgen mit identischem Anfangselement u entsteht durch Vereinigung eine neue Grundfolge $\mathfrak{S}T$, welche die Elemente von T sämtlich als Abschnitte und außer sich selbst als Elemente enthält. Auch hier ist der Ordnungstypus der neuen Grundfolge der auf die der gegebenen nächstfolgende.

5) Von zwei verschiedenen Grundfolgen mit identischem Anfangselement ist immer die eine Abschnitt und Element der anderen. Nämlich immer diejenige vom kleineren Ordnungstypus, die wir dann auch einfach als die „kleinere" bezeichnen wollen.

6) Ist u ein Urelement und r eine nach dem Typus ϱ wohlgeordnete Menge in einem Normalbereich, so enthält dieser Bereich auch eine der Menge r ähnliche Grundfolge g_ϱ mit u als Anfangselement.

Angenommen nämlich, der Satz sei richtig für alle Ordnungszahlen $\varrho < \alpha$, so gilt er auch für $\varrho = \alpha$. Denn entweder ist $\alpha = \beta + 1$ und g_β hat den Typus β, dann hat nach 3) g' den Typus $\beta + 1 = \alpha$. Oder α ist Limeszahl, dann ist die Vereinigung Σg_β aller g_β für $\beta < \alpha$ nach 4) selbst eine Grundfolge und zwar vom Typus α, da jeder ihrer echten Abschnitte selbst ein $g_\beta < g_\alpha$ ist.

7) Die Gesamtheit aller in einem Normalbereich P enthaltenen Grundfolgen g_α mit gemeinsamem Anfangselement u bildet einen wohldefinierten Unterbereich G_u von P, und die entsprechenden Ordnungszahlen α einen wohldefinierten Abschnitt Z_π der Zahlenreihe vom Ordnungstypus π, aber der Bereich P enthält keine „Menge" w, die alle diese Grundfolgen zu Elementen hätte, und

ebenso wenig eine wohlgeordnete Menge vom Ordnungstypus π, sondern π ist lediglich die obere Grenze aller in P durch Mengen vertretenen Ordnungszahlen. Anderenfalls ergäbe sich die bekannte „Burali-Fortische Antinomie".

Die so definierte Ordnungszahl π, die hier als „Grenzzahl" oder „Charakteristik" des Normalbereiches bezeichnet werden soll, ist aber nicht willkürlich, sondern muß, um „Grenzzahl-Charakter" zu haben, gewissen Bedingungen genügen. Es sind dies die folgenden:

I) Jede Grenzzahl hat „Kernzahl-Charakter" d. h. sie ist eine „reguläre Anfangszahl", nämlich keiner kleineren „konfinal"[2]).

Wäre nämlich π konfinal $\varrho < \pi$, so enthielte der Abschnitt Z_π der Zahlenreihe eine Teilfolge vom Ordnungstypus ϱ bestehend aus Zahlen $\alpha_\nu < \pi$, die keinem echten Abschnitte $Z_\alpha < Z_\pi$ angehörten. Jeder dieser Zahlen α_ν entspräche dann in P eine Grundfolge g_{α_ν} vom gleichen Ordnungstypus, und auch die Vereinigung aller dieser g_{α_ν} wäre nach 4) wieder eine Grundfolge g_α des Normalbereiches, während doch ihr Ordnungstypus $\alpha = \lim \alpha_\nu = \pi$ sein müßte nach der Annahme. Also ist π eine „Kernzahl" oder eine „reguläre Anfangszahl" und zwar, wie wir sehen werden, eine solche „zweiter Art", eine „exorbitante" Zahl. (Hausdorff a. a. O. S. 131) Wäre nämlich $\pi = \omega_{\nu+1}$, so wäre noch $\omega_\nu < \pi$, und der Bereich enthielte eine Grundfolge g_{ω_ν} von diesem Typus sowie die zugehörige Potenzmenge $m = \mathfrak{U} g_{\omega_\nu}$ von der Kardinalzahl $\mathfrak{m} > \overline{\omega}_\nu$, also $\mathfrak{m} \geqq \overline{\omega}_{\nu+1} = \overline{\pi}$ im Widerspruch mit der Definition von π.

Wäre nun die Cantorsche Vermutung erwiesen, daß die Potenzmenge $\mathfrak{U}m$ immer gerade die nächst höhere Mächtigkeit habe, so würde aus $\mathfrak{m} < \overline{\pi}$ auch immer folgen $2^{\mathfrak{m}} < \pi$ und jede „exorbitante" Zahl π wäre auch „Grenzzahl" eines Normalbereiches[3]). Da aber tatsächlich diese Frage noch unentschieden ist, so brauchen wir zur Charakterisierung der „Grenzzahlen" noch eine weitere Bedingung, die hier mit Hilfe einer gewissen „Normalfunktion"[4]) hergeleitet werden soll.

Ist ξ eine beliebige im Normalbereich vertretene Ordnungszahl, so enthält dieser außer der Grundfolge g_ξ wegen U) auch eine

[2]) Vergl. F. Hausdorff, Grundzüge der Mengenlehre, 1. Aufl. Kap. IV § 4.

[3]) Vergl. R. Baer, Zur Axiomatik der Kardinalzahlarithmetik, Math. Zeitschr. Bd. 29, S. 382 f. und die Fußnote [8]) auf S. 382.

[4]) Hausdorff a. a. O. Kap. V, 3, S. 130. Bezüglich der hier verwendeten besonderen Normalfunktion $\psi(\xi)$ vergl. auch A. Tarski, Fund. Math. T. VII. S. 1–15.

