Sur la notion d'ensemble fini.

Par

Casimir Kuratowski (Warszawa).

M. W. Sierpiński a donné dans son ouvrage *L'axiome de M. Zermelo et son rôle dans la Théorie des Ensembles et l'Analyse* [1]) une nouvelle définition de l'ensemble fini. Cette définition se distingue essentiellement par ce fait qu'elle ne dépend ni de la notion de nombre naturel ni de la notion générale de fonction, qui entre d'habitude dans les définitions faisant usage de la notion de correspondance. La définition en question est la suivante:

„Considérons des classes K d'ensembles dont chacune satisfait aux conditions suivantes:

1⁰ tout ensemble contenant un seul élément appartient à la classe K,

2⁰ si A et B sont deux ensembles appartenant à la classe K, leur ensemble-somme $A+B$ appartient aussi à K.

Appelons *fini* tout ensemble qui appartient à chacune des classes K satisfaisant aux conditions 1⁰ et 2⁰".

Comme on sait, l'ensemble de tous les objets (s'il existe) jouit des propriétés paradoxales: contrairement à un théorème connu de G. Cantor, la puissance de cet ensemble ne serait point inférieure à celle de la classe de tous ses sous-ensembles. Il en est de même de la classe composée de tous les ensembles contenant un seul élément; donc, les classes K ne vérifient pas le théorème de Cantor. En tenant compte de ce fait, on pourrait mettre en doute l'existence même des classes K.

[1]) Bull. de l'Acad. des Sciences de Cracovie, 1918, p. 106.

En modifiant la définition de M. Sierpiński de façon à en supprimer cet inconvénient, j'obtiens la définition suivante:

L'ensemble M est *fini*, lorsque la classe de tous ses sous-ensembles (non vides) est l'unique classe satisfaisant aux conditions:

1. ses éléments sont des sous-ensembles (non vides) de M;

2. tout ensemble contenant un seul élément de M appartient à cette classe;

3. si A et B sont deux ensembles appartenant à cette classe, leur ensemble-somme $A+B$ lui appartient aussi.

Nous allors démontrer qu'un ensemble fini d'après cette définition l'est aussi au sens ordinaire et réciproquement. En d'autres termes: pour qu'un ensemble soit fini d'après la définition proposée, il faut et il suffit que le nombre de ses éléments puisse être exprimé par un nombre naturel (la notion de nombre naturel étant supposée connue).

En effet, soit M un ensemble dont le nombre d'éléments peut être exprimé par un nombre naturel; soit Z une classe quelconque satisfaisant aux conditions 1—3. Nous allons montrer que tout sous-ensemble de M appartient à Z. Il en est ainsi — en vertu de la condition 2 — des sous-ensembles composés d'un seul élément; en même temps, s'il en est ainsi des sous-ensembles contenant n éléments, il en est de même — d'après 3 — de ceux qui en contiennent $n+1$. Comme le nombre d'éléments de chaque sous-ensemble de M se laisse exprimer par un nombre naturel, il en résulte par induction que Z contient tous les sous-ensembles de M. Donc, la classe Z étant nécessairement identique à celle de tous les sous-ensembles de M, elle est l'unique classe satisfaisant aux conditions 1—3. Ainsi, tout ensemble dont le nombre d'éléments peut être exprimé par un nombre naturel est un ensemble fini dans notre sens.

Supposons, d'autre part, que le nombre d'éléments d'un ensemble donné M ne se laisse pas exprimer par un nombre naturel. Désignons par Z la classe de tous les sous-ensembles de M dont le nombre d'éléments peut être exprimé par un nombre naturel. Cette classe satisfait évidemment aux conditions 1—3; en même temps, d'après l'hypothèse, M n'appartient pas à Z et, par suite, Z n'est pas identique à la classe de tous les sous-ensembles de M; donc, la classe de tous les sous-ensembles de M n'est pas l'unique classe satisfaisant aux conditions 1—3 et M n'est pas fini dans notre sens, c. q. f. d.