Grundfolge mit dem Index $\xi^* = \varphi(\xi)$, der Anfangszahl der Zahlenklasse, die zur Kardinalzahl $2^{\overline{\xi^*}}$ gehört. Diese Funktion $\varphi(\xi)$ ist zwar noch keine Normalfunktion, da verschiedenen Argumenten ξ gleiche Funktionswerte entsprechen können. Wohl aber gelangen wir zu einer solchen durch Iteration von φ in folgender Weise, indem wir festsetzen:

$$1)\ \psi(0) = 0,\quad 2)\ \psi(\xi+1) = \psi(\xi)^* = \varphi\psi(\xi),\quad 3)\ \psi(\alpha) = \lim_{\xi<\alpha} \psi(\xi),$$

wenn α eine Limeszahl ist. Hierdurch wird die Funktion ψ für beliebige Argumente ξ eindeutig bestimmt, und auch die Bedingungen einer Normalfunktion sind erfüllt. Denn aus $\alpha < \beta$ folgt immer $\alpha + 1 \leqslant \beta$ und daher durch transfinite Induktion

$$\psi(\alpha) < \psi(\alpha)^* = \psi(\alpha+1) \leqslant \psi(\beta),$$

sowie aus 3), daß allgemein $\lim \psi(\alpha_\nu) = \psi(\lim \alpha_\nu)$, die Funktion also auch „stetig" ist. Durch unsere Funktion $\psi(\xi)$ wird aber nicht nur die ganze Zahlenreihe ähnlich und stetig abgebildet auf einen Teil derselben, sondern auch jeder einem Normalbereich entsprechende Abschnitt Z_π auf einen Teil von sich selbst. Ist nämlich $\alpha < \pi$, so ist auch $\psi(\alpha) < \pi$, wie durch Induktion gezeigt werden soll. Angenommen, es sei stets $\psi(\xi) < \pi$ für alle $\xi < \alpha$, so ist auch $\psi(\xi+1) = \psi(\xi)^* < \pi$, weil doch der Normalbereich mit jeder seiner Mengen m auch ihre Potenzmenge $\mathfrak{U}m$ enthalten soll, also $\psi(\alpha) < \pi$, wenn α von erster Art. Ist aber α eine Limeszahl, so entsprechen den Elementen der Grundfolge g_α, die ja selbst Grundfolgen g_ξ von kleinerem Typus sind, eindeutig die Grundfolgen $g_{\psi(\xi)} < g_\pi$; diese letzteren sind also nach E) selbst Elemente einer Menge in P, und ihre Vereinigung $\Sigma g_{\psi(\xi)}$ ist nach 4) selbst eine Grundfolge g_ϱ des Normalbereiches. Hier ist aber $\varrho = \lim_{\xi<\alpha} \psi(\xi) = \psi(\alpha)$ und daher, wie behauptet, $\psi(\alpha) < \pi$. Wäre nun $\pi < \psi(\pi) = \lim_{\alpha<\pi} \psi(\alpha)$, so gäbe es bereits ein $\alpha < \pi$, für welches $\psi(\alpha) > \pi$ wäre, im Widerspruch mit dem Bewiesenen. Somit ergibt sich denn als zweite Bedingung:

II) Jede „Grenzzahl" oder „Charakteristik" eines Normalbereiches ist gleichzeitig ein „Eigenwert" oder „kritische Zahl" unserer oben definierten Normalfunktion $\psi(\xi)$.

Diese beiden Bedingungen, denen jede „Grenzzahl" genügen muß, sind im Wesentlichen von einander unabhängig, sofern man in I) ausschließlich den Kernzahl-Charakter postuliert. Daß es keine Kernzahl erster Art sein kann, folgt dann unmittelbar aus der zweiten Bedingung: für zwei auf einander folgende (transfinite) Anfangszahlen ω_ν und $\omega_{\nu+1}$ ist nämlich $\omega_\nu < \omega_\nu + 1 < \omega_{\nu+1}$ und daher

$$\omega_{\nu+1} \leqslant \omega_\nu^* \leqslant \psi(\omega_\nu)^* = \psi(\omega_\nu + 1) < \psi(\omega_{\nu+1}),$$

also $\omega_{\nu+1}$ gewiß kein Eigenwert der Normalfunktion. Dagegen wäre nach der Cantorsche Vermutung, für jede „exorbitante" Zahl, jede „Kernzahl zweiter Art" als solche schon die zweite Bedingung erfüllt [5]). Denn in diesem Falle wäre $\psi(\xi) = \omega_\xi$ für alle transfiniten ξ und mit $\xi < \pi$ auch immer $\omega_\xi < \pi$, die Normalfunktion ω_ξ hätte Eigenwerte $< \pi$, und π als Limes aller dieser Eigenwerte wäre selbst ein Eigenwert $\pi = \omega_\pi$. Muß auch diese Frage als vorläufig unentschieden gelten, so wird sich doch im Folgenden nachweisen lassen, daß die beiden für die „Grenzzahl" aufgestellten Bedingungen auch hinreichend sind, daß nämlich jede beiden Bedingungen genügende Zahl π in der Tat als Charakteristik eines Normalbereiches auftreten kann.

§ 3. Die Entwickelung des Normalbereiches.

Als „Normalbereich" bezeichneten wir jeden den ZF'-Axiomen genügenden Bereich von „Mengen" und „Urelementen". Ein solcher Normalbereich kann auch Teilbereiche besitzen, die selbst schon in Bezug auf die zwischen ihren Elementen geltende ε-Relation den Axiomen genügen, also Normalbereiche sind. Hierüber gilt nun zunächst der folgende

Hilfssatz. *Ein Teilbereich M eines Normalbereiches P ist selbst ein Normalbereich, wenn er 1) mit jeder seiner Mengen m zugleich deren Elemente enthält, und wenn er 2) jede Menge m des Normalbereiches P enthält, deren sämtliche Elemente x in M liegen. Umfaßt M außerdem die ganze „Basis" des Gesamtbereiches P, so ist er mit diesem identisch.*

In dem angenommen Falle sind nämlich die ZF'-Axiome, sofern sie für P gelten, auch für M erfüllt, namentlich wegen 2) auch U) und V). Das „Ersetzungsaxiom" E) muß dabei natürlich so verstanden werden, daß die Elemente x', welche die Elemente x ersetzen sollen, wieder dem Teilbereich M angehören müssen. Im

[5]) Vergl. Baer a. a. O. wie in [3]).

besonderen Falle, wo M die ganzen Basis umfaßt, enthält der Restbereich $R = P - M$ kein einziges Urelement, und jedes seiner Elemente wäre eine Menge r, deren Elemente, da sie nach der Annahme nicht alle in M liegen, wenigstens teilweise wieder in R auftreten müssen — im Widerspruch mit dem Axiom F).

Dagegen kann sehr wohl ein Normalbereich mit kleinerer Basis $Q' \subset Q$ im größeren enthalten sein. Ein solcher entsteht aus P durch Beschränkung auf alle solchen Mengen, deren rückschreitende Elementeketten $m \ni m_1 \ni m_2 \ni m_3 \ldots$ gemäß F) ausschließlich in Urelementen aus Q' enden.

Erstes Entwickelungstheorem. *Jeder Normalbereich P von der Charakteristik π läßt sich zerlegen in eine nach dem Typus π wohlgeordnete von nicht leeren und unter sich elementefremden „Schichten“ Q_α von der Beschaffenheit, daß jede Schicht Q_α alle in keiner früheren vorkommenden Elemente von P umfaßt, deren Elemente dem zugehörigen „Abschnitte“ P_α d. h. der Summe der vorangehenden Schichten angehören. Die erste Schicht Q_0 umfaßt dabei alle Urelemente.*

Die Teilbereiche *oder „Abschnitte“* P_α werden nämlich durch transfinite Induktion definirt vermöge der Festsetzungen:

1) $P_1 = Q_0 = Q$ umfasse die gauze Basis, die Gesamtheit der Urelemente.

2) $P_{\alpha+1} = P_\alpha + Q_\alpha$ soll alle in P_α „wurzelnden“ Mengen von P enthalten d. h. alle diejenigen, deren Elemente in P_α liegen.

3) Ist α eine Limeszahl, so bedeute P_α die Summe oder Vereinigung aller vorangehenden P_β mit kleineren Indizes $\beta < \alpha$.

Vermöge dieser Festsetzungen ist jedes P_α und schließlich auch $P_\pi = \sum\limits_{\alpha<\pi} P_\alpha$ eindeutig bestimmt durch die vorangehenden und genügt den Forderungen des Theorems, sofern sich nachweisen läßt, daß P_π mit P identisch ist. Dabei enthält jede Schicht $Q_\alpha = P_{\alpha+1} - P_\alpha$ immer die Grundfolgen g_α vom gleichen Index, wie durch Induktion gezeigt werden kann. Denn $g_0 = u$ liegt in $Q_0 = P_1$, und gilt die Aussage für alle kleineren Indizes $\beta < \alpha$, so liegen alle Elemente von g_α, die ja selbst Grundfolgen g_β sind, in vorangehenden Schichten Q_β und damit auch in P_α, g_α selbst also jedenfalls in $P_{\alpha+1}$, aber nicht in P_α, da es sonst einer Schicht Q_β angehörte, die schon g_β, also ein Element von g_α enthält, im Widerspruch mit der Konstruktion. Also liegt auch g_α in Q_α, und diese Schicht ist nicht leer.

Um nun den obigen „Hilfssatz“ auf den Unterbereich P_π von P anzuwenden, betrachten wir eine Menge r des Normalbereiches, deren Elemente sämtlich in P_π, etwa r_ν in der Schicht Q_{α_ν} liegen mögen. Diese Ordnungszahlen α_ν, die nicht alle verschieden zu sein brauchen, bilden dann eine wohlgeordnete Menge vom Typus $\varrho < \pi$, da ihre Mächtigkeit nicht größer als die von r sein kann. Da aber π als „Grenzzahl“ nach I) keiner kleineren konfinal ist, so besitzen alle diese α_ν eine obere Schranke $\alpha < \pi$, und alle r_ν, die Elemente von r, sind schon in P_α enthalten, r selbst also in $P_{\alpha+1}$ und damit auch in P_π. Der Unterbereich enthält also alle in ihm „wurzelnden“ Mengen von P, sowie alle Elemente seiner Elemente und ist, da er zugleich die ganze Basis umfaßt, mit dem zu entwickelnden Normalbereich identisch, womit der Beweis unseres Satzes vollendet ist.

Bezeichnen wir als „Einheitsbereich“ einen Normalbereich mit der „Basiszahl 1“, d. h. einen solchen, der einem e i n z i g e n Urelement entstammt, so gilt über seine Entwickelung der folgende Satz:

Zweites Entwickelungstheorem. *Bei der Entwickelung eines Einheitsbereiches hat jeder Abschnitt P_α die Mächtigkeit von $\psi(\alpha)$, enthält aber nur Mengen von kleinerer Kardinalzahl, während die entsprechende Schicht Q_α bereits Mengen dieser Mächtigkeit enthält. Jeder Abschnitt erster Art $P_{\beta+1}$ enthält als Mengen alle Unterbereiche des unmittelbar vorangehenden P_β, jeder Abschnitt zweiter Art alle vorangehenden Abschnitte und deren Unterbereiche. Der Einheitsbereich selbst hat die Mächtigkeit seiner Charakteristik π und enthält als Mengen alle seine Unterbereiche von kleinerer Mächtigkeit.*

Der Beweis wird wieder geführt durch transfinite Induktion unter der Annahme, daß die über P_α aufgestellte Behauptung zutreffe für alle kleineren Indizes $\beta < \alpha$, was für $\beta = 1$, $P_1 = Q$, $\psi(1) = 1$ sicher der Fall ist Es sei nun $\alpha = \beta + 1$ von erster Art und nach der Annahme habe P_β die Mächtigkeit von $\psi(\beta) < \psi(\pi) = \pi$ und enthalte nur Mengen von kleinerer Kardinalzahl als $\psi(\beta)$, nämlich alle kleineren Abschnitte und deren Untermengen. Dann enthält $P_\alpha = P_\beta + Q_\beta$ gewiß a l l e Untermengen von P_β und auch nur solche, da jede Untermenge eines kleineren auch Teil des größeren ist. Also ist $P_\alpha = P_{\beta+1}$ von der Mächtigkeit $\mathfrak{p}_\alpha = 2^{\overline{\psi(\beta)}} = \overline{\psi(\beta+1)} = \overline{\psi(\alpha)}$, enthält aber nur Mengen mit Kardinalzahlen $\leqq \overline{\psi(\beta)} < \overline{\psi(\alpha)}$. Dagegen enthält die zugehörige Schicht Q_α eine Menge von dieser

Kardinalzahl $\overline{\psi(\alpha)} < \overline{\pi}$, nämlich P_α selbst als Menge, die ja nach dem Ersetzungsaxiom in P vorhanden sein muß; aber auch keine größere, da Q_α nur aus Untermengen von P_α gebildet ist. Ist ferner α eine Limeszahl $< \pi$, also $P_\alpha = \sum_{\beta<\alpha} P_\beta$ die Summe aller kleineren Abschnitte P_β, die nach der Annahme die behaupteten Eigenschaften besitzen, so enthält auch P_α als Elemente nur Untermengen solcher Bereiche P_β und zwar alle diese Untermengen, da jede Untermenge von P_β schon im folgenden Abschnitte $P_{\beta+1}$ als Element enthalten ist. Alle diese Mengen haben dann Kardinalzahlen nicht größer als $\overline{\psi(\beta)} < \overline{\psi(\alpha)}$, und die Mächtigkeit des Abschnittes P_α selbst ist gegeben durch

$$\mathfrak{p}_\alpha = \lim_{\beta<\alpha} \mathfrak{p}_\beta = \lim_{\beta<\alpha} \overline{\psi(\beta)} = \overline{\psi(\alpha)} \leqslant \overline{\pi}.$$

Für jedes $\alpha < \pi$ hat dann auch die Schicht Q_α die behauptete Eigenschaft, Mengen von der Kardinalzahl $\overline{\psi(\alpha)}$, aber keine größeren zu enthalten, nämlich P_α selbst und seine Untermengen. Für $\alpha = \pi$ aber ergibt sich ebenso als Mächtigkeit von P der Wert $\lim_{\alpha<\pi} \overline{\psi(\alpha)} = \overline{\psi(\pi)} = \overline{\pi}$. Jedem Unterbereich von kleinerer Mächtigkeit als π entspricht dann in P eine äquivalente Grundfolge und daher nach E) auch eine Menge, die alle seine Elemente umfaßt. Für Einheitsbereiche, aber keineswegs für beliebige Normalbereiche gilt also das *v. Neumann*sche „Axiom", wonach nur solche Teilbereiche „zu groß" wären, um als „Mengen" auftreten zu können, welche von der gleichen Mächtigkeit sind wie der Gesamtbereich [6]). Durch die Beschränkung auf „Einheitsbereiche" würde aber die Mengenlehre ihre Anwendungsmöglichkeit zum größten Teile verlieren.

Aufgrund der gewonnenen Erkenntnis können wir jetzt die Entwickelung eines beliebigen Normalbereiches so abändern, daß in jede „Schicht" Q_α nur solche Mengen aus P aufgenommen werden, deren Kardinalzahl nicht größer ist als im Falle des Einheitsbereiches, nämlich $\leqslant \overline{\psi(\alpha)}$. Schließlich kommen sie doch alle an die Reihe, da für $\alpha < \pi$ auch immer $\psi(\alpha) < \psi(\pi) = \pi$ ist und wegen $\pi = \lim_{\alpha<\pi} \psi(\alpha)$ jede Zahl $\varrho < \pi$ von einem Funktionswert $\psi(\alpha)$ übertroffen wird. Die so entstehende „kanonische" Entwickelung hat nun den Vorzug, daß die Absonderung jeder einzelnen Schicht Q_α, unabhängig vom Gesamtbereiche und dessen Charakteristik, allein bestimmt wird durch ihren Index und durch die „Basis" des Normalbereiches, daß also bei gegebener Basis die Entwickelungen für die verschiedenen Grenzzahlen im Anfang immer übereinstimmen.

[6]) J. v. Neumann, Die Axiomatisierung der Mengenlehre, Math. Zeitschr. Bd. 26 S. 669—752. 1928. Hier handelt es sich um das Axiom IV. 2, das a. a. O. insbesondere auf S. 677 f. erörtert wird.

Drittes Entwickelungstheorem. (Satz der „kanonischen" Entwickelung). *Jeder Normalbereich mit der Basis Q läßt sich zerlegen in eine mit Q beginnende wohlgeordnete Folge getrennter „Schichten" Q_α, wobei wieder jeder Schicht die Summe der vorangehenden als „Abschnitt" entspricht und jedes Q_α alle diejenigen Unterbereiche des zugehörigen Abschnittes P_α als Mengen enthält, die noch nicht im Abschnitte selbst liegen und keine größere Mächtigkeit haben als $\psi(\alpha)$. Diese letzte Einschränkung fällt weg im Falle des „Einheitsbereiches", wo „freie" und „kanonische" Entwickelung übereinstimmen. Bei der „kanonischen" Entwickelung ist jeder solche Abschnitt P_τ selbst ein Normalbereich, dessen Index τ den Bedingungen I, II einer „Grenzzahl" genügt.*

Der Beweis ist analog dem der ersten Entwickelungssatzes. Wie dort werden zunächst die Abschnitte P_α und Schichten Q_α induktiv definiert durch die Festsetzungen:

1) $P_1 = Q_0 = Q$.
2) $P_{\alpha+1} = P_\alpha + Q_\alpha$ umfasse alle Mengen des Normalbereiches P, deren Elemente in P_α liegen und deren Kardinalzahlen $\leqslant \overline{\psi(\alpha)}$ sind.
3) Fur jede Limeszahl α sei immer $P_\alpha = \sum_{\beta<\alpha} P_\beta$ die Summe aller kleineren P_β.

Dann sind alle Abschnitte P_α und die entsprechenden Schichten $Q_\alpha = P_{\alpha+1} - P_\alpha$ eindeutig bestimmt für alle Indizes $\alpha \leqslant \pi$, und P_π ist ein wohlbestimmter Unterbereich von P, der wieder mit P identisch ist nach dem „Hilfssatze", weil er die ganze Basis, die Elemente seiner Elemente sowie alle in ihm „wurzelnden" Mengen von P enthält. Die letzte Bedingung ist auch hier erfüllt, da jede in P_α wurzelnde Menge r von der Kardinalzahl $\overline{\varrho} < \overline{\pi}$ spätestens in der Schicht Q_ϱ erscheint wegen $\varrho \leqslant \psi(\varrho)$.

Nun sei $\tau \leqslant \pi$ eine Zahl von Grenzzahl-Charakter und P_τ der ihr entsprechende Abschnitt der kanonischen Entwickelung von P. Dann enthält er nach der Konstruktion lediglich Mengen mit Kardinalzahlen $\bar{\varrho} \leqq \overline{\psi(\alpha)} < \overline{\psi(\tau)} = \bar{\tau}$, da jede doch einer Schicht Q_α für $\alpha < \tau$ angehören muß. Umgekehrt muß auch jede in P_τ wurzelnde Menge r mit einer Kardinalzahl $< \bar{\tau}$, weil τ eine „Kernzahl" ist, bereits in einem kleineren Abschnitte P_α wurzeln und einem höheren P_γ angehören, wo γ nicht größer zu sein braucht als der Ordnungstypus ϱ von r, da ja $\varrho \leqq \psi(\varrho)$ ist. Also enthält P_τ alle in ihm wurzelnden Mengen aus P, deren Kardinalzahlen kleiner sind als $\bar{\tau}$, insbesondere auch alle durch „Ersetzung" innerhalb P_τ gebildeten Mengen. Ist r eine beliebige Menge in P_τ und wohlgeordnet nach $\varrho < \tau$ so ist auch $\psi(\varrho) < \psi(\tau) = \tau$ sowie $2^{\bar{\varrho}} \leqq 2^{\overline{\psi(\varrho)}} = \overline{\psi}(\varrho + 1) < \bar{\tau}$ und mit r ist auch $\mathfrak{U}r$ Element von P_τ. Ist endlich r_ν eine nach dem Typus $\sigma < \tau$ wohlgeordnete Folge von Kardinalzahlen $< \bar{\tau}$, so haben sie eine obere Schranke $\bar{\mathfrak{r}}' < \bar{\tau}$, weil sonst τ konfinal σ wäre und keine Kernzahl, und es ist auch $\sum_\nu \mathfrak{r}_\nu \leqq \bar{\sigma}\mathfrak{r}' < \bar{\tau}$, d. h. auch das Axiom V) ist erfüllt im Abschnitte P_τ und dieser ist in der Tat ein Normalbereich. Damit ist zugleich erwiesen, daß die beiden für die Charakteristik eines Normalbereiches im § 2 aufgestellten Bedingungen I und II zugleich auch **hinreichend** sind, daß nämlich jede diesen Bedingungen genügende Ordnungszahl τ als „Grenzzahl" eines Normalbereiches auftreten kann. Vorausgesetzt wird dabei allerdings, daß diese Zahl τ überhaupt einem Bereiche angehört, für den die ZF'-Axiome erfüllt sind.

§ 4. Isomorphie und Automorphie der Normalbereiche.

Zwei Normalbereiche P, P' heißen „isomorph", wenn sich die Elemente des einen ein-eindeutig abbilden lassen auf die Elemente x' des anderen, sodaß jede Grundrelation $a \epsilon b$ in dem einen die entsprechende $a' \epsilon b'$ in dem anderen nach sich zieht und umgekehrt. In isomorphen Bereichen entspricht also jedem Urelement u wieder ein Urelement u', jeder Menge m eine äquivalente Menge m', jeder Grundfolge g_α eine Grundfolge g'_α vom gleichen Index, der „Basis" Q eine äquivalente Basis Q' und die „Grenzzahl" oder „Charakteristik" π sich selbst. Daß aber diese beiden letzten Bedingungen für die Isomorphie auch **hinreichend** sind, besagt das folgende Theorem.

Erster Isomorphiesatz. *Zwei Normalbereiche mit gleicher Charakteristik und äquivalenten Basen sind isomorph, und zwar ist die isomorphe Abbildung der beiden Bereiche auf einander **eindeutig** bestimmt durch die Abbildung ihrer Basen.*

Zum Beweise bedienen wir uns der „Entwickelungssätze", wobei wir beliebig die „freie" oder die „kanonische Entwickelung" zugrunde legen können. Wir denken uns also die Basen Q und Q' der beiden Normalbereiche ein-eindeutig auf einander abgebildet, so daß jedem Urelement u ein bestimmtes u' entspricht, und zeigen durch Induktion, daß auch jedem **Abschnitte** P_α der Entwickelung von P ein isomorpher Abschnitt P'_α in der Entwickelung des anderen zugeordnet werden kann, und zwar **eindeutig** für alle $\alpha \leqq \pi$. Zwei Abschnitte P'_α, P'_β mit verschiedenen Indizes können schon deshalb nicht isomorph sein, weil der größere immer Grundfolgen enthält, denen im kleineren keine ähnlichen entsprechen. Nun nehmen wir an, es sei P_α isomorph abgebildet auf P'_α, was für $P_1 = Q$, $P'_1 = Q'$ vorausgesetzt ist. Dann werden gleichzeitig alle kleineren Abschnitte mit abgebildet auf solche von P', und bei allen diesen Abbildungen wird ein bestimmtes Element x immer auf **dasselbe** Element x' von P' abgebildet. Ist nun r irgend eine Menge aus Q_α, so liegen ihre Elemente r_ν alle in P_α, und die ihnen entsprechenden Elemente r'_ν in P'_α sind nach E) wieder die Elemente einer äquivalenten Menge r', da wegen $\pi = \pi'$ der Normalbereich P' Mengen dieser Mächtigkeit sicher enthält. Diese Menge r' muß auch im Falle der „kanonischen Entwickelung" in $P_{\alpha+1}$ vorkommen, aber nicht schon in P'_α, da sonst wegen der Isomorphie auch die entsprechende Menge r schon in P_α läge und nicht in Q_α. Also entspricht jedem Element r von Q_α eindeutig ein solches r' von Q'_α und umgekehrt, und auch der Abschnitt $P_{\alpha+1} = P_\alpha + Q_\alpha$ ist eindeutig-isomorph abgebildet auf den Abschnitt $P'_{\alpha+1}$ des anderen Normalbereiches. Jetzt sei α eine Limeszahl, und es werde angenommen, daß für jedes kleinere $\beta < \alpha$ der Abschnitt P_β eindeutig-isomorph sei dem Abschnitte P'_β. Da hier jedes Element x von P_α sicher einem P_β angehört, so entspricht ihm bei allen diesen Abbildungen P_β, P'_β immer ein ganz bestimmtes Element x' von P'_α, und jedesmal, wo $a \epsilon b$ ist, ist auch $a' \epsilon b'$, da es stets einen Abschnitt P_β gibt, der beide Elemente enthält. Somit ist auch P_α eindeutig-isomorph P'_α für beliebige Limeszahlen $\alpha \leqq \pi$, und wegen $P_\pi = P$, $P'_\pi = P'$ sind wie behauptet, die beiden Normalbereiche selbst eindeutig-isomorph.

Zweiter Isomorphiesatz. *Von zwei Normalbereichen mit äquivalenten Basen und verschiedenen Grenzzahlen π, π' ist stets der eine isomorph einem kanonischen Abschnitte des anderen.*

Ist nämlich $Q \sim Q'$ und $\pi' > \pi$, so ist nach dem „dritten Entwickelungstheorem" S. 39, der „kanonische Abschnitt" P'_π, da π eine Grenzzahl ist, ein Normalbereich, der mit P die gleiche Charakteristik und eine äquivalente Basis hat, also nach dem vorigen Satze mit P isomorph.

Dritter Isomorphiesatz. *Von zwei Normalbereichen mit gleicher Charakteristik ist immer einer isomorph einem (echten oder unechten) Unterbereich des anderen.*

Es sei P ein Normalbereich und $Q' \subseteq Q$ ein Teil seiner Basis. Dann betrachten wir die Gesamtheit aller solchen Elemente von P, bei denen jede rückschreitende Kette von Elementen $m \ni m_1 \ni m_2 \ni m_3 \ldots$ entsprechend dem Axiom F) mit einem Urelement in Q' endet, so erfüllt dieser Teilbereich P' von P alle Bedingungen unseres „Hilfssatzes" im § 3. Er ist also selbst ein Normalbereich mit der gleichen Charakteristik π, weil er alle aus Q' entspringenden Grundfolgen von P enthält, und ist isomorph jedem Normalbereiche P'' von gleicher Charakteristik π, dessen Basis Q'' mit Q' äquivalent ist. Aus der vorausgesetzten Vergleichbarkeit beliebiger Mengen Q, Q'' folgt dann unmittelbar die Behauptung.

Die „Struktur" eines Normalbereiches, d. h. das, was er mit allen isomorphen gemeinsam hat, oder sein „Modell-Typus" wird nach dem hier Bewiesenen bestimmt durch zwei Zahlen, durch die Mächtigkeit seiner Basis $\mathfrak{q}$ und durch seine Charakteristik π, von denen die erste, die „Breite" des Normalbereiches beliebig gewählt werden kann, während die andere, seine „Höhe" die im § 2 angegebenen Eigenschaften einer „Grenzzahl" besitzen muß. Diese „Modelltypen" bilden also eine zweifach wohlgeordnete Mannigfaltigkeit von der Beschaffenheit, daß ein Modelltypus immer dann einem Bestandteile eines anderen isomorph ist, $\mu \leqslant \mu'$, wenn gleichzeitig $\mathfrak{q} \leqslant \mathfrak{q}'$ und $\pi \leqslant \pi'$ d. h. wenn beide bestimmenden Zahlen des einen kleiner oder gleich denen des anderen sind.

Da die isomorphe Abbildung zweier Normalbereiche auf einander, wo sie existiert, nach dem „ersten Isomophiesatze" eindeutig bestimmt ist durch die Abbildung ihrer Basen, so folgt, daß eine isomorphe Abbildung eines Normalbereiches auf sich selbst, also ein „Automorphismus" nur möglich ist durch „Permutation" seiner Basis, für „Einheitsbereiche", die nur ein einziges Urelement

enthalten, daher unmöglich ist. Ebenso entsteht eine isomorphe Abbildung eines Normalbereiches P auf einen Teil P' von sich aus jeder äquivalenten Abbildung der Basis Q auf einen ihrer Teile Q', wenn die Basis selbst unendlich ist. Es entspricht nämlich, wie wir beim Beweise des letzten Satzes sahen, jeder Teilbasis auch ein normaler Teilbereich P' von gleicher Charakteristik π, insbesondere auch jedem einzelnen Urelement u ein zugehöriger „Einheitsbereich", und äquivalenten Teilbasen entsprechen isomorphe Teilbereiche, die man in Analogie mit der Körpertheorie als „konjugierte" bezeichnen kann. Somit ergibt sich der folgende

Automorphiesatz. *Automorphismen d. h. isomorphe Abbildungen eines Normalbereiches auf sich selbst entsprechen eineindeutig den äquivalenten Abbildungen der Basis auf sich selbst und sind daher nur möglich bei einer Basiszahl* $\mathfrak{q} > 1$; *alle Einheitsbereiche sind „monomorph". Die Gruppe aller Automorphismen ist isomorph der zur Basis gehörenden Permutationsgruppe. Auch „Meromorphismen" d. h. isomorphe Abbildungen des Normalbereiches auf einen Teil von sich entsprechen den eineindeutigen Abbildungen der (unendlichen) Basis auf äquivalente Teile.*

§ 5. Existenzfragen, Widerspruchslosigkeit und Kategorizität.

Unsere besherigen Betrachtungen setzen die Existenz von „Normalbereichen" verschiedener Beschaffenheit voraus und gründen sich jedenfalls auf die Annahme von der Widerspruchlosigkeit der mengentheoretischen Axiome. Diese Widerspruchslosigkeit logisch-formal zu beweisen, soll auch hier nicht versucht werden. Dagegen soll unter der allgemeinen Voraussetzung dieser Widerspruchsfreiheit für die Mengenlehre überhaupt die (mathematische d. h. ideelle) Existenz der verschiedenen hier in Betracht kommenden Modelltypen geprüft werden. Wir setzen also die Existenz von Mengenbereichen, die den *ZF*-Axiomen genügen, für eine beliebige Basis voraus. Dann gibt es jedenfalls auch solche, die außerdem noch das „Fundierungsaxiom" F) erfüllen. Denn ist etwa M ein Mengenbereich von der vorausgesetzten Beschaffenheit, so bilden alle Elemente dieses Bereiches, die außerdem noch F) erfüllen, darunter natürlich auch alle Urelemente, einen wohldefinierten Unterbereich

N von M, der für sich schon allen ZF'-Axiomen genügt und damit einen „Normalbereich" mit der gegebenen Basis Q darstellt.

Daß durch Verkleinerung der Basis wieder Normalbereiche als Teilbereiche des ersten entstehen, haben wir bereits im vorigen § 4 beim Beweise des „dritten Isomorphiesatzes" gezeigt. Dagegen ist noch nicht ohne weiteres klar, ob auch durch Verkleinerung oder Vergrößerung der Charakteristik neue Typen von Normalbereichen gewonnen werden können. Denn jede „Grenzzahl" muß ja den Bedingungen I) und II) des § 2 genügen und es steht noch in Frage, ob es überhaupt solche Zahlen von „Grenzzahl-Charakter" und wieviele solche es gibt. Nun ist aber ω, die Anfangszahl der zweiten Zahlenklasse, gewiß eine solche Zahl: ein „Eigenwert" der Funktion $\psi(\xi)$ und keiner kleineren konfinal. Und ω ist in der Tat auch die Charakteristik des niedersten Normalbereiches, der folgendermaßen entsteht: Wir lassen aus dem gegebenen Normalbereiche M alle diejenigen Mengen weg, für welche irgend eine gemäß F) gebildete „rückschreitende Elementenkette" der Form $m \ni m_1 \ni m_2 \ni m_3 \ldots$ eine „unendliche" Menge enthält. Dieser Bereich, der selbst nur noch endliche Mengen enthält, erfüllt alle Bedingungen eines Normalbereiches und ist zugleich der dem Index ω entsprechende Abschnitt P_ω der „kanonischen Entwickelung" des ursprünglichen Normalbereichs. Dieser „finitistische" Bereich, gegen den trotz seiner eigenen Unendlichkeit selbst die „Intuitionisten" kaum etwas einzuwenden hätten, kann wenigstens dazu dienen, durch seine bloße Existenz die Widerspruchslosigkeit der ZF'-Axiome zu erweisen. Dagegen kann er, eben weil er keine unendlichen Mengen enthält, nicht als wahres „Modell" der Cantorschen Mengenlehre in Anspruch genommen werden. Aus ihm heraus führt erst mein früheres „Axiom des Unendlichen", das die Existenz wenigstens einer „unendlichen" Menge postuliert. Der niederste Normalbereich, der dieser Bedingung genügt und den ich als den „Cantorschen" bezeichnen möchte, hätte dann die Charakteristik π_1, nämlich den kleinsten Eigenwert der ψ-Funktion von Kernzahl-Charakter, also jedenfalls eine „reguläre Anfangszahl zweiter Art", wenn auch nicht notwendig die kleinste „exorbitante" Zahl überhaupt — wenigstens solange die Cantorsche Vermutung nicht bewiesen ist.

Aber gibt es überhaupt hinter ω solche Zahlen mit „Grenzzahl-Charakter"? Gewiß, sofern es überhaupt eine „infinitistische" Mengenlehre d. h. überhaupt Normalbereiche mit unendlichen Mengen gibt. Denn die Gesamtheit aller in einem solchen Bereiche vorkommenden „Grundfolgen" hat eben einen solchen Ordnungstypus π, wenn auch innerhalb des Bereiches keine Menge von diesem Typus π vorkommen kann. Und gibt es überhaupt „Grenzzahlen" $\pi > \omega$, so gibt es unter ihnen auch eine kleinste π_1. Freilich „beweisen" d. h. aus den allgemeinen ZF'-Axiomen ableiten läßt sich weder ihre Existenz noch ihre Nicht-Existenz, eben weil z. B. die Grenzzahl ω zwar im „Cantorschen Bereich existiert, aber nicht im „finitistischen", weil m. a. W. die Frage in den verschiedenen „Modellen" der Mengenlehre verschieden beantwortet wird, also durch die Axiome allein noch nicht entschieden ist. Unser Axiomensystem ist eben nicht-kategorisch, was in diesem Falle kein Nachteil, sondern ein Vorzug ist. Denn gerade auf dieser Tatsache beruht die ungeheure Bedeutung und unbegrenzte Anwendbarkeit der Mengenlehre überhaupt. Natürlich kann man immer durch Hinzufügung weiterer „Axiome" die gewünschte Kategorizität künstlich erzwingen, aber immer nur auf Kosten der Allgemeinheit. Solche neuen Postulate, wie sie z. B. von Fraenkel[7]), Finsler[8]), Neumann[9]), u. a. vorgeschlagen wurden, betreffen eben gar nicht die Mengenlehre an sich, sondern charakterisieren lediglich ein ganz spezielles vom jeweiligen Autor gewähltes Modell. In der Regel sind es „Einheitsbereiche", die bevorzugt werden — wodurch eigentlich, wie schon S. 38 bemerkt, die Anwendbarkeit der Mengenlehre preisgegeben würde. Außerdem pflegt man sich gewöhnlich auf den niedersten infinitistischen Bereich, den „Cantorschen" zu beschränken, worin ich ebenso wenig einen Vorteil erblicken kann. Vielmehr muß die Mengenlehre als Wissenschaft zunächst in vollster Allgemeinheit entwickelt werden, worauf die vergleichende Untersuchung der einzelnen Modelle als besonderes Problem vorgenommen werden kann.

Wodurch unterscheiden sich nun in der Mengenlehre tatsächlich

[7]) Fraenkel, Einleitung in die Mengenlehre, 3. Aufl. § 18. 5. S. 355. „Axiom der Beschränktheit".

[8]) Finsler, Über die Grundlegung der Mengenlehre. Math. Zeitschr. 25, S. 683—713.

Hierüber vergl. auch R. Baer, Über ein Vollständigkeitsaxiom in der Mengenlehre. Math. Zeitschr. Bd. 27, S. 536—539, 1928.

[9]) J. v. Neumann wie oben [6]).

die verchiedenen Modelle mit gemeinsamer Basis, insbesondere die verschiedenen „Einheitsbereiche"? Wie wir sahen, durch ihre „Charakteristik", d. h. durch die Gesamttheit der in ihnen durch „Mengen" vertretenen Ordnungszahlen, oder durch die Gesamtheit der in ihnen enthaltenen „Grundfolgen" des nämlichen Urelementes. Da aber nur „Grenzzahlen" als „Charakteristik" dienen können, so ist jedes „Einheitsmodell" schon eindeutig bestimmt durch die Gesamtheit der in ihm vorhandenen (oder nicht vorhandenen) Grundfolgen mit Grenzzahl-Typus. Durch ihre Angabe, die in den verschiedenen Fällen mit Hilfe geeigneter Postulate erfolgen kann, ist dann der Modelltypus auch „kategorisch" festgelegt und zugleich mit seiner Charakteristik π (nach dem zweiten Entwickelungssatze des § 3) auch die Mächtigkeit $\overline{\pi}$ des entsprechenden Einheitsbereiches. Machen wir nun die allgemeine Hypothese, daß jeder kategorisch bestimmte Bereich irgendwie auch als „Menge" aufgefaßt werden, d. h. als Element eines (geeignet gewählten) Normalbereiches auftreten kann, so ergibt sich, daß jedem Normalbereiche ein höherer mit gleicher Basis, jedem Einheitsbereich ein höherer Einheitsbereich und damit auch jeder „Grenzzahl" π eine größere Grenzzahl π' entspricht. Ebenso entsteht aber auch aus jeder unendlichen Folge verschiedener Normalbereiche mit gemeinsamer Basis, die immer einer den andern als kanonische Abschnitte enthalten, durch Vereinigung und Verschmelzung ein kategorisch bestimmter Bereich von Mengen, der dann wieder zu einem Normalbereich von höheren Charakteristik ergänzt werden kann. Jeder kategorisch bestimmten Gesamtheit von „Grenzzahlen" folgt also wieder eine größere, und die Reihe „aller" Grenzzahlen ist ebenso unbegrenzt wie die Zahlenreiche selbst, sodaß auch jedem transfiniten Index eine bestimmte Grenzahl ein-eindeutig zugeordnet werden kann. „Beweisbar" aus den ZF'-Axiomen ist das natürlich wieder nicht, da das behauptete Verhalten aus jedem einzelnen Normalbereiche herausführt. Es muß vielmehr die Existenz einer unbegrenzten Folge von Grenzzahlen als neues Axiom für die „Meta-Mengenlehre" postuliert werden, wobei noch die Frage der „Widerspruchslosigkeit" einer näheren Prüfung bedarf. Wenn ich mich aber auch hier noch auf diese vorläufige Skizze beschränken und auf ihre spätere Ausführung verweisen muß, so dürfte doch Folgendes bereits einleuchten, was als

das wesentliche Ergebnis der vorliegenden Untersuchung angesehen werden kann:

Die „ultrafiniten Antinomien der Mengenlehre", auf die sich wissenschaftliche Reaktionäre und Anti-Mathematiker in ihrem Kampfe gegen die Mengenlehre so eifrig und liebevoll berufen, diese scheinbaren „Widersprüche" beruhen lediglich auf einer Verwechselung der durch ihre Axiome nicht-kategorisch bestimmten Mengenlehre selbst mit den einzelnen sie darstellenden Modellen: was in einem Modelle als „ultrafinite Un- oder Übermenge" erscheint, ist im nächsthöheren bereits eine vollgültige „Menge" mit Kardinalzahl und Ordnungstypus und bildet selbst den Grundstein zum Aufbau des neuen Bereiches. Der unbegrenzten Reihe der Cantorschen Ordnungszahlen entspricht eine ebenso unbegrenzte Doppelreihe von wesentlich verschiedenen mengentheoretischen Modellen, in deren jedem die ganze klassische Theorie zum Ausdrucke kommt. Die beiden polar entgegengesetzten Tendenzen des denkenden Geistes, die Idee des schöpferischen Fortschrittes und die des zusammenfassenden Abschlusses, die auch den Kantischen „Antinomien" zugrunde liegen, finden ihre symbolische Darstellung und ihre symbolische Versöhnung in der auf den Begriff der Wohlordnung gegründeten transfiniten Zahlenreihe, die in ihrem schrankenlosen Fortschreiten keinen wahren Abschluß, wohl aber relative Haltpunkte besitzt, eben jene „Grenzzahlen", welche die höheren von den niederen Modelltypen scheiden. Und so führen auch die mengentheoretischen „Antinomien", richtig verstanden, statt zu einer Verengung und Verstümmelung vielmehr zu einer jetzt noch unübersehbaren Entfaltung und Bereicherung der mathematische Wissenschaft.

Beim Abschluß dieser Arbeit ist es mir Bedürfnis, meinem Kollegen Herrn Dr. Arnold Scholz, der mich bei der Ausarbeitung dieser Untersuchung sowie bei den Korrekturen durch wertvolle Ratschläge auf das freundlichste unterstützte, meinen herzlichen Dank zu sagen.

Freiburg i. Br. den 13-ten April 1930.